Produit eulérien motivique et courbes rationnelles sur les variétés toriques

David Bourqui

Produit eulérien motivique et courbes rationnelles sur les variétés toriques
Motivic Euler product and rational curves on toric varieties

David Bourqui

Abstract

We study the asymptotical behaviour of the moduli space of morphisms of given anticanonical degree from a rational curve to a split toric variety, when the degree goes to infinity. We obtain in this case a geometric analogue of Manin's conjecture about rational points of bounded height on varieties defined over a global field. The study is led through a generating series whose coefficients lie in a Grothendieck ring of motives, the motivic height zeta function. In order to establish convergence properties of this function, we use a notion of eulerian motivic product. It relies on a construction of Denef and Loeser which associates a virtual motive to a first order logic ring formula.

Nous étudions le comportement asymptotique de l'espace des modules des morphismes de degré anticanonique donné d'une courbe rationnelle vers une variété torique déployée, lorsque ce degré tend vers l'infini. Nous obtenons dans ce cas un analogue géométrique de la conjecture de Manin sur le nombre de points de hauteur bornée des variétés définies sur un corps global. L'étude se fait via une série génératrice à coefficients dans un anneau de Grothendieck de motifs, la fonction zêta des hauteurs motivique. Afin d'établir des propriétés de convergence de cette fonction, nous utilisons une notion de produit eulérien motivique, laquelle repose sur la construction de Denef et Loeser permettant d'associer un motif virtuel à une formule logique du premier ordre dans le langage des anneaux.

1. Introduction

Soit k un corps, $\mathcal{C}$ une courbe projective, lisse et géométriquement intègre définie sur k, et V une variété projective et lisse définie sur k. On fixe un faisceau $\mathcal{L}$ sur V dont la classe dans le groupe de Néron-Severi est située à l'intérieur du cône effectif.

Si le corps k est fini, un problème naturel est d'étudier le comportement asymptotique du nombre de morphismes de $\mathcal{C}$ vers V de $\mathcal{L}$-degré donné quand ce degré tend vers l'infini. Ce problème est l'analogue géométrique du problème arithmétique du comptage asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur une variété définie sur un corps de nombres. Concernant ces deux problèmes, une série de questions a été soulevée par Manin et ses collaborateurs vers la fin des années 1980, lesquelles ont depuis été étudiées pour de larges classes de variétés, notamment dans le cas arithmétique. Le lecteur pourra se reporter à [Pey02] et [Pey03b] pour plus de précisions et

2000 Mathematics Subject Classification 11G50, 14M25, 12E30, 14C05, 11M41
Keywords: Manin's conjectures, height zeta function, toric varieties, virtual motives, Euler product, pseudo-finite fields

un état des lieux sur la question en 2001, ainsi qu'à [Bro07] pour une description de progrès plus récents dans le cas des surfaces.

Si le corps k est quelconque, on peut plus généralement s'intéresser au comportement asymptotique de la variété paramétrant les morphismes de $\mathcal{C}$ vers V de $\mathcal{L}$-degré donné quand ce degré tend vers l'infini. On peut par exemple essayer d'estimer le comportement asymptotique de la dimension et du nombre de composantes géométriques irréductibles de ces espaces de modules. Une autre façon de concevoir le problème est d'étudier une série génératrice associée qui est à coefficients dans l'anneau de Grothendieck des variétés (ou des motifs) sur k, et qui, lorsque le corps de base est fini, se spécialise sur la fonction zêta des hauteurs classiques. Nous renvoyons à la sous-section 4.3 pour une formulation plus précise des questions qu'il semble légitime de se poser dans ce cas de figure. Signalons que nombre de ces questions sont dûes à Peyre.

Dans ce texte, nous étudions ces questions pour les variétés toriques déployées. Les principaux résultats obtenus sont rassemblés dans l'énoncé suivant.

Théorème 1.1. *Soit k un corps et V une variété torique déployée sur k, supposée projective et lisse. Soit U son orbite ouverte. Pour tout entier $d \geqslant 1$, on note $U_{0,d}$ la variété quasi-projective paramétrant les k-morphisme $\mathbf{P}^1_k \to V$ dont l'image rencontre U et de degré anticanonique d.*

i) Soit $m \geqslant 1$ un entier. On suppose que V est la m-ème surface de Hirzebruch. Alors la série

$$(1+\mathbf{L}\,T)\,(1+\mathbf{L}\,T+\mathbf{L}^2\,T^2+\cdots+\mathbf{L}^{m+1}T^{m+1})\,(1-\mathbf{L}\,T)^2\left(\sum_{d\geqslant 1}[U_{0,d}]\;T^d\right)$$

est un polynôme à coefficients dans l'anneau de Grothendieck des k-variétés, dont la valeur en $\mathbf{L}^{-1}$ est $\mathbf{L}^2\,(1-\mathbf{L}^{-2})^2$.

ii) On suppose le corps k de caractéristique zéro. La série

$$(1-\mathbf{L}\,T)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))}\Big(\sum_{d\geqslant 1}\chi\big(\big[U_{\mathcal{L}_0,d}\big]\big)\,T^d\Big)$$

(à coefficients dans l'anneau des motifs virtuels) converge en $T=\mathbf{L}^{-1}$ vers

$$\alpha^*(V)\,\mathbf{L}^{\dim(V)}\left(\frac{1}{1-\mathbf{L}^{-1}}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))}\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\Psi^{\chi}_n(\mathbf{P}^1)\log\left((1-\mathbf{L}^{-n})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))}\frac{\Phi^{\chi}_n(V)}{\mathbf{L}^{-n\dim(V)}}\right)\right) \tag{1.1}$$

Précisons les notation utilisées (*cf.* la sous-section 2.1.1). On désigne par $[X]$ la classe d'une k-variété X dans l'anneau de Grothendieck des variétés et, si k est de caractéristique zéro, par $\chi([X])$ son image dans l'anneau de Grothendieck des motifs de Chow. Le symbole $\mathbf{L}$ désigne indifféremment $\big[\mathbf{A}^1\big]$ ou $\chi(\big[\mathbf{A}^1\big])$. La convergence s'entend au sens de la topologie définie par la filtration dimensionnelle, employée initialement dans la théorie de l'intégration motivique. Les familles de motifs virtuels $(\Psi^{\chi}_n(\mathbf{P}^1))_{n\geqslant 1}$ et $(\Phi^{\chi}_n(V))_{n\geqslant 1}$ sont définies à la sous-section 2.3 ; on peut les voir comme des incarnations motiviques des notions de nombre de points fermés de degré n et de nombre de points rationnel à valeurs dans une extension de degré n d'une variété sur un corps fini. De cette façon (1.1) peut s'interpréter comme un analogue motivique de la constante de Peyre intervenant (au moins conjecturalement) dans l'expression asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur les variétés de Fano. L'invariant $\alpha^*(V)$ apparaissant dans (1.1) est défini à la sous-section 4.3.

Signalons que Peyre a démontré un résultat similaire au théorème 1.1 lorsque V est une variété de drapeaux, la courbe $\mathcal{C}$ étant de genre quelconque (*cf.* [Pey04]).

Les ingrédients de la démonstration du théorème 1.1 sont des versions motiviques de ceux que nous avons utilisés dans [Bou03a] pour calculer la fonction zêta des hauteurs d'une variété torique déployée définie sur un corps global de caractéristique non nulle. Ce sont :

i) le lemme 5.16, qui explicite la variété paramétrant les morphismes d'une courbe rationnelle vers une variété torique déployée à l'aide de la description de Cox du foncteur des points d'une telle variété (*cf.* [Cox95a]). Ce lemme est une version géométrique du lemme 2 de [Bou03a], lui-même inspiré de la méthode utilisée par Salberger sur les corps de nombres dans [Sal98]. Dans tout ceci, l'utilisation du torseur universel au-dessus d'une variété torique déployée joue un rôle essentiel.

ii) une formule d'inversion de Möbius motivique, version motivique de la formule d'inversion utilisée dans [Bou03a], elle-même adaptée des formules d'inversion utilisées par Peyre et Salberger dans le cadre de la version arithmétique des conjecture de Manin.

iii) une notion de « produit eulérien motivique » qui nous permet de démontrer des propriétés de convergence de la série génératrice associée à la formule d'inversion en question, et de donner une interprétation du terme principal de la fonction zêta similaire à l'interprétation en termes de nombre de Tamagawa dans le cas classique. Nous faisons ici usage de la construction de Denef et Loeser permettant d'associer canoniquement un motif virtuel à une formule logique du premier ordre.

Nous décrivons à présent l'organisation de l'article.

Dans la section 2, après quelques rappels, nous présentons la notion de produit eulerien motivique et démontrons notamment que la fonction zêta de Hasse-Weil motivique s'écrit sous forme d'un produit eulérien motivique.

Dans la section 3, nous introduisons des fonctions d'inversions de Möbius motiviques et montrons que les séries génératrices associées s'écrivent sous forme d'un produit eulérien motivique, ce qui permet d'en dégager des propriétés de convergence.

Dans la section 4, nous définissons la fonction zêta des hauteurs motivique et précisons quelques questions permettant d'esquisser une version motivique des conjectures de Manin.

Enfin, dans la section 5, nous décrivons la variété des morphismes de degré donné de $\mathbf{P}^1$ vers une variété torique déployée. Utilisant une fonction de Möbius adéquate et les résultats de la section 3, nous en déduisons la démonstration du théorème 1.1. Ceci montre que certaines des questions de la section 4 ont une réponse positive dans le cas d'une variété torique déployée.

Remerciements

Je remercie Emmanuel Peyre et Antoine Chambert-Loir pour d'utiles discussions. Je remercie François Loeser de m'avoir indiqué la référence [GZLMH04].

2. Fonction zêta de Hasse-Weil et produit eulérien motivique

2.1 Quelques rappels et définitions

2.1.1 *Anneaux de Grothendieck de variétés et de motifs* Soit k un corps. On note $\mathcal{M}_k$ l'anneau de Grothendieck de la catégorie des variétés définies sur k (*cf.* [And04, §13.1.1]). Si X est une telle variété, on note $[X]$ sa classe dans $\mathcal{M}_k$. On note $\mathbf{L} = \left[\mathbf{A}^1_k\right]$ la classe de la droite affine et $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}} = \mathcal{M}_k\left[\mathbf{L}^{-1}\right]$. Si le corps k est fini de cardinal q, l'application qui à un k-schéma X de type fini associe le nombre de points k-rationnels de X induit un morphisme d'anneau $\#_k : \mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}} \to \mathbf{Z}\left[q^{-1}\right]$. On munit $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$ de la filtration dimensionnelle introduite par Kontsevitch dans le cadre de la théorie de l'intégration motivique : pour $m \in \mathbf{Z}$, $\mathcal{F}^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}$ désigne le sous-groupe de $\mathcal{M}_k$ engendré par les éléments de la forme $\mathbf{L}^{-i}[V]$, où V est une k-variété et i et V vérifient $i - \dim(V) \geqslant m$. On définit le complété associé

$$\widehat{\mathcal{M}_k} \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim \mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}/\mathcal{F}^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}.$$

On note $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}} = \mathcal{M}_k \otimes \mathbf{Q}$, $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc},\mathbf{Q}} = \mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}} \otimes \mathbf{Q}$, $\mathcal{F}^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc},\mathbf{Q}} = \mathcal{F}^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}} \otimes \mathbf{Q}$ et $\widehat{\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}} = \varprojlim \mathcal{M}_{k,\mathrm{loc},\mathbf{Q}}/\mathcal{F}^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc},\mathbf{Q}}$.

Soit $K_0(\mathrm{CHMot}_k)$ l'anneau de Grothendieck de la catégorie motifs de Chow à coefficients rationnels définis sur k (*cf.* [And04, Chapitre 4 et 13.2.1]). Si M est un motif, on note $[M]$ sa classe dans $K_0(\mathrm{CHMot}_k)$. Si k est de caractéristique zéro, il existe un unique morphisme $\chi : \mathcal{M}_k \to K_0(\mathrm{Mot}_k)$ tel que la classe $[X]$ d'une variété X projective et lisse sur k s'envoie sur la classe du motif de Chow de X (*cf.* [GS96, Theorem 4] ainsi que [GNA02] et [Bit04]). Nous désignerons par $\mathcal{M}_k^\chi$ l'image de $\mathcal{M}_k$ par ce morphisme. On notera $\mathbf{L}$ en lieu et place de $\chi(\mathbf{L})$. On note $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}^\chi = \mathcal{M}_k^\chi[\mathbf{L}^{-1}]$, $\mathcal{F}_\chi^\bullet$ la filtration image de $\mathcal{F}^\bullet$ par χ et $\widehat{\mathcal{M}_k^\chi} = \varprojlim \mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}^\chi/\mathcal{F}_\chi^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}^\chi$. On définit de manière analogue $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^\chi$, $\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc},\mathbf{Q}}^\chi$, $\mathcal{F}^m\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc},\mathbf{Q}}^\chi$ et $\widehat{\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^\chi}$.

Soit X une k-variété quasi-projective. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $X^{<n>}$ la puissance symétrique n-ème de X. Suivant Kapranov (*cf.* [Kap00]), on définit

$$Z_X^{\mathrm{mot}}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\geqslant 0} \left[X^{<n>}\right] T^n \quad \in \mathcal{M}_k[[T]].$$

Si k est fini, $\#_k(Z_X^{\mathrm{mot}})$ est la fonction zêta de Hasse-Weil classique de X. Pour un corps de base quelconque, $Z_X^{\mathrm{mot}}(T)$ est baptisée fonction zêta de Hasse-Weil motivique. Par exemple, si $X = \mathbf{P}^1$, on a pour tout $n \geqslant 0$ $\left(\mathbf{P}^1\right)^{<n>} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n$ d'où $Z_{\mathbf{P}^1}^{\mathrm{mot}}(T) = \frac{1}{(1-T)(1-\mathbf{L}\,T)}$. En genre supérieur, on a le résultat suivant dû à Kapranov (*cf.* [Kap00, Theorem 1.1.9] et [LL04, Theorem 3.7])

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{C}$ une k-courbe projective, lisse, géométriquement intègre, de genre g, et telle que* $\mathrm{Pic}^1(\mathcal{C})(k)$ *soit non vide. Il existe alors un polynôme $P_{\mathcal{C}}$ à coefficients dans $\mathcal{M}_k$ de degré $2\,g$ tel que*

$$(1-T)(1-\mathbf{L}\,T)Z_{\mathcal{C}}^{\mathrm{mot}}(T) = P_{\mathcal{C}}(T). \tag{2.1}$$

2.1.2 *Motif virtuel associé à une formule* Concernant les rappels qui suivent, on renvoie à [DL01], [DL02] et [Nic07] pour plus de détails. Dans ce texte, on appelle *formule à coefficients dans* k (voire *formule* si le corps k est clairement indiqué par le contexte) une formule du premier ordre dans le langage des anneaux à coefficients dans k. Pour toute formule φ à coefficients dans k en n variables libres et toute extension K de k on notera $\varphi(K)$ le sous-ensemble de K^n constitué des éléments de K^n satisfaisant φ. Si X est une variété quasi-affine définie sur k, on appellera *formule sur* X toute formule à coefficients dans k en n variables libres de la forme $\varphi \wedge \varphi_X$ où φ est une formule en n variables libres et φ_X une formule définissant les équations d'un plongement de X dans l'espace affine $\mathbf{A}^n$.

Un *corps pseudo-fini* est un corps parfait, pseudo-algébriquement clos et admettant dans une clôture algébrique fixée une unique extension de degré n pour tout $n \geqslant 1$.

Soit $d \geqslant 1$ et φ, ψ des formules à coefficients dans k en les variables libres $(x_1, \dots, x_m)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ respectivement. On dit que φ *est un d-revêtement de* ψ s'il existe une formule θ en les variables libres $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ telle que pour tout corps pseudo-fini K contenant k, l'ensemble $\theta(K) \subset K^n \times K^m$ est le graphe d'une application d pour 1 de $\varphi(K)$ sur $\psi(K)$. Deux formules sont dites logiquement équivalentes si l'une est un 1-revêtement de l'autre.

On note $K_0(\mathrm{PFF}_k)$ l'anneau de Grothendieck de la théorie des corps pseudo-finis sur k. Son groupe sous-jacent est engendré par les symboles $[\varphi]$, où φ est une formule à coefficients dans k. Ces générateurs satisfont les relations $[\varphi] = [\psi]$ si φ et ψ sont logiquement équivalentes et $[\varphi \vee \psi] + [\varphi \wedge \psi] = [\varphi] + [\psi]$ si φ et ψ ont les mêmes variables libres. Le produit est défini par $[\varphi]\ [\psi] \stackrel{\text{déf}}{=} [\varphi \vee \psi]$ pour toutes formules φ et ψ ayant des ensembles de variables libres disjoints.

Théorème 2.2. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Il existe un unique morphisme d'anneaux*

$$\chi_{\text{form}} : K_0(PFF_k) \longrightarrow \mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}} \tag{2.2}$$

qui envoie la classe d'une formule qui est une conjonction d'équations polynômiales sur la classe de la variété affine définie par ces équations et qui satisfait pour toutes formules φ et ψ telles que φ est un d-revêtement de ψ la relation

$$\chi_{\text{form}}([\varphi]) = d\,\chi_{\text{form}}([\psi]). \tag{2.3}$$

Remarque 2.3. Soient X et Y des variétés affines normales irréductibles et $X \to Y$ un revêtement galoisien étale de groupe G. Pour tout sous-groupe cyclique C on note $\varphi_{X,Y,C}$ une formule sur Y telle que, pour tout corps pseudo-fini K contenant k, $\varphi_{X,Y,C}(K)$ s'identifie à l'ensemble des éléments de $Y(K)$ qui se relèvent à un élément de $(X/C)(K)$ mais pas à un élément de $(X/D)(K)$ pour tout sous-groupe strict D de C, en d'autre termes qui admettent C comme groupe de décomposition dans le revêtement $X \to Y$. Une telle formule est appelée *formule galoisienne.* La relation (2.3) entraîne alors la relation

$$\chi_{\text{form}}([\varphi_{X,Y,C}]) = \frac{|C|}{|N_G(C)|}\chi_{\text{form}}\left([\varphi_{X,X/C,C}]\right). \tag{2.4}$$

Denef et Loeser ont démontré l'existence et l'unicité d'un morphisme χ_{form} vérifiant la relation (2.4) pour toute formule galoisienne (*cf.* [DL02, Theorem 2.1]). Le fait qu'un tel morphisme vérifie en outre la condition (2.3) est énoncé sans preuve dans [Hal05]. Cette propriété est démontrée (et étendue à un cadre relatif) par Nicaise dans [Nic07] (*cf.* notamment le lemme 8.5). Pour une démonstration élémentaire du fait que la relation (2.4) entraîne la relation (2.3), on peut consulter [Bou08b].

2.2 Produit eulérien motivique : première approche

On cherche un analogue motivique de la décomposition de la fonction zêta de Hasse-Weil classique en produit eulérien. Soit k un corps. On définit pour toute k-variété quasi-projective X une famille $(\Phi_n(X))_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_k$ par la relation

$$\sum_{n\geqslant 1}\Phi_n(X)\,T^n = T\,\frac{d}{dT}\log Z^{\text{mot}}_X(T) \tag{2.5}$$

et une famille $(\Psi_n(X))_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}$ par les relations

$$\forall n \geqslant 1, \quad \Phi_n(X) = \sum_{d|n} d\,\Psi_d(X). \tag{2.6}$$

Lemme 2.4. *Soit k un corps et X une k-variété quasi-projective.*

- *i) On suppose k fini. Pout tout $n \geqslant 1$, $\#_k\Phi_n(X)$ (respectivement $\#_k\Psi_n(X)$) est le nombre de points de X à valeurs dans une extension de degré n de k (respectivement le nombre de points fermés de degré n de X).*
- *ii) On a $\Phi_1(X) = \Psi_1(X) = [X]$.*
- *iii) Pour tout $n \geqslant 1$, on a la relation*

$$\Phi_n(X) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,\frac{n}{k}\sum_{\substack{(m_1,\dots,m_k)\in(\mathbf{N}_{>0})^k\\ m_1+\dots+m_k=n}}\prod_{i=1}^{k}\left[X^{<m_i>}\right]. \tag{2.7}$$

- *iv) Pour tout $n \geqslant 1$, $\Phi_n(X)$ et $\Psi_n(X)$ appartiennent à $\mathcal{F}^{-n\dim(X)}\mathcal{M}_{k,loc,\mathbf{Q}}$.*

v) Pour tout $d \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 1$, on a $\Phi_n(\mathbf{A}^d) = \mathbf{L}^{n\,d}$.

vi) On a la relation

$$Z_X^{\mathrm{mot}}(T) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1} \Psi_n(X)\,\log\left(\frac{1}{1-T^n}\right)\right). \tag{2.8}$$

Démonstration. Le fait que $\#_k Z_X^{\mathrm{mot}}$ coïncide avec la fonction zêta de Hasse-Weil classique et les propriétés standards d'icelle montrent le point i. Le point ii découle immédiatement des définitions et le point iii d'un calcul élémentaire. Le point iv se déduit du point iii et des relations (2.6). Le point v découle du fait qu'on a pour tout $n \geqslant 1$ la relation $\left[\left(\mathbf{A}^d\right)^{<n>}\right] = \mathbf{L}^{n\,d}$ (*cf.* [Göt01, Lemma 4.4]). Le point vi découle des définitions par un calcul standard. $\square$

La relation (2.8) peut être vue comme une décomposition en « produit eulérien motivique ». On peut généraliser ainsi cette notion : si P est un élément de $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}[[T]]$ vérifiant $P(0) = 1$ on définit le produit eulérien motivique associé comme étant

$$\Pi_{X,P}^{\mathrm{mot}}(T) \overset{\text{déf}}{=} \exp\left[\sum_{n\geqslant 1} \Psi_n(X)\,\log(P(T^n))\right] \quad \in \mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}[[T]].$$

2.3 Produit eulérien motivique : seconde approche

L'approche de la section précédente nous semble limitée dès qu'il s'agit de montrer que d'autres séries que la fonction zêta de Hasse-Weil motivique (telles que celles étudiées à la section 3) s'écrivent sous forme d'un produit eulérien motivique. Si k est de caractéristique zéro, on peut utiliser le théorème 2.2 pour donner une définition naturelle de la familles $(\Psi_n(X))$ *en tant qu'éléments de* $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^{\chi}$. Compte tenu de nos objectifs, cette définition s'avèrera beaucoup plus maniable.

