



**HAL**  
open science

# Produit eulérien motivique et courbes rationnelles sur les variétés toriques

David Bourqui

► **To cite this version:**

David Bourqui. Produit eulérien motivique et courbes rationnelles sur les variétés toriques. 2006.  
hal-00018574v1

**HAL Id: hal-00018574**

**<https://hal.science/hal-00018574v1>**

Preprint submitted on 6 Feb 2006 (v1), last revised 26 Mar 2009 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Produit eulérien motivique et courbes rationnelles sur les variétés toriques

## Eulerian motivic product and rational curves on toric varieties

David BOURQUI

**Abstract :** We study the asymptotical behaviour of the moduli space of morphisms of given anticanonical degree from a rational curve to a split toric variety, when the degree goes to infinity. We obtain in this case a geometric analogue of Manin's conjecture about rational points of bounded height on varieties defined over a global field. The study is led through a generating serie whose coefficients lie in a Grothendieck ring of motives, the motivic height zeta function. In order to establish convergence properties of this function, we use a notion of eulerian motivic product. It relies on a construction of Denef and Loeser which associates a virtual motive to a first order logic ring formula.

**Résumé :** Nous étudions le comportement asymptotique de l'espace des modules des morphismes de degré anticanonique donné d'une courbe rationnelle vers une variété torique déployée, lorsque ce degré tend vers l'infini. Nous obtenons dans ce cas un analogue géométrique de la conjecture de Manin sur le nombre de points de hauteur bornée des variétés définies sur un corps global. L'étude se fait via une série génératrice à coefficients dans un anneau de Grothendieck de motifs, la fonction zêta des hauteurs motivique. Afin d'établir des propriétés de convergence de cette fonction, nous utilisons une notion de produit eulérien motivique, laquelle repose sur la construction de Denef et Loeser permettant d'associer un motif virtuel à une formule d'anneau logique du premier ordre.

**MSC :** 11G50, 14M25, 12E30, 14C05, 11M41

## 1 Introduction

Soit  $k$  un corps,  $\mathcal{C}$  une courbe projective, lisse et géométriquement intègre définie sur  $k$ , et  $V$  une variété projective et lisse définie sur  $k$ . On fixe un faisceau  $\mathcal{L}$  sur  $V$  dont la classe dans le groupe de Néron-Severi est située à l'intérieur du cône effectif.

Si le corps  $k$  est fini, un problème naturel est d'étudier le comportement asymptotique du nombre de morphisme de  $\mathcal{C}$  vers  $X$  de  $\mathcal{L}$ -degré donné quand ce degré tend vers l'infini. Ce problème est l'analogue géométrique du problème arithmétique du comptage asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur une variété définie sur un corps de nombres. Concernant ces deux problèmes, un série de questions a été soulevée par Manin et ses collaborateurs vers la fin des années 1980, lesquelles ont depuis été étudiées pour de larges classes de variétés, notamment dans le cas arithmétique. Le lecteur pourra se reporter à

[Pe5] et [Pe6] pour plus de précisions et un état des lieux sur la question en 2001.

Si le corps  $k$  est quelconque, on peut plus généralement s'intéresser au comportement asymptotique de la variété paramétrisant les morphismes de  $\mathcal{C}$  vers  $V$  de  $\mathcal{L}$ -degré donné quand ce degré tend vers l'infini. On peut par exemple essayer d'estimer le comportement asymptotique de la dimension et du nombre de composantes géométriques irréductibles de ces espaces de modules. Une autre façon de formaliser cette question est d'étudier une série génératrice associée qui est à coefficients dans l'anneau de Grothendieck des variétés (ou des motifs) sur  $k$ , et qui, lorsque le corps de base est fini, se spécialise sur la fonction zêta des hauteurs classiques. Nous renvoyons à la section 4.3 pour une formulation plus précise des questions qu'il semble légitime de se poser dans ce cas de figure. Signalons que nombre de ces questions sont dûes à Peyre.

Dans ce texte, nous étudions ce type de questions lorsque  $V$  est une variété torique déployée (projective et lisse),  $\mathcal{L}$  est le faisceau anticanonique et la courbe  $\mathcal{C}$  est une courbe rationnelle. Nous démontrons alors, si le corps de base est de caractéristique zéro, un analogue motivique des conjectures de Manin sur le nombre de points de hauteur bornée (théorème 4.15). Nous traitons à part le cas particulier des surfaces de Hirzebruch, pour lequel on obtient la rationalité de la fonction zêta des hauteurs, et pour lequel l'hypothèse sur la caractéristique n'est pas nécessaire (théorème 5.16). On obtient ici une généralisation (dans le cas d'une courbe rationnelle) du résultat de [Bo1] qui traitait, dans le cadre classique, le cas des surfaces de Hirzebruch définies sur un corps fini.

Signalons que Peyre a démontré un résultat similaire lorsque  $V$  est une variété de drapeaux, la courbe  $\mathcal{C}$  étant une courbe quelconque (cf. [Pe4]).

Les ingrédients de la démonstration des théorèmes 4.15 et 5.16 sont des versions motiviques de ceux que nous avons utilisés dans [Bo2] pour calculer la fonction zêta des hauteurs d'une variété torique déployée définie sur un corps global de caractéristique non nulle. Ce sont :

1. le lemme 5.13, qui décrit la variété paramétrisant les morphismes d'une courbe rationnelle vers une variété torique déployée à l'aide de la description de Cox du foncteur des points d'une telle variété (cf. [Co2]). Ce lemme est une version géométrique du lemme 2 de [Bo2], lui-même inspiré de la méthode utilisée par Salberger sur les corps de nombres dans [Sa]. Le point commun du résultat de Cox et des techniques évoquées dans la phrase précédente réside dans l'utilisation de la description explicite du torseur universel au-dessus d'une variété torique déployée (bien que ceci soit implicite dans la preuve du lemme 2 de [Bo2]).
2. une formule d'inversion de Möbius motivique, version motivique de la formule d'inversion utilisée dans [Bo2], elle-même adaptée des formules d'inversion utilisée par Peyre et Salberger pour étudier le problème de la répartition du nombre de points de hauteur bornée sur les variétés toriques définies sur un corps de nombres.
3. une notion de produit eulérien motivique qui nous permet de démontrer des propriétés de convergence de la série génératrice associée à la formule d'inversion en question, et de donner une interprétation du terme principal de la fonction zêta similaire à l'interprétation en termes de nombre de Tamagawa donnée par Peyre dans le cas classique. Nous faisons ici usage de la construction de Denef et Loeser permettant d'associer canoniquement

un motif virtuel à une formule logique du premier ordre. Bien que nous n'utilisons pas ce fait, on peut noter (cf. la remarque suivant le lemme 2.14) que ce produit eulérien motivique correspond à une décomposition arithmétique de la puissance formelle dans l'anneau de Grothendieck des variétés, notion définie dans [GuLuMe].

Nous décrivons à présent l'organisation de l'article.

Dans la section 2, après quelques rappels sur l'anneau de Grothendieck des variétés et les objets associés, nous rappelons la définition de la fonction zêta de Hasse-Weil motivique, dûe initialement à Kapranov, et nous l'écrivons sous forme d'un produit eulérien motivique "naïf". Cette notion nous apparaissant limitée (au vu notamment du résultat de convergence dont nous avons besoin pour le calcul de la fonction zêta des hauteurs motivique d'une variété torique), nous introduisons ensuite une notion plus fine de produit eulérien motivique et nous en démontrons quelques propriétés, notamment le fait que la fonction zêta de Hasse-Weil s'écrit encore sous forme d'un produit eulérien motivique (ce qui était tautologique avec l'approche naïve, mais n'est pas évident avec la seconde approche).

Dans la section 3, nous introduisons des fonctions d'inversions de Möbius motiviques et montrons que les séries génératrices associées s'écrivent sous forme d'un produit eulérien motivique, ce qui permet d'en dégager des propriétés de convergence.

Dans la section 4, après avoir défini les objets mis en jeu, nous précisons les questions qu'il semble légitime de se poser sur l'étude asymptotique des espaces de modules des morphismes d'une courbe donnée vers une variété donnée lorsque le degré considéré devient grand. Les conjectures de Manin raffinées par Peyre et Batyrev-Tschinkel (dans le cadre classique) servent de fil conducteur. Nous énonçons le résultat démontré dans la fin de cet article : ces questions ont une réponse positive pour les variétés toriques déployées si la courbe est rationnelle et le degré est le degré anticanonique.

Enfin, dans la section 5, après quelques très brefs rappels sur la géométrie des variétés toriques, nous décrivons la variété des morphismes de  $\mathbf{P}^1$  vers une variété torique de degré donné. Utilisant une fonction de Möbius adéquate et les résultats de la section 3, nous en déduisons le résultat annoncé.

### Remerciements

Je remercie Emmanuel Peyre et Antoine Chambert-Loir pour d'utiles discussions. Je remercie François Loeser pour m'avoir indiqué la référence [GuLuMe].

## 2 Fonction zêta de Hasse-Weil et produit eulérien motivique

### 2.1 Quelques rappels et définitions

Soit  $k$  un corps quelconque, et  $\text{Sch}_{\text{tf}}/k$  la catégorie des schémas de type fini sur  $k$ . On note  $\mathcal{M}_k$  l'anneau de Grothendieck  $K_0(\text{Sch}_{\text{tf}}/k)$  associé, défini comme suit : le groupe sous-jacent à  $\mathcal{M}_k$  est le groupe abélien libre engendré par les symboles  $[V]$  où  $V$  est un schéma de type fini sur  $k$ , quotienté par les relations  $[V] = [F] + [V \setminus F]$  pour tout sous-schéma fermé  $F$  de  $V$  (en particulier  $[V] = [V_{\text{red}}]$ ) et  $[V] = [W]$  si  $V$  et  $W$  sont  $k$ -isomorphes. Le produit est donné par  $[V][W] \stackrel{\text{déf}}{=} [V \times_k W]$ .

Désignons par  $\text{CHMot}_k$  la catégorie des motifs de Chow sur  $k$  (cf. par exemple [Sc] et [Man]) et  $K_0(\text{CHMot}_k)$  son anneau de Grothendieck. Si  $k$  est de caractéristique zéro, il existe d'après [GiSo, Theorem 4] (cf. aussi [GuNa] et [Bit]) un unique morphisme

$$\chi : \mathcal{M}_k \rightarrow K_0(\text{Mot}_k)$$

tel que la classe  $[X]$  d'une variété  $X$  projective et lisse sur  $k$  s'envoie sur la classe du motif de Chow qui lui est associé. Nous désignerons alors par  $\mathcal{M}_k^X$  l'image de  $\mathcal{M}_k$  par ce morphisme.

On note  $\mathbf{L} = [\mathbf{A}_k^1]$  la classe de la droite affine. On notera encore  $\mathbf{L}$  l'image de  $\mathbf{L}$  par  $\chi$  (i.e. la classe du motif de Lefschetz). On note  $\mathcal{M}_{k,\text{loc}} = \mathcal{M}_k[\mathbf{L}^{-1}]$  (la question de savoir si le morphisme de localisation  $\mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{M}_{k,\text{loc}}$  est ou non injectif est encore ouverte). On sait que  $\mathbf{L}$  est inversible dans  $K_0(\text{CHMot}_k)$ , ainsi  $\chi$  se factorise à travers  $\mathcal{M}_{k,\text{loc}}$ .

Si le corps  $k$  est fini, de cardinal  $q$ , l'application qui à un schéma de type fini sur  $k$  associe son nombre de points rationnels à valeur dans  $k$  induit un morphisme d'anneau  $\#_k : \mathcal{M}_{k,\text{loc}} \rightarrow \mathbf{Z}[q^{-1}]$

On munit  $\mathcal{M}_{k,\text{loc}}$  de la filtration dimensionnelle : pour  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $\mathcal{F}^m \mathcal{M}_{k,\text{loc}}$  est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme  $\mathbf{L}^{-i}[V]$ , où  $V$  est un schéma de type fini sur  $k$  et  $i$  et  $V$  vérifient  $i - \dim(V) \geq m$ . On définit

$$\widehat{\mathcal{M}}_k = \varinjlim \mathcal{M}_{k,\text{loc}} / \mathcal{F}^m \mathcal{M}_{k,\text{loc}}.$$

On note  $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}} = \mathcal{M}_k \otimes \mathbf{Q}$ ,  $\mathcal{M}_{k,\text{loc},\mathbf{Q}} = \mathcal{M}_{k,\text{loc}} \otimes \mathbf{Q}$ ,  $\mathcal{F}^m \mathcal{M}_{k,\text{loc},\mathbf{Q}} = \mathcal{F}^m \mathcal{M}_{k,\text{loc}} \otimes \mathbf{Q}$  et  $\widehat{\mathcal{M}}_{k,\mathbf{Q}} = \varinjlim \mathcal{M}_{k,\text{loc},\mathbf{Q}} / \mathcal{F}^m \mathcal{M}_{k,\text{loc},\mathbf{Q}}$ .

Si  $k$  est de caractéristique zéro, on note  $\mathcal{M}_{k,\text{loc}}^X = \mathcal{M}_k^X[\mathbf{L}^{-1}]$ ,  $\mathcal{F}_\chi^\bullet$  la filtration image de  $\mathcal{F}^\bullet$  par  $\chi$  et  $\widehat{\mathcal{M}}_k^X = \varinjlim \mathcal{M}_{k,\text{loc}}^X / \mathcal{F}_\chi^m \mathcal{M}_{k,\text{loc}}^X$ . On définit de manière analogue à ci-dessus  $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^X$ ,  $\mathcal{M}_{k,\text{loc},\mathbf{Q}}^X$ ,  $\mathcal{F}^m \mathcal{M}_{k,\text{loc},\mathbf{Q}}^X$  et  $\widehat{\mathcal{M}}_{k,\mathbf{Q}}^X$ .

## 2.2 Fonction zêta de Hasse-Weil et sa version motivique

Soit  $k$  un corps et  $X$  une variété sur  $k$ . On désigne par  $X^{(0)}$  l'ensemble des points fermés de  $X$  et par  $\deg(x)$  le degré d'un élément  $x$  de  $X^{(0)}$ . Pour  $n \geq 1$ , on désigne par  $X_n^{(0)}$  l'ensemble des points fermés de  $X$  de degré  $n$ , et par  $X^{<n>}$  la puissance symétrique d'ordre  $n$  de la variété  $X$ . En particulier, pour toute extension  $K$  de  $k$ , l'ensemble  $X^{<n>}(K)$  s'identifie à l'ensemble des zéro-cycles effectifs  $K$ -rationnels de degré  $n$  sur  $X$ .

Supposons le corps  $k$  fini. Pour  $n \geq 1$ , notons  $k_n$  l'unique extension de degré  $n$  de  $k$  (dans une clôture algébrique fixée de  $k$ ). La fonction zêta de Hasse-Weil associée à  $X$  est l'élément de  $\mathbf{Z}[[T]]$  défini par la formule

$$Z_X(T) = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \frac{|X(k_n)|}{n} T^n \right).$$

On a les formules classiques

$$\forall n \geq 1, \quad |X(k_n)| = \sum_{d|n} d \left| X_d^{(0)} \right| \quad (2.1)$$

et

$$Z_X(T) = \sum_{n \geq 0} |X^{\langle n \rangle}(k)| T^n = \prod_{x \in X^{(0)}} \frac{1}{1 - T^{\deg(x)}} = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{1}{1 - T^n} \right)^{|X_n^{(0)}|}. \quad (2.2)$$

Revenons au cas d'un corps  $k$  quelconque. On définit, suivant Kapranov ([Ka]), une version motivique de la fonction zêta de Hasse-Weil, à savoir une série formelle à coefficients dans  $\mathcal{M}_k$  donnée par la formule

$$Z_X^{\text{mot}}(T) = \sum_{n \geq 0} [X^{\langle n \rangle}] T^n.$$

En particulier, si  $k$  est fini, en appliquant  $\#_k$  aux coefficients de  $Z_X^{\text{mot}}$  on retrouve la série  $Z_X(T)$ .

Par exemple, si  $X = \mathbf{P}^1$ , on a pour tout  $n \geq 0$   $(\mathbf{P}^1)^{\langle n \rangle} \simeq \mathbf{P}^n$  d'où  $Z_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}}(T) = \frac{1}{(1-T)(1-\mathbf{L}T)}$ . Supposons plus généralement que  $X$  soit une courbe  $\mathcal{C}$  projective, lisse, géométriquement intègre, définie sur  $k$  et de genre  $g$ . Pour un corps  $k$  quelconque, et à condition que  $\text{Pic}^1(\mathcal{C})(k)$  soit non vide, Kapranov montre alors ([Ka, Theorem 1.1.9], cf. aussi [LaLu2, Theorem 3.7]) qu'il existe un polynôme  $P$  à coefficient dans  $\mathcal{M}_k$ , de degré  $2g$ , tel que

$$(1 - T)(1 - \mathbf{L}T)Z_{\mathcal{C}}^{\text{mot}}(T) = P(T). \quad (2.3)$$

Par ailleurs  $P$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$T^{2g} \mathbf{L}^g P(\mathbf{L}^{-1} T^{-1}) = P(T)$$

et on a

$$P(\mathbf{L}^{-1}) = [\text{Jac}(\mathcal{C})] \mathbf{L}^{-g}.$$

Si  $k$  est un corps fini, les résultats de Kapranov se spécialisent via l'application  $\#_k$  et permettent de retrouver des propriétés classiques de la fonction zêta de Hasse-Weil usuelle de  $\mathcal{C}$ .

Kapranov remarque aussi qu'il est naturel de se demander si  $Z_X^{\text{mot}}$  est encore rationnelle pour  $X$  de dimension supérieure. Larsen et Lunts ont montré que ce n'était pas toujours vrai dès que  $X$  est une surface (cf. [LaLu1] et [LaLu2], ainsi que [DeLo3]).

### 2.3 Produit eulérien motivique : première approche

Il est naturel de se demander s'il existe un analogue motivique des relations (2.1) et (2.2). Ceci peut s'obtenir de la façon formelle suivante : si  $X$  est une variété sur un corps  $k$ , on définit des famille  $(\Phi_n(X))_{n \geq 1}$  et  $(\Psi_n(X))_{n \geq 1}$  d'éléments de  $\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}$  par les relations<sup>1</sup>

$$Z_X^{\text{mot}}(T) = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \frac{\Phi_n(X)}{n} T^n \right) \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>On peut vérifier que  $\Phi_n(X)$  est en fait un élément de  $\mathcal{M}_k$ , mais ce n'est a priori pas le cas pour  $\Psi_n(X)$  si  $n \geq 2$ .

et

$$\forall n \geq 1, \quad \Phi_n(X) = \sum_{d|n} d \Psi_d(X). \quad (2.5)$$

Ainsi  $\Phi_1(X) = \Psi_1(X) = [X]$ . Plus généralement, un calcul élémentaire montre la formule suivante, valable pour tout  $n \geq 1$  :

$$\Phi_n(X) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d}{k} \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbf{N}_{>0}^k \\ m_1 + \dots + m_k = n}} \prod_{i=1}^k [X^{<m_i>}]. \quad (2.6)$$

De cette formule découle aussitôt le lemme suivant.

**Lemme 2.1**

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\Phi_n(X)$  et  $\Psi_n(X)$  appartiennent à  $\mathcal{F}^{-n \dim(X)} \mathcal{M}_{k, \text{loc}, \mathbf{Q}}$ .

Si  $X = \mathbf{A}^d$  on a pour, tout  $n \geq 1$ ,  $(\mathbf{A}^d)^{<n>} \simeq \mathbf{A}^{nd}$ . On en déduit le lemme suivant.

**Lemme 2.2**

Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\Phi_n(\mathbf{A}^d) = L^{nd}.$$

On a, par un calcul classique,

$$Z_X^{\text{mot}}(T) = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \Psi_n(X) \log \left( \frac{1}{1 - T^n} \right) \right). \quad (2.7)$$

Plus généralement, on a une notion de produit eulérien motivique : si  $P$  est un élément de  $\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}[[T]]$  vérifiant  $P(0) = 1$  on peut définir le produit eulérien motivique associé comme étant l'élément de  $\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}[[T]]$  donné par la formule

$$\Pi_{X, P}^{\text{mot}}(T) = \exp \left[ \sum_{n \geq 1} \Psi_n(X) \log(P(T^n)) \right].$$

Écrivons  $\Pi_{X, P}^{\text{mot}}(T) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n T^n$  et soit  $\nu_{P-1}$  la valuation de  $P-1$ . Du lemme 2.1 on déduit le résultat de convergence suivant.

**Corollaire 2.3**

Soit  $(V_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}}$ . On suppose qu'il existe une application  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  vérifiant

$$\phi(n) - \frac{n \dim(X)}{\nu_{P-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$V_n \in \mathcal{F}^{\phi(n)} \widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}}.$$

Alors la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n V_n$  converge dans  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}}$ .

*Démonstration* : On se reportera à la preuve du corollaire 2.22, d'énoncé et de démonstration similaire.  $\square$

## 2.4 Produit eulérien motivique : seconde approche

L'approche de la section précédente nous semble limitée dès qu'il s'agit de montrer que d'autres séries que la fonction zêta de Hasse-Weil motivique (telles que celles étudiées à la section 3) s'écrivent sous forme d'un produit eulérien motivique.

Si on suppose  $k$  de caractéristique zéro, on peut utiliser une construction de Denef et Loeser pour donner une définition plus naturelle de la familles de motifs  $(\Psi_n(X))$ , en tant qu'éléments de  $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^X$ . On notera alors  $(\Psi_n^X(X))$  cette famille de motifs.

La construction en question, établie par Denef et Loeser pour le développement de leur théorie de l'intégration motivique arithmétique, permet d'associer canoniquement à une formule d'anneau à coefficients dans  $k$  un élément de  $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^X$ . On définit notre famille  $(\Psi_n^X(X))$  comme étant l'image dans  $\mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^X$  d'une famille adéquate de formules d'anneau à coefficients dans  $k$ . On montre alors dans ce cadre que la relation (2.7) est une conséquence de la définition de  $(\Psi_n^X(X))$  (cf. proposition 2.17). Ceci entraîne d'ailleurs que  $(\Psi_n^X(X))$  est l'image par  $\chi$  de la famille  $(\Psi_n(X))$ .