2.3.1 *Construction*

Notations 2.5. Soit k un corps. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour toute k-variété quasi-projective X, on note $(X^n)_0$ l'ouvert de X^n constitué des n-uplets d'éléments deux à deux distincts, et $(X^{<n>})_0$ l'ouvert de $X^{<n>}$ image de $(X^n)_0$ par le morphisme naturel $X^n \to X^{<n>}$. Ce dernier morphisme induit un revêtement galoisien étale $(X^n)_0 \to (X^{<n>})_0$ de groupe $\mathfrak{S}_n$.

Soit k un corps, X une k-variété affine et irréductible et $n \geqslant 1$. On note π_n le $\mathfrak{S}_n$-revêtement étale $(X^n)_0 \to (X^{<n>})_0$, σ_n un n-cycle de $\mathfrak{S}_n$ et $\psi_n(X)$ une formule sur $X^{<n>}$ telle que, pour tout corps pseudo-fini K contenant k, $\psi_n(X)(K)$ est l'ensemble des éléments de $X^{<n>}(K)$ qui sont dans $(X^{<n>})_0(K)$ et admettent un groupe de décomposition dans $(X^n)_0 \to (X^{<n>})_0$ engendré par σ_n. Ce dernier ensemble s'identifie naturellement à l'ensemble des points fermés de degré n sur X_K. L'expression de la formule $\psi_n(X)$ dépend du choix du plongement de X dans un espace affine, mais l'existence d'un k-isomorphisme entre deux tels plongements montre que $\overline{\psi}_n(X) \overset{\text{déf}}{=} [\psi_n(X)]$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de X.

Lemme 2.6. *Soit U un ouvert affine de X et $F = X \setminus U$. On a, pour tout $n \geqslant 1$,*

$$\overline{\psi}_n(X) = \overline{\psi}_n(F) + \overline{\psi}_n(U).$$

Démonstration. On note π_U (respectivement π_F) le morphisme naturel $U^{<n>} \to X^{<n>}$ (respectivement $F^{<n>} \to X^{<n>}$). La formule $\psi_n(X)$ s'écrit alors $\psi' \vee \psi''$, où ψ' (respectivement ψ'') est une formule dont l'interprétation dans un corps pseudo-fini K contenant k est l'ensemble des éléments de $X^{<n>}(K)$ qui satisfont $\psi_n(X)$ et sont dans l'image de π_U (respectivement π_F). De tels éléments sont en bijection avec l'ensemble des éléments de $U^{<n>}(K)$ satisfaisant $\psi_n(U)$. Cette bijection est donnée par le k-morphisme de variétés affines π_U, et donc ψ' et $\psi_n(U)$ sont logiquement équivalentes. De même ψ'' et $\psi_n(F)$ sont logiquement équivalentes, d'où le résultat. $\square$

Soit X une k-variété quelconque et $X = \underset{i\in I}{\cup} X_i$ un recouvrement ouvert affine. On pose

$$\overline{\psi}_n(X) = \sum_{\varnothing\neq J\subset I} \overline{\psi}_n\Big(\bigcap_{i\in J} X_i \setminus \bigcup_{i\notin J} X_i\Big),$$

ce qui, d'après le lemme 2.6, ne dépend pas du recouvrement choisi. De ce même lemme, on déduit aussitôt le résultat suivant.

Lemme 2.7. *Soit X une k-variété, U un ouvert de X et $F = X \setminus U$. On a pour tout $n \geqslant 1$*

$$\overline{\psi}_n(X) = \overline{\psi}_n(U) + \overline{\psi}_n(F).$$

Corollaire 2.8. *Soit $n \geqslant 1$. L'application qui à X associe $\overline{\psi}_n(X)$ s'étend en un morphisme de groupes*

$$\overline{\psi}_n : \mathcal{M}_k \longrightarrow K_0(PFF_k).$$

En particulier, si A est un sous-ensemble constructible d'une k-variété, $\overline{\psi}_n(A)$ est bien défini. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie de sous-ensembles constructibles d'une variété X sur k, on a

$$\overline{\psi}_n\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = \sum_{\varnothing\neq J\subset I} \overline{\psi}_n\left(\underset{i\in J}{\cap} A_i \setminus \underset{i\notin J}{\cup} A_i\right) = \sum_{\varnothing\neq J\subset I} (-1)^{1+|J|}\,\overline{\psi}_n\left(\underset{i\in J}{\cap} A_i\right).$$

Notation 2.9. Soit k un corps de caractéristique zéro. Pour toute k-variété X et tout $n \geqslant 1$, on pose

$$\Psi_n^{\chi}(X) = \chi(\overline{\psi}_n(X))$$

et

$$\Phi_n^{\chi}(X) = \sum_{d|n} d\ \Psi_d^{\chi}(X).$$

On peut donc voir $\Phi_n^{\chi}(X)$ comme l'image par χ de la classe d'une hypothétique formule dont l'interprétation dans tout corps pseudo-fini K contenant k définirait l'ensemble des points de X à valeur dans l'unique extension de degré n de K. De la définition de $\Phi_n^{\chi}(X)$ et de [DL01, proposition 3.6.1 et §3.3] on déduit d'ailleurs aisément la proposition suivante.

Proposition 2.10. *Soir k un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$. Soit R un anneau intègre et normal de type fini sur $\mathbf{Z}$, de corps des fractions k. Si x est un point fermé de $\mathrm{Spec}(R)$, on note $\mathbf{F}_x$ le corps résiduel en x et Frob_x le frobenius en x. Pour toute k-variété X, il existe un élément non nul f de R tel que pour tout points fermé x de $\mathrm{Spec}(R_f)$ on ait*

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{Frob}_x(\Phi_n^{\chi}(X)) = |X_{\mathbf{F}_x}(\mathbf{F}_{x,n})|\,.$$

2.3.2 *Propriétés*

Proposition 2.11. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété et U un ouvert de X. On a pour tout $n \geqslant 1$*

$$\Phi_n^{\chi}(X) = \Phi_n^{\chi}(U) + \Phi_n^{\chi}(X \setminus U).$$

Si A est un sous-ensemble constructible de X, $\Phi_n^{\chi}(A)$ est bien défini et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie de sous-ensembles constructibles de X on a une formule similaire à celle du corollaire 2.8.

Démonstration. Ceci découle de la définition de Φ_n^{χ} et des propriétés analogues de Ψ_n^{χ}. $\square$

Proposition 2.12. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit X et Y des variétés sur k. On a*

$$\Phi_n^{\chi}(X \times Y) = \Phi_n^{\chi}(X)\,\Phi_n^{\chi}(Y).$$

Supposons en outre qu'il existe un morphisme $X \to Y$ qui est une fibration localement Zariski triviale de fibre Z. On a a alors

$$\Phi_n^{\chi}(X) = \Phi_n^{\chi}(Y)\,\Phi_n^{\chi}(Z).$$

L'application qui à X associe $\Phi_n^{\chi}(X)$ s'étend en un morphisme d'anneaux

$$\Phi_n^{\chi}(X) \,:\, \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{M}_k^{\chi}.$$

Cette proposition découle de la définition de Φ_n^{χ} et du lemme 2.14 ci-dessous.

Remarque 2.13. Evgeny Gorsky m'a signalé que la proposition 2.12 découlait du fait (démontré par [Hei07]) que la structure de λ-anneau définie sur l'anneau de Grothendieck des motifs par la fonction zêta de Hasse-Weil motivique était spéciale. La démonstration proposée ici est de nature plus arithmétique.

Lemme 2.14. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X et Y des variétés sur k. Pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$\Psi_n^{\chi}(X \times Y) = \sum_{\substack{d|n,\, e|n \\ d \vee e = n}} \frac{d\,e}{n}\,\Psi_d^{\chi}(X)\,\Psi_e^{\chi}(Y).$$

Démonstration. Grâce au lemme 2.7, en prenant des recouvrements ouverts affines et en stratifiant on peut supposer X et Y affines, normales et irréductibles.

Dans toute la démonstration, pour tout entier n, on identifie $\mathfrak{S}_n$ au groupe des bijections de $\mathbf{Z}/n\,\mathbf{Z}$, et on note σ_n le n-cycle $i \mapsto i+1$.

Soit $n \geqslant 1$. Soit d et e des diviseurs de n tels que $d \vee e = n$. Nous utilisons les notations 2.5. Soit $Z_{d,e} \overset{\text{déf}}{=} (X^d)_0 \times (Y^e)_0$. L'action naturelles du groupe $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$ sur $Z_{d,e}$ induit un $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$-revêtement étale

$$Z_{d,e} \longrightarrow (X^{<d>})_0 \times (Y^{<e>})_0.$$

Les injections diagonales $(X^d)_0 \to (X^d)^{\frac{n}{d}}$ et $(Y^e)_0 \to (Y^e)^{\frac{n}{e}}$ induisent un morphisme

$$\pi_{d,e} \,:\, Z_{d,e} \longrightarrow (X \times Y)_0^{<n>}.$$

On note $C_{d,e}$ le sous-groupe cyclique d'ordre n de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$ engendré par (σ_d, σ_e). Les formules $\psi_d(X) \wedge \psi_e(Y)$ et $\varphi_{Z_{d,e},(X^{<d>})_0 \times (Y^{<e>})_0, C_{d,e}}$ sont alors logiquement équivalentes.

Soit $G_{d,e}$ le sous-groupe maximal de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$ tel que le morphisme $\pi_{d,e}$ se factorise à travers $Z_{d,e}/G_{d,e}$. On peut décrire $G_{d,e}$ de la manière suivante. On note f_d (respectivement f_e) le morphisme naturel $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ (respectivement $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$). Alors un élément (σ_1, σ_2) de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$ est dans $G_{d,e}$ si et seulement s'il existe un élément σ de $\mathfrak{S}_n$ vérifiant

$$\forall i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \sigma_1 f_d(i) & = & f_d(\sigma(i)) \\ \sigma_2 f_e(i) & = & f_e(\sigma(i)). \end{array} \right.$$

En d'autres termes, si on identifie $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ à un sous-ensemble de $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$ via $f_d \times f_e$, $G_{d,e}$ est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$ constitué des éléments qui stabilisent $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. En particulier $G_{d,e}$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, noté $\mathfrak{S}_n^{d,e}$. Notons que $G_{d,e}$ contient $C_{d,e}$ (l'élément de $\mathfrak{S}_n^{d,e}$ correspondant à (σ_d, σ_e) est σ_d).

Soit K un corps pseudo-fini contenant k, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, τ un générateur topologique du groupe de Galois absolu de K, et, pour tout entier d, K_d l'unique extension de degré

d de K dans $\overline{K}$, et K'_d l'ensemble des générateurs de K_d, *i.e.* l'ensemble des éléments de $\overline{K}$ dont l'orbite sous τ est de cardinal d.

Soit z un élément de $(X \times Y)_0^{<n>}(K)$ satisfaisant $\psi_n(X \times Y)$. Ceci signifie que z s'identifie à un ensemble du type $\{(\tau^i x, \tau^i y)_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}\}$, où (x, y) est un élément de $(X \times Y)(\overline{K})$ tel que l'égalité $(\tau^i x, \tau^i y) = (x, y)$ ait lieu si et seulement si n divise i. Soit d et e tels que $x \in X(K'_d)$ et $y \in Y(K'_e)$. On a alors nécessairement $d \vee e = n$. Le couple (d, e) est en fait l'unique couple vérifiant $d \vee e = n$ et tel que z se relève à un point géométrique de $Z_{d,e}$. Montrons que z se relève en fait à un unique élément de $(Z_{d,e}/G_{d,e})(K)$, et que cet élément admet $C_{d,e}$ comme groupe de décomposition dans le revêtement $Z_{d,e} \to Z_{d,e}/G_{d,e}$. L'ensemble des points géométriques de $Z_{d,e}$ qui s'envoient sur z est l'ensemble des éléments $\big((x_j)_{j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}}, (y_k)_{k \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}}\big) \in (X^d \times Y^e)(\overline{K})$ qui vérifient la propriété : il existe un élément μ de $\mathfrak{S}_n$ tel qu'on ait

$$\forall i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_{f_d(i)} & = & \tau^{\mu(i)} x \\ y_{f_e(i)} & = & \tau^{\mu(i)} y. \end{array} \right.$$

Un tel élément μ est alors nécessairement dans $\mathfrak{S}_n^{d,e}$. On voit donc que $\pi_{d,e}^{-1}(z)$ est une orbite sous $G_{d,e}$ et on vérifie par ailleurs facilement qu'elle est stable sous τ. Ceci montre que z se relève à un unique élément de $(Z_{d,e}/G_{d,e})(K)$.

Montrons que cet élément admet $C_{d,e}$ comme groupe de décomposition dans le revêtement $Z_{d,e} \to Z_{d,e}/G_{d,e}$. Notons

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Big((\tau^j x)_{j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}}\, , \, (\tau^k y)_{k \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}} \Big) \in \pi_{d,e}^{-1}(z).$$

Il suffit de montrer que la $C_{d,e}$-orbite de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est τ-stable et que pour tout sous-groupe strict C' de $C_{d,e}$ la C'-orbite de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ n'est pas τ-stable. Ceci est immédiat compte tenu du fait que $(\sigma_d, \sigma_e)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tau.(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et que (σ_d, σ_e) engendre $C_{d,e}$.

Montrons à présent qu'un élément de $(Z_{d,e}/G_{d,e})(K)$ admettant $C_{d,e}$ pour groupe de décomposition dans le revêtement $Z_{d,e} \to Z_{d,e}/G_{d,e}$ s'envoie par $\pi_{d,e}$ sur un élément de $(X \times Y)_0^{<n>}(K)$ satisfaisant $\psi_n(X \times Y)$. Un tel élément se relève à un point géométrique $((x_j) \times (y_k))$ de $Z_{d,e}$ vérifiant : il existe un entier l premier à n tel que pour tout (k, j) on a $(x_{j+l}, y_{k+l}) = (\tau\, x_j, \tau\, y_l)$. Pour un entier m premier à n convenable, cet élément s'écrit donc $\big((\tau^{i\,m}\, x)(\tau^{k\,m}\, y)\big)$ avec $x \in X(K'_d)$ et $y \in Y(K'_e)$, et son image dans $(X \times Y)_0^{<n>}$ est un point K-rationnel satisfaisant $\psi_n(X \times Y)$.

On note alors $\theta_{d,e}$ une formule sur $(X \times Y)_0^{<n>}$ telle que, pour corps pseudo-fini K contenant k, $\theta_{d,e}(K)$ s'identifie à l'ensemble des éléments de $(X \times Y)_0^{<n>}(K)$ qui se relèvent à un élément de $(Z_{d,e}/G_{d,e})(K)$ admettant $C_{d,e}$ comme groupe de décomposition. Ce qui précède montre que, d'une part, pour tout (d, e) vérifiant $d \vee e = n$, les formules $\theta_{d,e}$ et $\varphi_{Z_{d,e}, Z_{d,e}/G_{d,e}, C_{d,e}}$ sont logiquement équivalentes et d'autre part que les formules $(\theta_{d,e})_{d \vee e = n}$ forment une partition de $\psi_n(X \times Y)$.

D'après (2.4) et ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \chi_{\text{form}}([\theta_{d,e}]) &= \chi_{\text{form}}([\varphi_{Z_{d,e}, Z_{d,e}/G_{d,e}, C_{d,e}}]) \\ &= \frac{|N_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}(C_{d,e})|}{|N_{G_{d,e}}(C_{d,e})|} \chi_{\text{form}}([\varphi_{Z_{d,e}, X_0^{<d>} \times Y_0^{<e>}, C_{d,e}}]) \\ &= \frac{|N_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}(C_{d,e})|}{|N_{G_{d,e}}(C_{d,e})|} \, \Psi_d^{\chi}(X)\, \Psi_e^{\chi}(Y). \end{aligned}$$

Il suffit donc pour terminer la démonstration de montrer la relation

$$\frac{|N_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}(C_{d,e})|}{|N_{G_{d,e}}(C_{d,e})|} = \frac{de}{n}.$$

Un élément (σ_1, σ_2) de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$ est dans $N_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}(C_{d,e})$ si et seulement s'il existe un élément l de

$(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ tel que

$$(\sigma_1,\sigma_2)(\sigma_d,\sigma_e) = (\sigma_d,\sigma_e)^l(\sigma_1,\sigma_2)$$

i.e. si et seulement si on a

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \forall j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}, & \sigma_1(j+1) & = & \sigma_1(j)+l \\ \forall k \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}, & \sigma_2(k+1) & = & \sigma_2(k)+l. \end{array}\right.$$

Un tel élément est ainsi entièrement déterminé par la donnée de $l \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ et du couple $(\sigma_1(0),\sigma_2(0))$. Il sera dans $G_{d,e}$ si et seulement si on a en outre $(\sigma_1(0),\sigma_2(0)) \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Ainsi on a

$$|N_{\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_e}(C_{d,e})| = d\,e\ |(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*|$$

et

$$\left|N_{G_{d,e}}(C_{d,e})\right| = n\ |(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*|\,.$$

On en déduit le résultat annoncé. □

2.4 Décomposition de la fonction zêta de Hasse-Weil motivique en produit eulerien motivique

Soit k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété quasi-projective. À partir de la définition de Φ_n^χ, un calcul standard montre la relation

$$\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\Phi_n^\chi(X)}{n}\,T^n\right) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\Psi_n^\chi(X)\,\log\left(\frac{1}{1-T^n}\right)\right).$$

Nous allons montrer que cette dernière expression est égale à $Z_X^\chi(T)$.

Notations 2.15. Soit A une $\mathbf{Q}$-algèbre. Pour tout élément x de A et tout $n \geqslant 1$, on pose

$$\binom{x}{n} = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(x-i)}{n!}.$$

Soit $r \geqslant 1$ et $\boldsymbol{f} = (f_1,\dots,f_r) \in (\mathbf{N}_{>0})^r$ vérifiant $f_1 \leqslant \cdots \leqslant f_r$. On définit une partition $\{1,\dots,r\} = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma_{\boldsymbol{f}}} I_\gamma$ par la condition

$$\forall i,j \in \{1,\dots,r\},\quad f_i = f_j \Longleftrightarrow \exists\gamma,\quad i,j \in I_\gamma.$$

Pour $\gamma \in \Gamma_{\boldsymbol{f}}$, on pose $f_\gamma = f_i$ où i est un élément de γ, et $n_\gamma = |I_\gamma|$.

Enfin si (x_n) une suite d'éléments de A on pose

$$(x_{\boldsymbol{f}}) = \prod_{\gamma\in\Gamma_{\boldsymbol{f}}}\binom{x_{f_\gamma}}{n_\gamma}.$$

Le lemme suivant découle d'un calcul élémentaire.

Lemme 2.16. *Soit A une $\mathbf{Q}$-algèbre, E un ensemble fini non vide et $P = 1 + \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbf{N}^E\setminus\{0\}} a_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}$ un* *élément de $A[[(T_e)_{e\in E}]]$. On a alors pour toute suite (x_n) d'élements de A la relation*

$$\exp\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n\,\log(P(T_e^n)_{e\in E})\right)$$

$$= 1 + \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{N}^E\setminus\{0\}} \left(\sum_{r\geqslant 1}\ \sum_{\substack{\boldsymbol{f}\in(\mathbf{N}_{>0})^r\\ f_1\leqslant\cdots\leqslant f_r}} (x_{\boldsymbol{f}}) \sum_{\substack{(\boldsymbol{n}_1,\ldots,\boldsymbol{n}_r)\in(\mathbf{N}^E\setminus\{0\})^r\\ \sum \boldsymbol{n}_i f_i=\boldsymbol{m}}}\ \prod_{i=1}^r a_{\boldsymbol{n}_i}\right)\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{m}}. \quad (2.9)$$

Lemme 2.17. *Soit k un corps. Soit $n\geqslant 1$ et φ une formule à coefficients dans k en les variables libres $(x_1,\ldots,x_n)$. On pose $\psi_1=\varphi$. Pour $m\geqslant 2$, soit ψ_m la formule d'anneau en les variables libres $(x_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}}$ donnée par*

$$\left(\bigwedge_{j=1}^m \varphi(x_{1,j},\ldots,x_{n_j})\right)\bigwedge\left(\bigwedge_{\substack{j,k\in\{1,\ldots,m\}\\ j\neq k}} (x_{1,j},\ldots,x_{n_j})\neq(x_{1,k},\ldots,x_{n_k})\right).$$

On a alors pour tout $m\geqslant 1$ la relation

$$[\psi_m]=\prod_{j=0}^{m-1}([\varphi]-j)\,.$$

Démonstration. Soit $m\geqslant 2$. Les formules en les $n\,m$ variables libres $(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_m)$

$$\psi_{m-1}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{m-1})\wedge\varphi(\boldsymbol{x}_m)$$

et

$$\psi_m\vee\bigvee_{j=1}^{m-1}(\psi_{m-1}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{m-1})\wedge(\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{x}_j))$$

sont logiquement équivalentes. Pour $j=1,\ldots m-1$ la formule

$$\psi_{m-1}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{m-1})\wedge(\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{x}_j)$$

est logiquement équivalente à ψ_{m-1}. On a alors

$$[\psi_m]+(m-1)\,[\psi_{m-1}]=[\psi_{m-1}]\,[\varphi]$$

soit

$$[\psi_m]=[\psi_{m-1}]\,([\varphi]-m+1))$$

d'où le résultat en raisonnant par récurrence sur m. □

Proposition 2.18. *Soit k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété quasi-projective. Dans l'anneau $\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}[[T]]$, on a l'égalité*

$$Z^{\chi}_X(T)=\exp\left[\sum_{n\geqslant 1}\Psi^{\chi}_n(X)\,\log\left(\frac{1}{1-T^n}\right)\right].$$

Démonstration. Posons $\Pi_X(T)=\exp\left[\sum_{n\geqslant 1}\Psi^{\chi}_n(X)\,\log\left(\frac{1}{1-T^n}\right)\right]$. Soit F un fermé de X et $U=X\setminus F$. D'après le lemme 2.7, on a $\Pi_X(T)=\Pi_U(T)\,\Pi_F(T)$. Par ailleurs, on a $Z^{\chi}_X(T)=Z^{\chi}_U(T)\,Z^{\chi}_F(T)$ (*cf.* [And04, §13.3.1]). Ainsi, en prenant des recouvrements ouverts affines et en stratifiant, on est ramené à démontrer la proposition dans le cas où X est affine, normale, irréductible. Pour $r \geqslant 1$ et $\boldsymbol{f} \in (\mathbf{N}_{>0})^r$, on note

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{f},m} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ (n_1, \ldots, n_r) \in (\mathbf{N}_{>0})^r, \quad \sum_{i=1}^{r} n_i\, f_i = m \right\}.$$

D'après le lemme 2.16, il s'agit donc de démontrer pour tout $m \geqslant 1$ la relation

$$\chi\left(\left[X^{<m>}\right]\right) = \sum_{r>0} \sum_{\substack{\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_r)\in\mathbf{N}_{>0}^r \\ f_1\leqslant\cdots\leqslant f_r}} \left(\Psi^{\chi}_{\boldsymbol{f}}(X)\right) |\mathcal{A}_{\boldsymbol{f},m}|\,. \tag{2.10}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par $X_n^{(0)}$ l'ensemble des points fermés de X de degré n. La formule (2.10) est le pendant motivique de l'égalité

$$\left|X^{<m>}(k)\right| = \sum_{r>0} \sum_{\substack{\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_r)\in\mathbf{N}_{>0}^r \\ f_1\leqslant\cdots\leqslant f_r}} \left(\left|X^{(0)}_{\boldsymbol{f}}\right|\right) |\mathcal{A}_{\boldsymbol{f},m}|\,, \tag{2.11}$$

qui est valable si k est un corps fini. Dans ce cadre, la relation (2.11) est une conséquence de la décomposition de la fonction zêta de Hasse-Weil en produit eulérien, mais elle peut aussi se retrouver via un argument combinatoire direct. La preuve de la relation (2.10) qui suit est une adaptation motivique d'un tel argument combinatoire.

Soit $m \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ et $\boldsymbol{f} \in (\mathbf{N}_{>0})^r$ tel que $f_1 \leqslant \cdots \leqslant f_r$. On utilise les notations 2.15. On a une action naturelle de $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\boldsymbol{f}}} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\gamma\in\Gamma_{\boldsymbol{f}}} \mathfrak{S}_{h_\gamma}$ sur $\mathcal{A}_{\boldsymbol{f},m}$, ainsi que sur $\prod_{i=1}^{r} \left(X^{<f_i>}\right)_0$. Soit $Z_{\boldsymbol{f}}$ l'ouvert $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\boldsymbol{f}}}$-stable de $\prod_{i=1}^{r} \left(X^{<f_i>}\right)_0$ donné par

$$\prod_{\gamma\in\Gamma_{\boldsymbol{f}}} \left(\prod_{i\in I_\gamma} \left(X^{<f_i>}\right)_0 \right)_0 .$$

Soit $\varphi_{\boldsymbol{f}}$ une formule sur $Z_{\boldsymbol{f}}$ ayant la propriété suivante : pour tout corps pseudo-fini K contenant k, $\varphi_{\boldsymbol{f}}(K)$ s'identifie à l'ensemble des éléments $(y_1, \ldots, y_r)$ de $Z_{\boldsymbol{f}}(K)$ tels que, pour tout i, y_i satisfait la formule $\psi_{f_i}(X)$. D'après le lemme 2.17, on a donc

$$[\varphi_{\boldsymbol{f}}] = \prod_{\gamma\in\Gamma_{\boldsymbol{f}}} \prod_{j=0}^{h_\gamma-1} \left([\psi_{f_\gamma}(X)] - j\right). \tag{2.12}$$

Soit $\boldsymbol{n} \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{f},m}$. On note $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{n}}$ le stabilisateur de $\boldsymbol{n}$ sous l'action de $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\boldsymbol{f}}}$, et

$$\pi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}} \,:\, Z_{\boldsymbol{f}} \longrightarrow X^{<m>}$$

le k-morphisme qui envoie le r-uplet de zéro-cycles $(C_1, \ldots, C_r)$ sur $\sum_i n_i\, C_i$. Ce morphisme se factorise à travers $Z_{\boldsymbol{f}}/\mathfrak{S}_{\boldsymbol{n}}$. Soit $\psi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}$ une formule sur $X^{<m>}$ telle que, pour tout corps pseudo-fini K contenant k, $\psi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}(K)$ est l'ensemble des éléments de $X^{<m>}(K)$ qui sont l'image par $\pi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}$ d'un élément $(y_1, \ldots, y_r)$ de $Z_{\boldsymbol{f}}(K)$ satisfaisant $\varphi_{\boldsymbol{f}}$. Un élément de $\psi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}(K)$ est donc un zéro-cycle K-rationnel s'écrivant $\sum_{i=1}^{r} n_i\, P_i$ où, pour tout i, P_i est un point fermé de degré f_i de X_K, et $P_i \neq P_j$ si $f_i = f_j$. L'ensemble des préimages de cet élément par $\pi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}$ forme une $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{n}}$-orbite. Ainsi le morphisme $Z_{\boldsymbol{f}}/\mathfrak{S}_{\boldsymbol{n}} \to X^{<m>}$ induit une bijection entre $\psi_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{n})}(K)$ et les éléments de $(Z_{\boldsymbol{f}}/\mathfrak{S}_{(\boldsymbol{n})})(K)$ qui se relèvent à un élément de $Z_{\boldsymbol{f}}(K)$ satisfaisant $\varphi_{\boldsymbol{f}}$. Donc le morphisme $\pi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}$ fait de $\varphi_{\boldsymbol{f}}$ un $|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{n}}|$-revêtement de $\psi_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{n})}$. D'après le théorème 2.2, on a alors

$$\chi_{\text{form}}\left(\left[\psi_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{n})}\right]\right) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{n}}|} \chi_{\text{form}}\left(\left[\varphi_{(f_i)}\right]\right).$$

En notant $\mathcal{A}^0_{\boldsymbol{f},m}$ un système de représentants de $\mathcal{A}_{\boldsymbol{f},m}$ modulo l'action de $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\boldsymbol{f}}}$, on en déduit

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{A}^0_{\boldsymbol{f},m}} \chi_{\text{form}}\left([\psi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}]\right) = \Big(\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{A}^0_{\boldsymbol{f},m}} \frac{1}{|\mathfrak{S}_{\boldsymbol{n}}|}\Big)\chi_{\text{form}}\left([\varphi_{\boldsymbol{f}}]\right) = \frac{|\mathcal{A}_{\boldsymbol{f},m}|}{|\mathfrak{S}_{\Gamma_{\boldsymbol{f}}}|}\chi_{\text{form}}\left([\varphi_{\boldsymbol{f}}]\right).$$

D'après (2.12), on a donc

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{A}^0_{\boldsymbol{f},m}} \chi_{\text{form}}\left(\left[\psi_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{n})}\right]\right) = \left(\psi^{\chi}_{\boldsymbol{f}}(X)\right)\,|\mathcal{A}_{\boldsymbol{f},m}|\,. \tag{2.13}$$

L'interprétation de $\psi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}(K)$ en termes de zéro-cycles utilisée ci-dessus montre par ailleurs que tout élément de $X^{<m>}(K)$ satisfait $\psi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}$ pour un unique $\boldsymbol{f}$ et un $\boldsymbol{n}\in\mathcal{A}_{\boldsymbol{f},m}$ unique modulo l'action de $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\boldsymbol{f}}}$. Ainsi les formules

$$\left(\psi_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{n}}\right)_{\substack{r>0,\\ \boldsymbol{f}\in\mathbf{N}^r_{>0},\\ f_1\leqslant\cdots\leqslant f_r,\\ \boldsymbol{n}\in\mathcal{A}^0_{\boldsymbol{f},m}.}}$$

forment une partition de $X^{<m>}$. Ceci conclut la démonstration de la relation (2.10). ☐

Corollaire 2.19. *Soit k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété quasi-projective. Pour tout $n\geqslant 1$ on a $\Phi^{\chi}_n(X)=\chi\left(\Phi_n(X)\right)$ et $\Psi^{\chi}_n(X)=\chi\left(\Psi_n(X)\right)$.*

Démonstration. Ceci découle de la proposition 2.18 et des définitions de $\Phi_n(X)$ et $\Psi_n(X)$. ☐

Corollaire 2.20. *Soit k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété quasi-projective. Pour tout $n\geqslant 1$, $\Psi^{\chi}_n(X)$ est un élément de $\mathcal{F}^{-n\,\dim(X)}\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}$.*

Démonstration. Ceci découle du corollaire 2.19 et du point iv du lemme 2.4. ☐

Corollaire 2.21. *Pour tout $d\geqslant 1$ et tout $n\geqslant 1$, on a $\Phi^{\chi}_n(\mathbf{A}^{d})=\mathbf{L}^{n\,d}$.*

Démonstration. Ceci découle du corollaire 2.19 et du point v du lemme 2.4. ☐

Remarque 2.22. Le corollaire 2.20 peut s'obtenir de manière plus directe à partir de la définition de $\Psi^{\chi}_n(X)$ comme formule galoisienne et de la relation (2.4).

Corollaire 2.23. *Soit k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété quasi-projective. Soit $n_0\geqslant 1$ un entier et $P=1+\sum_{n\geqslant n_0}a_n\,T^n$ un élément de $\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}[[T]]$. Écrivons*

$$\exp\left[\sum_{n\geqslant 1}\Psi^{\chi}_n(X)\,\log(P(T^n))\right]=\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\,T^n.$$

Soit $(V_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\widehat{\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}}$. On suppose qu'il existe une application $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ vérifiant :

i) $\varphi(n)-\frac{n\,\dim(X)}{n_0}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$;

ii) pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $V_n\in\mathcal{F}^{\varphi(n)}\,\widehat{\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}}$.

Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}}\alpha_n\,V_n$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}}$.

Démonstration. D'après le lemme 2.16, on a pour tout $n\geqslant 0$ la relation

$$\alpha_n=\sum_{r>0}\sum_{\substack{\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_r)\in\mathbf{N}^r_{>0}\\ f_1\leqslant\cdots\leqslant f_r}}\left(\Psi^{\chi}_{\boldsymbol{f}}(X)\right)\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r)\in\mathbf{N}^r_{>0}\\ \sum n_i\,f_i=n}}\prod_{i=1}^{r}a_{n_i}.$$

Les indices $\boldsymbol{f}$ intervenant dans la somme vérifient tous $n_0\,|\boldsymbol{f}| \leqslant n$. D'après le corollaire 2.20 on a $\left(\Psi^{\chi}_{\boldsymbol{f}}(X)\right) \in \mathcal{F}^{-|\boldsymbol{f}|\,\dim(X)}\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}$. Ainsi, on a $\alpha_n \in \mathcal{F}^{-\frac{n\,\dim(X)}{n_0}}\,\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}$. On en déduit le résultat. $\square$

Remarque 2.24. On obtient un résultat analogue dans $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}$ en remplaçant $\exp\left[\sum_{n\geqslant 1}\Psi^{\chi}_n(X)\,\log(P(T^n))\right]$ par $\exp\left[\sum_{n\geqslant 1}\Psi_n(X)\,\log(P(T^n))\right]$. On utilise alors le point iv du lemme 2.4.

Remarque 2.25. Soi k un corps et X une k-variété quasi-projective. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de k-variétés quasi-projectives et $P(T) = 1 + \sum_{n\geqslant 1}[A_n]\,T^n$. Les auteurs de [GZLMH04] définissent alors la « puissance $[X]$-ème de $P(T)$ » par la formule

$$P(T)^{[X]} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\sum_{\rho\geqslant 1}\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_\rho)\in\mathbf{N}^{\rho}\\ \sum j\,k_j=k\\ k_\rho\neq 0}}\left[\left(\left(X^{\sum_j k_j}\right)_0 \times \prod_{j=1}^{\rho} A_j^{k_j}\right)\Big/\prod_{j=1}^{\rho}\mathfrak{S}_{k_j}\right]\Bigg\}T^k \tag{2.14}$$

où $\prod_j \mathfrak{S}_{k_j}$ agit de manière diagonale sur chacun des facteurs $\left(X^{\sum_j k_j}\right)_0$ et $\prod_{j=1}^{\rho} A_j^{k_j}$.

Par ailleurs, d'après le lemme 2.16, on a

$$\Pi^{\mathrm{mot}}_{X,P}(T) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{r\geqslant 1}\sum_{\substack{\boldsymbol{f}=(f_1,\dots,f_r)\in\mathbf{N}^r_{>0}\\ f_1\leqslant\cdots\leqslant f_r}}(\Psi_{\boldsymbol{f}}(X))\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbf{N}^r_{>0}\\ \sum n_i\,f_i=k}}\prod_{i=1}^{r}[A_{n_i}]\right\}T^k. \tag{2.15}$$

Si k est de caractéristique zéro, la « décomposition arithmétique » (donnée par la relation (2.4)) des motifs des quotients de variétés apparaissant dans l'expression (2.14) permet alors de montrer que $\chi(\Pi^{\mathrm{mot}}_{X,P}(T))$ coïncide avec $\chi(P(T)^{[X]})$. En ce sens la notion de produit eulerien motivique correspond à une décomposition arithmétique de la puissance formelle définie dans [GZLMH04].

Explicitons ce qui se passe au niveau de la partie de la décomposition arithmétique correspondant à l'image des points rationnels dans le quotient (dans ce qui suit tout se passe au niveau de l'anneau $\mathcal{M}^{\chi}_k$, on omet d'écrire χ pour alléger l'écriture) : il s'agit, pour $k \geqslant 1$ donné, de comparer d'une part l'expression

$$\sum_{\rho\geqslant 1}\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_\rho)\in\mathbf{N}^{\rho}\\ \sum j\,k_j=k\\ k_\rho\neq 0}}\left[\left(X^{\sum_j k_j}\right)_0 \times \prod_{j=1}^{\rho} A_j^{k_j}\right]\Big/\prod_{j=1}^{\rho} k_j!$$

qui s'écrit encore (*cf.* lemme 2.17)

$$\sum_{\rho\geqslant 1}\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_\rho)\in\mathbf{N}^{\rho}\\ \sum j\,k_j=k\\ k_\rho\neq 0}}\frac{[X]\,([X]-1)\,\dots([X]-\sum_j k_j+1)\,\prod_{j=1}^{\rho}[A_j]^{k_j}}{\left|\prod_j \mathfrak{S}_{k_j}\right|} \tag{2.16}$$

et les termes du coefficient de T^k dans (2.15) correspondant au cas où tous les f_i sont égaux à 1, soit

$$\sum_{r\geqslant 1}\left(\Psi_{\underbrace{(1,\dots,1)}_{r\ \text{répétitions}}}(X)\right)\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbf{N}^r_{>0}\\ \sum n_i=k}}\prod_{i=1}^{r}[A_{n_i}]$$

ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{r\geqslant 1}\frac{[X]\,([X]-1)\,\dots([X]-r+1)}{r!}\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbf{N}_{>0}^r\\ \sum n_i=k}}\prod_{i=1}^{r}[A_{n_i}] \tag{2.17}$$

L'égalité de (2.16) et (2.17) découle alors d'un argument combinatoire élémentaire (si $(k_1,\dots,k_\rho)\in\mathbf{N}^\rho$ avec $k_\rho\neq 0$, soit $r=\sum k_j$; il existe $\frac{r!}{\prod k_j!}$ r-uplets distincts $(n_1,\dots,n_r)$ de $\mathbf{N}_{>0}^r$ vérifiant $k_j=|\{i,\,n_i=j\}|$).

3. Une formule d'inversion de Möbius motivique

Dans cette section, nous introduisons un analogue motivique de fonctions d'inversion de Möbius utilisées pour traiter des problèmes de comptage de points de hauteur bornée sur les variétés toriques (*cf.* [Pey95], [Sal98], [dlB01], [Bou03a]).

Soit E un ensemble fini non vide. On munit $\{0,1\}^E$ de l'ordre partiel usuel. Soit B un sous-ensemble de $\{0,1\}^E$ vérifiant la propriété suivante : si $\boldsymbol{n}\in B$ et $\boldsymbol{n'}\geqslant\boldsymbol{n}$ alors $\boldsymbol{n'}\in B$. On note $B^{\min}$ l'ensemble des éléments minimaux de B, et $A=\{0,1\}^E\setminus B$. On définit une fonction $\mu_B^0:\{0,1\}^E\to\mathbf{Z}$ par la relation

$$\forall\boldsymbol{n}\in\{0,1\}^E,\quad \mathbf{1}_A(\boldsymbol{n})=\sum_{0\leqslant\boldsymbol{n'}\leqslant\boldsymbol{n}}\mu_B^0(\boldsymbol{n'}). \tag{3.1}$$

Pour $\boldsymbol{n}\in\{0,1\}^E$ on pose

$$\ell_B(\boldsymbol{n})=\left|\{(\boldsymbol{n'})\in B^{\min},\quad \boldsymbol{n'}\leqslant\boldsymbol{n}\}\right|.$$

On vérfie qu'on a alors

$$\forall\boldsymbol{n}\in\{0,1\}^E,\quad \mu_B^0(\boldsymbol{n})=\begin{cases}1 & \text{si}\quad \boldsymbol{n}=0\\ 0 & \text{si}\quad \boldsymbol{n}\in A\setminus\{0\}\\ (-1)^{\ell_B(\boldsymbol{n})} & \text{si}\quad \boldsymbol{n}\in B\setminus\{0\}.\end{cases}$$

On définit un élément P_B de $\mathbf{Z}[T_e]_{e\in E}$ par

$$P_B(T_e)=\sum_{\boldsymbol{n}\in\{0,1\}^E}\mu_B^0(\boldsymbol{n})\prod_{e\in E}T_e^{n_e}$$

et un élément Q_B de $\mathbf{Z}[[T_e]]_{e\in E}$ par

$$Q_B(T_e)=\frac{P_B(T_e)}{\prod\limits_{e\in E}(1-T_e)}=P_B(T_e)\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^E}\prod_{e\in E}T_e^{d_e}.$$

Pour $\boldsymbol{d}=(d_e)\in\mathbf{N}^E$ on définit $\widetilde{\boldsymbol{d}}=(\widetilde{d}_e)\in\{0,1\}^E$ par $\widetilde{d}_e=1$ si et seulement si $d_e\geqslant 1$.

Lemme 3.1. *On a*

$$Q_B(T_e)=\sum_{\boldsymbol{d}\in N^E}\mathbf{1}_A\left(\widetilde{\boldsymbol{d}}\right)\prod_{e\in E}T_e^{d_e}.$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la définition de Q_B et de la relation (3.1). □

Soit k un corps et X une k-variété quasi-projective. Pour toute extension K de k, on note $X^{0,+}(K)$ le monoïde des zéro-cycles effectifs K-rationnels sur X, et, pour $d\in\mathbf{N}$, $X_d^{0,+}(K)$ le sous-ensemble de $X^{0,+}(K)$ constitué des éléments de degré d. Ainsi $X_d^{0,+}(K)$ s'identifie à $X^{<d>}(K)$.