Concernant les rappels qui suivent, on renvoie à [DeLo1] et [DeLo2] pour plus de détails.

Une *formule d'anneau du premier ordre à coefficients dans  $k$*  est une formule logique construite à partir d'un ensemble dénombrable de variables, d'équations polynômiales à coefficients dans  $k$ , de combinaisons booléennes et de quantificateurs universels et existentiels. On abrégera par la suite le terme *formule d'anneau du premier ordre à coefficients dans  $k$*  en *formule à coefficients dans  $k$*  voire *formule* si le corps  $k$  est clairement indiqué par le contexte. Pour toute formule  $\phi$  à coefficients dans  $k$  en  $n$  variables libres et toute extension  $K$  de  $k$  on notera  $\phi(K)$  le sous-ensemble de  $K^n$  constitué des éléments de  $K^n$  satisfaisant  $\phi$ .

Un *corps pseudo-fini*  $K$  est un corps possédant pour tout  $n \geq 1$  une unique extension de degré  $n$  dans une clôture algébrique fixée et tel que toute variété géométriquement irréductible sur  $K$  a un point rationnel dans  $K$ . Deux formules  $\phi$  et  $\psi$  à coefficients dans  $k$  en les variables libres  $(x_1, \dots, x_m)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  sont dites *logiquement équivalentes* s'il existe une formule  $\theta$  en les variables libres  $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  tel que pour tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$ , l'ensemble  $\theta(K) \subset K^n \times K^m$  est le graphe d'une bijection entre  $\phi(K)$  et  $\psi(K)$ .

L'intérêt pour la notion de corps pseudo-fini remonte à Ax, qui a démontré qu'une formule close à coefficients dans  $\mathbf{Q}$  était satisfaite dans tout corps pseudo-fini de caractéristique zéro si et seulement si elle était satisfaite dans tout corps fini de caractéristique assez grande.

Un exemple important de formule est donné par les formule galoisiennes. Étant donné un revêtement galoisien  $X \rightarrow Y$  de groupe  $G$ , où  $X$  et  $Y$  sont des variétés affines normales irréductibles, et  $C$  un sous-groupe cyclique de  $G$ , on note  $\phi_{X,Y,C}$  une formule telle que, pour tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$ ,  $\phi_{X,Y,C}(K)$  s'identifie à l'ensemble des éléments de  $Y(K)$  qui admette un groupe de décomposition égal à  $C$ . Ce sont exactement les éléments de  $Y(K)$  qui se relèvent à un élément de  $(X/C)(K)$  mais pas à un élément de  $(X/D)(K)$  pour tout sous-groupe strict  $D$  de  $C$ , ce qui montre que  $\phi_{X,Y,C}$  est bien une formule d'anneau.



Le groupe de Grothendieck de la théorie des corps pseudo-finis sur  $k$ , noté  $K_0(\text{PFF}_k)$ , est le groupe engendré par les symboles  $[\phi]$ , où  $\phi$  est une formule à coefficients dans  $k$  et les relations  $[\phi] = [\psi]$  si  $\phi$  et  $\psi$  sont logiquement équivalentes, ainsi que  $[\phi \vee \psi] + [\phi \wedge \psi] = [\phi] + [\psi]$  si  $\phi$  et  $\psi$  ont les mêmes variables libres.

Denef et Loeser montrent alors le résultat suivant (cf. [DeLo2, Theorem 2.1])

**Théorème 2.4 (Denef-Loeser)**

*Il existe une unique application*

$$\chi : K_0(\text{PFF}_k) \longrightarrow \mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X$$

*qui envoie la classe d'une formule qui est une conjonction d'équations polynômiale sur la classe de la variété affine définie par ces équations et qui satisfait, pour tout revêtement galoisien  $X \rightarrow Y$  de groupe  $G$ , où  $X$  et  $Y$  sont des variétés normales affines irréductibles, et pour tout sous-groupe cyclique  $C$  de  $G$ , la relation*

$$\chi([\phi_{X,Y,C}]) = \frac{|C|}{|N_G(C)|} \chi([\phi_{X,X/C,C}]). \quad (2.8)$$

Dans ce qui suit nous aurons besoin d'étendre légèrement les hypothèses sous lesquelles la relation (2.8) est vérifiée : on suppose que  $X'$  et  $Y'$  sont des variétés affine normales irréductibles, que  $X'$  est munie d'une action d'un groupe fini  $G$  induisant un  $G$ -revêtement d'un ouvert  $X$  de  $X'$  sur un ouvert  $Y$  de  $Y'$ . Alors on peut définir des formules d'anneau  $\phi_{X,Y,C}$  et  $\phi_{X,X/C,C}$  pour tout sous-groupe cyclique  $C$  de  $G$ , et on vérifie en prenant des recouvrements ouverts affines que la relation (2.8) est encore vérifiée. On peut d'ailleurs obtenir une relation du même type pour des variétés  $X$  et  $Y$  normales quelconques en remplaçant la notion de formule par celle de sous-assignement définissable (cf. [DeLo1, partie 4]).

**2.5 Construction**

Nous donnons à présent la construction de la famille de motifs virtuels  $(\Psi_n^X(X))$ . Nous introduisons tout d'abord des notations.

**Notations 2.5**

*Soit  $n \geq 1$ . Pour toute variété  $X$ , on note  $(X^n)_0$  l'ouvert de  $X^n$  constitué des  $n$ -uplets d'éléments deux à deux distincts, et  $(X^{<n>})_0$  l'ouvert de  $X^{<n>}$  image de  $(X^n)_0$  par le morphisme naturel  $X^n \rightarrow X^{<n>}$ . Ce dernier morphisme induit un revêtement galoisien  $(X^n)_0 \rightarrow (X^{<n>})_0$  de groupe  $\mathfrak{S}_n$ .*

Supposons tout d'abord  $X$  affine et irréductible. Soit  $n \geq 1$ . On fait usage des notations ci-dessus et on note  $\pi_n$  le  $\mathfrak{S}_n$ -revêtement  $(X^n)_0 \rightarrow (X^{<n>})_0$ .

On note  $\sigma_n$  un  $n$ -cycle de  $\mathfrak{S}_n$ , et  $\psi_n(X)$  une formule telle que, pour tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$ ,  $\psi_n(X)(K)$  s'identifie à l'ensemble des éléments de  $X^{<n>}(K)$  qui sont dans  $(X^{<n>})_0(K)$  et admettent un groupe de décomposition engendré par  $\sigma_n$ . Ce dernier ensemble s'identifie naturellement à l'ensemble des points fermés de degré  $n$  sur  $X_K$ . L'expression de la formule  $\psi_n(X)$  dépend du choix du plongement de  $X$  dans un espace affine, mais l'existence d'un  $k$ -isomorphisme entre deux tels plongements montre que deux tels choix donnent des formules logiquement équivalentes.

Ainsi  $\overline{\psi}_n(X) \stackrel{\text{déf}}{=} [\psi_n(X)]$  ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $X$ .

**Lemme 2.6**

Soit  $U$  un ouvert affine de  $X$  et  $F = X \setminus U$ . On a, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\bar{\psi}_n(X) = \bar{\psi}_n(F) + \bar{\psi}_n(U).$$

*Démonstration :* On note  $\pi_U$  (respectivement  $\pi_F$ ) le morphisme naturel  $U^{<n>} \rightarrow X^{<n>}$  (respectivement  $F^{<n>} \rightarrow X^{<n>}$ ). La formule  $\psi_n(X)$  s'écrit alors  $\psi' \vee \psi''$ , où  $\psi'$  (respectivement  $\psi''$ ) est une formule dont l'interprétation dans un corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$  est l'ensemble des éléments de  $X^{<n>}(K)$  qui satisfont  $\psi_n(X)$  et sont dans l'image de  $\pi_U$  (respectivement  $\pi_F$ ). De tels éléments sont en bijection avec l'ensemble des éléments de  $U^{<n>}(K)$  satisfaisant  $\psi_n(U)$ . Cette bijection est donnée par le  $k$ -morphisme de variétés affines  $\pi_U$ , et donc  $\psi'$  et  $\psi_n(U)$  sont logiquement équivalentes. De même  $\psi''$  et  $\psi_n(F)$  sont logiquement équivalentes, d'où le résultat.  $\square$

Grâce à ce lemme, la définition de  $\bar{\psi}_n(X)$  s'étend à  $X$  quelconque par additivité<sup>2</sup> : si  $X$  s'écrit comme une union finie  $\bigcup_{i \in I} X_i$  de variétés affines, on pose, pour  $J \subset I$ ,

$$X_J = \bigcap_{i \in J} X_i \setminus \bigcup_{i \notin J} X_i$$

et

$$\bar{\psi}_n(X) = \sum_{\emptyset \neq J \subset I} \bar{\psi}_n(X_J),$$

ce qui ne dépend pas du recouvrement choisi.

Du lemme 2.6, on déduit aussitôt le

**Lemme 2.7**

Soit  $X$  une variété sur  $k$ ,  $U$  un ouvert de  $X$  et  $F = X \setminus U$ . On a pour tout  $n \geq 1$

$$\bar{\psi}_n(X) = \bar{\psi}_n(U) + \bar{\psi}_n(F).$$

**Corollaire 2.8**

Soit  $n \geq 1$ . L'application qui à  $X$  associe  $\bar{\psi}_n(X)$  s'étend en un morphisme de groupes

$$\bar{\psi}_n : \mathcal{M}_k \longrightarrow K_0(\text{PFF}_k).$$

En particulier, si  $A$  est un sous-ensemble constructible d'une variété  $X$  sur  $k$ ,  $\bar{\psi}_n(A)$  est bien défini. Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille finie de sous-ensembles constructibles d'une variété  $X$  sur  $k$ , on a

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_n \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) &= \sum_{\emptyset \neq J \subset I} \bar{\psi}_n \left( \bigcap_{i \in J} A_i \setminus \bigcup_{i \notin J} A_i \right) \\ &= \sum_{\emptyset \neq J \subset I} (-1)^{1+\#J} \bar{\psi}_n \left( \bigcap_{i \in J} A_i \right). \end{aligned}$$

Finalement, pour toute variété  $X$  sur  $k$  et pour tout  $n \geq 1$ , on pose

$$\Psi_n^X(X) = \chi(\bar{\psi}_n(X))$$

<sup>2</sup>On aurait pu aussi utiliser la notion de sous-assignement définissable pour étendre la définition de  $\bar{\psi}_n(X)$

On pose également

$$\Phi_n^\chi(X) = \sum_{d|n} d \Psi_d^\chi(X).$$

On peut donc voir  $\Phi_n^\chi(X)$  comme l'image par  $\chi$  de la classe d'une hypothétique formule dont l'interprétation dans tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$  définirait l'ensemble des points de  $X$  à valeur dans l'unique extension de degré  $n$  de  $K$  (dans une clôture algébrique fixée de  $K$ ).

En fait, de la définition de  $\Phi_n^\chi(X)$  et de la proposition 3.6.1 de [DeLo1] (cf. aussi le paragraphe 3.3 de [DeLo1]) on déduit aisément la proposition suivante.

**Proposition 2.9**

Supposons  $k$  de type fini sur  $\mathbf{Q}$ . Soit  $R$  un anneau intègre et normal de type fini sur  $\mathbf{Z}$ , de corps des fractions  $k$ . Si  $x$  est un point fermé de  $\text{Spec}(R)$ , on note  $\mathbf{F}_x$  le corps résiduel en  $x$  et  $\text{Frob}_x$  le frobenius en  $x$ .

Il existe un élément non nul  $f$  de  $R$  tel que pour tout points fermé  $x$  de  $\text{Spec}(R_f)$  on ait

$$\text{Tr Frob}_x(\phi_n^\chi(X)) = |X_{\mathbf{F}_x}(\mathbf{F}_{x,n})|.$$

## 2.6 Propriétés

De la définition de  $\Phi_n^\chi$  découle immédiatement la proposition suivante.

**Proposition 2.10**

Soit  $X$  une variété sur  $k$ ,  $U$  un ouvert de  $X$ . On a pour tout  $n \geq 1$

$$\Phi_n^\chi(X) = \Phi_n^\chi(U) + \Phi_n^\chi(X \setminus U)$$

Si  $A$  est un sous-ensemble constructible de  $X$ ,  $\Phi_n^\chi(A)$  est bien défini et si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille finie de sous-ensembles constructibles de  $X$  on a une formule similaire à celle du corollaire 2.8.

**Proposition 2.11**

Soit  $n \geq 1$ . Soit  $X$  et  $Y$  des variétés sur  $k$ . On a

$$\Phi_n^\chi(X \times Y) = \Phi_n^\chi(X) \Phi_n^\chi(Y).$$

Soit  $X \rightarrow Y$  une fibration localement Zariski triviale de fibre  $Z$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\Phi_n^\chi(X) = \Phi_n^\chi(Y) \Phi_n^\chi(Z).$$

L'application qui à  $X$  associe  $\Phi_n^\chi(X)$  s'étend en un morphisme d'anneaux

$$\Phi_n^\chi(X) : \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{M}_k^\chi.$$

Cette proposition découle aussitôt de la définition de  $\Phi_n^\chi$  et du lemme suivant.

**Lemme 2.12**

Soit  $X$  et  $Y$  des variétés sur  $k$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\Psi_n^\chi(X \times Y) = \sum_{\substack{d|n, e|n \\ d \vee e = n}} \frac{de}{n} \Psi_d^\chi(X) \Psi_e^\chi(Y).$$

*Démonstration :* En prenant des recouvrements ouverts affines et en stratifiant, et grâce au lemme 2.7, on peut supposer  $X$  et  $Y$  affines, normales et irréductibles.

Dans toute la démonstration, pour tout entier  $n$ , on identifie  $\mathfrak{S}_n$  au groupe des bijections de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , et on note  $\sigma_n$  le  $n$ -cycle  $i \mapsto i + 1$ .

Soit  $n \geq 1$ . Soit  $d$  et  $e$  des diviseurs de  $n$  tels que  $d \vee e = n$ .

Nous faisons usage des notations 2.5.

On note  $Z_{d,e}$  la variété  $(X^d)_0 \times (Y^e)_0$ . L'action naturelle du groupe  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$  sur  $Z_{d,e}$  induit un  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$ -revêtement

$$Z_{d,e} \longrightarrow (X^{<d>})_0 \times (Y^{<e>})_0.$$

Les injections diagonales  $(X^d)_0 \rightarrow (X^d)^{\frac{n}{d}}$  et  $(Y^e)_0 \rightarrow (Y^e)^{\frac{n}{e}}$  induisent un morphisme

$$Z_{d,e} \longrightarrow (X \times Y)_0^{<n>}$$

que l'on notera  $\pi_{d,e}$ .

On note  $C_{d,e}$  le sous-groupe cyclique d'ordre  $n$  de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$  engendré par  $(\sigma_d, \sigma_e)$ .

Les formules  $\psi_d(X) \wedge \psi_e(Y)$  et  $\phi_{Z_{d,e}, (X^{<d>})_0 \times (Y^{<e>})_0, C_{d,e}}$  sont alors logiquement équivalentes.

Soit  $G_{d,e}$  le sous-groupe maximal de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$  tel que le morphisme  $\pi_{d,e}$  se factorise à travers  $Z_{d,e}/G_{d,e}$ . On peut décrire  $G_{d,e}$  de la manière suivante. On note  $f_d$  (respectivement  $f_e$ ) le morphisme naturel  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$  (respectivement  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$ ). Alors un élément  $(\sigma_1, \sigma_2)$  de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$  est dans  $G_{d,e}$  si et seulement s'il existe un élément  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_n$  vérifiant

$$\forall i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \quad \begin{cases} \sigma_1 f_d(i) &= f_d(\sigma(i)) \\ \sigma_2 f_e(i) &= f_e(\sigma(i)). \end{cases}$$

En d'autres termes, si on identifie  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  à un sous-ensemble de  $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$  via  $f_d \times f_e$ ,  $G_{d,e}$  est le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$  constitué des éléments qui stabilisent  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . En particulier  $G_{d,e}$  s'identifie à un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ , noté  $\mathfrak{S}_n^{d,e}$ . Notons que  $G_{d,e}$  contient  $C_{d,e}$  (l'élément de  $\mathfrak{S}_n^{d,e}$  correspondant à  $(\sigma_d, \sigma_e)$  est  $\sigma_d$ ).

Soit  $K$  un corps pseudo-fini contenant  $k$ ,  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$ ,  $\tau$  un générateur topologique du groupe de Galois absolu de  $K$ , et, pour tout entier  $d$ ,  $K_d$  l'unique extension de degré  $d$  de  $K$  dans  $\overline{K}$ , et  $K'_d$  l'ensemble des générateurs de  $K_d$ , i.e. l'ensemble des éléments de  $\overline{K}$  dont l'orbite sous  $\tau$  est de cardinal  $d$ .

Soit  $z$  un élément de  $(X \times Y)_0^{<n>}(K)$  satisfaisant  $\psi_n(X \times Y)$ . Ceci signifie que  $z$  s'identifie à un ensemble du type  $\{(\tau^i x, \tau^i y)_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}\}$ , où  $(x, y)$  est un élément de  $(X \times Y)(\overline{K})$  tel que l'égalité  $(\tau^i x, \tau^i y) = (x, y)$  ait lieu si et seulement si  $n$  divise  $i$ . Soit  $d$  et  $e$  tels que  $x \in X(K'_d)$  et  $y \in Y(K'_e)$ . On a alors nécessairement  $d \vee e = n$ . Le couple  $(d, e)$  est en fait l'unique couple vérifiant  $d \vee e = n$  et tel que  $z$  se relève à un point géométrique de  $Z_{d,e}$ .

Montrons que  $z$  se relève en fait à un unique élément de  $(Z_{d,e}/G_{d,e})(K)$ , et que cet élément admet  $C_{d,e}$  comme groupe de décomposition.

L'ensemble des points géométriques de  $Z_{d,e}$  qui s'envoient sur  $z$  est l'ensemble des points  $((x_j)_{j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}}, (y_k)_{k \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}}) \in (X^d \times Y^e)(\overline{K})$  vérifiant : il existe un élément  $\mu$  de  $\mathfrak{S}_n$  tel qu'on ait

$$\forall i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \quad \begin{cases} x_{f_d(i)} &= \tau^{\mu(i)} x \\ y_{f_e(i)} &= \tau^{\mu(i)} y. \end{cases}$$

Un tel élément  $\mu$  est alors nécessairement dans  $\mathfrak{S}_n^{d,e}$ . On voit donc que  $\pi_{d,e}^{-1}(z)$  est une orbite sous  $G_{d,e}$  et on vérifie par ailleurs facilement qu'elle est stable sous  $\tau$ . Ceci montre que  $z$  se relève à un unique élément de  $(Z_{d,e}/G_{d,e})(K)$ .

Montrons que cet élément admet  $C_{d,e}$  comme groupe de décomposition. Notons

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((\tau^j x)_{j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}} (\tau^k y)_{k \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}}) \in \pi_{d,e}^{-1}(z).$$

Il suffit de montrer que la  $C_{d,e}$ -orbite de  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est  $\tau$ -stable et que pour tout sous-groupe strict  $C'$  de  $C_{d,e}$  la  $C'$ -orbite de  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  n'est pas  $\tau$ -stable. Ceci est immédiat compte tenu du fait que  $(\sigma_d, \sigma_e)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tau.(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et que  $(\sigma_d, \sigma_e)$  engendre  $C_{d,e}$ .

Montrons à présent qu'un élément de  $(Z_{d,e}/G_{d,e})(K)$  admettant  $C_{d,e}$  pour groupe de décomposition s'envoie par  $\pi_{d,e}$  sur un élément de  $(X \times Y)_0^{<n>}(K)$  satisfaisant  $\psi_n(X \times Y)$ . Un tel élément se relève à un point géométrique  $((x_j) \times (y_k))$  de  $Z_{d,e}$  vérifiant : il existe un entier  $l$  premier à  $n$  tel que pour tout  $(k, j)$  on a  $(x_{j+l}, y_{k+l}) = (\tau x_j, \tau y_k)$ . Pour un entier  $m$  premier à  $n$  convenable, cet élément s'écrit donc  $((\tau^i x) (\tau^k y))$  avec  $x \in X(K'_d)$  et  $y \in Y(K'_e)$ , et son image dans  $(X \times Y)_0^{<n>}$  est un point  $K$ -rationnel satisfaisant  $\psi_n(X \times Y)$ .

On note alors  $\theta_{d,e}$  une formule telle que, pour corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$ ,  $\theta_{d,e}(K)$  s'identifie à l'ensemble des éléments de  $(X \times Y)_0^{<n>}(K)$  qui se relèvent à un élément de  $(Z_{d,e}/G_{d,e})(K)$  admettant  $C_{d,e}$  comme groupe de décomposition.

Ce qui précède montre que, d'une part, pour tout  $(d, e)$  avec  $d \vee e = n$ , les formules  $\theta_{d,e}$  et  $\phi_{Z_{d,e}, Z_{d,e}/G_{d,e}, C_{d,e}}$  sont logiquement équivalentes et d'autre part que les formules  $(\theta_{d,e})_{d \vee e = n}$  forment une partition de  $\psi_n(X \times Y)$ .

D'après (2.8) et ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \chi([\theta_{d,e}]) &= \chi([\phi_{Z_{d,e}, Z_{d,e}/G_{d,e}, C_{d,e}}]) \\ &= \frac{|N_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}(C_{d,e})|}{|N_{G_{d,e}}(C_{d,e})|} \chi([\phi_{Z_{d,e}, X_0^{<d>} \times Y_0^{<e>}, C_{d,e}}]) \\ &= \frac{|N_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}(C_{d,e})|}{|N_{G_{d,e}}(C_{d,e})|} \Psi_d^\chi(X) \Psi_e^\chi(Y). \end{aligned}$$

Il suffit donc pour terminer la démonstration de montrer que

$$\frac{|N_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}(C_{d,e})|}{|N_{G_{d,e}}(C_{d,e})|} = \frac{de}{n}.$$

Un élément  $(\sigma_1, \sigma_2)$  de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e$  est dans  $N_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}(C_{d,e})$  si et seulement s'il existe un élément  $l$  de  $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$  tel que  $(\sigma_1, \sigma_2)(\sigma_d, \sigma_e) = (\sigma_d, \sigma_e)^l (\sigma_1, \sigma_2)$  i.e. si et seulement si on a

$$\begin{cases} \forall j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}, & \sigma_1(j+1) = \sigma_1(j) + l \\ \forall k \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}, & \sigma_2(k+1) = \sigma_2(k) + l. \end{cases}$$

Un tel élément est ainsi entièrement déterminé par la donnée de  $l \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$  et du couple  $(\sigma_1(0), \sigma_2(0))$ . Il sera dans  $G_{d,e}$  si et seulement si on a en outre  $(\sigma_1(0), \sigma_2(0)) \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Ainsi on a

$$|N_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_e}(C_{d,e})| = de |(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*|,$$

$$|N_{G_{d,e}}(C_{d,e})| = n |(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*|$$

et le résultat annoncé. □

De la définition de  $\Phi_n^X$  découle la relation

$$\exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\Phi_n^X(X)}{n} T^n\right) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \Psi_n^X(X) \log\left(\frac{1}{1-T^n}\right)\right)$$

Il s'agit maintenant de montrer que cette dernière expression est égale à  $Z_X^X(T)$ .

**Notations 2.13**

Pour tout élément  $x$  de  $\mathcal{M}_{k,Q}^X$  et tout  $n \geq 1$ , on pose

$$\binom{x}{n} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (x-i)}{n!}.$$

Soit  $r \geq 1$  et  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r$  tel qu'on ait  $f_1 \leq \dots \leq f_r$ . On définit une partition  $\{1, \dots, r\} = \coprod_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$  par la condition

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, \quad f_i = f_j \iff \exists \gamma, \quad i, j \in I_\gamma.$$

Pour  $\gamma \in \Gamma$ , on pose  $f_\gamma = f_i$  où  $i$  est un élément de  $\gamma$ , et  $n_\gamma = |I_\gamma|$ . Enfin on pose

$$\left(\Psi_{\mathbf{f}}^X(X)\right) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \binom{\Psi_{f_\gamma}^X(X)}{n_\gamma}.$$

Un calcul élémentaire montre alors le lemme suivant :

**Lemme 2.14**

Soit  $P$  une série formelle à coefficients dans  $\mathcal{M}_{k,Q}^X$  s'écrivant

$$P = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n T^n.$$

On a

$$\exp\left(\sum_{n \geq 1} \Psi_n^X(X) \log(P(T^n))\right) = 1 + \sum_{m \geq 1} \alpha_m T^m$$

avec, pour  $m \geq 1$ , la formule

$$\alpha_m = \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{f}=(f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ f_1 \leq \dots \leq f_r}} \left(\Psi_{\mathbf{f}}^X(X)\right) \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ \sum n_i f_i = m}} \prod_{i=1}^r a_{n_i}.$$

Plus généralement, soit  $E$  un ensemble fini non vide et

$$P = 1 + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^E \setminus \{0\}} a_{\mathbf{n}} T^{\mathbf{n}}$$

un élément de  $\mathcal{M}_{k,Q}^X[[T_e]]_{e \in E}$ . On a

$$\exp\left(\sum_{n \geq 1} \Psi_n(X) \log(P(T_e^n))\right) = 1 + \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{N}^E \setminus \{0\}} \alpha_{\mathbf{m}} T^{\mathbf{m}}$$

où, pour  $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^E \setminus \{0\}$ , on a la formule

$$\alpha_{\mathbf{m}} = \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{f}=(f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ f_1 \leq \dots \leq f_r}} (\Psi_{\mathbf{f}}(X)) \sum_{\substack{(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r) \in (\mathbf{N}^E \setminus \{0\})^r \\ \sum \mathbf{n}_i \mathbf{f}_i = \mathbf{m}}} \prod_{i=1}^r a_{\mathbf{n}_i}.$$

*Remarque :* Soit  $P(T)$  une série formelle à coefficient dans  $\mathcal{M}_k$  de terme constant 1. Écrivons  $P(T) = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n T^n$ . et supposons que pour tout  $n$   $a_n$  s'écrit  $[A_n]$  où  $A_n$  est un  $k$ -schéma de type fini.

Rappelons que  $\Pi_{X,P}^{\text{mot}}(T)$  désigne la série  $\exp\left(\sum_{n \geq 1} \Psi_n^X(X) \log(P(T^n))\right)$ .

On peut montrer que  $\Pi_{X,P}^{\text{mot}}(T)$  coïncide, au moins après application du morphisme  $\chi$ , avec la “puissance  $[X]$ -ème de  $P(T)$ ” définie par les auteurs de [GuLuMe]. C'est une série formelle qu'ils notent  $P(T)^{[X]}$  et qu'ils définissent par la formule

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\rho \geq 1} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_\rho) \in \mathbf{N}^\rho \\ \sum j k_j = k \\ k_\rho \neq 0}} \left[ \left( (X^{\sum_j k_j})_0 \times \prod_{j=1}^{\rho} A_j^{k_j} \right) / \prod_{j=1}^{\rho} \mathfrak{S}_{k_j} \right] \right\} T^k \quad (2.9)$$

où  $(X^{\sum_j k_j})_0$  est l'ouvert de  $X^{\sum_j k_j}$  constitué des  $\sum k_j$ -uplets d'éléments deux à deux distincts et  $\prod_j \mathfrak{S}_{k_j}$  agit de manière diagonale sur chacun des facteurs  $(X^{\sum_j k_j})_0$  et  $\prod_{j=1}^{\rho} A_j^{k_j}$ .

Par ailleurs, comme déjà indiqué,  $\Pi_{X,P}^{\text{mot}}(T)$  s'écrit

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{f}=(f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ f_1 \leq \dots \leq f_r}} (\Psi_{\mathbf{f}}(X)) \sum_{\substack{(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ \sum \mathbf{n}_i \mathbf{f}_i = k}} \prod_{i=1}^r a_{\mathbf{n}_i} \right\} T^k \quad (2.10)$$

et l'expression (2.10) découle (au moins après application du morphisme  $\chi$ ) de l'expression (2.9) via la “décomposition arithmétique” (donnée par la relation de Denef et Loeser (2.8)) des motifs des quotients de variétés apparaissant dans l'expression (2.9).

Il est facile d'explicitier ce qui se passe au niveau de la partie correspondant à l'image des points rationnels dans le quotient : il s'agit, pour  $k \geq 1$  donné, de comparer d'une part l'expression

$$\sum_{\rho \geq 1} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_\rho) \in \mathbf{N}^\rho \\ \sum j k_j = k \\ k_\rho \neq 0}} \left[ \left( (X^{\sum_j k_j})_0 \times \prod_{j=1}^{\rho} A_j^{k_j} \right) / \prod_{j=1}^{\rho} k_j! \right]$$

qui s'écrit encore (cf. lemme 2.16)

$$\sum_{\rho \geq 1} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_\rho) \in \mathbf{N}^\rho \\ \sum j k_j = k \\ k_\rho \neq 0}} \frac{[X]([X] - 1) \dots ([X] - \sum_j k_j + 1) \prod_{j=1}^\rho a_j^{k_j}}{\prod_{j=1}^\rho k_j!} \quad (2.11)$$

et la partie de (2.10) correspondant au cas où tous les  $f_i$  sont égaux à 1, soit

$$\sum_{r \geq 1} \left( \underbrace{\Psi(1, \dots, 1)}_{r \text{ répétitions}}(X) \right) \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ \sum n_i = k}} \prod_{i=1}^r a_{n_i}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{r \geq 1} \frac{[X]([X] - 1) \dots ([X] - r + 1)}{r!} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ \sum n_i = k}} \prod_{i=1}^r a_{n_i} \quad (2.12)$$

et l'égalité de (2.11) et (2.12) découle d'un argument combinatoire élémentaire (si  $(k_1, \dots, k_\rho) \in \mathbf{N}^\rho$  avec  $k_\rho \neq 0$ , soit  $r = \sum k_j$ ; il existe  $\frac{r!}{\prod k_j!}$   $r$ -uplets distincts  $(n_1, \dots, n_r)$  de  $\mathbf{N}_{>0}^r$  vérifiant  $k_j = |\{i, n_i = j\}|$ ).  $\square$

**Lemme 2.15**

Soit  $X$  et  $Z$  des variétés affines, normales, irréductibles, et  $Z \rightarrow Y$  un revêtement galoisien de groupe  $H$  et  $Y \rightarrow X$  un revêtement galoisien de groupe  $G$ . Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-groupe cycliques de  $H$ , deux à deux non conjugués dans  $H$ .

Soit  $G'$  le sous-groupe de  $G$  formé des éléments de  $g$  de  $G$  vérifiant la propriété suivante : pour tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$ , l'ensemble des  $x \in Y(K)$  admettant pour groupe de décomposition l'un  $C_i$  est stable sous  $g$ .

Soit  $\phi$  une formule telle que pour tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$ ,  $\phi(K)$  s'identifie à l'ensemble des éléments de  $X(K)$  qui se relèvent à un élément de  $Y(K)$  admettant pour groupe de décomposition l'un des  $C_i$ .

On a alors

$$\chi([\phi]) = \frac{1}{|G'|} \sum_{i \in I} \chi([\phi_{Z,Y,C_i}]).$$

*Démonstration :* On commence par supposer que  $Z \rightarrow X$  est galoisien de groupe  $\Gamma$ . Soit  $\Gamma'$  le sous-groupe de  $\Gamma$  formé des éléments  $\gamma$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall i \in I, \quad \exists h \in H, \quad \exists j \in I, \quad \gamma C_i \gamma^{-1} = h C_j h^{-1} \quad (2.13)$$

Alors  $\Gamma'$  contient  $H$  et  $G'$  est l'image de  $\Gamma'$  dans  $G$ .

On suppose en outre que  $G' = G$  soit encore  $\Gamma' = \Gamma$ . On note  $J \subset I$  un sous-ensemble de  $I$  tels que les  $(C_j)_{j \in J}$  forment un système de représentants des classes de conjugaison sous  $\Gamma$  des  $C_j$ . Pour  $j \in J$ , on note  $I_j \subset I$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $C_i$  est conjugué dans  $\Gamma$  à  $C_j$ . Par la propriété (2.13), l'orbite



de  $C_j$  sous l'action de  $\Gamma$  par conjugaison est réunion des orbites des  $C_i$  pour  $i \in I_j$  sous l'action de  $H$  par conjugaison, d'où l'égalité

$$\frac{|\Gamma|}{|N_\Gamma(C_j)|} = \sum_{i \in I_j} \frac{|H|}{|N_H(C_i)|}.$$

Les formules  $(\phi_{Z,X,C_j})_{j \in J}$  formant une partition de  $\phi$ , on a

$$\begin{aligned} \chi([\phi]) &= \sum_{j \in J} \chi([\phi_{Z,X,C_j}]) \\ &= \sum_{j \in J} \frac{|C_j|}{|N_\Gamma(C_j)|} \chi([\phi_{Z,X/C_j,C_j}]) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \frac{|C_i|}{|N_H(C_i)|} \chi([\phi_{Z,Z/C_i,C_i}]) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \chi([\phi_{Z,Y,C_i}]) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{i \in I} \chi([\phi_{Z,Y,C_i}]) \end{aligned}$$

d'où le résultat dans ce cas.

Supposons à présent  $G'$  quelconque. Soit  $\psi$  une formule telle que pour tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$ ,  $\psi(K)$  s'identifie à l'ensemble des éléments de  $(Y/G')(K)$  qui se relèvent à un élément de  $Y(K)$  admettant pour groupe de décomposition  $C_i$  pour un  $i$ . Alors le morphisme  $Y/G' \rightarrow X$  fait de  $\phi$  et  $\psi$  deux formules logiquement équivalentes (si  $x \in X(K)$  vérifie  $\phi$ , il existe exactement  $|G'|$  éléments de  $Y(K)$  qui admette un des  $C_i$  pour groupe de décomposition et s'envoient sur  $y$ , et il en est de même pour  $x' \in (Y/G')(K)$  vérifiant  $\psi$ ). On en déduit le résultat en appliquant ce qui précède à  $\psi$ .

Supposons à présent  $Z \rightarrow X$  non nécessairement galoisien. Soit  $Z' \rightarrow X$  une clôture galoisienne de  $Z \rightarrow X$ ,  $\Gamma'$  le stabilisateur de  $Y$ ,  $\pi : \Gamma' \rightarrow H$  le morphisme quotient. Soit  $(D_j)_{j \in J}$  une famille de sous-groupes cycliques de  $\Gamma'$ , deux à deux non conjugués dans  $\Gamma'$ , tel que tout sous-groupe cyclique de  $\Gamma'$  dont l'image par  $\pi$  est l'un des  $C_i$  est conjugué à un  $D_j$ . Alors les formules  $\bigwedge_{i \in I} \phi_{Z,Y,C_i}$  et  $\bigwedge_{j \in J} \phi_{Z',Y,D_j}$  sont équivalentes, d'où le résultat d'après le cas traité précédemment.  $\square$

### Lemme 2.16

Soit  $n \geq 1$  et  $\phi$  une formule d'anneau à coefficients dans  $k$  en les variables libres  $(x_1, \dots, x_n)$ . On pose  $\psi_1 = \phi$ . Pour  $m \geq 2$ , soit  $\psi_m$  la formule d'anneau en les variables libres  $(x_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$  donnée par

$$\left( \bigwedge_{j=1}^m \phi(x_{1,j}, \dots, x_{n,j}) \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{j,k \in \{1,\dots,m\} \\ j \neq k}} (x_{1,j}, \dots, x_{n,j}) \neq (x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \right).$$

On a alors, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$[\psi_m] = \prod_{j=0}^{m-1} ([\phi_j] - j).$$

*Démonstration :* Soit  $m \geq 2$ . Les formules en les  $m$  variables libres  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$

$$\psi_{m-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}) \wedge \phi(\mathbf{x}_m)$$

et

$$\psi_m \vee \bigvee_{j=1}^{m-1} (\psi_{m-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}) \wedge (\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_j))$$

sont logiquement équivalentes. Pour  $j = 1, \dots, m-1$  la formule

$$\psi_{m-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}) \wedge (\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_j)$$

est logiquement équivalente à  $\psi_{m-1}$ . On a alors

$$[\psi_m] + (m-1)[\psi_{m-1}] = [\psi_{m-1}][\phi]$$

soit

$$[\psi_m] = [\psi_{m-1}][\phi - m + 1]$$

d'où le résultat en raisonnant par récurrence sur  $m$ . □

**Proposition 2.17**

On a l'égalité (dans  $\mathcal{M}_{k, \mathbb{Q}}^X[[T]]$ )

$$Z_X^X(T) = \exp \left[ \sum_{n \geq 1} \Psi_n^X(X) \log \left( \frac{1}{1 - T^n} \right) \right].$$

*Démonstration :* D'après le lemme 2.14, ceci revient à démontrer qu'on a pour tout  $m \geq 1$

$$\chi([X^{<m>}]) = \sum_{r > 0} \sum_{\substack{\mathbf{f}=(f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ f_1 \leq \dots \leq f_r}} \left( \Psi_{\mathbf{f}}^X(X) \right) |\mathcal{A}_{\mathbf{f}, m}| \quad (2.14)$$

où pour  $r \geq 1$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{N}_{>0}^r$ , on note  $\mathcal{A}_{\mathbf{f}, m}$  l'ensemble

$$\left\{ (n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r, \sum_{i=1}^r n_i f_i = m \right\}.$$

Cette formule est le pendant motivique de l'écriture<sup>3</sup>

$$|X^{<m>}(k)| = \sum_{r > 0} \sum_{\substack{\mathbf{f}=(f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ f_1 \leq \dots \leq f_r}} \left( |X_{\mathbf{f}}^{(0)}| \right) |\mathcal{A}_{\mathbf{f}, m}| \quad (2.15)$$

---

<sup>3</sup>On pose, avec les même notations qu'en 2.13,  $\left( |X_{\mathbf{f}}^{(0)}| \right) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \binom{|X_{f_\gamma}^{(0)}|}{n_\gamma}$ .

valable si  $k$  est un corps fini. La relation (2.15) est une conséquence de la relation (2.2), mais elle peut aussi se retrouver via un argument combinatoire direct. La preuve de la relation (2.14) qui suit est une adaptation motivique d'un tel argument combinatoire.

Posons

$$\Pi_X(T) = \exp \left[ \sum_{n \geq 1} \Psi_n^\chi(X) \log \left( \frac{1}{1 - T^n} \right) \right].$$

Soit  $F$  un fermé de  $X$  et  $U = X \setminus F$ . D'après le lemme 2.7, on a

$$\Pi_X(T) = \Pi_U(T) \Pi_F(T).$$

Par ailleurs, pour tout  $m \geq 1$ , on a une stratification de  $X^{<m>}$  en sous-variétés localement fermées

$$X^{<m>} = \prod_{p=0}^m U^{<p>} \times F^{<m-p>}$$

d'où

$$\chi([X^{<m>}]) = \sum_{p=0}^m \chi([U^{<p>}]) \chi([F^{<m-p>}]).$$

On en déduit la relation  $Z_X^\chi(T) = Z_U^\chi(T) Z_F^\chi(T)$ . Ainsi, en prenant des recouvrements ouverts affines et en stratifiant, on est ramené à démontrer la proposition, ou, ce qui revient au même, la formule (2.14) pour tout  $m$ , dans le cas où  $X$  est affine, normale, irréductible.

On fixe donc  $m \geq 1$ . Soit  $r \geq 1$  et  $(f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r$  avec  $f_1 \leq \dots \leq f_r$ .

On utilise les notations 2.13.

On a une action naturelle de  $\mathfrak{S}_\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{S}_{h_\gamma}$  sur  $\mathcal{A}_{(f_i), m}$ , ainsi que sur

$$\prod_{i=1}^r (X^{<f_i>})_0.$$

Soit  $Z_{(f_i)}$  l'ouvert  $\mathfrak{S}_\Gamma$ -stable de  $\prod_{i=1}^r (X^{<f_i>})_0$  donné par

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} \left( \prod_{i \in I_\gamma} (X^{<f_i>})_0 \right)_0.$$

Soit  $\phi_{(f_i)}$  une formule telle que pour tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$   $\phi_{(f_i)}(K)$  s'identifie à l'ensemble des éléments  $(y_1, \dots, y_r)$  de  $Z_{(f_i)}(K)$  tels que, pour tout  $i$ ,  $y_i$  satisfait à la formule  $\psi_{f_i}(X)$ .

D'après le lemme 2.16, on a donc

$$[\phi_{(f_i)}] = \prod_{\gamma \in \Gamma} \prod_{j=0}^{h_\gamma - 1} ([\psi_{f_\gamma}(X)] - j). \quad (2.16)$$

Soit  $(n_i) \in \mathcal{A}_{(f_i), m}$ . On note  $\mathfrak{S}_{(n_i)}$  le cardinal du stabilisateur de  $(n_i)$  sous l'action de  $\mathfrak{S}_\Gamma$ .

On a un  $k$ -morphisme naturel

$$\pi_{(f_i, n_i)} : Z_{(f_i)} \longrightarrow X^{<m>}$$

qui envoie le  $r$ -uplet de zéro-cycles  $(C_1, \dots, C_r)$  sur  $\sum_i n_i C_i$ . Ce morphisme se factorise à travers  $Z_{(f_i)}/\mathfrak{S}_{(n_i)}$ .

Soit alors  $\psi_{(f_i, n_i)}$  une formule telle que, pour tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$ ,  $\psi_{(f_i, n_i)}(K)$  s'identifie à l'ensemble des éléments de  $X^{<m>}(K)$  qui sont l'image par  $\pi_{(f_i, n_i)}$  d'un élément  $(y_1, \dots, y_r)$  de  $Z_{(f_i)}(K)$  satisfaisant  $\phi_{(f_i)}$ . Un élément de  $X^{<m>}(K)$  satisfaisant  $\psi_{(f_i, n_i)}$  est donc un zéro-cycle s'écrivant  $\sum_{i=1}^r n_i P_i$  où, pour tout  $i$ ,  $P_i \in X_K^{(0), f_i}$ , et  $P_i \neq P_j$  si  $f_i = f_j$ . L'ensemble des préimages de cet élément par  $\pi_{(f_i, n_i)}$  forme alors une  $\mathfrak{S}_{(n_i)}$ -orbite. Ainsi le morphisme  $Z_{(f_i)}/\mathfrak{S}_{(n_i)} \rightarrow X^{<m>}$  induit une bijection entre les éléments de  $X^{<m>}(K)$  satisfaisant  $\psi_{(f_i, n_i)}$  et les éléments de  $(Z_{(f_i)}/\mathfrak{S}_{(n_i)})(K)$  qui se relèvent à un élément de  $Z_{(f_i)}(K)$  satisfaisant  $\phi_{(f_i)}$ .

Notons en outre que tout élément de  $X^{<m>}(K)$  satisfait  $\psi_{(f_i, n_i)}$  pour un unique  $(f_i)$  et un  $(n_i) \in \mathcal{A}_{(f_i), m}$  unique modulo l'action de  $\mathfrak{S}_\Gamma$ .