Soit F un sous-ensemble de E. Pour $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E$, la variété $\prod_{e\in E} X^{<d_e>}$ des E-uples de zéro-cycles effectifs de X de degré $\boldsymbol{d}$ contient un ouvert non vide $X_{\boldsymbol{d},F}$ défini par la condition $\bigcap_{e\in F} \operatorname{Supp}(C_e) = \varnothing$. On note alors $X^B_{\boldsymbol{d}}$ l'ouvert de $\prod_{e\in E} X^{<d_e>}$ défini par

$$X^B_{\boldsymbol{d}} = \bigcap_{\boldsymbol{n}\in B} X_{\boldsymbol{d},\{\boldsymbol{n}=1\}} = \bigcap_{\boldsymbol{n}\in B^{\min}} X_{\boldsymbol{d},\{\boldsymbol{n}=1\}}.$$

Pour toute extension K de k, on a donc l'égalité

$$X^B_{\boldsymbol{d}}(K) = \left\{ (C_e) \in \prod_{e\in E} X^{0,+}_{d_e}(K), \quad \forall \boldsymbol{n} \in B, \quad \bigcap_{e\in E,\ n_e=1} \operatorname{Supp}(C_e) = \varnothing \right\}.$$

3.1 Le cas d'un corps fini

Soit k un corps fini et X une k-variété quasi-projective. Soit

$$\mathcal{A}^B_X = \left\{ (C_e) \in \left(X^{0,+}(k)\right)^E, \quad \forall n \in B, \quad \bigcap_{e\in E,\ n_e=1} \operatorname{Supp}(C_e) = \varnothing \right\}.$$

Il existe alors une unique fonction $\widetilde{\mu}^B_X : \left(X^{0,+}(k)\right)^E \to \mathbf{Z}$ vérifiant la condition[1]

$$\forall (C_e) \in \left(X^{0,+}(k)\right)^E, \quad \mathbf{1}_{\mathcal{A}^B_X}(C_e) = \sum_{0\leqslant (C'_e)\leqslant (C_e)} \widetilde{\mu}^B_X((C'_e)). \tag{3.2}$$

Proposition 3.2. *On a les décompositions en produit eulérien*

$$\sum_{(C_e)\in (X^{0,+}(k))^E} \widetilde{\mu}^B_X((C_e)) \prod_{e\in E} T_e^{\deg(C_e)} = \prod_{x\in X^{(0)}} P_B\left((T_e^{\deg(x)})\right) \tag{3.3}$$

et

$$\sum_{(C_e)\in (X^{0,+}(k))^E} \mathbf{1}_{\mathcal{A}^B_X}(C_e) \prod_{e\in E} T_e^{\deg(C_e)} = \prod_{x\in X^{(0)}} Q_B\left((T_e^{\deg(x)})\right). \tag{3.4}$$

Démonstration. D'après (3.2), le membre de gauche de (3.4) est égal au membre de gauche de (3.3) multiplié par $\prod_{e\in E} Z_X(T_e)$. Ainsi l'une des deux relations (3.3) ou (3.4) entraîne aussitôt l'autre. La démonstration de ces relations est classique, et se base sur le fait que $\widetilde{\mu}^B$ est une fonction multiplicative. La proposition 1 (p. 180) de [Bou03a] (elle-même inspirée de la proposition analogue dans le cas des corps de nombres que l'on trouve dans [Sal98] ou [Pey06]) traite le cas particulier d'une fonction d'inversion de Möbius associée à un éventail (*cf.* sous-section 3.5) et la preuve est la même dans le cas général. □

Définissons à présent une fonction $\mu^B_X : \mathbf{N}^E \to \mathbf{Z}$ en posant

$$\mu^B_X((d_e)) = \sum_{(C_e),\, \deg(C_e)=d_e} \widetilde{\mu}^B_X(C_e).$$

On a alors

$$\forall \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E, \quad \left| X^B_{(d_e)}(k) \right| = \sum_{0\leqslant \boldsymbol{d}'\leqslant \boldsymbol{d}} \mu^B_X(\boldsymbol{d}') \prod_{e\in E} \left| X^{<d_e-d'_e>}(k) \right|. \tag{3.5}$$

---

[1] On munit $\left(X^{0,+}(k)\right)^E$ de l'ordre partiel usuel.

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par $X_n^{(0)}$ l'ensemble des points fermés de X de degré n. De la proposition 3.2, on déduit les relations

$$\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^E} \mu_X^B(\boldsymbol{d}) \prod_{e\in E} T_e^{d_e} = \prod_{n\geqslant 1} P_B(T_e^n)^{\left|X_n^{(0)}\right|} \tag{3.6}$$

et

$$\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^E} \left|X_{(d_e)}^B(k)\right| \prod_{e\in E} T_e^{d_e} = \prod_{n\geqslant 1} Q_B(T_e^n)^{\left|X_n^{(0)}\right|}. \tag{3.7}$$

Ce sont ces relations dont on veut obtenir une version motivique.

3.2 Un analogue motivique

On considère dans cette sous-section un corps k de caractéristique zéro. On va démontrer des relations dans l'anneau de motifs virtuels $\mathcal{M}_k^{\chi}$. Le problème de la démonstraton de relations analogues dans l'anneau $\mathcal{M}_k$ est discuté à la sous-section 3.3. Soit X une k-variété quasi-projective. On mime la relation (3.5) et on définit une *fonction de Möbius motivique* $\mu_X^{B,\chi} : \mathbf{N}^E \to \mathcal{M}_k^{\chi}$ par la relation

$$\forall\, \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E, \quad \chi\left([X_{\boldsymbol{d}}^B]\right) = \sum_{0\leqslant \boldsymbol{d}'\leqslant \boldsymbol{d}} \mu_X^{B,\chi}(\boldsymbol{d}') \prod_{e\in E} \chi\left(\left[X^{<d_e-d'_e>}\right]\right). \tag{3.8}$$

Si on pose

$$Z_X^B((T_e)) = \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^E} \chi\left([X_{\boldsymbol{d}}^B]\right) \prod_{e\in E} T_e^{d_e}$$

et

$$Z_{\mu_X^{B,\chi}}((T_e)) = \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^E} \mu_X^{B,\chi}(\boldsymbol{d}) \prod_{e\in E} T_e^{d_e},$$

on a donc la relation

$$Z_X^B((T_e)) = Z_{\mu_X^{B,\chi}}((T_e)) \prod_{e\in E} Z_X^{\chi}(T_e). \tag{3.9}$$

Théorème 3.3. *Soit k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété quasi-projective. Soit B un sous-ensemble de $\{0,1\}^E$ vérifiant la propriété suivante : si $\boldsymbol{n} \in B$ et $\boldsymbol{n}' \geqslant \boldsymbol{n}$ alors $\boldsymbol{n}' \in B$. On a les décompositions en produit eulérien motivique*

$$Z_{\mu_X^{B,\chi}}((T_e)) = \exp\left[\sum_{n\geqslant 1} \Psi_n^{\chi}(X)\, \log\left(P_B(T_e^n)\right)\right] \tag{3.10}$$

et

$$Z_X^B((T_e)) = \exp\left[\sum_{n\geqslant 1} \Psi_n^{\chi}(X)\, \log\left(Q_B(T_e^n)\right)\right]. \tag{3.11}$$

Démonstration. Compte tenu de (3.9) et de la proposition 2.18, l'une des deux relations (3.10) et (3.11) entraîne aussitôt l'autre.

Montrons la relation (3.11). Soit $\Pi_X^B(\boldsymbol{T}) = \exp\left[\sum_{n\geqslant 1} \Psi_n^{\chi}(X)\, \log\left(Q_B(T_e^n)\right)\right]$. Soit F un fermé de X et $U = X \setminus F$. On a une stratification de $X_{\boldsymbol{d}}^B$ en sous-variétés localement fermées

$$X_{\boldsymbol{d}}^B = \coprod_{0\leqslant \boldsymbol{d}'\leqslant \boldsymbol{d}} \left(\prod_{e\in E} U^{<d'_e>} \times F^{<d_e-d'e>}\right) \bigcap X_{\boldsymbol{d}}^B = \coprod_{0\leqslant \boldsymbol{d}'\leqslant \boldsymbol{d}} U_{\boldsymbol{d}'}^B \times F_{\boldsymbol{d}'}^B.$$

On en déduit la relation $Z^B_X(T) = Z^B_U(T)\, Z^B_F(T)$. Par ailleurs le lemme 2.7 entraîne la relation $\Pi^B_X(T) = \Pi^B_U(T)\, \Pi^B_F(T)$. Ainsi, en prenant des recouvrements ouverts affines et en stratifiant, on est ramené à démontrer la relation (3.11) dans le cas où X est affine, normale, irréductible. Pour $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E$, $r \geqslant 1$ et $\boldsymbol{f} \in \mathbf{N}^r_{>0}$, on note

$$\mathcal{A}^A_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{d}} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ (\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_r) \in (\mathbf{N}^E \setminus \{0\})^r, \quad \sum \boldsymbol{n}_i\, f_i = \boldsymbol{d} \text{ et } \forall i = 1 \dots, r, \quad \widetilde{\boldsymbol{n}_i} \in A \right\}.$$

D'après les lemmes 2.16 et 3.1, démontrer (3.11) revient à établir pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E$ la relation

$$\chi\left([X^B_{\boldsymbol{d}}]\right) = \sum_{r \geqslant 1} \sum_{\substack{\boldsymbol{f}=(f_1,\dots,f_r) \in \mathbf{N}^r_{>0} \\ f_1 \leqslant \dots \leqslant f_r}} (\Psi_{\boldsymbol{f}}(X)) \left|\mathcal{A}^A_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{d}}\right| \tag{3.12}$$

Fixons $\boldsymbol{d} \neq 0$. Soit $r \geqslant 1$ et $\boldsymbol{f} \in (\mathbf{N}_{>0})^r$ tel que $f_1 \leqslant \dots \leqslant f_r$. On utilise les notations 2.15 et on reprend les notations et la démarche de la preuve de la proposition 2.18. Le groupe $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\boldsymbol{f}}}$ agit sur $(\mathbf{N}^E \setminus \{0\})^r$. L'ensemble $\mathcal{A}^A_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{d}}$ est stable sous cette action. Soit $(\boldsymbol{n}_i) \in \mathcal{A}^A_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{d}}$. On note $\mathfrak{S}_{(\boldsymbol{n}_i)}$ le stabilisateur de $(\boldsymbol{n}_i)$ sous l'action de $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\boldsymbol{f}}}$, et

$$\pi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)} \,:\, Z_{\boldsymbol{f}} \longrightarrow \prod_{e \in E} X^{<d_e>}$$

le k-morpisme qui envoie le r-uplet de zéro-cycles $(C_1, \dots, C_r)$ sur $\left(\sum_i n_{i,e}\, C_i\right)_{e \in E}$. Ce morphisme se factorise à travers $Z_{\boldsymbol{f}}/\mathfrak{S}_{(\boldsymbol{n}_i)}$.

Soit $\psi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)}$ une formule vérifiant la propriété suivante : pour tout corps pseudo-fini K contenant k, $\psi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)}(K)$ est l'ensemble des éléments de $\prod\limits_{e \in E} X^{<d_e>}(K)$ qui sont l'image par $\pi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)}$ d'un élément $(y_1, \dots, y_r)$ de $Z_{\boldsymbol{f}}(K)$ satisfaisant $\varphi_{\boldsymbol{f}}$. La condition $\widetilde{\boldsymbol{n}_i} \in A$ dans la définition de $\mathcal{A}^A_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{d}}$ entraîne que de tels éléments sont en particulier dans $X^B_{\boldsymbol{d}}(K)$.

Un élément de $\prod\limits_{e \in E} X^{<d_e>}(K)$ satisfaisant $\psi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)}$ est donc un E-uplet de zéro-cycles K-rationnels s'écrivant $\left(\sum_{i=1}^r n_{i,e}\, C_i\right)$ où, pour tout i, C_i est un point fermé de X_K de degré f_i et $C_i \neq C_j$ si $f_i = f_j$. Les préimages d'un tel élément dans $Z_{\boldsymbol{f}}$ forment une orbite sous $\mathfrak{S}_{(\boldsymbol{n}_i)}$. Ainsi le morphisme $Z_{\boldsymbol{f}}/\mathfrak{S}_{(\boldsymbol{n}_i)} \to \prod\limits_{e \in E} X^{<d_e>}$ induit une bijection entre $\psi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)}(K)$ et les éléments de $(Z_{(\boldsymbol{f}}/\mathfrak{S}_{(\boldsymbol{n}_i)}))(K)$ qui se relèvent à un élément de $Z_{\boldsymbol{f}}(K)$ satisfaisant $\varphi_{\boldsymbol{f}}$. Donc le morphisme $\pi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)}$ fait de $\varphi_{\boldsymbol{f}}$ un $\left|\mathfrak{S}_{(\boldsymbol{n}_i)}\right|$-revêtement de $\psi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)}$. D'après le théorème 2.2, on a alors

$$\chi_{\text{form}}\left([\psi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)}]\right) = \frac{1}{\left|\mathfrak{S}_{(\boldsymbol{n}_i)}\right|} \chi_{\text{form}}\left([\varphi_{\boldsymbol{f}}]\right).$$

L'interprétation de $\psi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n})_i}(K)$ en termes de zéro-cycles utilisée ci-dessus montre par ailleurs que tout élément de $X^B_{\boldsymbol{d}}(K)$ satisfait $\psi_{\boldsymbol{f},(\boldsymbol{n}_i)}$ pour un unique $\boldsymbol{f}$ et un $(\boldsymbol{n}_i) \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{d}}$ unique modulo l'action de $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\boldsymbol{f}}}$. On peut alors conclure comme dans la preuve de la proposition 2.18. □

Corollaire 3.4. *Soit k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété quasi-projective. Soit B un sous-ensemble de $\{0,1\}^E$ vérifiant la propriété suivante : si $\boldsymbol{n} \in B$ et $\boldsymbol{n}' \geqslant \boldsymbol{n}$ alors $\boldsymbol{n}' \in B$. Soit ν_B la valuation de $P_B - 1$ et $(V_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E}$ une famille d'éléments de $\widehat{\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}}$. On suppose qu'il existe une application $\varphi \,:\, \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ vérifiant :*

i) $\varphi(n) - \frac{n \dim(X)}{\nu_B} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

ii) *pour tout* $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E$, $V_{\boldsymbol{d}} \in \mathcal{F}^{\varphi(\sum d_e)}\, \widehat{\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}}$.

Alors la série $\sum\limits_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E} \mu^{B,\chi}_X(\boldsymbol{d})\, V_{\boldsymbol{d}}$ *converge dans* $\widehat{\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}}}$.

Démonstration. Ceci se déduit du théorème 3.3 grâce au lemme 2.16 et une adaptation aisée de la preuve du corollaire 2.23. □

3.3 Questions dans l'anneau de Grothendieck des variétés

Dans cette sous-section, k est un corps quelconque. On reprend les notations de l'introduction de la section 3. Soit X une k-variété quasi-projective. On définit une fonction $\mu_X^{B,\mathrm{mot}} : \mathbf{N}^E \to \mathcal{M}_k$ par la relation

$$\forall\, \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E, \quad \left[X^B_{\boldsymbol{d}}\right] = \sum_{0 \leqslant \boldsymbol{d}' \leqslant \boldsymbol{d}} \mu_X^{B,\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d}') \prod_{e \in E} \left[X^{<d_e - d'_e>}\right]. \tag{3.13}$$

Si k est de caractéristique zéro, on a donc pour tout $\boldsymbol{d}$ la relation $\chi(\mu_X^{B,\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d})) = \mu_X^{B,\chi}(\boldsymbol{d})$. Si k est fini on a pour tout $\boldsymbol{d}$ la relation $\#_k\, \mu_X^{B,\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d}) = \mu_X^B(\boldsymbol{d})$. Au vu du théorème 3.3, on peut se poser la question suivante.

Question 3.5. La relation

$$\sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E} \mu_X^{B,\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d}) \prod_{e \in E} T_e^{d_e} = \exp\left[\sum_{n \geqslant 1} \Psi_n(X)\, \log\left(P_B(T_e^n)\right)\right]$$

est-elle vérifiée ?

Une réponse positive à la question 3.5 fournirait une autre démonstration du théorème 3.3. Elle entraînerait également une réponse positive à la question suivante :

Question 3.6. Soit ν_B la valuation de P_B. Soit $(V_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E}$ une famille d'éléments de $\widehat{\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}}$. On suppose qu'il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ vérifiant :

i) $\varphi(n) - \frac{n \dim(X)}{\nu_B} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

ii) pour tout $(d_e) \in \mathbf{N}^E$, $V_{\boldsymbol{d}} \in \mathcal{F}^{\varphi(\sum d_e)} \widehat{\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}}$.

Est-il vrai que la série

$$\sum_{(\boldsymbol{d}) \in \mathbf{N}^E} \mu_X^{B,\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d})\, V_{\boldsymbol{d}}$$

converge dans $\widehat{\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}}$?

On montre ci-dessous que les réponses aux questions 3.5 et 3.6 sont positives pour un cas particulier d'ensemble B. Dans le cadre de l'application à l'étude des fonctions zêta des hauteurs motivique, ceci permet d'obtenir des résultats dans l'anneau $\mathcal{M}_k$ dans le cas des espaces projectifs et des surfaces de Hirzebruch. Pour traiter le cas d'une variété torique générale, faute de pouvoir montrer que la réponse est positive, nous devrons nous contenter de résultats dans l'anneau $\mathcal{M}_k^\chi$ pour pouvoir utiliser le théorème 3.3 et le corollaire 3.4.

3.4 Calcul de $\mu_X^{B,\mathrm{mot}}$ dans un cas particulier

Soit k un corps et X une k-variété quasi-projective. On définit une fonction $\mu_X^{\mathrm{mot}} : \mathbf{N} \to \mathcal{M}_k$ par la relation

$$\left(\sum_{d \geqslant 0} \mu_X^{\mathrm{mot}}(d) T^d\right) Z_X^{\mathrm{mot}}(T) = 1.$$

On a donc pour tout $d \geqslant 0$ la relation

$$\sum_{0 \leqslant r \leqslant d} \mu_X^{\mathrm{mot}}(r) \left[X^{<d-r>}\right] = 0. \tag{3.14}$$

Soit E un ensemble fini non vide. On définit une fonction $\mu_X^E : \mathbf{N}^E \to \mathcal{M}_k$ en posant

$$\mu_X^E(\boldsymbol{d}) = \begin{cases} \mu_X^{\mathrm{mot}}(d) & \text{si} \quad d_e = d \text{ pour tout } e \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.15}$$

Une définition équivalente de μ_X^E est d'imposer la relation

$$\left(\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^E} \mu_X^E(\boldsymbol{d})\,\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{d}}\right) Z_X^{\mathrm{mot}}\left(\prod_{e\in E} T_e\right) = 1.$$

Proposition 3.7. *Soit B le sous-ensemble de $\{0,1\}^E$ réduit à l'élément constant égal à 1. Alors $\mu_X^{B,\mathrm{mot}} = \mu_X^E$.*

Démonstration. Soit $W_{\boldsymbol{d},\delta}$ la sous-variété de $\prod_{e\in E} X^{<d_e>}$ des E-uples de zéro-cycles effectifs dont l'intersection est de degré δ. En particulier $W_{\boldsymbol{d},0} = X_{(\boldsymbol{d},E}$. On a un isomorphisme

$$W_{\boldsymbol{d},\delta} \xrightarrow{\sim} X^{<\delta>} \times X_{(d_e-\delta),E}$$

et une fibration en sous-variétés localement fermées

$$\prod_{e\in E} X^{<d_e>} = \coprod_{0\leqslant d\leqslant \mathrm{Min}(d_e)} W_{(d_e),\delta}.$$

On a donc

$$\prod_{e\in E}\left[X^{<d_e>}\right] = \sum_{\delta=1}^{\mathrm{Min}(d_e)} \left[X^{<\delta>}\right]\left[X_{(d_e-\delta),E}\right].$$

Pour chaque E-uple $\boldsymbol{d}'$ vérifiant $0 \leqslant \boldsymbol{d}' \leqslant \boldsymbol{d}$. écrivons la relation ci-dessus et multiplions la par $\mu_X^E(\boldsymbol{d}')$. En sommant toutes les relations obtenues, et compte tenu de (3.14), on obtient la relation

$$[X_{\boldsymbol{d},E}] = \sum_{0\leqslant \boldsymbol{d}'\leqslant \boldsymbol{d}} \mu_X^E(\boldsymbol{d}') \prod_{e\in E}\left[X^{<d_e-d'_e>}\right].$$

Or, l'hypothèse sur B entraîne pour tout $\boldsymbol{d}$ l'égalité $X_{\boldsymbol{d}}^B = X_{\boldsymbol{d},E}$. On en déduit le résultat. $\square$

Corollaire 3.8. *Soit B un sous-ensemble de $\{0,1\}^E$ tel que si $\boldsymbol{n} \in B$ et $\boldsymbol{n}' \geqslant \boldsymbol{n}$ alors $\boldsymbol{n}' \in B$. On suppose en outre que B vérifie l'hypothèse suivante : il existe une partition $E = E_\beta \coprod \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ de E telle qu'on ait*

$$B^{\min} = \left\{\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^E, \quad \exists\gamma\in\Gamma, \quad (n_e = 1 \Leftrightarrow e \in E_\gamma)\right\}.$$

Alors on a

$$\forall \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^E, \quad \mu_X^{B,\mathrm{mot}}(\boldsymbol{d}) = \prod_{e\in E_\beta} [X^{<d_e>}] \prod_{\gamma\in\Gamma} \mu_X^{E_\gamma}((d_e)_{e\in E_\gamma}).$$

3.5 Fonction de Möbius motivique associée à un éventail

Soit N un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini dont on notera r le rang. On rappelle brièvement la notion d'éventail de N. Une partie σ de $N \otimes \mathbf{R}$ est un *cône polyédral rationnel* de $N \otimes \mathbf{R}$ si elle s'écrit $\sigma = \sum_{i\in I} \mathbf{R}_{\geqslant 0}\, m_i$ où I est un ensemble fini et les (m_i) sont dans N. Un cône polyédral rationnel σ est dit *strictement convexe* si $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$. Un *éventail* de N est un ensemble fini Σ de cônes polyédraux rationnels strictement convexes de $N \otimes \mathbf{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

- toute face d'un cône de Σ est un cône de Σ,
- l'intersection de deux cônes de Σ est une face de chacun des deux cônes.

Un éventail Σ est dit *régulier* si tout cône de Σ est engendré par une partie d'une $\mathbf{Z}$-base de N, et *complet* si les cônes de Σ recouvrent $N \otimes \mathbf{R}$.

Soit Σ un éventail non réduit à $\{0\}$. On note $\Sigma(1)$ l'ensemble des rayons de Σ, *i.e.* l'ensemble des cônes de dimension 1 de Σ. Pour $\sigma \in \Sigma$, on note $\sigma(1)$ l'ensemble des éléments de $\Sigma(1)$ qui sont des faces de σ. Pour $\alpha \in \Sigma(1)$ on abrégera les notations $\alpha \in \sigma(1)$ et $\alpha \notin \sigma(1)$ en $\alpha \in \sigma$ et $\alpha \notin \sigma$.

Soit B_Σ le sous-ensemble de $\{0,1\}^{\Sigma(1)}$ défini par

$$B_\Sigma = \left\{ \boldsymbol{n} \in \{0,1\}^{\Sigma(1)}, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad \exists\, \alpha \notin \sigma, \quad n_\alpha = 1 \right\}.$$

Il est clair que si $\boldsymbol{n} \in B_\Sigma$ et $\boldsymbol{n}' \geqslant \boldsymbol{n}$ alors $\boldsymbol{n}' \in B_\Sigma$.