Soit  $G = \prod_{i \in I} \mathfrak{S}_{f_i}$ . Pour  $i \in I$  on note  $p_i$  la projection de  $G$  sur  $\mathfrak{S}_{f_i}$ . Soit  $(C_j)_{j \in J}$  une famille de sous-groupes cycliques de  $G$ , deux à deux non conjugués dans  $G$  vérifiant : si  $C$  est un sous-groupe cyclique de  $G$  tel que, pour tout  $i$ ,  $p_i(C) = \langle \sigma_{f_i} \rangle$ , alors  $C$  est conjugué à l'un des  $C_j$ .

Si on note  $Z'_{(f_i)} \rightarrow Z_{(f_i)}$  la restriction à  $Z_{(f_i)}$  du  $G$ -revêtement

$$\prod (X^{f_i})_0 \rightarrow \prod (X^{<f_i>})_0,$$

les formules  $\phi_{(f_i)}$  et  $\bigwedge_{j \in J} \phi_{Z'_{(f_i)}, Z_{(f_i)}, C_j}$  sont équivalentes.

D'après ce qui précède et le lemme 2.15, on a donc

$$\chi([\psi_{(f_i, n_i)}]) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_{(n_i)}|} \chi([\phi_{(f_i)}])$$

En notant  $\mathcal{A}_{(f_i), m}^0$  un système de représentants de  $\mathcal{A}_{(f_i), m}$  modulo l'action de  $\mathfrak{S}_\Gamma$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{(n_i) \in \mathcal{A}_{(f_i), m}^0} \chi([\psi_{(f_i, n_i)}]) &= \left( \sum_{(n_i) \in \mathcal{A}_{(f_i), m}^0} \frac{1}{|\mathfrak{S}_{(n_i)}|} \right) \chi([\phi_{(f_i)}]) \\ &= \frac{|\mathcal{A}_{(f_i), m}|}{|\mathfrak{S}_\Gamma|} \chi([\phi_{(f_i)}]), \end{aligned}$$

d'où, d'après (2.16),

$$\sum_{(n_i) \in \mathcal{A}_{(f_i), m}^0} \chi([\psi_{(f_i, n_i)}]) = \left( \psi_{\mathbf{f}}^\chi(X) \right) |\mathcal{A}_{(f_i), m}|. \quad (2.17)$$

Ceci joint au fait que les formules

$$\begin{aligned} (\psi_{(f_i, n_i)}) & \quad r > 0, \\ & \quad (f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r, \\ & \quad f_1 \leq \dots \leq f_r, \\ & \quad (n_i) \in \mathcal{A}_{(f_i), m}^0. \end{aligned}$$

forment une partition de  $X^{<m>}$  montre la relation (2.14).  $\square$

**Corollaire 2.18**

Pour tout  $n \geq 1$  on a  $\Phi_n^\chi(X) = \chi(\Phi_n(X))$  et  $\Psi_n^\chi(X) = \chi(\Psi_n(X))$ .

*Démonstration :* Ceci découle aussitôt de la proposition 2.17 et des définitions de  $\Phi_n(X)$  et  $\Psi_n(X)$ .  $\square$

**Corollaire 2.19**

Pour tout  $d \geq 1$  et tout  $n \geq 1$ , on a  $\Phi_n^\chi(\mathbf{A}^d) = \mathbf{L}^{nd}$ .

*Démonstration :* Ceci découle du corollaire 2.18 et du lemme 2.2.  $\square$

**Corollaire 2.20**

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\Psi_n^\chi(X)$  est un élément de  $\mathcal{F}^{-n \dim(X)} \mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi$ .

*Démonstration :* Ceci découle du corollaire 2.18 et du lemme 2.1.  $\square$

Notons qu'on pouvait aussi obtenir le corollaire 2.20 de manière directe, sans utiliser le fait que  $\Psi_n^\chi(X) = \chi(\Psi_n(X))$ , grâce à la définition même de  $\Psi_n^\chi(X)$  et au lemme suivant.

**Lemme 2.21**

Soit  $X \rightarrow Y$  un revêtement galoisien de groupe  $G$  entre variétés affines normales et irréductibles. Pour tout sous-groupe cyclique  $C$  de  $G$ ,  $\chi([\phi_{X,Y,C}])$  est un élément de  $\mathcal{F}^{-\dim(Y)} \mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi$ .

*Démonstration :* On a, d'après (2.8),

$$|C| \chi([X/C]) = \sum_{A \leq C} |A| \chi([\phi_{X,X/A,A}])$$

et  $\chi([X/C]) \in \mathcal{F}^{-\dim(X)} \mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi = \mathcal{F}^{-\dim(Y)} \mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi$ . Le résultat découle alors de (2.8) et d'une récurrence sur le cardinal de  $C$ .  $\square$

Soit  $P \in \mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi[[T]]$  une série formelle s'écrivant  $1 + \sum_{n \geq 1} a_n T^n$ . Soit

$$(\alpha_n) \in \left( \mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi \right)^{\mathbf{N}}$$

définie par

$$\exp \left[ \sum_{n \geq 1} \Psi_n(X) \log(P(T^n)) \right] = \sum_{n \geq 0} \alpha_n T^n.$$

Soit  $\nu_{P-1}$  la valuation de  $P - 1$ . Du corollaire 2.20 on déduit le résultat de convergence suivant :

**Corollaire 2.22**

Soit  $(V_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi}$ . On suppose qu'il existe une application  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  vérifiant

$$\phi(n) - \frac{n \dim(X)}{\nu_{P-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$V_n \in \mathcal{F}^{\phi(n)} \widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi}.$$

Alors la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n V_n$  converge dans  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi}$ .

*Démonstration :* Ceci découle du fait suivant : il existe une suite  $(\kappa_n) \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$  vérifiant, pour tout  $n$ ,

$$\kappa_n \geq -\frac{n \dim(X)}{\nu_{P-1}}$$

et

$$\alpha_n \in \mathcal{F}^{\kappa_n} \mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X.$$

On a en effet la relation

$$\alpha_n = \sum_{r>0} \sum_{\substack{\mathbf{f}=(f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ f_1 \leq \dots \leq f_r}} \left( \Psi_{\mathbf{f}}^X(X) \right) \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ \sum n_i f_i = n}} \prod_{i=1}^r a_{n_i}.$$

Les  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_r)$  intervenant dans la somme vérifient tous

$$\nu_{P-1} \sum_i f_i \leq n.$$

Comme  $\left( \Psi_{\mathbf{f}}^X(X) \right) \in \mathcal{F}^{-(\sum f_i) \dim(X)} \mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X$ , on en déduit le résultat.

Un raisonnement similaire permet de déduire le corollaire 2.3 du lemme 2.1.

□

### 3 Une formule d'inversion de Möbius motivique

Dans cette section, nous introduisons un analogue motivique de fonctions d'inversion de Möbius utilisées pour traiter des problèmes de comptage de points de hauteur bornée sur les variétés toriques (cf. [Pe1], [Sa], [dlBr1], [Bo2]).

Soit  $E$  un ensemble fini non vide. On munit  $\{0, 1\}^E$  de l'ordre partiel usuel.

On fixe  $B$  un sous-ensemble de  $\{0, 1\}^E$  vérifiant : si  $\mathbf{n} \in B$  et  $\mathbf{n}' \geq \mathbf{n}$  alors  $\mathbf{n}' \in B$ . On note  $B^{\min}$  l'ensemble des éléments minimaux de  $B$ . Soit  $A = \{0, 1\}^E \setminus B$ .

On définit une fonction  $\mu_B^0 : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbf{Z}$  par la relation

$$\forall \mathbf{n} \in \{0, 1\}^E, \quad \mathbf{1}_A(\mathbf{n}) = \sum_{0 \leq \mathbf{n}' \leq \mathbf{n}} \mu_B^0(\mathbf{n}'), \quad (3.1)$$

On vérifie qu'une définition équivalente de  $\mu_B^0$  est la suivante. Pour  $\mathbf{n} \in \{0, 1\}^E$  on pose

$$\ell(\mathbf{n}) = |\{(\mathbf{n}') \in B^{\min}, \quad \mathbf{n}' \leq \mathbf{n}\}|.$$

On a alors

$$\forall \mathbf{n} \in \{0, 1\}^E, \quad \mu_B^0(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{n} = 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{n} \in A \setminus \{0\} \\ (-1)^{\ell(\mathbf{n})} & \text{si } \mathbf{n} \in B \setminus \{0\}. \end{cases}$$

On définit un élément  $P_B$  de  $\mathbf{Z}[T_e]_{e \in E}$  par

$$P_B(T_e) = \sum_{\mathbf{n} \in \{0, 1\}^E} \mu_B^0(\mathbf{n}) \prod_{e \in E} T_e^{n_e}$$

et un élément de  $Q_B$  de  $\mathbf{Z}[[T_e]]_{e \in E}$  par

$$Q_B(T_e) = \frac{P_B(T_e)}{\prod_{e \in E} (1 - T_e)} = P_B(T_e) \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E} \prod_{e \in E} T_e^{d_e}.$$

Pour  $\mathbf{d} = (d_e) \in \mathbf{N}^E$  on définit  $\tilde{\mathbf{d}} = (\tilde{d}_e) \in \{0, 1\}^E$  par  $\tilde{d}_e = 1$  si et seulement si  $d_e \geq 1$ .

**Lemme 3.1**

On a

$$Q_B(T_e) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E} \mathbf{1}_A(\tilde{\mathbf{d}}) \prod_{e \in E} T_e^{d_e}.$$

*Démonstration :* Ceci découle immédiatement de la définition de  $Q_B$  et de la relation (3.1).  $\square$

Soit  $X$  une variété sur  $k$ . Pour toute extension  $K$  de  $k$ , On note  $X^{0,+}(K)$  le monoïde des zéro-cycles effectifs  $K$ -rationnels sur  $X$ , et, pour  $d \in \mathbf{N}$ ,  $X_d^{0,+}(K)$  le sous-ensemble de  $X^{0,+}(K)$  constitué des éléments de degré  $d$ , qui s'identifie donc à  $X^{<d>}(K)$ .

Soit  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Pour  $(d_e) \in \mathbf{N}^E$ , la variété  $\prod_{e \in E} X^{<d_e>}$  des  $E$ -uples de zéro-cycles effectifs de  $X$  de degré  $(d_e)$  contient un ouvert non vide défini par la condition  $\bigcap_{e \in F} \text{Supp}(C_e) = \emptyset$  et noté  $X_{(d_e), F}$ .

Pour  $(d_e) \in \mathbf{N}^E$ , on note alors  $X_{(d_e)}^B$  l'ouvert de  $\prod_{e \in E} X^{<d_e>}$  défini par

$$X_{(d_e)}^B = \bigcap_{n \in B} X_{(d_e), \{n=1\}} = \bigcap_{n \in B^{\min}} X_{(d_e), \{n=1\}}.$$

On a donc en particulier, pour toute extension  $K$  de  $k$ ,

$$X_{(d_e)}^B(K) = \left\{ (C_e) \in \prod_{e \in E} X_{d_e}^{0,+}(K), \quad \forall n \in B, \quad \bigcap_{e \in E, n_e=1} \text{Supp}(C_e) = \emptyset \right\}.$$

**3.1 Le cas où le corps  $k$  est fini**

Soit

$$\mathcal{A}_X^B = \left\{ (C_e) \in (X^{0,+}(k))^E, \quad \forall n \in B, \quad \bigcap_{e \in E, n_e=1} \text{Supp}(C_e) = \emptyset \right\}.$$

Il existe alors une unique fonction

$$\tilde{\mu}_X^B : (X^{0,+}(k))^E \rightarrow \mathbf{Z}$$

vérifiant la condition<sup>4</sup>

$$\forall (C_e) \in (X^{0,+}(k))^E, \quad \mathbf{1}_{\mathcal{A}_X^B}(C_e) = \sum_{0 \leq (C'_e) \leq (C_e)} \tilde{\mu}_X^B((C'_e)). \quad (3.2)$$

---

<sup>4</sup>On munit  $(X^{0,+}(k))^E$  de l'ordre partiel usuel.

Posons

$$Z_{\tilde{\mu}_X^B}((T_e)) = \sum_{(C_e) \in (X^{0,+}(k))^E} \tilde{\mu}_X^B((C_e)) \prod_{e \in E} T_e^{\deg(C_e)}$$

et

$$Z_X^B((T_e)) = \sum_{(C_e) \in (X^{0,+}(k))^E} \mathbf{1}_{\mathcal{A}_X^B}(C_e) \prod_{e \in E} T_e^{\deg(C_e)}.$$

On a alors

$$Z_X^B((T_e)) = Z_{\tilde{\mu}_X^B}(T) \prod_{e \in E} Z_X(T_e). \quad (3.3)$$

**Proposition 3.2**

On a la décomposition en produit eulérien

$$Z_{\tilde{\mu}_X^B}((T_e)) = \prod_{x \in X^{(0)}} P_B((T_e^{\deg(x)}))$$

ou, de manière équivalente,

$$Z_X^B((T_e)) = \prod_{x \in X^{(0)}} Q_B((T_e^{\deg(x)})).$$

*Démonstration :* Le “de manière équivalente” vient de la relation (3.3). La preuve est classique, et se base sur le fait que  $\tilde{\mu}^B$  est une fonction multiplicative. La proposition 1 (p. 180) de [Bo2] (elle-même inspirée de la proposition analogue dans le cas des corps de nombres que l’on trouve dans [Sa] ou [Pe2]) traite le cas particulier d’une fonction d’inversion de Möbius associée à un éventail (cf. section 3.5) et la preuve est la même dans le cas général.  $\square$

Définissons à présent une fonction  $\mu_X^B : \mathbf{N}^E \rightarrow \mathbf{Z}$  en posant

$$\mu_X^B((d_e)) = \sum_{(C_e), \deg(C_e)=d_e} \tilde{\mu}_X^B(C_e).$$

On a alors

$$\forall \mathbf{d} \in \mathbf{N}^E, \quad |X_{(d_e)}^B(k)| = \sum_{0 \leq \mathbf{d}' \leq \mathbf{d}} \mu_X^B(\mathbf{d}') \prod_{e \in E} |X^{\langle d_e - d'_e \rangle}(k)| \quad (3.4)$$

De la proposition 3.2, on déduit les relations

$$\sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E} \mu_X^B(\mathbf{d}) \prod_{e \in E} T_e^{d_e} = \prod_{n \geq 1} P_B(T_e^n)^{|X_n^{(0)}|} \quad (3.5)$$

et

$$\sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E} |X_{(d_e)}^B(k)| \prod_{e \in E} T_e^{d_e} = \prod_{n \geq 1} Q_B(T_e^n)^{|X_n^{(0)}|}. \quad (3.6)$$

Ce sont ces relations dont on veut obtenir une version motivique.



## 3.2 Adaptation motivique

On suppose ici le corps  $k$  de caractéristique zéro. En d'autres termes, on va donner des résultats "au niveau de  $\mathcal{M}_k^\chi$ ". Le cas général, où l'on cherche à obtenir des résultats "au niveau de  $\mathcal{M}_k$ ", est discuté à la section 3.3. On mime la relation (3.4) et on définit une *fonction de Möbius motivique*

$$\mu_X^{B,\chi} : \mathbf{N}^E \rightarrow \mathcal{M}_k^\chi$$

par la relation

$$\forall (d_e) \in \mathbf{N}^E, \quad \chi\left([X_{(d_e)}^B]\right) = \sum_{0 \leq d'_e \leq d_e} \mu_X^{B,\chi}(d'_e) \prod_{e \in E} \chi\left([X^{<d_e-d'_e>}]\right). \quad (3.7)$$

Si on pose

$$Z_X^B((T_e)) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E} \chi([X_{\mathbf{d}}^B]) \prod_{e \in E} T_e^{d_e}$$

et

$$Z_{\mu_X^{B,\chi}}((T_e)) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E} \mu_X^{B,\chi}(\mathbf{d}) \prod_{e \in E} T_e^{d_e},$$

on a donc la relation

$$Z_X^B((T_e)) = Z_{\mu_X^{B,\chi}}((T_e)) \prod_{e \in E} Z_X^\chi(T_e), \quad (3.8)$$

qui constitue en fait une définition alternative de  $\mu_X^{B,\chi}$ .

### Théorème 3.3

On a la décomposition en produit eulérien motivique

$$Z_{\mu_X^{B,\chi}}((T_e)) = \exp \left[ \sum_{n \geq 1} \Psi_n^\chi(X) \log(P_B(T_e^n)) \right]$$

ou, de manière équivalente,

$$Z_X^B((T_e)) = \exp \left[ \sum_{n \geq 1} \Psi_n^\chi(X) \log(Q_B(T_e^n)) \right].$$

*Démonstration :* Le "de manière équivalente" vient de la relation (3.8).

Montrons la deuxième relation. D'après les lemmes 2.14 et 3.1, ceci revient à démontrer, pour  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E$ , la relation

$$\chi([X_{\mathbf{d}}^B]) = \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{f}=(f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r \\ f_1 \leq \dots \leq f_r}} (\Psi_{\mathbf{f}}(X)) |\mathcal{A}_{\mathbf{f}, \mathbf{d}}^A| \quad (3.9)$$

où, pour  $r \geq 1$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{N}_{>0}^r$ , on désigne par  $\mathcal{A}_{\mathbf{f}, \mathbf{d}}^A$  l'ensemble

$$\left\{ (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r) \in (\mathbf{N}^E \setminus \{0\})^r, \quad \sum \mathbf{n}_i f_i = \mathbf{d} \text{ et } \forall i = 1 \dots, r, \quad \widetilde{\mathbf{n}}_i \in A \right\}.$$

Soit

$$\Pi_X^B(T) = \exp \left[ \sum_{n \geq 1} \Psi_n^\chi(X) \log(Q_B(T_e^n)) \right].$$

Soit  $F$  un fermé de  $X$  et  $U = X \setminus F$ . On a une stratification de  $X_{\mathbf{d}}^B$  en sous-variétés localement fermées

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{d}}^B &= \prod_{0 \leq \mathbf{d}' \leq \mathbf{d}} \left( \prod_{e \in E} U^{< \mathbf{d}'_e >} \times F^{< d_e - \mathbf{d}'_e >} \right) \cap X_{\mathbf{d}}^B \\ &= \prod_{0 \leq \mathbf{d}' \leq \mathbf{d}} U_{\mathbf{d}'}^B \times F_{\mathbf{d}'}^B, \end{aligned}$$

d'où

$$Z_X^B(T) = Z_U^B(T) Z_F^B(T).$$

Par ailleurs le lemme 2.7 entraîne que

$$\Pi_X^B(T) = \Pi_U^B(T) \Pi_F^B(T).$$

Ainsi, en prenant des recouvrements ouverts affines et en stratifiant, on est ramené à montrer le théorème, ou ce qui revient au même la relation 3.9 pour tout  $\mathbf{d} \neq 0$ , dans le cas où  $X$  est affine, normale, irréductible.

Fixons  $\mathbf{d} \neq 0$ . Soit  $r \geq 1$  et  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_r)$  tel que  $f_1 \leq \dots \leq f_r$ . On utilise les notations 2.13 et on reprend les notations et la démarche de la preuve de la proposition 2.17. Le groupe  $\mathfrak{S}_\Gamma$  agit sur  $(\mathbf{N}^E \setminus \{0\})^r$  et  $\mathcal{A}_{\mathbf{f}, \mathbf{d}}^A$  est stable sous cette action.

Soit  $\mathbf{n}_i \in \mathcal{A}_{\mathbf{f}, \mathbf{d}}^A$ . On note  $\mathfrak{S}(\mathbf{n}_i)$  le stabilisateur de  $\mathbf{n}_i$  sous l'action de  $\mathfrak{S}_\Gamma$ .

On a un  $k$ -morphisme naturel

$$\pi_{(\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i)} : Z_{(\mathbf{f}_i)} \longrightarrow \prod_{e \in E} X^{< d_e >}$$

qui envoie le  $r$ -uplet de zéro-cycles  $(C_1, \dots, C_r)$  sur  $(\sum_i n_{i,e} C_i)_{e \in E}$ . Ce morphisme se factorise à travers  $Z_{(\mathbf{f}_i)}/\mathfrak{S}(\mathbf{n}_i)$ .

Soit alors  $\psi_{(\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i)}$  une formule telle que pour tout corps pseudo-fini  $K$  contenant  $k$   $\psi_{(\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i)}(K)$  s'identifie à l'ensemble des éléments de  $\prod_{e \in E} X^{< d_e >}(K)$  qui sont l'image par  $\pi_{(\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i)}$  d'un élément  $(y_1, \dots, y_r)$  de  $Z_{(\mathbf{f}_i)}(K)$  satisfaisant  $\phi_{(\mathbf{f}_i)}$ . La condition  $\widetilde{\mathbf{n}}_i \in A$  dans la définition de  $\mathcal{A}_{\mathbf{f}, \mathbf{d}}^A$  entraîne que de tels éléments sont en particulier dans  $X_{\mathbf{d}}^B(K)$ .

Un élément de  $\prod_{e \in E} X^{< d_e >}(K)$  satisfaisant  $\psi_{(\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i)}$  est donc un  $E$ -uplet de zéro-cycle s'écrivant  $(\sum_{i=1}^r n_{i,e} C_i)$  où, pour tout  $i$ ,  $C_i \in X_K^{(0), f_i}$ , et  $C_i \neq C_j$  si  $f_i = f_j$ . Les préimages d'un tel élément dans  $Z_{(\mathbf{f}_i)}$  forment une orbite sous  $\mathfrak{S}(\mathbf{n}_i)$ . En d'autres termes le morphisme  $Z_{(\mathbf{f}_i)}/\mathfrak{S}(\mathbf{n}_i) \rightarrow \prod_{e \in E} X^{< d_e >}$  induit une bijection entre les éléments de  $\prod_{e \in E} X^{< d_e >}(K)$  satisfaisant  $\psi_{(\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i)}$  et les éléments de  $(Z_{(\mathbf{f}_i)}/\mathfrak{S}(\mathbf{n}_i))(K)$  qui se relèvent à un élément de  $Z_{(\mathbf{f}_i)}(K)$  satisfaisant  $\phi_{(\mathbf{f}_i)}$ .

En outre tout élément de  $X_{\mathbf{d}}^B(K)$  satisfait  $\psi_{(\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i)}$  pour un unique  $(\mathbf{f}_i)$  et un  $(\mathbf{n}_i) \in \mathcal{A}_{(\mathbf{f}_i), m}^A$  unique modulo l'action de  $\mathfrak{S}_\Gamma$ .

Par un argument similaire à celui de la proposition 2.17, on en déduit

$$\chi([\psi_{(f_i, \mathbf{n}_i)}]) = \frac{1}{|\mathfrak{S}(\mathbf{n}_i)|} \chi([\phi_{(f_i)}]).$$

Si on note  $(\mathcal{A}_{(f_i), \mathbf{d}}^A)^0$  un système de représentants de  $\mathcal{A}_{(f_i), \mathbf{d}}^A$  modulo l'action de  $\mathfrak{S}_\Gamma$ , les formules

$$\begin{aligned} (\psi_{(f_i, \mathbf{n}_i)}) & \quad r > 0, \\ & \quad (f_1, \dots, f_r) \in \mathbf{N}_{>0}^r, \\ & \quad f_1 \leq \dots \leq f_r, \\ & \quad (\mathbf{n}_i) \in (\mathcal{A}_{(f_i), \mathbf{d}}^A)^0. \end{aligned}$$

forment une partition de  $X_B^{\mathbf{d}}$ . On conclut comme dans la preuve de la proposition 2.17.  $\square$

Une adaptation immédiate de la preuve du corollaire 2.22 montre le corollaire suivant.

### Corollaire 3.4

Soit  $\nu_B$  la valuation de  $P_B - 1$  et  $(V_{\mathbf{d}})_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E}$  une famille d'éléments de  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X}$ . On suppose qu'il existe une application  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  vérifiant

$$\phi(n) - \frac{n \dim(X)}{\nu_B} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E$ ,

$$V_{\mathbf{d}} \in \mathcal{F}^{\phi(\sum d_e)} \widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X}.$$

Alors la série  $\sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E} \mu_X^{B, \chi}(\mathbf{d}) V_{\mathbf{d}}$  converge dans  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X}$ .

### 3.3 Adaptation motivique : le cas général

Si  $k$  est un corps quelconque, on peut toujours définir une fonction

$$\mu_X^{B, \text{mot}} : \mathbf{N}^E \rightarrow \mathcal{M}_k$$

par la relation

$$\forall (d_e) \in \mathbf{N}^E, \quad [X_{(d_e)}^B] = \sum_{0 \leq d'_e \leq d_e} \mu_X^{B, \text{mot}}((d'_e)) \prod_{e \in E} [X^{< d_e - d'_e >}]. \quad (3.10)$$

Ainsi, si  $k$  est de caractéristique zéro, on a  $\chi(\mu_X^{B, \text{mot}}(\mathbf{d})) = \mu_X^{B, \chi}(\mathbf{d})$  pour tout  $\mathbf{d}$ , et si  $k$  est fini on a  $\#_k \mu_X^{B, \text{mot}}(\mathbf{d}) = \mu_X^B(\mathbf{d})$  pour tout  $\mathbf{d}$ . Au vu du théorème 3.3, on peut se poser la question suivante

### Question 3.5

Est-il vrai que

$$\sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^E} \mu_X^{B, \text{mot}}(\mathbf{d}) \prod_{e \in E} T_e^{d_e} = \exp \left[ \sum_{n \geq 1} \Psi_n(X) \log(P_B(T_e^n)) \right] ?$$

Une réponse positive à la question 3.5 fournirait une autre démonstration du théorème 3.3. Elle entraînerait également une réponse positive à la question suivante :

**Question 3.6**

Soit  $(V_d)_{d \in \mathbf{N}^E}$  une famille d'éléments de  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}}$ . On suppose qu'il existe une application  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  vérifiant

$$\phi(n) - \frac{n \dim(X)}{\nu_B} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et, pour tout  $(d_e) \in \mathbf{N}^E$ ,

$$V_d \in \mathcal{F}^{\phi(\sum d_e)} \widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}}.$$

Est-il vrai que la série

$$\sum_{(d) \in \mathbf{N}^E} \mu_X^{B, \text{mot}}(d) V_d$$

converge dans  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}}$  ?

On montre dans la section suivante que la réponse à la question 3.5 (et donc à la question 3.6) est positive pour un cas particulier d'ensemble  $B$ , ce qui permet au niveau des fonctions zêta des hauteurs des variétés toriques de traiter le cas des espaces projectifs et des surfaces de Hirzebruch (à savoir "au niveau de  $\mathcal{M}_k$ " sur un corps  $k$  quelconque). Pour traiter le cas d'une variété torique générale, faute de pouvoir montrer que la réponse est positive, nous devons nous placer "au niveau de  $\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X$ " pour pouvoir utiliser le théorème 3.3 et le corollaire 3.4.

On peut remarquer que comme  $X_{(d_e)}^B$  est une sous-variété de  $\prod X^{<d_e>}$ ,  $[X_{(d_e)}^B]$  est dans  $\mathcal{F}^{-\dim(X) \sum d_e} \mathcal{M}_{k, \text{loc}}$ . Ceci ajouté à la relation (3.10) montre immédiatement par récurrence qu'on a

$$\forall (d_e) \in \mathbf{N}^E, \quad \mu_X^{B, \text{mot}}((d_e)) \in \mathcal{F}^{-\dim(X) \sum_{e \in E} d_e} \mathcal{M}_{k, \text{loc}}.$$

Ceci donne un résultat de convergence plus faible que celui du corollaire 3.4, et insuffisant pour l'application que nous avons en vue de  $\mu_X^{B, \text{mot}}$  à l'étude du comportement de la fonction zêta des hauteurs au point critique  $T = \mathbf{L}^{-1}$ .

### 3.4 Calcul de $\mu_X^{B, \text{mot}}$ dans un cas particulier

On définit une fonction  $\mu_X^{\text{mot}} : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{M}_k$  par la relation

$$\left( \sum_{d \geq 0} \mu_X^{\text{mot}}(d) T^d \right) Z_X^{\text{mot}}(T) = 1.$$

On a donc pour tout  $d \geq 0$

$$\sum_{0 \leq r \leq d} \mu_X^{\text{mot}}(r) [X^{<d-r>}] = 0. \quad (3.11)$$

Si  $I$  est un ensemble fini non vide, on définit alors une application  $\mu_X^I$  de  $\mathbf{N}^I$  vers  $\mathcal{M}_k$  en posant

$$\mu_X^I(d_i) = \begin{cases} \mu_X^{\text{mot}}(d) & \text{si } d_i = d \text{ pour tout } i \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Une définition équivalente de  $\mu_X^I$  est d'imposer la relation

$$\left( \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^I} \mu_X^I(\mathbf{d}) \mathbf{T}^{\mathbf{d}} \right) Z_X^{\text{mot}} \left( \prod_{i \in I} T_i \right) = 1.$$

**Proposition 3.7**

On suppose que  $B = B^{\text{min}} = \{(1)_{e \in E}\}$ . Alors  $\mu_X^{B, \text{mot}} = \mu_X^E$ .

*Démonstration :* On a dans ce cas  $X_{\mathbf{d}}^B = X_{\mathbf{d}, E}$ . On a une fibration en sous-variétés localement fermées

$$\prod_{e \in E} X^{<d_e>} = \prod_{0 \leq d \leq \text{Min}(d_e)} W_{(d_e), d}$$

où

$$W_{(d_e), d} \xrightarrow{\sim} X^d \times X_{(d_e-d), E}$$

est la sous-variété de  $\prod_{e \in E} X^{<d_e>}$  des  $E$ -uples de zéro-cycles effectifs dont l'intersection est de degré  $d$ , en particulier  $W_{(d_e), 0} = X_{(d_e), E}$ . On a donc

$$\prod_{e \in E} [X^{<d_e>}] = \sum_{d=1}^{\text{Min}(d_e)} [X^{<d>}] [X_{(d_e-d), E}].$$

Écrivons cette relation pour chaque  $E$ -uples  $(d'_e)$  avec  $0 \leq d'_e \leq d_e$ , multiplions la relation obtenue par  $\mu_X^E(d'_e)$ , et faisons la somme de toutes les relations obtenues, on obtient finalement, au vu de (3.11)

$$[X_{(d_e), E}] = \sum_{0 \leq d'_e \leq d_e} \mu_X^E(d'_e) \prod_{e \in E} [X^{<d_e-d'_e>}].$$

Vu la définition de  $\mu_X^{B, \text{mot}}$ , on en déduit bien  $\mu_X^{B, \text{mot}} = \mu_X^E$ . □  
On déduit aisément de ce qui précède le corollaire suivant :

**Corollaire 3.8**

On suppose que  $B$  vérifie l'hypothèse suivante : il existe une partition

$$E = E_\beta \coprod_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$$

de  $E$  telle qu'on ait

$$B^{\text{min}} = \left\{ (n_e) \in \mathbf{N}^E, \quad \exists \gamma \in \Gamma, \quad (n_e = 1 \Leftrightarrow e \in E_\gamma) \right\}.$$

Alors on a

$$\forall \mathbf{d} \in \mathbf{N}^E, \quad \mu_X^{B, \text{mot}}(\mathbf{d}) = \prod_{e \in E_\beta} [X^{<d_e>}] \prod_{\gamma \in \Gamma} \mu_X^{E_\gamma}((d_e)_{e \in E_\gamma}).$$

### 3.5 Fonction de Möbius motivique associée à un éventail

Soit  $N$  un  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang fini dont on notera  $r$  le rang. On rappelle brièvement la notion d'éventail de  $N$ .

Un *cône polyédral rationnel* (en abrégé *cône*)  $\sigma$  de  $N \otimes \mathbf{R}$  est une partie de  $N \otimes \mathbf{R}$  qui s'écrit

$$\sigma = \sum_{i \in I} \mathbf{R}_{\geq 0} m_i$$

où  $I$  est un ensemble fini et les  $(m_i)$  sont dans  $N$ . Un cône  $\sigma$  est dit *strictement convexe* si  $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$ . Une *face* d'un cône  $\sigma$  est une partie  $F$  de  $\sigma$  telle qu'il existe un élément  $\phi$  de  $N^\vee \otimes \mathbf{R}$  positif sur  $\sigma$  et strictement positif sur  $\sigma \setminus F$ . Une face d'un cône est encore un cône.

Un *éventail* de  $N$  est un ensemble fini  $\Sigma$  de cônes strictement convexes de  $N \otimes \mathbf{R}$ , vérifiant les conditions suivantes :

- toute face d'un cône de  $\Sigma$  est un cône de  $\Sigma$ ,
- l'intersection de deux cônes de  $\Sigma$  est une face de chacun des deux cônes.

Un éventail  $\Sigma$  est dit *régulier* si tout cône de  $\Sigma$  est engendré par une partie d'une  $\mathbf{Z}$ -base de  $N$ , et *complet* si les cônes de  $\Sigma$  recouvrent  $N \otimes \mathbf{R}$ .

Soit  $\Sigma$  un éventail non réduit à  $\{0\}$ . On note  $\Sigma(1)$  l'ensemble des rayons de  $\Sigma$ , i.e. l'ensemble des cônes de dimension 1 de  $\Sigma$ . Pour  $\sigma \in \Sigma$ , on note  $\sigma(1)$  l'ensemble des éléments de  $\Sigma(1)$  qui sont des faces de  $\sigma$ . Pour  $\alpha \in \Sigma(1)$  on abrégera les notations  $\alpha \in \sigma(1)$  et  $\alpha \notin \sigma(1)$  en  $\alpha \in \sigma$  et  $\alpha \notin \sigma$ .

Soit  $B_\Sigma$  le sous-ensemble de  $\{0, 1\}^{\Sigma(1)}$  défini par

$$B_\Sigma = \left\{ (n_\alpha) \in \{0, 1\}^{\Sigma(1)}, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad \exists \alpha \notin \sigma, \quad n_\alpha = 1 \right\}.$$

Il est clair que si  $\mathbf{n} \in B_\Sigma$  et  $\mathbf{n}' \geq \mathbf{n}$  alors  $\mathbf{n}' \in B_\Sigma$ .

#### Lemme 3.9

La valuation de  $P_{B_\Sigma} - 1$  est supérieure ou égale à 2.

*Démonstration :* Soit  $\alpha_0 \in \Sigma(1)$  et  $(n_\alpha) \in \{0, 1\}^{\Sigma(1)}$  vérifiant  $n_{\alpha_0} = 1$  et  $n_\alpha = 0$  pour  $\alpha \neq \alpha_0$ . Il s'agit de montrer que  $(n_\alpha) \notin B_\Sigma$ . Mais ceci découle aussitôt de la définition de  $B_\Sigma$  et du fait que  $\alpha_0$  est une face de  $\alpha_0$ .  $\square$

On déduit de ce lemme et du corollaire 3.4 le corollaire suivant.

#### Corollaire 3.10

Soit  $(V_d)_{d \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}}$  une famille d'éléments de  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X}$  vérifiant

$$\forall \mathbf{d} = (d_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}, \quad V_{\mathbf{d}} \in \mathcal{F}^{\dim(X) \Sigma d_\alpha} \widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X}$$

Alors la série  $\sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_X^{B_\Sigma, X}(\mathbf{d}) V_{\mathbf{d}}$  converge dans  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^X}$ .

**Le cas des espaces projectifs** Soit  $n \geq 1$  et  $\Sigma$  l'éventail de  $\mathbf{Z}^n \otimes \mathbf{R}$  dont les rayons sont engendrés par les éléments de la base canonique  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbf{Z}^n$  et l'élément  $\sum_i e_i$ . La variété torique associée est l'espace projectif de dimension  $n$ . On a  $B_\Sigma = \{(1, \dots, 1)\}$  et donc  $\mu_X^{B_\Sigma, \text{mot}} = \mu_X^{\Sigma(1)}$  d'après la proposition 3.7. En particulier la réponse à la question 3.5 (et donc à la question 3.6) est positive dans ce cas.

**Le cas des surfaces de Hirzebruch** Soit  $m \geq 0$  un entier et  $\Sigma$  l'éventail de  $\mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R}$  dont les rayons sont engendrés par  $\rho_1 = (1, 0)$ ,  $\rho_2 = (-1, m)$ ,  $\rho_3 = (0, 1)$ ,  $\rho_4 = -\rho_3$ . La variété torique associée est la  $m$ -ème surface de Hirzebruch. On voit que  $B_\Sigma^{\min} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ . D'après le corollaire 3.8, on a donc

$$\mu_X^{B_\Sigma, \text{mot}}(d_1, d_2, d_3, d_4) = \mu_X^{\{1,3\}}(d_1, d_3) \mu_X^{\{2,4\}}(d_2, d_4).$$

Là encore, la réponse à la question 3.5 est donc positive.

## 4 Fonction zêta des hauteurs motivique

Soit  $k$  un corps, et  $\mathcal{C}$  une courbe projective, lisse, et géométriquement intègre définie sur  $k$ . Soit  $K$  le corps des fonctions de  $\mathcal{C}$ . Considérons une variété projective  $V$  définie<sup>5</sup> sur  $k$ . Les éléments de  $V(K)$  s'identifient donc aux  $k$ -morphisms  $x : \mathcal{C} \rightarrow V$ . On fixe un fibré en droites  $\mathcal{L}$  sur  $V$ .

### 4.1 Le cas classique

Si  $k$  est fini, de sorte que  $K$  est un corps global de caractéristique positive, la formule

$$H_{\mathcal{L}}(x) = \deg(x^*\mathcal{L}) \tag{4.1}$$

définit une hauteur d'Arakelov (logarithmique) sur  $V(K)$ , relative au faisceau  $\mathcal{L}$ .

Si on suppose en outre que la classe de  $\mathcal{L}$  est à l'intérieur du cône effectif, il existe (cf. [Pe2, Corollaire 2.7.3 et Remarque 2.7.4]) un ouvert non vide  $U_0$  de  $V$  tel que pour tout ouvert  $U$  de  $U_0$  et tout entier  $d \geq 0$ , l'ensemble

$$\{x \in U(K), H_{\mathcal{L}}(x) = d\}$$

est fini. La fonction zêta des hauteurs associée à un tel ouvert  $U$  et  $\mathcal{L}$  est définie par

$$Z_{\mathcal{C}, U, H_{\mathcal{L}}}(T) = \sum_{x \in U(K)} T^{H(x)}.$$

Si  $V$  n'est pas de type général, le comportement attendu de cette série est décrit par la version géométrique des conjectures de Manin et al.

### 4.2 Le cas motivique

Si  $k$  est quelconque, on peut toujours définir une fonction hauteur  $H_{\mathcal{L}}$  sur  $V(K)$ , par une formule identique à (4.1).

Si  $L$  est une extension de  $k$ , on note  $K_L$  le corps des fonctions de la courbe  $\mathcal{C} \times_k L$ . Si  $s$  est un point d'un schéma  $S$ , on notera  $\kappa_s$  le corps résiduel en  $s$ . Si  $\phi$  est un morphisme de source un  $S$ -schéma, on notera  $\phi_s$  son tiré en arrière par  $\text{Spec}(\kappa_s) \rightarrow S$ .

On notera  $\mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)$  le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe

$$\{\phi \in \text{Hom}_k(\mathcal{C}_S, V), \quad \forall s \in S, \quad \deg(\phi_s^*(\mathcal{L})) = d\},$$

<sup>5</sup>On pourrait en fait considérer des variétés définies sur  $K$ , i.e. des familles non constantes, mais nous nous limiterons ici au cas particulier où le corps de définition est le corps des constantes.

et pour tout ouvert  $U$  de  $V$ ,  $\mathbf{Hom}_k^{U, \mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)$  le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe

$$\left\{ \phi \in \mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)(S), \quad \forall s \in S, \quad \phi_s \in U(K_{\kappa_s}) \right\}.$$

**Lemme 4.1**

On suppose que la classe de  $\mathcal{L}$  est à l'intérieur du cône effectif. Alors il existe un ouvert  $U_0$  non vide de  $V$  tel que pour tout ouvert  $U$  de  $U_0$  et pour tout  $d \geq 1$ , le foncteur  $\mathbf{Hom}_k^{U, \mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)$  est représentable par un  $k$ -schéma quasi-projectif.

*Démonstration :* Si  $\mathcal{L}$  est supposé ample, on sait d'après [Gr, 4.c] que  $\mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)$  est représentable par un  $k$ -schéma quasi-projectif. Or, pour tout ouvert  $U$  de  $V$ ,  $\mathbf{Hom}_k^{U, \mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)$  est un sous-foncteur ouvert de  $\mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)$ , d'où le résultat dans ce cas.

Dans le cas général,  $V$  étant projective, on peut fixer un fibré en droite très ample  $\mathcal{L}_0$  sur  $V$ . Comme la classe de  $\mathcal{L}$  est à l'intérieur du cône effectif, il existe un entier  $N \geq 1$  et un fibré en droites effectif  $\mathcal{L}_1$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes N} = \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1$ .

Soit  $U_0$  le complémentaire des points-base de  $\mathcal{L}_1$  et  $U$  un ouvert contenu dans  $U_0$ . Pour toute extension  $L$  de  $k$  et tout élément  $\phi$  de  $U(K_L)$  (i.e. tout morphisme  $\phi : \mathcal{C}_L \rightarrow V$  dont l'image rencontre  $U$ ), on a alors  $\deg(\phi^*(\mathcal{L}_1)) \geq 0$ . Ainsi si un tel  $\phi$  vérifie  $\deg(\phi^*(\mathcal{L})) = d$  on a  $\deg(\phi^*(\mathcal{L}_0)) \leq \frac{d}{N}$ . Donc le foncteur  $\mathbf{Hom}_k^{U, \mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)$  s'identifie à un sous-foncteur ouvert du foncteur

$\coprod_{d' \leq \frac{d}{N}} \mathbf{Hom}_k^{\mathcal{L}_0, d'}(\mathcal{C}, V)$ . Ce dernier foncteur étant représentable par un  $k$ -schéma quasi-projectif, on a le résultat.  $\square$

*Remarque :* Hormis l'utilisation du théorème de représentabilité de Grothendieck, la preuve de ce lemme est formellement la même que celle de son analogue "classique". Notons aussi que si  $U$  est un ouvert de  $V$  dont le groupe de Picard est trivial,  $U$  est nécessairement contenu dans l'ouvert  $U_0$  de la démonstration, en particulier  $\mathbf{Hom}_k^{U, \mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)$  est représentable par un schéma quasi-projectif.  $\square$

On fixe désormais un fibré en droites  $\mathcal{L}$  dont la classe est à l'intérieur du cône effectif.

Pour tout ouvert  $U$  assez petit de  $V$ , et tout entier  $d \geq 0$ , on note  $U_{\mathcal{L}, d}$  le schéma quasi-projectif représentant le foncteur  $\mathbf{Hom}_k^{U, \mathcal{L}, d}(\mathcal{C}, V)$ .

L'idée directrice est d'étudier le comportement asymptotique de  $U_{\mathcal{L}, d}$ , en un sens à préciser.

Pour cela, on considèrera notamment  $Z_{\mathcal{C}, U, H_{\mathcal{L}}}^{\text{mot}}(T)$  l'élément de  $\mathcal{M}_k[[T]]$  défini par

$$Z_{\mathcal{C}, U, H_{\mathcal{L}}}^{\text{mot}}(T) = \sum_{d \geq 0} [U_{\mathcal{L}, d}] T^d.$$

Si  $k$  est fini, on a

$$U_{\mathcal{L}, d}(k) = \{x \in U(K), H_{\mathcal{L}}(x) = d\}$$

et la série définissant la fonction zêta des hauteurs classique s'obtient en appliquant le morphisme  $\#_k$  aux coefficients de la série motivique  $Z_{\mathcal{C}, U, H_{\mathcal{L}}}^{\text{mot}}$ .