Lemme 3.9. *La valuation de $P_{B_\Sigma} - 1$ est supérieure ou égale à 2.*

Démonstration. Soit $\alpha_0 \in \Sigma(1)$ et $(n_\alpha) \in \{0,1\}^{\Sigma(1)}$ vérifiant $n_{\alpha_0} = 1$ et $n_\alpha = 0$ pour $\alpha \neq \alpha_0$. Il s'agit de montrer que $n_\alpha \notin B_\Sigma$. Mais ceci découle aussitôt de la définition de B_Σ et du fait que α est une face de α. $\square$

On déduit du lemme 3.9 et du corollaire 3.4 le critère de convergence suivant.

Corollaire 3.10. *Soit k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété quasi-projective. Soit Σ un éventail. Soit $(V_{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}}$ une famille d'éléments de $\widehat{\mathcal{M}^X_{k,\mathbf{Q}}}$ vérifiant*

$$\forall\ \boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}, \quad V_{\boldsymbol{d}} \in \mathcal{F}^{\,\dim(X)\,|\boldsymbol{d}|}\ \widehat{\mathcal{M}^X_{k,\mathbf{Q}}}.$$

Alors la série $\sum\limits_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_X^{B_\Sigma,X}(\boldsymbol{d})\, V_{\boldsymbol{d}}$ *converge dans* $\widehat{\mathcal{M}^X_{k,\mathbf{Q}}}$.

Le cas des espaces projectifs Soit $n \geqslant 1$ et Σ l'éventail de $\mathbf{Z}^n \otimes \mathbf{R}$ dont les rayons sont engendrés par les éléments de la base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbf{Z}^n$ et l'élément $\sum_i e_i$. La variété torique associée est l'espace projectif de dimension n. On a $B_\Sigma = \{(1,\dots,1)\}$. Soit k un corps et X une k-variété quasi-projective. D'après la proposition 3.7 on a $\mu_X^{B_\Sigma,\mathrm{mot}} = \mu_X^{\Sigma(1)}$. En particulier, les réponses aux questions 3.5 et 3.6 sont positives dans ce cas.

Le cas des surfaces de Hirzebruch Soit $m \geqslant 0$ un entier et Σ l'éventail de $\mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R}$ dont les rayons sont engendrés par $\rho_1 = (1,0)$, $\rho_2 = (-1,m)$, $\rho_3 = (0,1)$, $\rho_4 = -\rho_3$. La variété torique associée est la m-ème surface de Hirzebruch. On a $B_\Sigma^{\min} = \{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$. Soit k un corps et X une k-variété quasi-projective. D'après le corollaire 3.8, on a

$$\mu_X^{B_\Sigma,\mathrm{mot}}(d_1,d_2,d_3,d_4) = \mu_X^{\{1,3\}}(d_1,d_3)\, \mu_X^{\{2,4\}}(d_2,d_4).$$

Là encore, les réponses aux questions 3.5 et 3.6 sont positives.

4. Fonction zêta des hauteurs motivique

Soit k un corps et $\mathcal{C}$ une k-courbe projective, lisse et géométriquement intègre. Soit K le corps des fonctions de $\mathcal{C}$. Considérons une variété projective V définie[2] sur k. Les éléments de $V(K)$ s'identifient donc aux k-morphismes $x : \mathcal{C} \to V$. On fixe un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur V.

[2] On pourrait en fait considérer des variétés définies sur K, *i.e.* des familles non constantes, mais nous nous limiterons ici au cas particulier où le corps de définition est le corps des constantes.

4.1 Le cas classique

On suppose le corps k fini. La formule $h_{\mathcal{L}}(x) = \deg(x^*\mathcal{L})$ définit alors une hauteur d'Arakelov (logarithmique) sur $V(K)$, relative au faisceau $\mathcal{L}$. Si on suppose que la classe de $\mathcal{L}$ est à l'intérieur du cône effectif, il existe un ouvert non vide U_0 de V tel que pour tout ouvert U de U_0 et tout entier $d \geqslant 0$, l'ensemble $\{x \in U(K),\ h_{\mathcal{L}}(x) = d\}$ est fini (*cf.* [Pey06, Corollaire 2.7.3 et Remarque 2.7.4]). La fonction zêta des hauteurs associée à un tel ouvert U est définie par

$$Z_{\mathcal{C},U,h_{\mathcal{L}}}(T) = \sum_{x\in U(K)} T^{h_{\mathcal{L}}(x)}.$$

Si V n'est pas de type général, le comportement analytique attendu de cette série est décrit par la version géométrique des conjectures de Manin et al.

4.2 Le cas motivique

Le corps k est supposé quelconque. On peut toujours définir une fonction hauteur $h_{\mathcal{L}} : V(K) \to \mathbf{Z}$ par la formule $h_{\mathcal{L}}(x) = \deg(x^*\mathcal{L})$. Si L est une extension de k, on note K_L le corps des fonctions de la courbe $\mathcal{C} \times_k L$. Si s est un point d'un schéma S, on notera κ_s le corps résiduel en s. Si φ est un morphisme de source un S-schéma, on notera φ_s le morphisme déduit de φ par le changement de base $\operatorname{Spec}(\kappa_s) \to S$.

On note $\mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)$ le foncteur qui à un k-schéma S associe

$$\{\varphi \in \operatorname{Hom}_k(\mathcal{C}_S, V), \quad \forall\, s \in S, \quad \deg(\varphi_s^*(\mathcal{L})) = d\}.$$

Pour tout ouvert U de V, on note $\mathbf{Hom}_k^{U,\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)$ le foncteur qui à un k-schéma S associe

$$\left\{\varphi \in \mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)(S), \quad \forall\, s \in S, \quad \varphi_s \in U(K_{\kappa_s})\right\}.$$

Lemme 4.1. *On suppose que la classe de $\mathcal{L}$ est à l'intérieur du cône effectif de V. Alors il existe un ouvert U_0 non vide de V tel que pour tout ouvert U de U_0 et pour tout $d \geqslant 1$, le foncteur $\boldsymbol{Hom}_k^{U,\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)$ est représentable par un k-schéma quasi-projectif.*

Démonstration. Supposons $\mathcal{L}$ ample. D'après [Gro95, 4.c], $\mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)$ est représentable par un k-schéma quasi-projectif. Or, pour tout ouvert U de V, $\mathbf{Hom}_k^{U,\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)$ est un sous-foncteur ouvert de $\mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)$. On en déduit le résultat quand $\mathcal{L}$ est ample.

Dans le cas général, V étant projective, on peut fixer un fibré en droite très ample $\mathcal{L}_0$ sur V. Comme la classe de $\mathcal{L}$ est à l'intérieur du cône effectif, il existe un entier $N \geqslant 1$ et un fibré en droites effectif $\mathcal{L}_1$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes N} = \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1$. Soit U_0 le complémentaire des points-base de $\mathcal{L}_1$ et U un ouvert contenu dans U_0. Pour toute extension L de k et tout élément φ de $U(K_L)$ (*i.e.* tout morphisme $\varphi : \mathcal{C}_L \to V$ dont l'image rencontre U), on a alors $\deg(\varphi^*(\mathcal{L}_1)) \geqslant 0$. Ainsi si un tel φ vérifie $\deg(\varphi^*(\mathcal{L})) = d$ on a $\deg(\varphi^*(\mathcal{L}_0)) \leqslant \frac{d}{N}$. Donc le foncteur $\mathbf{Hom}_k^{U,\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)$ s'identifie à un sous-foncteur ouvert du foncteur $\coprod_{d' \leqslant \frac{d}{N}} \mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L}_0,d'}(\mathcal{C}, V)$. Ce dernier foncteur étant représentable par un k-schéma quasi-projectif, on a le résultat. □

Remarque 4.2. Hormis l'utilisation du théorème de représentabilité de Grothendieck, la preuve de ce lemme est formellement la même que celle de son analogue « classique ». Notons aussi que si U est un ouvert de V dont le groupe de Picard est trivial, U est nécessairement contenu dans l'ouvert U_0 de la démonstration, en particulier $\mathbf{Hom}_k^{U,\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)$ est représentable par un schéma quasi-projectif.

On suppose désormais que la classe de $\mathcal{L}$ est à l'intérieur du cône effectif. Pour tout ouvert U assez petit de V et tout entier $d \geqslant 0$, on note $U_{\mathcal{L},d}$ le schéma quasi-projectif représentant le foncteur

$\mathbf{Hom}_k^{U,\mathcal{L},d}(\mathcal{C}, V)$. On souhaite notamment étudier le « comportement asympotique » de $U_{\mathcal{L},d}$ quand d tend vers $+\infty$. Pour cela, on considèrera notamment l'élément de $\mathcal{M}_k[[T]]$ défini par

$$Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C},U,h_{\mathcal{L}}}(T) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{d\geqslant 0} \left[U_{\mathcal{L},d}\right] T^{d}.$$

Si k est fini, la série $Z_{\mathcal{C},U,h_{\mathcal{L}}}(T)$ est l'image de $Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C},U,h_{\mathcal{L}}}$ par le morphisme $\#_k$. Si k est de caractéristique zéro, l'image dans $\mathcal{M}^{\chi}_k[[T]]$ de $Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C},U,h_{\mathcal{L}}}(T)$ par le morphisme χ sera notée $Z^{\chi}_{\mathcal{C},U,h_{\mathcal{L}}}(T)$.

Il est naturel de se demander s'il n'existe pas pour les séries $Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C},U,h_{\mathcal{L}}}$ ou $Z^{\chi}_{\mathcal{C},U,h_{\mathcal{L}}}$ des analogues motiviques des résultats obtenus ou conjecturés pour la série $Z_{\mathcal{C},U,h_{\mathcal{L}}}$. On précise cette question dans un cas particulier à la section suivante.

4.3 Un analogue motivique de la conjecture de Manin

On suppose désormais que la variété V vérifie les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.3. i) La classe du faisceau anticanonique de V est située à l'intérieur du cône effectif.

ii) L'ensemble $V(K)$ est Zariski dense. En d'autres termes, pour tout ouvert non vide U de V, il existe un k-morphisme $\mathcal{C} \to V$ dont U rencontre l'image.

Dans tout ce qui suit, on note $\mathcal{L}_0$ le faisceau anticanonique de V et on considère la hauteur $h_{\mathcal{L}_0}$ associée à $\mathcal{L}_0$, notée h_0. On note aussi $U_{0,d} = U_{\mathcal{L}_0,d}$.

Supposons le corps k fini de cardinal q. Une partie de la version géométrique de la conjecture de Manin peut alors se traduire par les deux questions suivantes.

Question 4.4. Existe-t-il un ouvert non vide U de V tel que la série $Z_{\mathcal{C},U,h_0}(q^{-s})$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$?

Question 4.5. Existe-t-il un ouvert non vide U satisfaisant les exigences de la question 4.4 et un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction holomorphe sur $\Re(s) > 1$ définie par $Z_{\mathcal{C},U,h_0}(q^{-s})$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\Re(s) > 1-\varepsilon$ avec un pôle d'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{NS}(V))$ en $s = 1$?

Supposons à présent k quelconque. La question qui suit est un analogue motivique naïf de la question 4.4.

Question 4.6. Existe-t-il un ouvert non vide U de V tel que, pour tout entier $\kappa \geqslant 2$, la série $Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C},U,h_0}(\mathbf{L}^{-\kappa})$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}_k}$?

Cette question peut se reformuler ainsi : existe-t-il un ouvert non vide U tel que pour tout entier $\kappa \geqslant 2$ on a

$$\lim_{d\to\infty} \dim(U_{0,d}) - \kappa\, d = -\infty \quad ?$$

On voit ainsi que pour obtenir un analogue plus fidèle de la question 4.4, cette dernière condition devrait être exigée pour tout réel $\kappa > 1$.

Question 4.7. Existe-t-il un ouvert non vide U de V tel que

$$\overline{\lim_{d\to\infty}} \frac{\dim(U_{0,d})}{d} \leqslant 1 \quad ?$$

Pour toute variété X, on note $\rho(X)$ le nombre de composantes géométriques irréductibles de dimension maximale de X. Au vu des estimations de Lang-Weil et du comportement asympotique de $|U_{0,d}(k)|$ donnée par des théorèmes taubériens standards lorsque la réponse à la question 4.5 est positive, un analogue naturel de la question 4.5 est la question suivante.

QUESTION 4.8. Existe-t-il un ouvert non vide U de V vérifiant

$$\overline{\lim_{d\to\infty}} \frac{\dim(U_{0,d})}{d} = 1$$

et

$$\overline{\lim_{d\to\infty}} \frac{\log(\rho(U_{0,d}))}{\log(d)} = \operatorname{rg}(\mathrm{NS}(V)) \quad ?$$

Un autre analogue possible est la question suivante.

QUESTION 4.9. Existe-t-il un ouvert non vide U de V vérifiant

$$\overline{\lim_{d\to\infty}} \frac{\dim(U_{0,d})}{d} = 1$$

et tel que la série définie par le produit $(1-\mathbf{L}\,T)^{\operatorname{rg}(\mathrm{NS}(V))}\, Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C},U,h_0}(T)$ converge pour $T=\mathbf{L}^{-1}$?

On note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, et $k^{\text{sép}}$ la clôture séparable de k dans $\overline{k}$. Désormais, en plus des hypothèses 4.3, on suppose que la variété V vérifie les hypothèses suivantes (*cf.* les hypothèses du paragraphe 2.1 de [Pey03a] où l'on notera que la variété V est supposée définie seulement sur le corps des fonctions de $\mathcal{C}$) :

HYPOTHÈSE 4.10. i) Les groupes de cohomologie $H^1(V,\mathcal{O}_V)$ et $H^2(V,\mathcal{O}_V)$ sont nuls.

ii) Le groupe $\mathrm{Pic}(V\times_k k^{\text{sép}})$ est libre de rang fini et coïncide avec $\mathrm{Pic}(V\times_k \overline{k})$.

iii) L'action du groupe de Galois absolu sur $\mathrm{Pic}(V\times_k k^{\text{sép}})$ est triviale.

iv) Le cône effectif de V (noté $C_{\text{eff}}(V)$) est polyédral rationnel.

v) Si l est un nombre premier distinct de la caractéristique de k, la partie l-primaire de $Br(V\times_k\overline{k})$ est finie.

Le fait d'avoir supposé la variété V définie sur le corps des constantes de $\mathcal{C}$ et l'hypothèse iii ci-dessus signifie que nous nous plaçons dans le cas arithmétiquement le plus simple. Notons que les variétés toriques déployées vérifient les hypothèses 4.3 et 4.10.

On pose

$$Z_{C_{\text{eff}}(V),\mathcal{L}_0}(T) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{y\in C_{\text{eff}}(V)^\vee\cap \mathrm{Pic}(V)^\vee} T^{\langle y\,,\,\mathcal{L}_0\rangle}.$$

En écrivant $C_{\text{eff}}(V)^\vee$ comme le support d'un éventail régulier, on voit que $Z_{C_{\text{eff}}(V),\mathcal{L}_0}(T)$ est une fraction rationnelle à coefficients rationnels en T, dont 1 est un pôle d'ordre $\operatorname{rg}(\mathrm{Pic}(V))$. On pose

$$\alpha^*(V) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{z\to 1}(z-1)^{\operatorname{rg}(\mathrm{Pic}(V))}\, Z_{C_{\text{eff}}(V),\mathcal{L}_0}(z).$$

C'est un nombre rationnel non nul.

Supposons le corps k fini de cardinal q. Une version géométrique de la conjecture de Manin raffinée par Peyre peut alors s'énoncer ainsi :

QUESTION 4.11. Si U est un ouvert satisfaisant les exigences des questions 4.4 et 4.5, a-t-on

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{\operatorname{rg}(\mathrm{Pic}(V))} Z_{\mathcal{C},U,h_0}(q^{-s}) =$$
$$\alpha^*(V)\, q^{\,(1-g_{\mathcal{C}})\,\dim(V)}\, \big(\operatorname{Res}_{s=1} Z_{\mathcal{C}}(q^{-s})\big)^{\operatorname{rg}(\mathrm{Pic}(V))} \times \prod_{v\in\mathcal{C}^{(0)}} (1-|k_v|^{-1})^{\operatorname{rg}(\mathrm{Pic}(V))}\, \frac{|V(k_v)|}{|k_v|^{\dim(V)}} \quad ?$$

La convergence du produit eulérien apparaissant dans l'expression conjecturale du terme principal en $s=1$ est démontrée par Peyre en utilisant les conjectures de Weil démontrées par Deligne. Ainsi, sous les hypothèses énoncées ci-dessus, Peyre montre que l'analogue de l'hypothèse de Riemann entraîne l'estimation asymptotique

$$|V(k_v)| = |k_v|^{\dim V} + \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V)\;|k_v|^{\dim V-1} + \underset{\deg(v)\to\infty}{\mathcal{O}}\left(|k_v|^{\dim V-\frac{3}{2}}\right). \tag{4.1}$$

La convergence en découle.

La réponse à la question 4.5 est positive dans le cas des variétés toriques ([Bou03a]) et dans le cas des variétés de drapeaux ([Pey03a]).

Au vu de (4.1), on peut se poser la question suivante :

Question 4.12. A-t-on

$$\forall d\geqslant 1,\quad \Phi_d(V) - \mathbf{L}^{d\dim V} - \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V)\,\mathbf{L}^{d\,(\dim V-1)} \in \mathcal{F}^{d(\frac{3}{2}-\dim(V))}\mathcal{M}_k \quad ?$$

Nous donnons à présent un analogue motivique de la question 4.5.

Question 4.13. On suppose que les réponses aux questions 4.12 et 4.9 sont positives. Soit U un ouvert satisfaisant les exigences de la question 4.9. La série

$$(1-\mathbf{L}\,T)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))}\,Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C},U,h_0}$$

converge-t-elle dans $\widehat{\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}}$ en $T=\mathbf{L}^{-1}$ vers

$$\alpha^*(V)\,\mathbf{L}^{(1-g_{\mathcal{C}})\dim(V)}\,\left(\left[(1-\mathbf{L}\,T)\,Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C}}(T)\right](\mathbf{L}^{-1})\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))}$$

$$\times\ \exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\Psi_n(\mathcal{C})\log\left((1-\mathbf{L}^{-n})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))}\frac{\Phi_n(V)}{\mathbf{L}^{-n\,\dim(V)}}\right)\right)\quad ?$$

La convergence du produit eulérien motivique est assurée par la réponse positive à la question 4.12.

Si le corps k est fini, une réponse positive à la question 4.13 ne permet pas a priori d'obtenir par spécialisation via $\#_k$ des résultats sur la fonction zêta des hauteurs usuelle. Le terme principal motivique proposé ici se spécialise formellement sur le terme principal de la fonction zêta des hauteurs usuelle, mais la fonction $\#_k$ n'est pas définie sur $\widehat{\mathcal{M}_k}$.

Une telle spécialisation sera cependant fructueuse dans le cas où la série $Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C},U,h_0}(T)$ est une fraction rationnelle en T. Cette situation se produit pour les espaces projectifs et, comme on le montre ci-dessous, pour les surfaces de Hirzebruch si $\mathcal{C}=\mathbf{P}^1$. Cependant, pour une variété torique déployée quelconque, nous suspectons qu'en général $Z_{\mathcal{C},U,h_0}(T)$ (et donc $Z^{\mathrm{mot}}_{\mathcal{C},U,h_0}(T)$) n'est pas une fraction rationnelle en T.

Supposons à présent k de caractéristique zéro. Une variante évidente des questions 4.12 et 4.13 est donnée par les énoncés suivants.

Question 4.14. A-t-on

$$\forall d\geqslant 1,\quad \Phi^{\chi}_d(V) - \mathbf{L}^{d\dim V} - \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V)\,\mathbf{L}^{d\,(\dim V-1)} \in \mathcal{F}^{d(\frac{3}{2}-\dim(V))}\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathbf{Q}} \quad ?$$

Question 4.15. On suppose que les réponses aux questions 4.14 et 4.7 sont positives. Soit U un ouvert satisfaisant les exigences de la question 4.7. La série

$$(1-\mathbf{L}\,T)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V))}\,Z^{\mathrm{mot},\chi}_{\mathcal{C},U,h_0}(T)$$

converge-t-elle dans $\widehat{\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^{\chi}}$ en $T = \mathbf{L}^{-1}$ vers

$$\alpha^*(V)\,\mathbf{L}^{(1-g_{\mathcal{C}})\dim(V)}\,\left(\left[(1-\mathbf{L}\,T)\,Z_{\mathcal{C}}^{\chi}(T)\right]\left(\mathbf{L}^{-1}\right)\right)^{\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(V))}$$

$$\times\;\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\Psi_n^{\chi}(\mathcal{C})\log\left((1-\mathbf{L}^{-n})^{\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(V))}\frac{\Phi_n^{\chi}(V)}{\mathbf{L}^{-n\dim(X)}}\right)\right)\quad ?$$

Dans la section suivante, ***en supposant que la courbe*** $\mathcal{C}$ ***est rationelle,*** nous démontrons les résultats suivants : la réponse à la question 4.7 est positive si V est une variété torique déployée, en prenant pour U l'orbite ouverte (corollaire 5.17) ; la réponse à la question 4.13 est positive si V est une surface de Hirzebruch, en prenant pour U l'orbite ouverte (on montre en fait un résultat plus fort, à savoir le point i du théorème 1.1, dont l'énoncé est repris à la sous-section 5.3). Enfin, si on suppose k de caractéristique zéro, nous montrons que la réponse à la question 4.15 est positive si V est une variété torique déployée, en prenant pour U l'orbite ouverte (à savoir le point ii du théorème 1.1).