Si  $k$  est de caractéristique zéro, on considèrera également l'élément de  $\mathcal{M}_k^{\chi}[[T]]$  noté  $Z_{\mathcal{C}, U, H_{\mathcal{L}}}^{\chi}(T)$  obtenu en appliquant le morphisme  $\chi$  aux coefficients de  $Z_{\mathcal{C}, U, H_{\mathcal{L}}}^{\text{mot}}(T)$ .

Il est naturel de se demander s'il n'existe pas pour  $Z_{\mathcal{C}, U, H_{\mathcal{L}}}^{\text{mot}}$  ou  $Z_{\mathcal{C}, U, H_{\mathcal{L}}}^{\chi}$ , des analogues motiviques des résultats obtenus ou conjecturés pour  $Z_{\mathcal{C}, U, H_{\mathcal{L}}}(T)$ . On précise cette question dans un cas particulier à la section suivante.



### 4.3 Un analogue motivique de la conjecture de Manin

On suppose désormais que la variété  $V$  vérifie les hypothèses suivantes :

#### Hypothèse 4.2

1. La classe du faisceau anticanonique de  $V$  est située à l'intérieur du cône effectif.
2. L'ensemble  $V(K)$  est Zariski dense. En d'autres termes, pour tout ouvert non vide  $U$  de  $V$ , il existe un  $k$ -morphisme  $\mathcal{C} \rightarrow V$  dont  $U$  rencontre l'image.

Dans tout ce qui suit, on note  $\mathcal{L}_0$  le faisceau anticanonique et on considère la hauteur  $H_{\mathcal{L}_0}$  associée à  $\mathcal{L}_0$ , notée  $H_0$ . On note aussi  $U_{0,d} = U_{\mathcal{L}_0,d}$ .

Supposons le corps  $k$  fini de cardinal  $q$ . Une partie de la version géométrique de la conjecture de Manin peut alors se traduire par les deux questions suivantes :

#### Question 4.3

Existe-t-il un ouvert non vide  $U$  de  $V$  tel que la série  $Z_{\mathcal{C},U,H_0}(q^{-s})$  converge absolument pour  $\Re(s) > 1$  ?

#### Question 4.4

Existe-t-il un ouvert non vide  $U$  satisfaisant aux exigences de la question 4.3 et un  $\varepsilon > 0$  tel que la fonction holomorphe sur  $\Re(s) > 1$  définie par  $Z_{\mathcal{C},U,H_0}(q^{-s})$  se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\Re(s) > 1 - \varepsilon$  avec un pôle d'ordre  $\text{rg}(\text{NS}(V))$  en  $s = 1$  ?

Supposons à présent  $k$  quelconque. Un analogue motivique naïf de la question 4.3 serait le suivant.

#### Question 4.5

Est-il vrai qu'il existe un ouvert non vide  $U$  de  $V$  tel que, pour tout entier  $\kappa \geq 2$ , la série  $Z_{\mathcal{C},U,H_0}^{\text{mot}}(\mathbf{L}^{-\kappa})$  converge dans  $\widehat{\mathcal{M}}_k$  ?

Si l'on se rappelle la définition de  $\widehat{\mathcal{M}}_k$ , on voit que ceci équivaut à la question : existe-t-il un ouvert non vide  $U$  tel que pour tout entier  $\kappa \geq 2$  on a

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \dim(U_{0,d}) - \kappa d = -\infty \quad ?$$

Ainsi, un analogue plus fidèle de la question 4.3 serait en fait la question suivante : existe-t-il un ouvert non vide  $U$  tel que pour tout réel  $\kappa > 1$  on a

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \dim(U_{0,d}) - \kappa d = -\infty \quad ?$$

soit de manière équivalente

#### Question 4.6

Existe-t-il un ouvert non vide  $U$  de  $V$  tel que

$$\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\dim(U_{0,d})}{d} \leq 1 \quad ?$$

Pour toute variété  $X$ , on note  $\rho(X)$  le nombre de composantes géométriques irréductibles de dimension maximale de  $X$ . Au vu des estimations de Lang-Weil et de l'estimation du comportement asymptotique de  $|U_{0,d}(k)|$  donnée par des théorèmes taubériens classiques lorsque la réponse à la question 4.4 est positive, un analogue naturel de la question 4.4 serait la question suivante :

**Question 4.7**

Existe-t-il un ouvert non vide  $U$  de  $V$  vérifiant

$$\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\dim(U_{0,d})}{d} = 1$$

et

$$\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\log(\rho(U_{0,d}))}{\log(d)} = \text{rg}(\text{NS}(V)) \quad ?$$

Un autre analogue est la question suivante :

**Question 4.8**

Existe-t-il un ouvert non vide  $U$  de  $V$  vérifiant

$$\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\dim(U_{0,d})}{d} = 1$$

et tel que la série définie par le produit  $(1 - \mathbf{L}T)^{\text{rg}(\text{NS}(V))} Z_{\mathcal{C},U,H_0}^{\text{mot}}(T)$  converge pour  $T = \mathbf{L}^{-1}$ .

On note  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ , et  $k^{\text{sép}}$  la clôture séparable de  $k$  dans  $\bar{k}$ . Désormais, en plus des hypothèses 4.2, on suppose que la variété  $V$  vérifie les hypothèses suivantes (cf. les hypothèses du paragraphe 2.1 de [Pe3] où l'on notera que la variété  $V$  est supposée définie seulement sur le corps des fonctions de  $\mathcal{C}$ ) :

**Hypothèse 4.9**

1. Les groupes de cohomologie  $H^1(V, \mathcal{O}_V)$  et  $H^2(V, \mathcal{O}_V)$  sont nuls.
2. Le groupe  $\text{Pic}(V \times_k k^{\text{sép}})$  est libre de rang fini et coïncide avec  $\text{Pic}(V \times_k \bar{k})$ .
3. L'action du groupe de Galois absolu sur  $\text{Pic}(V \times_k k^{\text{sép}})$  est triviale.
4. Le cône effectif de  $V$  (noté  $C_{\text{eff}}(V)$ ) est polyédral rationnel, i.e. est engendré par un nombre fini d'éléments de  $\text{Pic}(V)$ .
5. Si  $l$  est un nombre premier distinct de la caractéristique de  $k$ , la partie  $l$ -primaire de  $\text{Br}(V \times_k \bar{k})$  est finie.

Le fait d'avoir supposé la variété  $V$  définie sur le corps des constantes de  $\mathcal{C}$  ainsi que l'hypothèse 3. ci-dessus signifie que nous nous plaçons dans le cas arithmétiquement le plus simple. Notons que les variétés toriques déployées vérifient les hypothèses 4.2 et 4.9.

On pose

$$Z_{C_{\text{eff}}(V), \mathcal{L}_0}(T) = \sum_{y \in C_{\text{eff}}(V)^\vee \cap \text{Pic}(V)^\vee} T^{\langle y, \mathcal{L}_0 \rangle}.$$

En écrivant  $C_{\text{eff}}(V)^\vee$  comme le support d'un éventail régulier, on voit que  $Z_{C_{\text{eff}}(V), \mathcal{L}_0}(T)$  est une fraction rationnelle à coefficients rationnels en  $T$ , dont 1 est un pôle d'ordre  $\text{rg}(\text{Pic}(V))$ .

On définit

$$\alpha^*(V) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} Z_{C_{\text{eff}}(V), \mathcal{L}_0}(z).$$

C'est un nombre rationnel non nul.

Supposons le corps  $k$  fini de cardinal  $q$ . Une version g\u00e9om\u00e9trique de la conjecture de Manin raffin\u00e9e par Peyre peut alors s'\u00e9noncer ainsi :

**Question 4.10**

*Si  $U$  est un ouvert satisfaisant aux exigences des questions 4.3, et 4.4 a-t-on*

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} Z_{\mathcal{C}, U, H_0}(q^{-s}) = \\ \alpha^*(V) q^{(1-g_e) \dim(V)} (\text{Res}_{s=1} Z_{\mathcal{C}}(q^{-s}))^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} \\ \times \prod_{v \in \mathcal{C}^{(0)}} (1 - |k_v|^{-1})^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} \frac{|V(k_v)|}{|k_v|^{\dim(V)}} ? \end{aligned}$$

La convergence du produit eul\u00e9rien apparaissant dans l'expression conjecturale du terme principal en  $s = 1$  a \u00e9t\u00e9 montr\u00e9e par Peyre en utilisant les conjectures de Weil d\u00e9montr\u00e9es par Deligne. Ainsi, sous les hypoth\u00e8ses \u00e9nonc\u00e9es ci-dessus, Peyre montre que l'analogie de l'hypoth\u00e8se de Riemann entra\u00eene l'estimation asymptotique

$$|V(k_v)| = |k_v|^{\dim V} + \text{rg}(\text{Pic}(V)) |k_v|^{\dim V - 1} + \mathcal{O}_{\deg(v) \rightarrow \infty} \left( |k_v|^{\dim V - \frac{3}{2}} \right). \quad (4.2)$$

d'o\u00f9 la convergence.

La r\u00e9ponse \u00e0 la question 4.4 est positive dans le cas des vari\u00e9t\u00e9s toriques ([Bo2]) et dans le cas des vari\u00e9t\u00e9s de drapeaux ([Pe3]).

Au vu de (4.2), on peut se poser la question suivante :

**Question 4.11**

*Est-il vrai qu'on a*

$$\forall d \geq 1, \quad \Phi_d(V) - \mathbf{L}^{d \dim V} - \text{rg}(\text{Pic}(V)) \mathbf{L}^{d(\dim V - 1)} \in \mathcal{F}^{d(\frac{3}{2} - \dim(V))} \mathcal{M}_k ?$$

Nous donnons \u00e0 pr\u00e9sent un analogue motivique de la question 4.4.

**Question 4.12**

*Si la r\u00e9ponse \u00e0 la question 4.11 est positive et que  $U$  est un ouvert satisfaisant aux exigences de la question 4.8, est-il vrai que la s\u00e9rie*

$$(1 - \mathbf{L}T)^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} Z_{\mathcal{C}, U, H_0}^{\text{mot}}$$

*converge dans  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}}$  pour  $T = \mathbf{L}^{-1}$  vers*

$$\begin{aligned} \alpha^*(V) \mathbf{L}^{(1-g_e) \dim(V)} \left( [(1 - \mathbf{L}T) Z_{\mathcal{C}}^{\text{mot}}(T)] (\mathbf{L}^{-1}) \right)^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} \\ \times \exp \left( \sum_{n \geq 1} \Psi_n(\mathcal{C}) \log \left( (1 - \mathbf{L}^{-n})^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} \frac{\Phi_n(V)}{\mathbf{L}^{-n \dim(V)}} \right) \right) ? \end{aligned}$$

La convergence du produit eulérien motivique est assurée par la réponse positive à la question 4.11.

Si le corps  $k$  est fini, une réponse positive à la question 4.12 ne permet pas a priori d'obtenir par spécialisation via  $\#_k$  des résultats sur la fonction zêta des hauteurs usuelle concernant par exemple le domaine de convergence ou l'expression du terme principal du pôle au point critique. Le terme principal motivique proposé ici se spécialise formellement sur le terme principal de la fonction zêta des hauteurs usuelle, mais la fonction  $\#_k$  n'est pas définie sur  $\widehat{\mathcal{M}}_k$ .

Une telle spécialisation sera cependant fructueuse dans le cas où la série  $Z_{\mathcal{C},U,H_0}^{\text{mot}}(T)$  est une fraction rationnelle en  $T$ . Cette situation se produit pour les espaces projectifs et, comme on le montre ci-dessous, pour les surfaces de Hirzebruch si  $\mathcal{C} = \mathbf{P}^1$ . Cependant, pour une variété torique déployée quelconque, nous suspectons qu'en général  $Z_{\mathcal{C},U,H_0}(T)$  (et donc  $Z_{\mathcal{C},U,H_0}^{\text{mot}}(T)$ ) n'est pas une fraction rationnelle en  $T$ .

Supposons à présent  $k$  de caractéristique zéro. Une variante évidente des questions 4.11 et 4.12 est donnée par les énoncés suivants.

**Question 4.13**

*Est-il vrai qu'on a*

$$\forall d \geq 1, \quad \Phi_d^X(V) - \mathbf{L}^{d \dim V} - \text{rg}(\text{Pic}(V)) \mathbf{L}^{d(\dim V - 1)} \in \mathcal{F}^{d(\frac{3}{2} - \dim(V))} \mathcal{M}_{k,\mathbf{Q}}^X \quad ?$$

**Question 4.14**

*Si la réponse à la question 4.13 est positive et que  $U$  est un ouvert satisfaisant aux exigences de la question 4.6, est-il vrai que la série*

$$(1 - \mathbf{L}T)^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} Z_{\mathcal{C},U,H_0}^{\text{mot},X}(T)$$

*converge dans  $\widehat{\mathcal{M}}_{k,\mathbf{Q}}^X$  pour  $T = \mathbf{L}^{-1}$  vers*

$$\alpha^*(V) \mathbf{L}^{(1-g_e) \dim(V)} \left( [(1 - \mathbf{L}T) Z_{\mathcal{C}}^X(T)] (\mathbf{L}^{-1}) \right)^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} \\ \times \exp \left( \sum_{n \geq 1} \Psi_n^X(\mathcal{C}) \log \left( (1 - \mathbf{L}^{-n})^{\text{rg}(\text{Pic}(V))} \frac{\Phi_n^X(V)}{\mathbf{L}^{-n \dim(X)}} \right) \right) \quad ?$$

**Dans toute la suite de ce texte, on suppose que la courbe  $\mathcal{C}$  est rationnelle.** Nous montrons alors les résultats suivants : la réponse à la question 4.6 est positive si  $V$  est une variété torique déployée, en prenant pour  $U$  l'orbite ouverte (corollaire 5.14); la réponse à la question 4.12 est positive si  $V$  est une surface de Hirzebruch, en prenant pour  $U$  l'orbite ouverte (on a en fait un résultat plus fort, la rationalité de la fonction zêta, cf. théorème 5.16); enfin on a le résultat suivant :

**Théorème 4.15**

*On suppose  $k$  de caractéristique zéro. La réponse à la question 4.14 est positive si  $V$  est une variété torique déployée, en prenant pour  $U$  l'orbite ouverte.*

Les preuves du corollaire 5.14 et des théorèmes 5.16 et 4.15 s'appuient toutes sur le lemme de paramétrisation 5.13. La preuve du théorème 4.15 utilisent en outre le théorème 3.3 et le corollaire 3.4. Une réponse positive à la question 3.5 (en d'autres termes la validité du théorème 3.3 "au niveau de  $\mathcal{M}_k$ ") permettrait de montrer que la réponse à la question 4.12 est positive pour toute variété torique déployée. Rappelons que dans le cas particulier d'un ensemble  $B_\Sigma$  associé à l'éventail  $\Sigma$  d'une surface de Hirzebruch, la réponse à la question 3.5 est positive.

## 5 Preuve des résultats annoncés

On fixe jusqu'à la fin de cette article un corps de base  $k$ .

### 5.1 Quelques rappels sur les variétés toriques

En ce qui concerne la géométrie des variétés toriques, nous nous contentons de rappeler les résultats qui nous seront utiles, ce qui nous permet de fixer quelques notations. Nous renvoyons le lecteur aux références classiques sur le sujet (par exemple [Od], [Fu], [Ew]) pour plus de détails.

Soit  $r \geq 1$  un entier et  $U \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m^r$  un tore déployé de dimension  $r$  défini sur  $k$ . Soit  $X^*(U)$  son groupe des caractères et  $X_*(U)$  son groupe des cocaractères. Ce sont des  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang  $r$ , chacun s'identifiant naturellement au dual de l'autre. On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'accouplement naturel entre ces deux  $\mathbf{Z}$ -modules. À tout éventail  $\Sigma$  de  $X_*(U)$  est associée une variété normale irréductible  $X_\Sigma$  définie sur  $k$ , munie d'une action de  $U$  et possédant une orbite ouverte isomorphe à  $U$ , en d'autres termes une variété torique déployée définie sur  $k$ .

On considère désormais un éventail  $\Sigma$  projectif et régulier. La variété  $X_\Sigma$  associée est alors projective et lisse.

Pour  $\alpha \in \Sigma(1)$  nous notons  $\rho_\alpha \in X_*(U)$  le générateur de  $\alpha$ ,  $\mathcal{D}_\alpha$  le diviseur  $U$ -invariant associé et  $\mathcal{D}_\alpha$  sa classe dans le groupe de Picard de  $X_\Sigma$ . Un diviseur anticanonique est alors donné par  $\sum_{\alpha \in \Sigma(1)} \mathcal{D}_\alpha$ .

Le morphisme qui a un élément  $m$  de  $X^*(U)$  associe  $(\langle m, \rho_\alpha \rangle)_{\alpha \in \Sigma(1)}$  induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow X^*(U) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Sigma(1)} \mathbf{Z} \mathcal{D}_\alpha \longrightarrow \text{Pic}(X_\Sigma) \longrightarrow 0. \quad (5.1)$$

### 5.2 Paramétrisation des morphismes

On conserve les notations de la section 5.1. Considérons l'espace affine  $\mathbf{A}_k^{\Sigma(1)}$ , et soit  $T_\Sigma$  le complémentaire du fermé

$$\bigcap_{\sigma \in \Sigma} \left\{ \prod_{\alpha \notin \sigma} x_\alpha = 0 \right\}.$$

La suite exacte (5.1) induit une suite exacte de tores

$$0 \longrightarrow T_{\text{Pic}(X_\Sigma)} \longrightarrow \mathbf{G}_m^{\Sigma(1)} \xrightarrow{\pi} U \longrightarrow 0 \quad (5.2)$$

et donc en particulier une action de  $T_{\text{Pic}(X_\Sigma)}$  sur  $\mathcal{T}_\Sigma$ , via l'action diagonale de  $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$ . Il existe alors d'après [Co1] un morphisme  $\mathcal{T}_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$  qui identifie  $X_\Sigma$  au quotient géométrique de  $\mathcal{T}_\Sigma$  par l'action de  $T_{\text{Pic}(X_\Sigma)}$ . Signalons que le morphisme quotient fait de  $\mathcal{T}_\Sigma$  un torseur universel au-dessus de  $X_\Sigma$  (cf. [Sa, proposition 8.5] et [Mad, Appendix]). Ce morphisme fournit un système de coordonnées homogènes sur  $X_\Sigma$ , ceci généralisant le cas classique de l'espace projectif. Le terme homogène s'entend ici par homogène sous l'action de  $T_{\text{Pic}(X_\Sigma)}$ .

Cette description de  $X_\Sigma$  comme un quotient géométrique permet à Cox de donner dans [Co2] une description du foncteur des points de  $X_\Sigma$ . Cette description peut être vue comme une généralisation du fait bien connu que l'espace projectif de dimension  $n$  sur  $k$  représente le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe l'ensemble des faisceaux inversibles sur  $S$  qui sont quotients d'un  $\mathcal{O}_S$ -module libre de rang  $n + 1$ .

On a en particulier une description simple des morphismes de  $\mathbf{P}_k^1$  dans  $X_\Sigma$ , et plus généralement une description des  $k$ -morphisms de  $\mathbf{P}_S^1$  dans  $X_\Sigma$  où  $S$  est un  $k$ -schéma. Dans cette section, nous utilisons cette description pour expliciter le schéma quasi-projectif qui représente le foncteur  $\mathbf{Hom}_k^{\mathcal{O}, \mathcal{L}_0, d}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$  défini à la section 4.2.

Nous rappelons tout d'abord la description de Cox du foncteur des points de  $X_\Sigma$ .

### Définition 5.1

Soit  $S$  un  $k$ -schéma. Une  $\Sigma$ -collection sur  $S$  est la donnée pour tout  $\alpha \in \Sigma(1)$  d'un fibré en droites  $(\mathcal{L}_\alpha)$  sur  $S$  et d'une section globale  $v_\alpha$  de  $\mathcal{L}_\alpha$  ainsi que d'une famille  $(c_m)_{m \in X^*(U)}$  d'isomorphismes

$$c_m : \otimes_{\alpha} \mathcal{L}_{\alpha}^{\langle m, \rho_{\alpha} \rangle} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S,$$

ces données étant astreintes à vérifier les conditions suivantes :

1. Pour tout  $m, m'$  dans  $X^*(U)$ , on a

$$c_m \otimes c_{m'} = c_{m+m'}.$$

2. Pour tout  $\alpha \in \Sigma(1)$ , la section  $v_\alpha$  induit un morphisme  $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{L}_\alpha$  et par dualité un morphisme  $\mathcal{L}_\alpha^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_S$ . Le morphisme induit

$$\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} \otimes_{\alpha \notin \sigma} \mathcal{L}_\alpha^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_S$$

est surjectif.

Un isomorphisme entre deux  $\Sigma$ -collections  $((\mathcal{L}_\alpha, v_\alpha), (c_m))$  et  $((\mathcal{L}'_\alpha, s'_\alpha), (c'_m))$  est une famille d'isomorphismes  $\mathcal{L}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'_\alpha$  envoyant  $s_\alpha$  sur  $s'_\alpha$  et  $c_m$  sur  $c'_m$ .

Cox montre alors le théorème suivant ([Co2, Theorem 1.1]).

### Théorème 5.2

Le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe l'ensemble des  $\Sigma$ -collections sur  $S$  modulo isomorphisme est représenté par la variété torique  $X_\Sigma$ .

Cox démontre ce théorème en utilisant sa description de  $X_\Sigma$  comme quotient géométrique de  $\mathcal{T}_\Sigma$  par  $T_{\text{Pic}(X_\Sigma)}$ .

Très grossièrement, l'idée est la suivante : à la  $\Sigma$ -collection  $((\mathcal{L}_\alpha, v_\alpha), (c_m))$  on fait correspondre le morphisme qui à  $s \in S$  associe le "point de coordonnées homogènes  $(v_\alpha(s))$ ". La condition 1. et la suite exacte (5.1) montrent que le  $\Sigma(1)$ -uple  $(v_\alpha(s))$  est bien défini modulo l'action de  $T_{\text{Pic}(X_\Sigma)}$ . La condition 2. assure que  $(v_\alpha(s))$  est dans  $\mathcal{T}_\Sigma$ . On obtient ainsi un morphisme  $S \rightarrow X_\Sigma$ .