Les preuves du corollaire 5.17 et du théorème 1.1 s'appuient sur le lemme de paramétrisation 5.16. La preuve du point ii du théorème 1.1 utilise en outre le théorème 3.3 et le corollaire 3.4. Une réponse positive à la question 3.5 permettrait de montrer, par les mêmes méthodes, que la réponse à la question 4.13 est positive pour toute variété torique déployée.

Remarque 4.16. Pour une réponse partielle à la question 4.14 lorque la variété V n'est plus nécessairement torique, on pourra consulter [Bou08a].

5. Démonstration des résultats annoncés

5.1 Quelques rappels sur les variétés toriques

Nous nous contentons de citer les résultats qui nous seront utiles, ce qui nous permet de fixer quelques notations. Nous renvoyons le lecteur aux références classiques sur le sujet (par exemple [Oda88], [Ful93], [Ewa96]) pour plus de détails. Soit $r \geqslant 1$ un entier et $U \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m^r$ un tore déployé de dimension r défini sur k. Soit $\mathcal{X}^*(U)$ son groupe des caractères et $\mathcal{X}_*(U)$ son groupe des cocaractères. On note $\langle\,.\,,\,.\rangle$ l'accouplement naturel entre ces deux $\mathbf{Z}$-modules. Soit k un corps. À tout éventail Σ de $\mathcal{X}_*(U)$ est associé une k-variété normale irréductible X_Σ, munie d'une action de U et possédant une orbite ouverte isomorphe à U, en d'autres termes une variété torique déployée définie sur k. On suppose désormais l'éventail Σ projectif et régulier. La variété X_Σ est alors projective et lisse.

Pour $\alpha \in \Sigma(1)$ nous notons $\rho_\alpha \in \mathcal{X}_*(U)$ le générateur de α, $\mathfrak{D}_\alpha$ le diviseur U-invariant associé et $\mathcal{D}_\alpha$ sa classe dans le groupe de Picard de X_Σ. Le diviseur $\sum_{\alpha\in\Sigma(1)}\mathfrak{D}_\alpha$ est alors un diviseur anticanonique. Le morphisme qui à un élément m de $\mathcal{X}^*(U)$ associe $(\langle m\,,\,\rho_\alpha\rangle)_{\alpha\in\Sigma(1)}$ induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}^*(U) \longrightarrow \underset{\alpha\in\Sigma(1)}{\oplus}\mathbf{Z}\,\mathfrak{D}_\alpha \longrightarrow \operatorname{Pic}(X_\Sigma) \longrightarrow 0. \tag{5.1}$$

5.2 Paramétrisation des morphismes

On conserve les notations de la sous-section 5.1. Soit

$$\mathcal{T}_\Sigma = \mathbf{A}_k^{\Sigma(1)} \setminus \bigcap_{\sigma\in\Sigma}\left\{\prod_{\alpha\notin\sigma} x_\alpha = 0\right\}.$$

La suite exacte (5.1) induit une suite exacte de tores

$$0 \longrightarrow T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)} \longrightarrow \mathbf{G}_m^{\Sigma(1)} \xrightarrow{\pi} U \longrightarrow 0. \tag{5.2}$$

L'action diagonale de $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$ sur $\mathcal{T}_\Sigma$ induit par restriction une action de $T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}$ sur $\mathcal{T}_\Sigma$. D'après [Cox95b], le morphisme π s'étend en un morphisme équivariant $\mathcal{T}_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma$ qui est un quotient géométrique de $\mathcal{T}_\Sigma$ par $T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}$. Un tel quotient fournit ainsi un système de coordonnées $T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}$-homogènes sur X_Σ. Ceci généralise les coordonnées homogènes classiques de l'espace projectif. Signalons que le morphisme $\mathcal{T}_\Sigma \to X_\Sigma$ fait de $\mathcal{T}_\Sigma$ un torseur universel au-dessus de X_Σ (*cf.* [Sal98, proposition 8.5] et [Mad05, Appendix]). Ces coordonnées homogènes permettent à Cox de donner dans [Cox95a] une description du foncteur des points de X_Σ, que nous rappelons ci-dessous. Elle généralise la description bien connue du foncteur des points de l'espace projectif. Il en découle pour tout k-schéma S une description simple des k-morphismes de $\mathbf{P}^1_S$ dans X_Σ, que nous allons utiliser pour expliciter le schéma quasi-projectif qui représente le foncteur $\mathbf{Hom}_k^{U,\mathcal{L}_0,d}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$ défini dans la sous-section 4.2.

Définition 5.1. Soit S un k-schéma. Une *Σ-collection sur S* est la donnée pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$ d'un fibré en droites $\mathcal{L}_\alpha$ sur S et d'une section globale v_α de $\mathcal{L}_\alpha$ ainsi que d'une famille $(c_m)_{m\in\mathcal{X}^*(U)}$ d'isomorphismes

$$c_m : \bigotimes_\alpha \mathcal{L}_\alpha^{\langle m\,,\,\rho_\alpha\rangle} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S,$$

ces données étant astreintes à vérifier les conditions suivantes :

i) pour tous m, m' dans $\mathcal{X}^*(U)$, on a $c_m \otimes c_{m'} = c_{m+m'}$;

ii) pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$, la section v_α induit un morphisme $\mathcal{O}_S \to \mathcal{L}_\alpha$ et par dualité un morphisme $\mathcal{L}_\alpha^{-1} \to \mathcal{O}_S$; le morphisme induit

$$\bigoplus_{\sigma\in\Sigma} \bigotimes_{\alpha\notin\sigma} \mathcal{L}_\alpha^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_S$$

est surjectif.

Un isomorphisme entre deux Σ-collections $((\mathcal{L}_\alpha, v_\alpha), (c_m))$ et $((\mathcal{L}'_\alpha, s'_\alpha), (c'_m))$ est une famille d'isomorphismes $\mathcal{L}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'_\alpha$ envoyant s_α sur s'_α et c_m sur c'_m.

Cox démontre alors le théorème suivant ([Cox95a, Theorem 1.1]).

Théorème 5.2. *Le foncteur qui à un k-schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de Σ-collections sur S est représenté par la variété torique X_Σ.*

Très grossièrement, l'idée de la démonstration est la suivante : à la Σ-collection $((\mathcal{L}_\alpha, v_\alpha), (c_m))$ on fait correspondre le morphisme qui à $s \in S$ associe le « point de coordonnées homogènes $(v_\alpha(s))$ ». La condition i et la suite exacte (5.1) montrent que le $\Sigma(1)$-uple $(v_\alpha(s))$ est bien défini modulo l'action de $T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}$. La condition ii assure que $(v_\alpha(s))$ est dans $\mathcal{T}_\Sigma$. On obtient ainsi un morphisme $S \to X_\Sigma$. Réciproquement, à un morphisme $\pi : S \to X_\Sigma$, on associe la Σ-collection $(\pi^*\mathcal{O}(\mathfrak{D}_\alpha), \pi^* v_\alpha, \pi^* c_m)$ où v_α est la section canonique de $\mathcal{O}(\mathfrak{D}_\alpha)$ et les trivialisations c_m sont données par la suite exacte (5.1).

Notation 5.3. On note $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ le sous-monoïde de $\mathbf{N}^{\Sigma(1)}$ constitué des éléments $\boldsymbol{d}$ vérifiant

$$\forall\, m \in \mathcal{X}^*(U), \qquad \sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \langle m\,,\,\rho_\alpha\rangle\, d_\alpha = 0. \tag{5.3}$$

En d'autres termes, si on identifie $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)^\vee$ à un sous-groupe de $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ via le dual de la suite exacte (5.1), $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ est l'intersection de $\mathbf{N}^{\Sigma(1)}$ et de $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)^\vee$.

Notation 5.4. Pour $\boldsymbol{d} \in \mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$, on note $\mathbf{Hom}_k^{U,\boldsymbol{d}}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$ le foncteur qui à un k-schéma S associe l'ensemble des éléments φ de $\mathrm{Hom}_k(\mathbf{P}^1_S, X_\Sigma)$ tels que, pour tout $s \in S$, $\varphi_s \in U(\kappa_s(t))$ (*i.e.* l'image de φ_s rencontre U) et pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$, $\deg(\varphi_s^*(\mathfrak{D}_\alpha)) = d_\alpha$.

Si L est une extension de k, on a une suite exacte

$$U(L(t)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{X}^*(U), \mathrm{Div}(\mathbf{P}^1_L)) \xrightarrow{\deg} \mathrm{Hom}(\mathcal{X}^*(U), \mathbf{Z}) \to 0.$$

Si φ est un élément de $U(L(t))$, son image dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}^*(U), \mathrm{Div}(\mathbf{P}^1_L))$ est

$$m \longmapsto \sum_{\alpha\in\Sigma(1)} \langle m\,,\,\rho_\alpha\rangle\ \varphi^*(\mathfrak{D}_\alpha).$$

La suite exacte ci-desus montre alors que $(\deg(\varphi^*(\mathfrak{D}_\alpha))$ est un élément de $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$. Ainsi si $\boldsymbol{d}$ n'appartient pas à $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$, le foncteur $\mathbf{Hom}_k^{U,\boldsymbol{d}}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$ est vide .

Le but de ce qui suit utiliser le théorème 5.2 est d'expliciter une variété représentant $\mathbf{Hom}_k^{U,\boldsymbol{d}}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$ lorsque $\boldsymbol{d}$ appartient à $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$.

Si S est un k-schéma, on note $p_{1,S}$ et $p_{2,S}$ les projections de $\mathbf{P}^1_S$ vers $\mathbf{P}^1_k$ et S respectivement. On a alors un isomorphisme

$$p_{1,S}^* + p_{2,S}^*\ :\ \mathbf{Z} \oplus \mathrm{Pic}(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^1_S).$$

DÉFINITION 5.5. Soit S un k-schéma et $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$. Une $(\mathbf{P}^1, \Sigma, \boldsymbol{d})$-*collection non dégénérée sur* S est la donnée d'une Σ-collection $((\mathcal{M}_\alpha, u_\alpha), (c_m))$ sur $\mathbf{P}^1_S$ telle que pour tout α, u_α est non nulle et telle que la projection $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^1_S) \to \mathbf{Z}$ envoie la classe de $\mathcal{M}_\alpha$ sur d_α. Un isomorphisme entre deux $(\mathbf{P}^1, \Sigma, \boldsymbol{d})$-collections non dégénérées sur S est un isomorphisme entre ces deux objets en tant que Σ-collections sur $\mathbf{P}^1_S$.

Le foncteur qui à S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\mathbf{P}^1, \Sigma, \boldsymbol{d})$-collections non dégénérées sur S s'identifie à un sous-foncteur de $\mathbf{Hom}_k^{\boldsymbol{d}}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$. Un examen des arguments de la démonstration du théorème 5.2 permet de montrer le lemme suivant (le point important est que l'image réciproque de U dans $\mathcal{T}_\Sigma$ est l'ouvert $\prod x_\alpha \neq 0$).

LEMME 5.6. *À toute $(\mathbf{P}^1, \Sigma, \boldsymbol{d})$-collection non dégénérée sur un k-schéma S on peut associer de manière fonctorielle en S un k-morphisme de $\mathbf{P}^1_S$ vers X_Σ.*

Ceci induit un isomorphisme entre le foncteur qui à un k-schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme $(\mathbf{P}^1, \Sigma, \boldsymbol{d})$-collections non dégénérées sur S et le foncteur $\mathbf{Hom}_k^{U,\boldsymbol{d}}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$.

DÉFINITION 5.7. Soit S un k-schéma et $\boldsymbol{d}$ un élément de $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$. Une $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-*collection du second type sur* S est la donnée pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$ d'un fibré en droites $\mathcal{L}_\alpha$ sur S et d'un $(d_\alpha + 1)$-uple $(s_{\alpha,i})_{i=0,\dots,d_\alpha}$ de sections globales de $\mathcal{L}_\alpha$ qui engendrent $\mathcal{L}_\alpha$.

Un isomorphisme entre deux $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type $(\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}))$ et $\left(\mathcal{L}'_\alpha, (s'_{\alpha,i})\right)$ est une famille d'isomorphismes $\mathcal{L}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'_\alpha$ envoyant $s_{\alpha,i}$ sur $s'_{\alpha,i}$.

DÉFINITION 5.8. Soit $(\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}))$ une $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collection du second type sur S . Soit $s \in S$. Pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$, fixons un isomorphisme $H^0(\kappa_s, s^*\mathcal{L}_\alpha) \xrightarrow{\sim} \kappa_s$. On identifie alors l'image de $(s_{\alpha,i})$ dans $H^0(\kappa_s, s^*\mathcal{L}_\alpha)^{d_\alpha+1}$ à un polynôme $P_{\alpha,s}$ homogène en deux variables de degré d_α.

La $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collection $(\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}))$ est dite *non dégénérée* si elle vérifie la condition suivante : pour tout $s \in S$, les polynômes

$$\left(\prod_{\alpha\notin\sigma} P_{\alpha,s}\right)_{\sigma\in\Sigma}$$

n'ont pas de zéro commun non trivial dans une clôture algébrique de κ_s.

Un isomorphisme entre deux $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type non dégénérées est un isomorphisme entre ces deux objets en tant que $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type.

Définition 5.9. Soit M un sous-module de $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ tel que le quotient de $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ par M soit sans torsion. Une $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collection du second type M-trivialisée sur un k-schéma S est un couple

$$((\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i})), (c_m)_{m\in M})$$

où $(\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}))$ est une $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collection du second type sur S et $(c_m)_{m\in M}$ est une famille d'isomorphismes

$$c_m : \bigotimes_\alpha \mathcal{L}_\alpha^{m_\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S,$$

telle que, pour tout m et m' dans M, on a $c_m \otimes c_{m'} = c_{m+m'}$.

Un isomorphisme entre deux $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type M-trivialisées $((\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}), (c_m))$ et $\Big((\mathcal{L}'_\alpha, (s'_{\alpha,i})), (c'_m)\Big)$ est une famille d'isomorphismes $\mathcal{L}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'_\alpha$ envoyant $s_{\alpha,i}$ sur $s'_{\alpha,i}$ et c_m sur c'_m.

Soit $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$. L'action diagonale du tore $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$ sur $\prod_\alpha \Big(\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\}\Big)$ induit un $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$-torseur

$$\prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \Big(\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\}\Big) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \P_k^{d_\alpha}.$$

On a défini au début de la section 3 un ouvert $\big(\mathbf{P}^1\big)_{\boldsymbol{d}}^{B_\Sigma}$ de $\prod \P_k^{d_\alpha}$ (*cf.* la sous-section 3.5 pour la définition de l'ensemble B_Σ associé à l'éventail Σ). On note $\widetilde{(\mathbf{P}^1)}_{\boldsymbol{d}}^{B_\Sigma}$ l'image réciproque de $\big(\mathbf{P}^1\big)_{\boldsymbol{d}}^{B_\Sigma}$ dans $\prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \Big(\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\}\Big)$.

Lemme 5.10. *Soit (P_α) une famille de polynômes homogènes en deux variables à coefficients dans un corps L. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) pour tout $n_\alpha \in B_\Sigma$, les polynômes $(P_\alpha)_{\alpha,\, n_\alpha=1}$ n'ont pas de zéro commun non trivial dans une clôture algébrique de L.

ii) les polynômes $\big(\prod_{\alpha\notin\sigma} P_\alpha\big)_{\sigma\in\Sigma}$ n'ont pas de zéro commun non trivial dans une clôture algébrique de L.

Démonstration. Supposons qu'il existe $(n_\alpha) \in B_\Sigma$ et un zéro commun aux polynômes $(P_\alpha)_{\alpha,\, n_\alpha=1}$. Par définition de B_Σ, pour tout cône σ un tel zéro est alors un zéro de $\prod_{\alpha\notin\sigma} P_\alpha$. Réciproquement, si les polynômes $\big(\prod_{\alpha\notin\sigma} P_\alpha\big)_{\sigma\in\Sigma}$ ont un zéro commun z, on définit $n_\alpha \in \{0,1\}^{\Sigma(1)}$ par $n_\alpha = 1$ si et seulement si z est un zéro de P_α. Alors $(n_\alpha) \in B_\Sigma$ et z est un zéro commun aux polynômes $(P_\alpha)_{\alpha,\, n_\alpha=1}$. $\square$

Il est bien connu que le foncteur qui à un k-schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type sur S est représenté par $\prod \P_k^{d_\alpha}$. De la définition de $\big(\mathbf{P}^1\big)_{\boldsymbol{d}}^{B_\Sigma}$ et du lemme précédent on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5.11. *L'ouvert $\big(\mathbf{P}^1\big)_{\boldsymbol{d}}^{B_\Sigma}$ s'identifie au sous-foncteur ouvert de $\boldsymbol{Hom}(S, \prod \mathbf{P}^{d_\alpha})$ qui à un k-schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type sur S non dégénérées.*

Lemme 5.12. *Soit M un sous-module de $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ tel que le quotient de $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ par M, noté P, soit sans torsion. Soit T_P le sous-tore de $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$ associé à P, T_M le tore quotient de $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$ associé à M et $\pi : \mathbf{G}_m^{\Sigma(1)} \to T_M$ le morphisme quotient.*

Le foncteur qui a un k-schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type sur S M-trivialisées (respectivement M-trivialisées non-dégénérées) est représenté par $\prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left(\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1}\setminus\{0\}\right)/T_P$ *(respectivement par* $\widetilde{(\mathbf{P}^1)_{\boldsymbol{d}}^{B_\Sigma}}/T_P$*).*

Remarque 5.13. Le résultat est classique si $M = \mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$.

Démonstration. Si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites sur une variété X, on note $\widetilde{\mathcal{L}}$ le $\mathbf{G}_m$-torseur au dessus de X obtenu en retirant la section nulle à l'espace total du fibré. On identifie $\mathbf{A}_k^{d+1}\setminus\{0\} \to \P_k^d$ au $\mathbf{G}_m$-torseur $\widetilde{\mathcal{O}_{\P_k^d}(1)}$. On note X_P la variété $\prod_{\alpha\in\Sigma(1)}\left(\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1}\setminus\{0\}\right)/T_P$ et π_M le T_M-torseur $X_P \to \prod_{\alpha\in\Sigma(1)}\mathbf{P}_k^{d_\alpha}$.

On définit sur X_P une $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collection du second type M-triviale universelle. On pose $\mathcal{L}_\alpha = \pi_M^*\mathcal{O}_{\P_k^{d_\alpha}}(1)$. Pour $i = 0, \dots, d_\alpha$, on pose $s_{\alpha,i} = \pi_M^* v_{\alpha,i}$, où $v_{\alpha,i}$ est la base canonique de $H^0(\mathbf{P}_k^{d_\alpha}, \mathcal{O}_{\P_k^{d_\alpha}}(1))$. Il reste à définir les trivialisations c_m. Soit $m : T_M \to \mathbf{G}_m$ un élément de M. Le produit contracté $\mathcal{T}_m = X_P \times^{T_M,m}\mathbf{G}_m$ est un $\mathbf{G}_m$-torseur au-dessus de $\prod \P_k^{d_\alpha}$, canoniquement isomorphe au produit contracté

$$\left(\prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \mathbf{A}_k^{d_\alpha+1}\setminus\{0\}\right)\times^{\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)},m\circ\pi}\mathbf{G}_m.$$

Ainsi $\mathcal{T}_m$ s'identifie canoniquement au $\mathbf{G}_m$-torseur $\widetilde{\otimes\mathcal{O}_{\P_k^{d_\alpha}}(m_\alpha)}$. Donc le tiré en arrière de $\mathcal{T}_m$ sur X_P s'identifie canoniquement à $\widetilde{\otimes\mathcal{L}_\alpha^{m_\alpha}}$. Mais par ailleurs ce tiré en arrière est canoniquement isomorphe au $\mathbf{G}_m$-torseur trivial, d'où la trivialisation c_m. Par construction on a $c_m\otimes c_{m'} = c_{m+m'}$.

Soit S un k-schéma. À tout morphisme $S \to X_P$ on associe la $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collection du second type M-trivialisée obtenue en tirant en arrière la $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collection du second type M-trivialisée universelle. Le fait que ceci définisse une bijection entre l'ensemble des points de X_P à valeurs dans S et l'ensemble des classes d'isomorphisme $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type M-trivialisées sur S se démontre alors de la même façon que Cox démontre le théorème principal de [Cox95a]. Alternativement, on peut exploiter la structure de variété torique sur X_P pour appliquer directement le résultat de Cox.

Comme la bijection décrite ci-dessus induit une bijection entre les points de $\widetilde{(\mathbf{P}^1)_{\boldsymbol{d}}^{B_\Sigma}}/T_P$ à valeurs dans S et l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type M-trivialisées non dégénérées sur S, on obtient le résultat pour $\widetilde{(\mathbf{P}^1)_{\boldsymbol{d}}^{B_\Sigma}}/T_P$. □

Proposition 5.14. *Soit* $\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$. *La variété* $\widetilde{(\mathbf{P}^1)_{\boldsymbol{d}}^{B_\Sigma}}/T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}$ *représente le foncteur qui à un k-schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type $\mathcal{X}^*(U)$-trivialisées non dégénérées. Cette variété représente également le foncteur* $\boldsymbol{Hom}_k^{U,\boldsymbol{d}}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$.

Démonstration. Compte tenu de la suite exacte (5.1), la première assertion de la proposition découle du lemme 5.12 appliqué à $M = \mathcal{X}^*(U)$.

Pour montrer la deuxième assertion, il suffit de construire une bijection fonctorielle en S entre les classes d'isomorphisme de $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collections du second type $\mathcal{X}^*(U)$-trivialisées non-dégénérées sur S et les classes d'isomorphismes de $(\mathbf{P}^1, \Sigma, \boldsymbol{d})$-collections non dégénérées sur S.

Soit $((\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i})), (c_m))$ une $(\Sigma, \boldsymbol{d})$-collection du second type sur S supposée $\mathcal{X}^*(U)$-trivialisée et non-dégénérée. On lui associe la $(\mathbf{P}^1, \Sigma, \boldsymbol{d})$-collections non dégénérée $((\mathcal{M}_\alpha, u_\alpha), (c'_m))$ suivante : on pose $\mathcal{M}_\alpha = p_{1,S}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}\boldsymbol{d}\otimes p_{2,S}^*\mathcal{L}_\alpha$. On peut identifier $H^0(\mathbf{P}_S^1, \mathcal{M}_\alpha)$ à

$$H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(d_\alpha))\otimes H^0(S, \mathcal{L}_\alpha)\xrightarrow{\sim} H^0(S, \mathcal{L}_\alpha)^{d_\alpha+1}.$$

On pose alors $u_\alpha \overset{\text{déf}}{=} (s_{\alpha,0},\dots,s_{\alpha,d_\alpha})$. Soit $m \in \mathcal{X}^*(U)$. Comme $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}_{(*)}$, on a un isomorphisme

$$c''_m : \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(d_\alpha)^{\langle m\,,\,\rho_\alpha\rangle} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}.$$

On pose $c'_m = p_{1,S}^* c''_m \otimes p_{2,S}^* c_m$.

Réciproquement, soit $((\mathcal{M}_\alpha,u_\alpha),c'_m)$ une classe d'isomorphisme de $(\mathbf{P}^1,\Sigma,\boldsymbol{d})$-collections non dégénérées sur S. On peut supposer qu'on a

$$\mathcal{M}_\alpha = p_{1,S}^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(d_\alpha) \otimes p_{2,S}^* \mathcal{L}_\alpha.$$

On associe à la classe d'isomorphisme ci-dessus la $(\Sigma,\boldsymbol{d})$ collection $\mathcal{X}^*(U)$-trivialisée $\Big((\mathcal{L}_\alpha,u_\alpha),(p_{2,S}^* c'_m)\Big)$. On vérifie aisément que ceci fournit la bijection cherchée. □

Notation 5.15. Si $d \in \mathbf{N}$, on note $n_\Sigma(d)$ le cardinal de l'ensemble

$$\left\{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}_{(*)},\quad \sum_{\alpha\in\Sigma(1)} d_\alpha = d\right\}.$$

Pour tout $d \geqslant 0$, on note W_d le k-schéma

$$\coprod_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}_{(*)},\\ \sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} d_\alpha = d}} \widetilde{(\mathbf{P}^1)^{B_\Sigma}_{\boldsymbol{d}}} / T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}.$$

W_d est donc une union disjointe de $n_\Sigma(d)$ variétés définies sur k, chacune de ces variétés étant géométriquement irréductible de dimension $d - \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))$.

Rappelons que $\mathbf{Hom}_k^{U,\mathcal{L}_0,d}(\mathbf{P}^1,X_\Sigma)$ désigne le foncteur qui à un k-schéma S associe

$$\left\{\varphi \in \mathrm{Hom}_k(\mathbf{P}^1_S,X_\Sigma),\quad \forall s\in S,\quad \deg\left(\varphi_s^*(\mathcal{L}_0)\right) = d \wedge \varphi_s \in U(\kappa_s(t))\right\},$$

et que, d'après le lemme 4.1, ce foncteur est représentable par un schéma quasi-projectif noté $U_{0,d}$.

Lemme 5.16. *Pour tout $d \geqslant 0$, W_d est isomorphe à $U_{\mathcal{L}_0,d}$.*

On a l'égalité

$$[U_{0,d}] = (\mathbf{L}-1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}_{(*)},\\ \sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} d_\alpha = d}} \left[(\mathbf{P}^1)^{B_\Sigma}_{\boldsymbol{d}}\right].$$

Démonstration. La première assertion découle de la proposition 5.14 et du fait que $\sum_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$ est un diviseur anticanonique sur X_Σ.

L'application

$$\widetilde{(\mathbf{P}^1)^{B_\Sigma}_{\boldsymbol{d}}} / T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)} \to \widetilde{(\mathbf{P}^1)^{B_\Sigma}_{\boldsymbol{d}}} / \mathbf{G}_m^{\Sigma(1)} = \left(\mathbf{P}^1\right)^{B_\Sigma}_{\boldsymbol{d}}$$

est un torseur sous $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}/T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)} = U$, localement trivial pour la topologie de Zariski car U est déployé. Ainsi on a

$$\left[\widetilde{(\mathbf{P}^1)^{B_\Sigma}_{\boldsymbol{d}}} / T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)}\right] = \left[\left(\mathbf{P}^1\right)^{B_\Sigma}_{\boldsymbol{d}}\right][U].$$

On en déduit le résultat. □

Corollaire 5.17. *Soit V une variété torique projective lisse et déployée définie sur un corps k, d'orbite ouverte U. Pour tout entier $d \geqslant 1$, soit $U_{0,d}$ la variété quasi-projective paramétrant les*

k-morphisme $\mathbf{P}^1_k \to V$ dont l'image rencontre U et de degré anticanonique d. Soit $\rho(U_{0,d})$ le nombre de composantes géométriquement irréductibles de dimension maximale de $U_{0,d}$. On a alors

$$\overline{\lim_{d\to\infty}} \frac{\dim(U_{0,d})}{d} = 1$$

et

$$\overline{\lim_{d\to\infty}} \frac{\log(\rho(U_{0,d}))}{\log(d)} = \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V)).$$

En d'autres termes, dans le cas d'une courbe rationnelle, la réponse à la question 4.8 est positive pour les variétés toriques projectives, lisses et déployées en prenant pour ouvert l'orbite ouverte.

Démonstration. Ceci découle du lemme 5.16 et de la théorie du polynôme d'Ehrahrt qui permet de montrer qu'on a

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\log(n_\Sigma(d))}{\log(d)} = |\Sigma(1)| - r = \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma)).$$

□

On déduit également immédiatement du lemme 5.16 qu'on a l'expression

$$Z^{\mathrm{mot}}_{\mathbf{P}^1,U,h_0}(T) = (\mathbf{L}-1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}_{(*)}} \left[\left(\mathbf{P}^1\right)^{B_\Sigma}_{\boldsymbol{d}}\right] T^{\sum_\alpha d_\alpha}. \tag{5.4}$$

La description de X_Σ comme quotient géométrique permet par ailleurs de montrer la formule suivante, qui est une version motivique d'une formule donnant le nombre de points d'une variété torique sur un corps fini. On renvoie à la sous-section 3.5 pour la définition de B_Σ et au début de la section 3 pour la définition de $\mu^0_{B_\Sigma}$.

Proposition 5.18. *Soit k un corps de caractéristique zéro, Σ un éventail projectif et lisse et X_Σ la k-variété torique associée. On a l'égalité*

$$\sum_{(n_\alpha)\in\{0,1\}^{\Sigma(1)}} \mu^0_{B_\Sigma}((n_\alpha))\,\mathbf{L}^{-n\sum n_\alpha} = \left(1-\mathbf{L}^{-n}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))} \frac{\Phi^\chi_n(X_\Sigma)}{\mathbf{L}^{-n\dim(X_\Sigma)}}.$$

Démonstration. On sait que $\mathcal{T}_\Sigma$ est un torseur sous le tore déployé $T_{\mathrm{Pic}(X_\Sigma)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))}$ au-dessus de X_Σ. D'après la proposition 2.12, on en déduit la relation

$$\Phi^\chi_n(\mathcal{T}_\Sigma) = \Phi^\chi_n(X_\Sigma)\,\Phi^\chi_n(\mathbf{G}_m)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))}.$$

D'après le corollaire 2.21, on a $\Phi^\chi_n(\mathbf{G}_m) = \mathbf{L}^n - 1$. Calculons $\Phi^\chi_n(\mathcal{T}_\Sigma)$. Pour $(n_\alpha) \in \{0,1\}^{\Sigma(1)}$ notons $\mathbf{A}_{(n_\alpha)} \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{n_\alpha=1} \{X_\alpha = 0\}$. On a ainsi

$$\Phi^\chi_n\left(\mathbf{A}_{(n_\alpha)}\right) = \Phi^\chi_n\left(\mathbf{A}^{\sum n_\alpha}\right) = \mathbf{L}^{n\sum n_\alpha},$$

la dernière égalité provenant du corollaire 2.21. On a alors

$$\mathcal{T}_\Sigma = \mathbf{A}^{\Sigma(1)} \setminus \bigcup_{(n_\alpha)\in B_\Sigma} \mathbf{A}_{(n_\alpha)} = \mathbf{A}^{\Sigma(1)} \setminus \bigcup_{(n_\alpha)\in B^{\min}_\Sigma} \mathbf{A}_{(n_\alpha)}.$$

D'après la proposition 2.11, on a

$$\Phi^\chi_n\left(\bigcup_{(n_\alpha)\in B_\Sigma} \mathbf{A}_{(n_\alpha)}\right) = \sum_{\varnothing\neq J\subset B^{\min}_\Sigma} (-1)^{1+|J|}\,\Phi^\chi_n\left(\bigcap_{\alpha\in J} \mathbf{A}_{(n_\alpha)}\right).$$

Compte tenu du fait que pour $(n_\alpha) \in B_\Sigma$ on a

$$\mathbf{A}_{(n_\alpha)} = \bigcap_{(n'_\alpha)\in B_\Sigma^{\min},\quad (n'_\alpha)\leqslant(n_\alpha)} \mathbf{A}_{(n'_\alpha)},$$

et rappelant que

$$\ell_{B_\Sigma}((n_\alpha)) = \left|\{(n'_\alpha) \in B_\Sigma^{\min}, \quad (n'_\alpha) \leqslant (n_\alpha)\}\right|,$$

ceci se réécrit

$$\begin{aligned}\Phi_n^\chi\left(\bigcup_{(n_\alpha)\in B_\Sigma} \mathbf{A}_{(n_\alpha)}\right) &= \sum_{(n_\alpha)\in B_\Sigma} (-1)^{1+\ell_{B_\Sigma}((n_\alpha))}\Phi_n^\chi\left(\mathbf{A}_{(n_\alpha)}\right)\\ &= -\sum_{(n_\alpha)\in\{0,1\}^{\Sigma(1)}} \mu^0_{B_\Sigma}((n_\alpha))\,\mathbf{L}^{n\sum n_\alpha}.\end{aligned}$$

On a donc bien la formule annoncée. □

5.3 Le cas des surfaces de Hirzebruch

Nous traitons ce cas particulier séparément, car d'une part on peut travailler ici dans l'anneau $\mathcal{M}_k$, d'autre part on obtient le fait remarquable que la série $Z_h^{\mathrm{mot}}(T)$ est une fonction rationnelle en T. Plus précisément, nous démontrons le point i du théorème 1.1, dont nous rappelons l'énoncé.

Théorème 5.19. *Soit k un corps. Soit $m \geqslant 0$ un entier. Soit Σ l'éventail de $\mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R}$ dont les rayons sont engendrés par $\rho_1 = (1,0)$, $\rho_2 = (-1,m)$, $\rho_3 = (0,1)$, $\rho_4 = -\rho_3$. La k-variété torique déployée X_Σ associée est la m-ème surface de Hirzebruch $\mathcal{H}_m$. On note U son orbite ouverte.*

Alors l'élément de $\mathcal{M}_k[[T]]$

$$(1+\mathbf{L}\,T)\,(1+\mathbf{L}\,T+\mathbf{L}^2\,T^2+\cdots+\mathbf{L}^{m+1}\,T^{m+1})\,(1-\mathbf{L}\,T)^2\,Z^{mot}_{\mathbf{P}^1,U,h_0}(T) \tag{5.5}$$

est un polynôme dont la valeur en $\mathbf{L}^{-1}$ est $\mathbf{L}^2\,(1-\mathbf{L}^{-2})^2$.

Remarque 5.20. On a $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_m)) = 2$ et $\alpha^*(\mathcal{H}_m) = \frac{1}{m+1}$. Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^2\,(1-\mathbf{L}^{-2})^2 &= \mathbf{L}^2\left(\frac{1}{1-\mathbf{L}^{-1}}\right)^2\left[(1-\mathbf{L}^{-2})(1-\mathbf{L}^{-1})\right]^2\\ &= \mathbf{L}^2\left(\frac{1}{1-\mathbf{L}^{-1}}\right)^2\left(\frac{1}{Z^{\mathrm{mot}}_{\mathbf{P}^1}(\mathbf{L}^{-2})}\right)^2\\ &= \mathbf{L}^{\dim(X_\Sigma)}\left(\left[(1-\mathbf{L}\,T)\,Z^{\mathrm{mot}}_{\mathbf{P}^1}(T)\right](\mathbf{L}^{-1})\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))}\times\sum_{\boldsymbol{d}}\mu^{B_\Sigma,\mathrm{mot}}_{\mathbf{P}^1}(\boldsymbol{d})\,\mathbf{L}^{-\sum_\alpha d_\alpha},\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de l'expression de $\mu^{B_\Sigma,\mathrm{mot}}_{\mathbf{P}^1}$ obtenue au paragraphe 3.5. Nous obtenons donc bien une version motivique du résultat principal de [Bou02] dans le cas où la courbe est supposée rationnelle. Ce dernier résultat se déduit d'ailleurs du théorème 5.19 en spécialisant via le morphisme $\#_k$, grâce à la rationnalité de la fonction zêta des hauteurs motivique.

Démonstration. On a d'après le lemme 5.16, la formule (3.13) et la description de Σ

$$
\begin{aligned}
Z^{\mathrm{mot}}_{\mathbf{P}^1,U,h_0}(T) &= (\mathbf{L}-1)^2 \sum_{\substack{(d_i)\in\mathbf{N}^4\\ d_1=d_2\\ d_3+m\,d_2=d_4}} \left[U_{(d_i)}\right] T^{\,d_1+d_2+d_3+d_4}\\
&= (\mathbf{L}-1)^2 \sum_{\substack{(d_i)\in\mathbf{N}^4,\,(e_i)\in\mathbf{N}^4\\ d_1+e_1=d_2+e_2\\ d_3+m\,d_2+e_3+m\,e_2=d_4+e_4}} \mu^{B_\Sigma,\mathrm{mot}}_{\mathbf{P}^1}(e_1,e_2,e_3,e_4)\left[\mathbf{P}^{\,d_1}\right]\left[\mathbf{P}^{\,d_2}\right]\left[\mathbf{P}^{\,d_3}\right]\left[\mathbf{P}^{\,d_4}\right].\\
&\qquad\qquad \times T^{\,d_1+d_2+d_3+d_4+e_1+e_2+e_3+e_4}
\end{aligned}
$$

En utilisant l'expression de $\mu^{B_\Sigma,\mathrm{mot}}_X$ obtenue à la section 3.5, la relation (3.15) et la relation

$$
(\mathbf{L}-1)\left[\mathbf{P}^d\right] = \mathbf{L}^{\,d+1}-1,
$$

on obtient la relation (*cf.* [Bou03b, section 4.3.2] pour les détails du calcul)

$$
Z^{\mathrm{mot}}_{\mathbf{P}^1,U,h_0}(T) = (\mathbf{L}-1)\left(\mathbf{L}\,\frac{(1-T^2)\,(1+\mathbf{L}^{\,m+1}\,T^{\,m+2})}{(1-\mathbf{L}^2\,T^2)\,(1-\mathbf{L}^{\,2+m}\,T^{\,2+m})}-\frac{1+\mathbf{L}\,T^{\,2+m}}{1-\mathbf{L}^{\,2+m}\,T^{\,2+m}}\right)
$$

d'où le résultat annoncé. □

5.4 Le cas général

Soit k un corps de caractéristique zéro et Σ un éventail projectif et lisse. On conserve les notations des sous-sections 5.1 et 5.2. Le but de cette partie est de démontrer le point ii du théorème 1.1. Pour cela, on va reprendre au niveau de l'anneau de motifs virtuels $\mathcal{M}^{\chi}_k$ la stratégie employée dans [Bou03a]. Soulignons que tous les calculs qui suivent sont valables sur l'anneau $\mathcal{M}_k$ pour un corps k quelconque (en fait si k est fini leur spécialisation via $\#_k$ « redonne » les calculs effectués dans [Bou03a]), mais pas a priori les résultats de convergence pour lesquels on aurait besoin d'une réponse positive à la question 3.6.

Notation 5.21. Pour alléger l'écriture, pour toute k-variété V, le motif virtuel associée à V sera noté $[V]$ en lieu et place de $\chi([V])$. Par ailleurs, on notera μ^{χ}_{Σ} la fonction $\mu^{B_\Sigma,\chi}_{\mathbf{P}^1}$.

D'après les formules (5.4) et (3.8), on a

$$
\begin{aligned}
Z^{\mathrm{mot}}_{\mathbf{P}^1,U,h_0}(T) &= (\mathbf{L}-1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}_{(*)}} \left[(\mathbf{P}^1)^{B_\Sigma}_{\boldsymbol{d}}\right] T^{\sum\limits_{\alpha} d_\alpha}\\
&= (\mathbf{L}-1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{\substack{\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}\\ (\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e})\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}_{(*)}}} \mu^{\chi}_{\Sigma}(\boldsymbol{e}) \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left[\mathbf{P}^{d_\alpha}\right] T^{\sum\limits_{\alpha}(d_\alpha+e_\alpha)}\\
&= (\mathbf{L}-1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu^{\chi}_{\Sigma}(\boldsymbol{e}) \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}_{(*)}\\ \boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{e}}} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left[\mathbf{P}^{d_\alpha-e_\alpha}\right] T^{\sum\limits_{\alpha} d_\alpha}.
\end{aligned}
$$

Rappelons que l'injection naturelle $\mathbf{N}^{\Sigma(1)} \longrightarrow (\oplus\mathbf{Z}\,\mathfrak{D}_\alpha)^{\vee}$ et le dual de la suite exacte (5.1) permettent d'identifier $\mathbf{N}^{\Sigma(1)}_{(*)}$ au sous-ensemble de $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)^{\vee}$ constitué des éléments y vérifiant $\langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma(1)$. Ainsi, pour $\boldsymbol{e} \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$, on a

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}\\ \boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{e}}} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left[\mathbf{P}^{d_\alpha-e_\alpha}\right] T^{\sum\limits_\alpha d_\alpha} = \sum_{\substack{y\in\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee\\ \langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant\deg(E_\alpha)}} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left(\frac{\mathbf{L}^{1+\langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}-1}{\mathbf{L}-1}\right) T^{\left\langle y\,,\,\sum\limits_\alpha\mathcal{D}_\alpha\right\rangle}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\frac{Z^{\chi}_{\mathbf{P}^1,U,h_0}(T)}{(\mathbf{L}-1)^{\operatorname{rg}(\mathcal{X}^*(U))-|\Sigma(1)|}}\\
&\quad= \sum_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu^{\chi}_{\Sigma}(\boldsymbol{e}) \Bigg(\sum_{\substack{y\in\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee\\ \langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha}} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left(\mathbf{L}^{1+\langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}-1\right) T^{\left\langle y\,,\,\sum\limits_\alpha\mathcal{D}_\alpha\right\rangle}\Bigg)\\
&\quad= \sum_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu^{\chi}_{\Sigma}(\boldsymbol{e}) \Bigg(\sum_{\substack{y\in C_{\mathrm{eff}}(X_\Sigma)^\vee\cap\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee\\ \langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha}} \prod_{\alpha\in\Sigma(1)} \left(\mathbf{L}^{1+\langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}-1\right) T^{\langle y\,,\,\mathcal{L}_0\rangle}\Bigg).
\end{aligned}$$

On décompose à présent $Z^{\chi}_{\mathbf{P}^1,U,h_0}(T)$ en une somme de plusieurs termes, dont on estimera ensuite le comportement séparément. On écrit

$$Z^{\chi}_{\mathbf{P}^1,U,h_0}(T) = (\mathbf{L}-1)^{-\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X_\Sigma))} \sum_{A\subset\Sigma(1)} (-1)^{|A|}\, Z_A(T)$$

avec, pour $A \subset \Sigma(1)$,

$$Z_A(T) = \sum_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu^{\chi}_{\Sigma}(\boldsymbol{e})\, Z_{A,\boldsymbol{e}}(T),$$

$Z_{A,\boldsymbol{e}}(T)$ désignant la série

$$\sum_{\substack{y\in C_{\mathrm{eff}}(X_\Sigma)^\vee\cap\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee\\ \forall\,\alpha\in\Sigma(1),\quad \langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle\,\geqslant e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A} 1+\langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha} T^{\langle y\,,\,\mathcal{L}_0\rangle} = \sum_{\substack{y\in C_{\mathrm{eff}}(X_\Sigma)^\vee\cap\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee\\ \forall\,\alpha\in\Sigma(1),\quad \langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle\,\geqslant e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A} 1+\langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha} T^{\langle y\,,\,\mathcal{L}_0\rangle}.$$

Notation 5.22. On écrit $C_{\mathrm{eff}}(X_\Sigma)^\vee$ comme le support d'un éventail régulier Δ. Pour $i \in \Delta(1)$ on note m_i le générateur du rayon i. Pour toute partie I de $\Delta(1)$ on note $\mathcal{C}(I) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i\in I} \mathbf{N}_{>0}\, m_i$ (avec la convention $\mathcal{C}(\varnothing) = \{0\}$), de sorte que $\mathcal{C}(\delta(1))$ est l'ensemble des points du réseau $\operatorname{Pic}(X_\Sigma)^\vee$ contenu dans l'intérieur relatif du cône δ.