Réciproquement, à un morphisme  $\pi : S \rightarrow X_\Sigma$ , on associe la  $\Sigma$ -collection  $(\pi^*\mathcal{O}(\mathcal{D}_\alpha), \pi^*v_\alpha, \pi^*c_m)$  où  $v_\alpha$  est la section canonique de  $\mathcal{O}(\mathcal{D}_\alpha)$  et les trivialisations  $c_m$  sont données par la suite exacte (5.1).

### Notations 5.3

On note  $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$  le sous-monoïde de  $\mathbf{N}^{\Sigma(1)}$  constitué des éléments  $(d_\alpha)$  vérifiant

$$\forall m \in X^*(U), \quad \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} \langle m, \rho_\alpha \rangle d_\alpha = 0. \quad (*)$$

En d'autres termes,  $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$  est l'intersection de  $\mathbf{N}^{\Sigma(1)}$  et  $\text{Pic}(X_\Sigma)^\vee$ , ces deux monoïdes étant naturellement identifiés à des sous-monoïdes de  $(\oplus \mathbf{Z}\mathcal{D}_\alpha)^\vee$  (la seconde identification étant obtenue en prenant le dual de la suite exacte (5.1)).

Soit  $(d_\alpha) \in \mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ . On note  $\mathbf{Hom}_k^{U, (d_\alpha)}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$  le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe l'ensemble des éléments  $\phi$  de  $\text{Hom}_k(\mathbf{P}_S^1, X_\Sigma)$ , tels que, pour tout  $s \in S$ ,  $\phi_s \in U(\kappa_s(t))$  (i.e. l'image de  $\phi_s$  rencontre  $U$ ) et pour tout  $\alpha \in \Sigma(1)$ ,  $\deg(\phi_s^*(\mathcal{D}_\alpha)) = d_\alpha$ .

Si  $L$  est une extension de  $k$ , on a une suite exacte

$$U(L(t)) \longrightarrow \text{Hom}(X^*(U), \text{Div}(\mathbf{P}_L^1)) \xrightarrow{\deg} \text{Hom}(X^*(U), \mathbf{Z}) \rightarrow 0.$$

Si  $\phi$  est un élément de  $U(L(t))$ , son image dans  $\text{Hom}(X^*(U), \text{Div}(\mathbf{P}_L^1))$  est

$$m \longmapsto \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} \langle m, \rho_\alpha \rangle \phi^*(\mathcal{D}_\alpha).$$

La suite exacte ci-dessus montre alors que  $(\deg(\phi^*(\mathcal{D}_\alpha)))$  est un élément de  $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ . Ainsi  $\mathbf{Hom}_k^{U, (d_\alpha)}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$  est vide si  $(d_\alpha)$  n'est pas un élément de  $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ .

Si  $(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ , nous allons utiliser le théorème 5.2 pour expliciter une variété représentant  $\mathbf{Hom}_k^{U, (d_\alpha)}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$ .

Si  $S$  est un  $k$ -schéma, on note  $p_{1,S}$  et  $p_{2,S}$  les projections de  $\mathbf{P}_S^1$  vers  $\mathbf{P}_k^1$  et  $S$  respectivement. On a alors un isomorphisme

$$p_{1,S}^* + p_{2,S}^* : \mathbf{Z} \oplus \text{Pic}(S) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\mathbf{P}_S^1).$$

### Définition 5.4

Soit  $S$  un  $k$ -schéma et  $(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ . Une  $(\mathbf{P}^1, \Sigma, (d_\alpha))$ -collection non dégénérée sur  $S$  est la donnée d'une  $\Sigma$ -collection  $((\mathcal{M}_\alpha, u_\alpha), (c_m))$  sur  $\mathbf{P}_S^1$  telle que pour tout  $\alpha$ ,  $u_\alpha$  est non nulle et telle que la projection  $\text{Pic}(\mathbf{P}_S^1) \rightarrow \mathbf{Z}$  envoie la classe de  $\mathcal{M}_\alpha$  sur  $d_\alpha$ .

Un isomorphisme entre deux  $(\mathbf{P}^1, \Sigma, (d_\alpha))$ -collections non dégénérées sur  $S$  est un isomorphisme entre ces deux objets en tant que  $\Sigma$ -collections sur  $\mathbf{P}_S^1$ .

Un examen de la démonstration du théorème 5.2 montre aisément le lemme suivant (le point est que l'image réciproque de  $U$  dans  $\mathcal{T}_\Sigma$  est l'ouvert  $\prod x_\alpha \neq 0$ ).

**Lemme 5.5**

À toute  $(\mathbf{P}^1, \Sigma, (d_\alpha))$ -collection non dégénérée sur un  $k$ -schéma  $S$  on peut associer un  $k$ -morphisme de  $\mathbf{P}_S^1$  vers  $X_\Sigma$ , ceci de manière fonctorielle en  $S$ .

Ceci induit un isomorphisme entre le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe l'ensemble des  $(\mathbf{P}^1, \Sigma, (d_\alpha))$ -collections non dégénérées sur  $S$  modulo isomorphisme et le foncteur  $\mathbf{Hom}_k^{U, (d_\alpha)}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$ .

**Définition 5.6**

Soit  $S$  un  $k$ -schéma et  $(d_\alpha)$  un élément de  $\mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ . Une  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collection du second type sur  $S$  est la donnée pour tout  $\alpha \in \Sigma(1)$  d'un fibré en droites  $\mathcal{L}_\alpha$  sur  $S$  et d'un  $(d_\alpha + 1)$ -uplet  $(s_{\alpha,i})_{i=0, \dots, d_\alpha}$  d'éléments de  $H^0(S, \mathcal{L}_\alpha)$ , tels que, pour tout  $\alpha \in \Sigma(1)$ , les  $(s_{\alpha,i})$  engendrent  $\mathcal{L}_\alpha$ .

Un isomorphisme entre deux  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type  $(\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}))$  et  $(\mathcal{L}'_\alpha, (s'_{\alpha,i}))$  est une famille d'isomorphismes  $\mathcal{L}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'_\alpha$  envoyant  $s_{\alpha,i}$  sur  $s'_{\alpha,i}$ .

**Définition 5.7**

Une  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collection du second type  $(\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}))$  sur  $S$  est dite non dégénérée si elle vérifie la condition suivante. Soit  $s \in S$ . Pour tout  $\alpha \in \Sigma(1)$ , fixons un isomorphisme  $H^0(\kappa_s, s^*\mathcal{L}_\alpha) \xrightarrow{\sim} \kappa_s$ . On identifie alors l'image de  $(s_{\alpha,i})$  dans  $H^0(\kappa_s, s^*\mathcal{L}_\alpha)^{d_\alpha+1}$  à un polynôme  $P_{\alpha,s}$  homogène en deux variables de degré  $d_\alpha$ .

La condition s'énonce alors ainsi : les polynômes

$$\left( \prod_{\alpha \notin \sigma} P_{\alpha,s} \right)_{\sigma \in \Sigma}$$

n'ont pas de zéro commun non trivial dans une clôture algébrique de  $\kappa_s$ .

Un isomorphisme entre deux  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type non dégénérées est un isomorphisme entre ces deux objets en tant que  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type.

**Définition 5.8**

Soit  $M$  un sous-module de  $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$  tel que le quotient de  $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$  par  $M$  soit sans torsion.

Une  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collection du second type  $(\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}))$  sur un  $k$ -schéma  $S$  est dite  $M$ -triviale si elle est munie d'une famille  $(c_m)_{m \in M}$  d'isomorphismes

$$c_m : \otimes_{\alpha} \mathcal{L}_\alpha^{m_\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S,$$

telle que, pour tout  $m$  et  $m'$  dans  $M$ , on a

$$c_m \otimes c_{m'} = c_{m+m'}.$$

Un isomorphisme entre deux  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type  $M$ -triviales  $((\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}), (c_m))$  et  $((\mathcal{L}'_\alpha, (s'_{\alpha,i}), (c'_m))$  est une famille d'isomorphismes  $\mathcal{L}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'_\alpha$  envoyant  $s_{\alpha,i}$  sur  $s'_{\alpha,i}$  et  $c_m$  sur  $c'_m$ .



Soit  $(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ .

Le tore  $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$  agit diagonalement sur  $\prod_{\alpha} (\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\})$ , induisant un  $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$ -torseur

$$\prod_{\alpha \in \Sigma(1)} (\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\}) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \mathbf{P}_k^{d_\alpha}.$$

On a défini au début de la section 3 un ouvert  $(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}$  de  $\prod \mathbf{P}_k^{d_\alpha}$  (cf. la sous-section 3.5 pour la définition de l'ensemble  $B_\Sigma$  associé à l'éventail  $\Sigma$ ). On note  $\widetilde{(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}}$  l'image réciproque de  $(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}$  dans  $\prod_{\alpha \in \Sigma(1)} (\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\})$ .

Il est bien connu que le foncteur qui a un  $k$ -schéma  $S$  associe l'ensemble des  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type sur  $S$  modulo isomorphisme est représenté par  $\prod \mathbf{P}_k^{d_\alpha}$ .

L'ouvert  $(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}$  s'identifie au sous-foncteur ouvert de  $\mathbf{Hom}(S, \prod \mathbf{P}^{d_\alpha})$  qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe l'ensemble des  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type sur  $S$  non dégénérées modulo isomorphisme.

Ceci découle de la définition de  $(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}$  et du lemme suivant.

**Lemme 5.9**

Soit  $(P_\alpha)$  une famille de polynômes homogènes en deux variables à coefficients dans un corps  $L$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout  $n_\alpha \in B_\Sigma$ , les polynômes  $(P_\alpha)_{\alpha, n_\alpha=1}$  n'ont pas de zéro commun non trivial dans une clôture algébrique de  $k$ .
2. les polynômes

$$\left( \prod_{\alpha \notin \sigma} P_\alpha \right)_{\sigma \in \Sigma}$$

n'ont pas de zéro commun non trivial dans une clôture algébrique de  $k$ .

*Démonstration :* S'il existe  $n_\alpha \in B_\Sigma$  et un zéro commun aux  $(P_\alpha)_{\alpha, n_\alpha=1}$ , alors, pour tout cône  $\sigma$ , un tel zéro est un zéro de  $\prod_{\alpha \notin \sigma} P_\alpha$  par définition de  $B_\Sigma$ .

Réciproquement, si les polynômes  $\left( \prod_{\alpha \notin \sigma} P_\alpha \right)_{\sigma \in \Sigma}$  ont un zéro commun, on définit

$n_\alpha \in \{0, 1\}^{\Sigma(1)}$  par  $n_\alpha = 1$  si ce zéro commun est un zéro de  $P_\alpha$ . Alors  $n_\alpha \in B_\Sigma$  et ce zéro commun est également un zéro commun des  $(P_\alpha)_{\alpha, n_\alpha=1}$ .  $\square$

De même le foncteur qui a un  $k$ -schéma  $S$  associe l'ensemble des  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type sur  $S$   $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ -triviales (respectivement  $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ -triviales non-dégénérées) modulo isomorphisme est représenté par  $\prod_{\alpha \in \Sigma(1)} (\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\})$

(respectivement  $\widetilde{(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}}$ ).

Plus généralement, on a le résultat suivant.

**Lemme 5.10**

Soit  $M$  un sous-module de  $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$  tel que le quotient de  $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$  par  $M$ , noté  $P$ , soit sans torsion. Soit  $T_P$  le sous-tore de  $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$  associé à  $P$  et  $T_M$  le tore quotient de  $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}$  associé à  $M$ .

Le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe l'ensemble des  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type sur  $S$   $M$ -triviales (respectivement  $M$ -triviales non-dégénérées) modulo isomorphisme est représenté par  $\prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \left( \mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\} \right) / T_P$  (respectivement par  $\widetilde{(\mathbf{P}^1)}_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma} / T_P$ )

*Démonstration :* Si  $\mathcal{L}$  est un fibré en droite sur une variété  $X$ , on note  $\widetilde{\mathcal{L}}$  le  $\mathbf{G}_m$ -torseur associé obtenu en retirant la section nulle à l'espace total du fibré. On identifie  $\mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}_k^{d_\alpha}$  au  $\mathbf{G}_m$ -torseur  $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^{d_\alpha}}(1)}$ . Pour alléger les notations, on note  $X_P$  la variété  $\prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \left( \mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\} \right) / T_P$ .

On note  $\pi_M$  le  $T_M$ -torseur  $X_P \rightarrow \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \mathbf{P}_k^{d_\alpha}$ . On définit sur  $X_P$  une  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collection du second type  $M$ -triviale universelle : on pose  $\mathcal{L}_\alpha = \pi_M^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^{d_\alpha}}(1)$  et pour  $i = 0, \dots, d_\alpha$ ,  $s_{\alpha,i} = \pi_M^* v_{\alpha,i}$  où  $v_{\alpha,i}$  est la base canonique de  $H^0(\mathbf{P}_k^{d_\alpha}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^{d_\alpha}}(1))$  qu'on a identifié à  $k^{d_\alpha+1}$ .

Reste à définir les trivialisations  $c_m$ . Soit  $m$  un élément de  $M$ , c'est-à-dire un morphisme de groupe  $T_M \rightarrow \mathbf{G}_m$ . Le produit contracté associé

$$\mathcal{T}_m = X_P \times^{T_M, m} \mathbf{G}_m$$

est un  $\mathbf{G}_m$ -torseur au-dessus de  $\prod \mathbf{P}_k^{d_\alpha}$ . Si on considère le caractère  $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)} \rightarrow \mathbf{G}_m$  induit par  $m$ , lequel envoie  $(x_\alpha)$  sur  $\prod x_\alpha^{m_\alpha}$ ,  $\mathcal{T}_m$  est canoniquement isomorphe au produit contracté

$$\left( \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \mathbf{A}_k^{d_\alpha+1} \setminus \{0\} \right) \times^{\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)}, m} \mathbf{G}_m.$$

On voit ainsi que  $\mathcal{T}_m$  s'identifie canoniquement au  $\mathbf{G}_m$ -torseur  $\otimes \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^{d_\alpha}}(m_\alpha)}$ .

Le tiré en arrière de  $\mathcal{T}_m$  sur  $X_P$  d'une part s'identifie canoniquement à  $\widetilde{\mathcal{L}_\alpha^{m_\alpha}}$ , d'autre part est canoniquement isomorphe au  $\mathbf{G}_m$ -torseur trivial, d'où la trivialisations  $c_m$ . Par construction on a  $c_m \otimes c_{m'} = c_{m+m'}$ .

Si  $S$  est un  $k$ -schéma, à tout morphisme  $S \rightarrow X_P$ , on peut associer la  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collection du second type  $M$ -triviale obtenue en tirant en arrière la  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collection du second type  $M$ -triviale universelle. Le fait que ceci définisse une bijection entre l'ensemble des points de  $X_P$  à valeurs dans  $S$  et l'ensemble des  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collection du second type  $M$ -triviale sur  $S$  modulo isomorphisme se démontre alors comme dans la preuve de Cox du théorème principal de [Co2]. Alternativement, on aurait pu expliciter la structure de variété torique sur  $X_P$  et appliquer directement le résultat de Cox.

Pour obtenir le résultat pour  $\widetilde{(\mathbf{P}^1)}_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma} / T_P$ , il suffit de remarquer que la bijection ci-dessus induit une bijection entre les points de  $\widetilde{(\mathbf{P}^1)}_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma} / T_P$  à valeurs dans  $S$  et l'ensemble des  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collection du second type  $M$ -triviale non dégénérées sur  $S$  modulo isomorphisme.  $\square$

**Proposition 5.11**

Soit  $(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ . La variété  $(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{\widetilde{B_\Sigma}}/T_{\text{Pic}(X_\Sigma)}$  représente le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe l'ensemble des  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type  $X^*(U)$ -triviales non dégénérées sur  $S$  modulo isomorphisme.

Cette variété représente également le foncteur  $\mathbf{Hom}_k^{U, (d_\alpha)}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$ .

*Démonstration :* La première assertion de la proposition découle immédiatement du lemme 5.10 et de la suite exacte (5.1) en prenant  $M = X^*(U)$ .

Pour montrer la deuxième, il suffit de construire une bijection fonctorielle en  $S$  entre les  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collections du second type sur  $S$   $X^*(U)$ -triviales non dégénérées modulo isomorphisme et les  $(\mathbf{P}^1, \Sigma, (d_\alpha))$ -collections non dégénérées sur  $S$ .

Soit  $((\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}), (c_n)))$  une  $(\Sigma, (d_\alpha))$ -collection du second type sur  $S$ , supposée  $X^*(U)$ -triviale et non-dégénérée. On lui associe la  $(\mathbf{P}^1, \Sigma, (d_\alpha))$ -collections non dégénérée  $((\mathcal{M}_\alpha, u_\alpha, c'_n))$  suivante : on pose  $\mathcal{M}_\alpha = p_{1,S}^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(d_\alpha) \otimes p_{2,S}^* \mathcal{L}_\alpha$ ,

$$u_\alpha = (s_{\alpha,0}, \dots, s_{\alpha,d_\alpha}),$$

où l'on a identifié  $H^0(\mathbf{P}^1_S, \mathcal{M}_\alpha)$  à

$$H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(d_\alpha)) \otimes H^0(S, \mathcal{L}_\alpha) \simeq H^0(S, \mathcal{L}_\alpha)^{d_\alpha+1},$$

et  $c'_m = p_{1,S}^* c''_m \otimes p_{2,S}^* c_m$  où  $c''_m$  est l'isomorphisme

$$\otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(d_\alpha)^{\langle m, \rho_\alpha \rangle} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}$$

donné par le fait que  $(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}$ .

Réciproquement, soit  $((\mathcal{M}_\alpha, u_\alpha, c'_m))$  une  $(\mathbf{P}^1, \Sigma, (d_\alpha))$ -collections non dégénérées  $X^*(U)$ -triviale sur  $S$ . On peut supposer qu'on a

$$\mathcal{M}_\alpha = p_{1,S}^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(d_\alpha) \otimes p_{2,S}^* \mathcal{L}_\alpha.$$

On associe alors à  $((\mathcal{M}_\alpha, u_\alpha, c'_m))$  la  $(\Sigma, (d_\alpha))$  collection  $((\mathcal{L}_\alpha, (s_{\alpha,i}), (c_m)))$ , où  $(s_{\alpha,0}, \dots, s_{\alpha,d_\alpha}) = u_\alpha$  et  $c_m = p_{2,S}^* c'_m$ .

On vérifie aisément que ceci fournit la bijection cherchée.  $\square$

**Notations 5.12**

Si  $d \in \mathbf{N}$ , on note  $n_\Sigma(d)$  le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ (d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}, \quad \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} d_\alpha = d \right\}.$$

Pour tout  $d \geq 0$ , on note  $W_d$  le  $k$ -schéma

$$\coprod_{\substack{(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(*)}^{\Sigma(1)}, \\ \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} d_\alpha = d}} (\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{\widetilde{B_\Sigma}}/T_{\text{Pic}(X_\Sigma)}.$$

$W_d$  est donc une union disjointe de  $n_\Sigma(d)$  variétés définies sur  $k$ , chacune de ces variétés étant géométriquement irréductible de dimension  $d - \text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))$ .

Rappelons que  $\mathbf{Hom}_k^{U, \mathcal{L}_0, d}(\mathbf{P}^1, X_\Sigma)$  désigne le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $S$  associe

$$\left\{ \phi \in \text{Hom}_k(\mathbf{P}_S^1, X_\Sigma), \quad \forall s \in S, \quad \deg(\phi_s^*(\mathcal{L}_0)) = d \wedge \phi_s \in U(\kappa_s(t)) \right\},$$

et que, d'après le lemme 4.1, ce foncteur est représentable par un schéma quasi-projectif noté  $U_{0,d}$ .

**Lemme 5.13**

Pour tout  $d \geq 0$ ,  $W_d$  est isomorphe à  $U_{\mathcal{L}_0, d}$ .

On a l'égalité

$$[U_{0,d}] = (\mathbf{L} - 1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{\substack{(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(\star)}^{\Sigma(1)}, \\ \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} d_\alpha = d}} \left[ (\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma} \right].$$

*Démonstration :* La première assertion découle aussitôt de la proposition 5.11 et du fait qu'un diviseur anticanonique sur  $X_\Sigma$  est  $\sum_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$ .

L'application

$$\widetilde{(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}} / T_{\text{Pic}(X_\Sigma)} \rightarrow \widetilde{(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}} / \mathbf{G}_m^{\Sigma(1)} = (\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}$$

est un torseur sous  $\mathbf{G}_m^{\Sigma(1)} / T_{\text{Pic}(X_\Sigma)} = U$ , localement trivial pour la topologie de Zariski car  $U$  est déployé. Ainsi

$$\left[ \widetilde{(\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma}} / T_{\text{Pic}(X_\Sigma)} \right] = \left[ (\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma} \right] [U],$$

d'où le résultat. □

Un corollaire du lemme 5.13 est le suivant.

**Corollaire 5.14**

La réponse à la question 4.7 est positive.

La théorie du polynôme d'Ehrahrt permet en effet de montrer que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log(n_\Sigma(d))}{\log(d)} = |\Sigma(1)| - r = \text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma)).$$

On déduit également immédiatement du lemme 5.13 qu'on a l'expression

$$Z_{\mathbf{P}^1, U, H_0}^{\text{mot}}(T) = (\mathbf{L} - 1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(\star)}^{\Sigma(1)}} \left[ (\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma} \right] T^\alpha. \quad (5.3)$$

La description de  $X_\Sigma$  comme quotient géométrique permet aussi de montrer la formule suivante, version motivique d'une formule donnant le nombre de points d'une variété torique sur un corps fini. On renvoie à la sous-section 3.5 pour la définition de  $B_\Sigma$  et au début de la section 3 pour la définition de  $\mu_{B_\Sigma}^0$ .