Remarque 5.23. On a alors

$$Z_{C_{\mathrm{eff}}(V),\mathcal{L}_0}(T) = \sum_{\delta\in\Delta} \prod_{i\in\delta(1)} \left(\frac{1}{1-T^{\langle m_i\,,\,\mathcal{L}_0\rangle}}-1\right)$$

d'où

$$\alpha^*(X_\Sigma) = \sum_{\substack{\delta\in\Delta\\ \dim(\delta)=\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(V))}} \prod_{i\in\delta(1)} \frac{1}{\langle m_i\,,\,\mathcal{L}_0\rangle}.$$

Soit $A \subset \Sigma(1)$. On écrit

$$Z_A(T) = \sum_{\delta\in\Delta} Z_{A,\delta}(T)$$

avec

$$Z_{A,\delta}(T) = \sum_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu^{\chi}_{\Sigma}(\boldsymbol{e})\, Z_{A,\delta,\boldsymbol{e}}(T),$$

$Z_{A,\delta,\boldsymbol{e}}(T)$ désignant la série

$$\sum_{\substack{y\in\mathcal{C}(\delta(1))\\ \forall\alpha\in\Sigma(1),\quad \langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A} 1+\langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}\, T^{\langle y\,,\mathcal{L}_0\rangle}.$$

De la même façon que le théorème 1 (p.178) de [Bou03a] se déduisait des propositions 1-(3) (p.181), 3 (p.190) et 4 (p.195) de (op.cit.), le point ii du théorème 1.1 se déduit alors de la proposition 5.18 et des propositions 5.25 et 5.27 énoncées et démontrées ci-dessous. Les démonstrations, très similaires à celles des propositions analogues de [Bou03a], sont en outre simplifiées par le fait qu'on étudie des convergences pour une norme non-archimédienne.

5.4.1 *Le cas $A=\varnothing$.*

Notation 5.24. Soient $\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}$, δ un cône de Δ et J une partie de $\Sigma(1)$. On pose

$$\mathcal{C}(\delta(1))_{J,\,\boldsymbol{e}} \overset{\text{déf}}{=} \{y\in\mathcal{C}(\delta(1)),\quad \forall\alpha\in J,\quad \langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle\leqslant e_\alpha\}\,.$$

Soit δ un cône de Δ. Nous écrivons

$$Z_{\varnothing,\delta}(T)=\sum_{J\subset\Sigma(1)}(-1)^{|J|}\,Z_{\varnothing,\delta,J}(T)$$

avec

$$Z_{\varnothing,\delta,J}(T)=\sum_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}}\mu_\Sigma^\chi(\boldsymbol{e})\,Z_{\varnothing,\delta,J,\boldsymbol{e}}(T),\tag{5.6}$$

$Z_{\varnothing,\delta,J,\boldsymbol{e}}(T)$ désignant la série

$$\sum_{\substack{y\in\mathcal{C}(\delta(1))\\ \forall\,\alpha\in J,\,\langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle\,<\,e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} 1+\langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}\, T^{\langle y\,,\mathcal{L}_0\rangle} = \sum_{\mathcal{C}(\delta(1))_{J,\,\boldsymbol{e}}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} 1+\langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}\, T^{\langle y\,,\mathcal{L}_0\rangle}.$$

PROPOSITION 5.25. *Soit δ un cône de Δ. La série*

$$(1-\mathbf{L}\,T)^{\dim(\delta)}\,Z_{\varnothing,\delta,J}(T)$$

converge dans $\widehat{\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^\chi}$ en $T=\mathbf{L}^{-1}$. Si $J\neq\varnothing$ et $\dim(\delta)=\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X_\Sigma))$, sa valeur en $\mathbf{L}^{-1}$ est nulle.

La série

$$(1-\mathbf{L}\,T)^{\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X_\Sigma))}\sum_{\substack{\delta\in\Delta\\ \dim(\delta)=\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X_\Sigma))}} Z_{\varnothing,\delta,\varnothing}(T)$$

converge dans $\widehat{\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^\chi}$ en $T=\mathbf{L}^{-1}$ vers

$$\alpha^*(X_\Sigma)\ \mathbf{L}^{|\Sigma(1)|}\sum_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}}\mu_\Sigma^\chi(\boldsymbol{e})\mathbf{L}^{-\sum e_\alpha}.$$

Cette proposition découle de (5.6), du corollaire 3.4 et du lemme 5.26 ci-dessous.

LEMME 5.26. *Soient $\boldsymbol{e}$ un élément de $\mathbf{N}^{\Sigma(1)}$, δ un cône de Δ et J une partie de $\Sigma(1)$. Il existe alors un sous-ensemble I' de $\delta(1)$ et un polynôme $P_{I'}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}[\mathbf{L}]$ tels que :*

i) pour tout entier $\kappa\geqslant 1$ on a

$$P_{I'}\left(\mathbf{L}^{-\kappa}\right)\in\mathcal{F}^{-|\Sigma(1)|+\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}e_\alpha}\mathcal{M}_{k,loc}^\chi\quad;$$

ii) on a la relation

$$\sum_{y\in\mathcal{C}(\delta(1))_{J,\,\boldsymbol{e}}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} 1+\langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle - e_\alpha} T^{\langle y\,,\mathcal{L}_0\rangle} = \left(\prod_{i\in I'}\left[\left(1-(\mathbf{L}\,T)^{-\langle m_i\,,\omega\rangle}\right)^{-1}-1\right]\right)\times P_{I'}(T). \tag{5.7}$$

Supposons en outre δ de dimension maximale. Alors si J est non vide, I' est un sous-ensemble strict de $\delta(1)$. Si J est vide, on a $I'=\delta(1)$ et $P_{\delta(1)}$ est constant égal à $\mathbf{L}^{|\Sigma(1)|-\sum_{\alpha\in\Sigma(1)} e_\alpha}$.

Démonstration. On a $\mathcal{C}(\delta(1))_{\varnothing,\,\boldsymbol{e}}=\mathcal{C}(\delta(1))$. Donc si J est vide le membre de gauche (5.7) s'évalue immédiatement et vaut

$$\mathbf{L}^{|\Sigma(1)|-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} e_\alpha}\left(\prod_{i\in\delta(1)}\left[\left(1-(\mathbf{L}\,T)^{-\langle m_i\,,\omega\rangle}\right)^{-1}-1\right]\right).$$

Si J n'est pas vide, posons

$$I_{J,1}=\{\,i\in\delta(1),\quad \forall\,\alpha\in J,\quad \langle m_i\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle=0\}$$

et $I_{J,2}=\delta(1)\setminus I_{J,1}$. En particulier on a $\mathcal{C}(I_{J,1})_{J,\boldsymbol{e}}=\mathcal{C}(I_{J,1})$. Si on note

$$P(T)=\sum_{y_2\in\mathcal{C}(I_{J,2})_{J,\,\boldsymbol{e}}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha} 1+\langle y_2\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}\;T^{\langle y_2\,,\mathcal{L}_0\rangle},$$

le membre de gauche de (5.7) est égal au produit

$$P(T)\;\times\sum_{y_1\in\mathcal{C}(I_{J,1})} \mathbf{L}^{\left\langle y_1\,,\sum\limits_{\alpha\notin J}\mathcal{D}_\alpha\right\rangle}\;T^{\langle y_1\,,\mathcal{L}_0\rangle}. \tag{5.8}$$

Si $y_1\in\mathcal{C}(I_{J,1})$, on a $\left\langle y_1\,,\sum\limits_{\alpha\notin J}\mathcal{D}_\alpha\right\rangle=\langle y_1\,,\mathcal{L}_0\rangle$. Donc le deuxième facteur de (5.8) est égal à

$$\prod_{i\in I_{J,1}}\left[\left(1-(\mathbf{L}\,T)^{-\langle m_i\,,\omega\rangle}\right)^{-1}-1\right].$$

Passons au facteur $P(T)$. De la même manière que dans la preuve du lemme 3 de [Bou03a], on voit facilement que $\mathcal{C}(I_{J,2})_{J,\boldsymbol{e}}$ est fini. Ainsi P est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}[L]$, et pour tout entier κ on a

$$P\left(\mathbf{L}^{-\kappa}\right)=\mathbf{L}^{|\Sigma(1)|-\sum\limits_{\alpha} e_\alpha}\sum_{y_2\in\mathcal{C}(I_{J,2})_{J,\,\boldsymbol{e}}}\mathbf{L}^{(1-\kappa)\,\langle y_2\,,\mathcal{L}_0\rangle}.$$

Pour tout $y_2\in\mathcal{C}(I_{J,2})_{J,\boldsymbol{e}}$ on a $\langle y_2\,,\mathcal{L}_0\rangle\geqslant 0$. Donc si $\kappa\geqslant 1$ on a

$$P\left(\mathbf{L}^{-\kappa}\right)\in\mathcal{F}^{-|\Sigma(1)|+\sum e_\alpha}\,\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathrm{loc}}.$$

Enfin, si δ est un cône de dimension maximale, les $(m_i)_{i\in\delta(1)}$ forment une $\mathbf{Z}$-base de $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)^\vee$. Ainsi, si J n'est pas vide on ne peut avoir $I_{J,2}=\varnothing$. Ceci joint au calcul pour $J=\varnothing$ montre les deux dernières assertions du lemme. □

Le cas $A\neq\varnothing$. Soit δ un cône de Δ et A une partie non vide de $\Sigma(1)$. On écrit

$$Z_{A,\delta}(T)=\sum_{J\,\subset\,\Sigma(1)\setminus A}(-1)^{|J|}\,Z_{A,\delta,J}(T)$$

avec

$$Z_{A,\delta,J}(T) = \sum_{\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^\chi(\boldsymbol{e})\, Z_{A,\delta,J,\boldsymbol{e}}(T), \tag{5.9}$$

l'expression $Z_{A,\delta,J,\boldsymbol{e}}(T)$ désignant la série

$$\sum_{\substack{y\in\mathcal{C}(\delta(1))\\ \forall\,\alpha\in A,\quad \langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha\\ \forall\,\alpha\in J,\quad \langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle< e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A} 1+\langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}\, T^{\langle y\,,\mathcal{L}_0\rangle}.$$

Proposition 5.27. *Soit δ un cône de Δ, A une partie non vide de $\Sigma(1)$ et J une partie de $\Sigma(1)\setminus A$. La série*

$$(1-\mathbf{L}\,T)^{\dim(\delta)}\, Z_{A,\delta,J}(T)$$

converge dans $\widehat{\mathcal{M}_k^\chi}$ en $T=\mathbf{L}^{-1}$. En outre, si $\dim(\delta)=\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_\Sigma))$, sa valeur en $\mathbf{L}^{-1}$ est nulle.

Cette proposition découle de (5.9), du corollaire 3.4 et du lemme 5.28 ci-dessous.

Lemme 5.28. *Soit δ un cône de Δ, A une partie non vide de $\Sigma(1)$ et J une partie de $\Sigma(1)\setminus A$. Soit $\boldsymbol{e}\in\mathbf{N}^{\Sigma(1)}$. Il existe alors un sous-ensemble I' de $\delta(1)$, et un élément $R_{I'}$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{L}][[T]]$ tels que :*

i) pour tout entier $\kappa\geqslant 1$, $R_{I'}(\mathbf{L}^{-\kappa})$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}_k^\chi}$ vers un élément de $\mathcal{F}^{-|\Sigma(1)|+\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)} e_\alpha}\,\widehat{\mathcal{M}_k^\chi}$;

ii) on a la relation

$$\sum_{\substack{y\in\mathcal{C}(\delta(1))\\ \forall\,\alpha\in A,\quad \langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha\\ \forall\alpha\in J,\quad \langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle< e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A} 1+\langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha}\, T^{\langle y\,,\mathcal{L}_0\rangle} = \left(\prod_{i\in I'}\left[\left(1-(\mathbf{L}\,T)^{-\langle m_i\,,\,\omega\rangle}\right)^{-1}-1\right]\right)\times R_{I'}(T). \tag{5.10}$$

En outre, si δ est un cône de dimension maximale, I' est un sous-ensemble strict de $\delta(1)$.

Démonstration. On pose

$$\mathcal{C}(\delta(1))^A_{J,\,\boldsymbol{e}} = \{y\in\mathcal{C}(\delta(1))_{J,\,\boldsymbol{e}},\quad \forall\alpha\in A,\quad \langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle\geqslant e_\alpha\}\,.$$

Le membre de gauche de (5.10) s'écrit donc

$$\sum_{y\in\mathcal{C}(\delta(1))^A_{J,\,\boldsymbol{e}}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A}(1+\langle y\,,\mathcal{D}_\alpha\rangle-e_\alpha\,)}\, T^{\langle y\,,\mathcal{L}_0\rangle}. \tag{5.11}$$

On pose

$$I_{A,J,1}=\{\,i\in\delta(1),\quad \forall\,\alpha\in A\cup J,\quad \langle m_i\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle=0\}$$

et $I_{A,J,2}=\delta(1)\setminus I_{A,J,1}$. Ainsi tout élément de $\mathcal{C}(\delta(1))^A_{J,\,\boldsymbol{e}}$ s'écrit de manière unique y_1+y_2 avec $y_1\in\mathcal{C}(I_{A,J,1})$ et

$$y_2\in\coprod_{\substack{(h_\alpha)\in\mathbf{N}^A\\ h_\alpha\geqslant e_\alpha}}\{y\in\mathcal{C}(I_{A,J,2})_{J,\boldsymbol{e}},\quad \forall\,\alpha\in A,\quad \langle y\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle\;=\;h_\alpha\}\,.$$

Pour $(h_\alpha)\in\mathbf{N}^A$, on voit facilement qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments y_2 de $\mathcal{C}(I_{A,J,2})_{J,\boldsymbol{e}}$

vérifiant $\langle y_2\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle = h_\alpha$ pour tout $\alpha\in A$. Pour un tel y_2, on a pour tout entier κ

$$\mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A}(1+\langle y_2\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle - e_\alpha)}\mathbf{L}^{-\kappa\,\langle y_2\,,\,\mathcal{L}_0\rangle} = \mathbf{L}^{|\Sigma(1)|-|A|-\sum\limits_{\alpha\notin A}e_a - \sum\limits_{\alpha\in A}h_\alpha}\mathbf{L}^{(1-\kappa)\,\langle y_2\,,\,\mathcal{L}_0\rangle}$$
$$= \mathbf{L}^{|\Sigma(1)|-|A|-\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}e_\alpha - \sum\limits_{\alpha\in A}(h_\alpha - e_\alpha)}\mathbf{L}^{(1-\kappa)\,\langle y_2\,,\,\mathcal{L}_0\rangle}.$$

Notons par ailleurs que $\langle y_2\,,\,\mathcal{L}_0\rangle$ est positif. Si on pose

$$R_{(h_\alpha)}(T) = \sum_{\substack{y_2\in\mathcal{C}(I_{A,J,2})_{J,\,\mathbf{e}}\\ \forall\,\alpha\in A,\quad \langle y_2\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle = h_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum\limits_{\alpha\notin A}(1+\langle y_2\,,\,\mathcal{D}_\alpha\rangle - e_\alpha)}\,T^{\langle y_2\,,\,\mathcal{L}_0\rangle},$$

ce qui précède montre qu'on a pour tout entier $\kappa\geqslant 1$

$$R_{(h_\alpha)}(\mathbf{L}^{-\kappa}) \in \mathcal{F}^{-|\Sigma(1)|+\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}e_\alpha + \sum\limits_{\alpha\in A}(h_\alpha - e_\alpha)}\mathcal{M}^{\chi}_{k,\mathrm{loc}}. \tag{5.12}$$

Par ailleurs la série (5.11) s'écrit comme le produit

$$\Bigg(\sum_{\substack{(h_\alpha)\in\mathbf{N}^A\\ h_\alpha\geqslant e_\alpha}} R_{(h_\alpha)}(T)\Bigg)\times\Bigg(\sum_{y_1\in\mathcal{C}(I_{A,J,1})}\mathbf{L}^{\left\langle y_1\,,\,\sum\limits_{\alpha\notin A\cup J}\mathcal{D}_\alpha\right\rangle}\,T^{\langle y_1\,,\,\mathcal{L}_0\rangle}\Bigg)$$

dont on note $R(T)$ le premier facteur. Le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{i\in I_{A,J,1}}\left[\left(1-(\mathbf{L}\,T)^{-\langle m_i\,,\,\omega\rangle}\right)^{-1} - 1\right].$$

Pour tout entier $\kappa\geqslant 1$, (5.12) montre que $R(\mathbf{L}^{-\kappa})$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}^{\chi}_{k}}$ vers un élément de

$$\mathcal{F}^{-|\Sigma(1)|+\sum\limits_{\alpha\in\Sigma(1)}e_\alpha}\,\widehat{\mathcal{M}^{\chi}_{k}}.$$

Notons enfin que comme A est non vide, si $I' = I_\delta$ pour un cône δ maximal alors $I_{A,J,2}$ ne peut être vide. Ceci montre la dernière assertion du lemme. □

Comme déjà annoncé, on déduit le point i du théorème 1.1 des propositions 5.18, 5.25 et 5.27.

Références

And04 Yves André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004. MR MR2115000 (2005k :14041)

Bit04 Franziska Bittner, *The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero*, Compos. Math. **140** (2004), no. 4, 1011–1032. MR MR2059227 (2005d :14031)

Bou02 David Bourqui, *Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel*, J. Number Theory **94** (2002), no. 2, 343–358. MR MR1916278 (2003m :11096)

Bou03a ______, *Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques déployées dans le cas fonctionnel*, J. Reine Angew. Math. **562** (2003), 171–199. MR MR2011335 (2004g :11051)

Bou03b ______, *Fonctions zêta des hauteurs des variétés toriques en caractéristique positive*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2003, http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00004008.

Bou08a ______, *Fonctions L d'Artin et nombre de Tamagawa motiviques*, http://fr.arxiv.org/abs/0808.4058, 2008.

Bou08b ______, *Sur un théorème de Denef et Loeser*, 2008.

Bro07 T. D. Browning, *An overview of Manin's conjecture for del Pezzo surfaces*, Analytic number theory, Clay Math. Proc., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 39–55. MR MR2362193 (2008j :14041)

Cox95a David A. Cox, *The functor of a smooth toric variety*, Tohoku Math. J. (2) **47** (1995), no. 2, 251–262. MR MR1329523 (96m :14070)

Cox95b ——, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 1, 17–50. MR MR1299003 (95i :14046)

DL01 Jan Denef and François Loeser, *Definable sets, motives and p-adic integrals*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 2, 429–469 (electronic). MR MR1815218 (2002k :14033)

DL02 J. Denef and F. Loeser, *Motivic integration and the Grothendieck group of pseudo-finite fields*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002) (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, pp. 13–23. MR MR1957016 (2004f :14040)

dlB01 Régis de la Bretèche, *Compter des points d'une variété torique*, J. Number Theory **87** (2001), no. 2, 315–331. MR MR1824152 (2002a :11067)

Ewa96 Günter Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 168, Springer-Verlag, New York, 1996. MR MR1418400 (97i :52012)

Ful93 William Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry. MR MR1234037 (94g :14028)

GNA02 Francisco Guillén and Vicente Navarro Aznar, *Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2002), no. 95, 1–91. MR MR1953190 (2004i :14020)

Göt01 Lothar Göttsche, *On the motive of the Hilbert scheme of points on a surface*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 5-6, 613–627. MR MR1879805 (2002k :14008)

Gro95 Alexander Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, Vol. 6, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. Exp. No. 221, 249–276. MR MR1611822

GS96 H. Gillet and C. Soulé, *Descent, motives and K-theory*, J. Reine Angew. Math. **478** (1996), 127–176. MR MR1409056 (98d :14012)

GZLMH04 S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, and A. Melle-Hernández, *A power structure over the Grothendieck ring of varieties*, Math. Res. Lett. **11** (2004), no. 1, 49–57. MR MR2046199 (2004m :14038)

Hal05 Thomas C. Hales, *What is motivic measure ?*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **42** (2005), no. 2, 119–135 (electronic). MR MR2133307 (2006h :14031)

Hei07 Franziska Heinloth, *A note on functional equations for zeta functions with values in Chow motives*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57** (2007), no. 6, 1927–1945. MR MR2377891

Kap00 Mikhail Kapranov, *The elliptic curve in the S-duality theory, and Eisenstein series for Kac-Moody groups*, prépublication `math.AG/0001005`, 2000.

LL04 Michael Larsen and Valery A. Lunts, *Rationality criteria for motivic zeta functions*, Compos. Math. **140** (2004), no. 6, 1537–1560. MR MR2098401 (2005k :14045)

Mad05 David A. Madore, *Very free R-equivalence on toric models*, 2005.

Nic07 Johannes Nicaise, *Relative motives and the theory of pseudo-finite fields*, Int. Math. Res. Pap. IMRP (2007), no. 1, Art. ID rpm001, 70. MR MR2334007

Oda88 Tadao Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988, An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese. MR MR922894 (88m :14038)

Pey95 Emmanuel Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), no. 1, 101–218. MR MR1340296 (96h :11062)

Pey02 ——, *Points de hauteur bornée et géométrie des variétés (d'après Y. Manin et al.)*, Astérisque (2002), no. 282, Exp. No. 891, ix, 323–344, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. MR MR1975184 (2004b :11094)

Pey03a ______, *Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie*, arXiv:math/0303067v1, 2003.

Pey03b ______, *Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 1, 319–349, Les XXIIèmes Journées Arithmetiques (Lille, 2001). MR MR2019019 (2004i :14021)

Pey04 Emmanuel Peyre, *Rational points and curves on flag varieties (joint work with A. Chambert-Loir)*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report, vol. 12, 2004, www.mfo.de/programme/schedule/2004/10/OWR_2004_12.ps, pp. 650–654.

Pey06 Emmanuel Peyre, *Étude asymptotique des points de hauteur bornée*, Notes de l'école d'été sur les variétés toriques, Grenoble, juin 2000, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre/notes/textes/hauteurs.ps.gz, 2006.

Sal98 Per Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Astérisque (1998), no. 251, 91–258, Nombre et répartition de points de hauteur bornée (Paris, 1996). MR MR1679841 (2000d :11091)

David Bourqui david.bourqui@univ-rennes1.fr
IRMAR , Université de Rennes 1 , Campus de Beaulieu , 35042 Rennes cedex , France