**Proposition 5.15**

On a l'égalité

$$\sum_{(n_\alpha) \in \{0,1\}^{\Sigma(1)}} \mu_{B_\Sigma}^0(n_\alpha) \mathbf{L}^{-n \sum n_\alpha} = (1 - \mathbf{L}^{-n})^{\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))} \frac{\Phi_n^\chi(X_\Sigma)}{\mathbf{L}^{-n \dim(X_\Sigma)}}.$$

*Démonstration :* On sait que  $\mathcal{T}_\Sigma$  est un torseur sous le tore déployé  $T_{\text{Pic}(X_\Sigma)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m^{\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))}$  au-dessus de  $X_\Sigma$ , on en déduit, d'après la proposition 2.11,

$$\Phi_n^\chi(\mathcal{T}_\Sigma) = \Phi_n^\chi(X_\Sigma) \Phi_n^\chi(\mathbf{G}_m)^{\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))}.$$

D'après le corollaire 2.19, on a  $\Phi_n^\chi(\mathbf{G}_m) = \mathbf{L}^n - 1$ . Calculons  $\Phi_n^\chi(\mathcal{T}_\Sigma)$ . Pour  $(n_\alpha) \in \{0,1\}^{\Sigma(1)}$  notons  $\mathbf{A}_{(n_\alpha)}$  le fermé de  $\mathbf{A}^{\Sigma(1)}$  donné par  $\bigcap_{n_\alpha=1} \{X_\alpha = 0\}$ . On a ainsi

$$\Phi_n^\chi(\mathbf{A}_{(n_\alpha)}) = \Phi_n^\chi(\mathbf{A}^{\sum n_\alpha}) = \mathbf{L}^{n \sum n_\alpha},$$

la dernière égalité provenant du corollaire 2.19.

On a alors

$$\mathcal{T}_\Sigma = \mathbf{A}^{\Sigma(1)} \setminus \bigcup_{n_\alpha \in B_\Sigma} \mathbf{A}_{(n_\alpha)} = \mathbf{A}^{\Sigma(1)} \setminus \bigcup_{n_\alpha \in B_\Sigma^{\min}} \mathbf{A}_{(n_\alpha)}.$$

D'après la proposition 2.10, on a

$$\Phi_n^\chi \left( \bigcup_{n_\alpha \in B_\Sigma} \mathbf{A}_{(n_\alpha)} \right) = \sum_{\emptyset \neq J \subset B_\Sigma^{\min}} (-1)^{1+\#J} \Phi_n \left( \bigcap_{\alpha \in J} \mathbf{A}_{(n_\alpha)} \right).$$

Compte tenu du fait que pour  $(n_\alpha) \in B_\Sigma$  on a

$$\mathbf{A}_{(n_\alpha)} = \bigcap_{(n'_\alpha) \in B_\Sigma^{\min}, (n'_\alpha) \leq (n_\alpha)} \mathbf{A}_{(n'_\alpha)}$$

et rappelant que

$$\ell(n_\alpha) = |\{(n'_\alpha) \in B_\Sigma^{\min}, (n'_\alpha) \leq (n_\alpha)\}|,$$

ceci se réécrit

$$\begin{aligned} \Phi_n^\chi \left( \bigcup_{(n_\alpha) \in B_\Sigma} \mathbf{A}_{(n_\alpha)} \right) &= \sum_{(n_\alpha) \in B_\Sigma} (-1)^{1+\ell(n_\alpha)} \Phi_n^\chi(\mathbf{A}_{(n_\alpha)}) \\ &= - \sum_{(n_\alpha) \in \{0,1\}^{\Sigma(1)}} \mu_{B_\Sigma}^0(n_\alpha) \mathbf{L}^{n \sum n_\alpha} \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée.  $\square$

### 5.3 Le cas des surfaces de Hirzebruch

Nous traitons ce cas particulier séparément, car d'une part on peut travailler ici au niveau de  $\mathcal{M}_k$ , d'autre part on obtient le fait remarquable que la série  $Z_H^{\text{mot}}(T)$  est une fonction rationnelle en  $T$ .

Soit donc  $\Sigma$  l'éventail de  $\mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R}$  dont les rayons sont engendrés par  $\rho_1 = (1, 0)$ ,  $\rho_2 = (-1, m)$ ,  $\rho_3 = (0, 1)$ ,  $\rho_4 = -\rho_3$ . La variété torique déployée  $X_\Sigma = \mathcal{H}_m$  associée est la  $m$ -ème surface de Hirzebruch. Dans ce cas, on a  $\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma)) = 2$  et  $\alpha^*(X_\Sigma) = \frac{1}{m+1}$ .

Soit  $D(T) = (1+T)(1+T+T^2+\dots+T^{m+1})$ , et  $\tilde{Z}(T)$  l'élément de  $\mathcal{M}_k[[T]]$  défini par le produit

$$\tilde{Z}(T) = D(\mathbf{L}T) (1 - \mathbf{L}T)^2 Z_{\mathbf{P}^1, U, H_0}^{\text{mot}}(T).$$

**Théorème 5.16**

La série  $\tilde{Z}(T)$  est un élément de  $\mathcal{M}_k[[T]]$ . La valeur de  $\tilde{Z}(T)$  en  $\mathbf{L}^{-1}$  est

$$\mathbf{L}^2 (1 - \mathbf{L}^{-2})^2.$$

Notons que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 (1 - \mathbf{L}^{-2})^2 &= \mathbf{L}^2 \left( \frac{1}{1 - \mathbf{L}^{-1}} \right)^2 [(1 - \mathbf{L}^{-2})(1 - \mathbf{L}^{-1})]^2 \\ &= \mathbf{L}^2 \left( \frac{1}{1 - \mathbf{L}^{-1}} \right)^2 \left( \frac{1}{Z_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}}(\mathbf{L}^{-2})} \right)^2 \\ &= \mathbf{L}^{\dim(X_\Sigma)} \left( [(1 - \mathbf{L}T) Z_{\mathbf{P}^1}^{\text{mot}}(T)] (\mathbf{L}^{-1}) \right)^{\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))} \\ &\quad \times \sum_{(d_\alpha)} \mu_{\mathbf{P}^1}^{B_\Sigma, \text{mot}}((d_\alpha)) \mathbf{L}^{-\sum_\alpha d_\alpha}, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de l'expression de  $\mu_{\mathbf{P}^1}^{B_\Sigma, \text{mot}}$  obtenue au paragraphe 3.5.

Nous obtenons donc bien une version motivique du résultat de [Bo1]. Comme la fonction zêta des hauteurs motivique est rationnelle, le cas particulier du résultat de [Bo1] où la courbe est supposée rationnelle est une conséquence du théorème 5.16, en spécialisant via le morphisme  $\#_k$ .

*Démonstration :* On a d'après le lemme 5.13, la formule (3.10) et la description de  $\Sigma$

$$\begin{aligned} &Z_{\mathbf{P}^1, U, H_0}^{\text{mot}}(T) \\ &= (\mathbf{L} - 1)^2 \sum_{\substack{(d_i) \in \mathbf{N}^4 \\ d_1 = d_2 \\ d_3 + m d_2 = d_4}} [U_{(d_i)}] T^{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \\ &= (\mathbf{L} - 1)^2 \sum_{\substack{(d_i) \in \mathbf{N}^4, (e_i) \in \mathbf{N}^4 \\ d_1 + e_1 = d_2 + e_2 \\ d_3 + m d_2 + e_3 + m e_2 = d_4 + e_4}} \mu_{\mathbf{P}^1}^{B_\Sigma, \text{mot}}(e_1, e_2, e_3, e_4) \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{d_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{d_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{d_4} \end{bmatrix} \\ &\quad \times T^{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4} \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de  $\mu_X^{B_\Sigma, \text{mot}}$  obtenue à la section 3.5, la relation (3.12) et la relation  $(\mathbf{L} - 1) \begin{bmatrix} \mathbf{P}^d \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{d+1} - 1$  on trouve (cf. [Bo3, section 4.3.2] pour les détails du calcul)

$$Z_{\mathbf{P}^1, U, H_0}^{\text{mot}}(T) = (\mathbf{L} - 1) \left( \mathbf{L} \frac{(1 - T^2)(1 + \mathbf{L}^{m+1} T^{m+2})}{(1 - \mathbf{L}^2 T^2)(1 - \mathbf{L}^{2+m} T^{2+m})} - \frac{1 + \mathbf{L} T^{2+m}}{1 - \mathbf{L}^{2+m} T^{2+m}} \right)$$

d'où le résultat annoncé.  $\square$

## 5.4 Le cas général

On suppose ici le corps  $k$  de caractéristique zéro, et on va travailler au niveau de  $\mathcal{M}_k^\chi$ . Il s'agit de reprendre au niveau motivique la stratégie employée dans [Bo2]. Pour alléger les notations, pour toute variété  $V$  sur  $k$  on notera encore  $[V]$  (au lieu de  $\chi([V])$ ) le motif virtuel associée à  $V$ . Soulignons que tous les calculs qui suivent seraient formellement valables au niveau de  $\mathcal{M}_k$  pour un corps  $k$  quelconque (en fait si  $k$  est fini leur spécialisation via  $\#_k$  "redonne" les calculs effectués dans [Bo2]), mais pas a priori les résultats de convergence pour lesquels on aurait besoin d'une réponse positive à la question 3.6. Jusqu'à la fin de cet article, pour alléger l'écriture on notera  $\mu_\Sigma^\chi$  la fonction  $\mu_{\mathbf{P}^1}^{B_\Sigma, \chi}$ .

On a alors, d'après les formules (5.3) et (3.7),

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbf{P}^1, U, H_0}^{\text{mot}}(T) &= (\mathbf{L} - 1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(\ast)}^{\Sigma(1)}} \left[ (\mathbf{P}^1)_{(d_\alpha)}^{B_\Sigma} \right] T_\alpha^{\sum d_\alpha} \\
&= (\mathbf{L} - 1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{\substack{(d_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)} \\ (e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)} \\ (d_\alpha + e_\alpha) \in \mathbf{N}_{(\ast)}^{\Sigma(1)}}} \mu_\Sigma^\chi((e_\alpha)) \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \left[ \mathbf{P}^{d_\alpha} \right] T_\alpha^{\sum (d_\alpha + e_\alpha)} \\
&= (\mathbf{L} - 1)^{\dim(X_\Sigma)} \sum_{(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^\chi((e_\alpha)) \sum_{\substack{(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(\ast)}^{\Sigma(1)} \\ (d_\alpha) \geq (e_\alpha)}} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \left[ \mathbf{P}^{d_\alpha - e_\alpha} \right] T_\alpha^{\sum d_\alpha}
\end{aligned}$$

Rappelons que l'injection naturelle  $\mathbf{N}^{\Sigma(1)} \longrightarrow (\oplus \mathbf{Z} \mathcal{D}_\alpha)^\vee$  et le dual de la suite exacte (5.1) permettent d'identifier  $\mathbf{N}_{(\ast)}^{\Sigma(1)}$  à un sous-ensemble de  $\text{Pic}(X_\Sigma)^\vee$ , plus précisément à l'ensemble des  $y \in \text{Pic}(X_\Sigma)^\vee$  vérifiant  $\langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \geq 0$  pour tout  $\alpha \in \Sigma(1)$ .

Ainsi, pour  $(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$ , on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{(d_\alpha) \in \mathbf{N}_{(\ast)}^{\Sigma(1)} \\ (d_\alpha) \geq (e_\alpha)}} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \left[ \mathbf{P}^{d_\alpha - e_\alpha} \right] T_\alpha^{\sum d_\alpha} \\
&= \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X_\Sigma)^\vee \\ \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \geq \deg(E_\alpha)}} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \left( \frac{\mathbf{L}^{1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} - 1}{\mathbf{L} - 1} \right) T^{\langle y, \sum_\alpha \mathcal{D}_\alpha \rangle}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{Z_{\mathbf{P}^1, U, H_0}^\chi(T)}{(\mathbf{L} - 1)^{\text{rg}(X^*(U)) - |\Sigma(1)|}} \\
&= \sum_{(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^\chi((e_\alpha)) \left( \sum_{\substack{y \in \text{Pic}(X_\Sigma)^\vee \\ \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \geq e_\alpha}} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \left( \mathbf{L}^{1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} - 1 \right) T^{\langle y, \sum_\alpha \mathcal{D}_\alpha \rangle} \right) \\
&= \sum_{(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^\chi((e_\alpha)) \left( \sum_{\substack{y \in C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee \cap \text{Pic}(X_\Sigma)^\vee \\ \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \geq e_\alpha}} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)} \left( \mathbf{L}^{1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} - 1 \right) T^{\langle y, \mathcal{L}_0 \rangle} \right)
\end{aligned}$$

Adaptant (pour ne pas dire recopiant) l'approche de [Bo2, section 4.3.3], nous décomposons à présent  $Z_{\mathbf{P}^1, U, H_0}^\chi(T)$  en une somme de plusieurs termes. Nous estimerons ensuite le comportement de chaque terme séparément.

Nous écrivons

$$Z_{\mathbf{P}^1, U, H_0}^\chi(T) = (\mathbf{L} - 1)^{-\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))} \sum_{A \subset \Sigma(1)} (-1)^{|A|} Z_A(T)$$

avec, pour  $A \subset \Sigma(1)$ ,

$$Z_A(T) = \sum_{(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^\chi((e_\alpha)) Z_{A, (e_\alpha)}(T),$$

$Z_{A, (e_\alpha)}(T)$  désignant la série

$$\sum_{\substack{y \in C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee \cap \text{Pic}(X_\Sigma)^\vee \\ \forall \alpha \in \Sigma(1), \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \geq e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum_{\alpha \notin A} 1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} T^{\langle y, \mathcal{L}_0 \rangle}.$$

Nous utilisons le fait que  $C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee$  s'écrit comme le support d'un éventail régulier  $\Delta$  pour en déduire une décomposition de chacun des termes  $Z_A(T)$ .

### Notations 5.17

On écrit  $C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^\vee$  comme le support d'un éventail régulier  $\Delta$ , dont l'ensemble des rayons est noté  $\Delta(1)$ . Pour  $i \in \Delta(1)$  nous notons  $m_i$  le générateur du rayon  $i$ . Pour tout cône  $\delta$  de  $\Delta$  nous notons également

$$I_\delta = \{i \in \Delta(1), i \in \delta\}$$

l'ensemble de ses rayons (ainsi  $I_{\{0\}} = \emptyset$ ). Pour toute partie  $I$  de  $\Delta(1)$  nous noterons

$$C(I) = \sum_{i \in I} \mathbf{N}_{>0} m_i$$

(avec la convention  $C(\emptyset) = \{0\}$ ) de sorte que  $C(I_\delta)$  est l'ensemble des points du réseau  $\text{Pic}(X_\Sigma)^\vee$  contenu dans l'intérieur relatif du cône  $\delta$ .



On a alors

$$Z_{C_{\text{eff}}(V), \mathcal{L}_0}(T) = \sum_{\delta \in \Delta} \prod_{i \in I_\delta} \left( \frac{1}{1 - T^{\langle m_i, \mathcal{L}_0 \rangle}} - 1 \right)$$

d'où

$$\alpha^*(X_\Sigma) = \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \dim(\delta) = \text{rg}(\text{Pic}(V))}} \prod_{i \in I_\delta} \frac{1}{\langle m_i, \mathcal{L}_0 \rangle}.$$

Nous écrivons

$$Z_A(T) = \sum_{\delta \in \Delta} Z_{A, \delta}(T)$$

avec

$$Z_{A, \delta}(T) = \sum_{(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^\chi((e_\alpha)) Z_{A, \delta, (e_\alpha)}(T),$$

$Z_{A, \delta, (e_\alpha)}(T)$  désignant la série

$$\sum_{\substack{y \in C(I_\delta) \\ \forall \alpha \in \Sigma(1), \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \geq e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum_{\alpha \notin A} 1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} T^{\langle y, \mathcal{L}_0 \rangle}.$$

De la même façon que le théorème 1 (p.178) de [Bo2] se déduisait des propositions 1-(3) (p.181), 3 (p.190) et 4 (p.195) de (op.cit.), le théorème 4.15 se déduit alors de la proposition 5.15, ainsi que des propositions 5.18 et 5.20 énoncées et démontrées ci-dessous. Les preuves de ces deux dernières propositions sont très similaires à celles des propositions analogues de [Bo2], et sont en outre simplifiées par le fait qu'on étudie ici des convergences pour une norme non-archimédienne.

**Le cas  $A = \emptyset$ .** Soit  $\delta \in \Delta$ . Nous décomposons encore

$$Z_{\emptyset, \delta}(T) = \sum_{J \subset \Sigma(1)} (-1)^{|J|} Z_{\emptyset, \delta, J}(T)$$

avec

$$Z_{\emptyset, \delta, J}(T) = \sum_{(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^\chi((e_\alpha)) Z_{\emptyset, \delta, J, (e_\alpha)}(T), \quad (5.4)$$

$Z_{\emptyset, \delta, J, (e_\alpha)}(T)$  désignant la série

$$\sum_{\substack{y \in C(I_\delta) \\ \forall \alpha \in J, \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle < e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum_{\alpha \in \Sigma(1)} 1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} T^{\langle y, \mathcal{L}_0 \rangle}.$$

### Proposition 5.18

La série

$$(1 - LT)^{\dim(\delta)} Z_{\emptyset, \delta, J}(T)$$

converge dans  $\widehat{\mathcal{M}}_{k, \mathbf{Q}}^\chi$  pour  $T = \mathbf{L}^{-1}$ . Si  $J \neq \emptyset$  et  $\dim(\delta) = \text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))$ , sa valeur en  $\mathbf{L}^{-1}$  est nulle.

La série

$$(1 - \mathbf{L}T)^{\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))} \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \dim(\delta) = \text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))}} Z_{\emptyset, \delta, \emptyset}(T)$$

converge dans  $\widehat{\mathcal{M}_{k, \mathbf{Q}}^\chi}$  pour  $T = \mathbf{L}^{-1}$  vers

$$\alpha^*(X_\Sigma) \mathbf{L}^{|\Sigma(1)|} \sum_{(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^\chi((e_\alpha)) \mathbf{L}^{-\sum e_\alpha}.$$

Cette proposition découle de (5.4), du corollaire 3.4 et du lemme suivant.

**Lemme 5.19**

Soit  $(e_\alpha)$  un élément de  $\mathbf{N}^{\Sigma(1)}$ . Soient  $\delta$  un cône de  $\Delta$  et  $J$  une partie (éventuellement vide) de  $\Sigma(1)$ . Alors la série

$$\sum_{\substack{y \in C(I_\delta) \\ \forall \alpha \in J, \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle < e_\alpha}} \mathbf{L}^{\sum_{\alpha \in \Sigma(1)} 1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} T^{\langle y, \mathcal{L}_0 \rangle}$$

s'écrit

$$\left( \prod_{i \in I'} \left[ \left( 1 - (\mathbf{L}T)^{-\langle m_i, \omega \rangle} \right)^{-1} - 1 \right] \right) \times P_{I'}(T)$$

où  $I'$  est un sous-sensé de  $I_\delta$  et  $P_{I'}$  est un polynôme tel que pour tout entier  $\kappa \geq 1$  on a

$$P_{I'}(\mathbf{L}^{-\kappa}) \in \mathcal{F}_{\alpha \in \Sigma(1)}^{\sum e_\alpha - |\Sigma(1)|} \mathcal{M}_{k, \text{loc}}^\chi.$$

Supposons en outre  $\delta$  de dimension maximale. Alors si  $J$  est non vide,  $I'$  est un sous-ensemble strict de  $I_\delta$ . Si  $J$  est vide, on a  $I' = I_\delta$  et  $P_{I_\delta}$  est une constante, égale à

$$\mathbf{L}^{|\Sigma(1)| - \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} e_\alpha}.$$

*Démonstration :* Pour  $\delta$  cône de  $\Delta$ ,  $J \subset \Sigma(1)$  et  $(e_\alpha) \in \mathbf{N}^J$ , nous désignerons l'ensemble

$$\{y \in C(I_\delta), \quad \forall \alpha \in J, \quad \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \leq e_\alpha\}$$

par  $C(I_\delta)_{J, (e_\alpha)}$ .

La série considérée s'écrit alors

$$\sum_{y \in C(I_\delta)_{J, (e_\alpha)}} \mathbf{L}^{\sum_{\alpha} 1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} T^{\langle y, \mathcal{L}_0 \rangle}.$$

Si  $J$  est vide, cette expression s'évalue immédiatement, elle vaut

$$\mathbf{L}^{|\Sigma(1)| - \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} e_\alpha} \left( \prod_{i \in I_\delta} \left[ \left( 1 - (\mathbf{L}T)^{-\langle m_i, \omega \rangle} \right)^{-1} - 1 \right] \right).$$

Si  $J$  n'est pas vide, nous posons

$$I_{J,1} = \{i \in I_\delta, \quad \forall \alpha \in J, \quad \langle m_i, \mathcal{D}_\alpha \rangle = 0\}$$

et  $I_{J,2} = I_\delta \setminus I_{J,1}$ . En particulier on a  $C(I_{J,1})_{J, (e_\alpha)} = C(I_{J,1})$ .  
La série considérée se décompose alors en un produit

$$P(T) \times \sum_{y_1 \in C(I_{J,1})} \mathbf{L} \left\langle y_1, \sum_{\alpha \notin J} \mathcal{D}_\alpha \right\rangle T \langle y_1, \mathcal{L}_0 \rangle$$

où on désigne par  $P(T)$  l'expression

$$\sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J, (e_\alpha)}} \mathbf{L}^{\sum_\alpha 1 + \langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} T \langle y_2, \mathcal{L}_0 \rangle.$$

Si  $y_1 \in C(I_{J,1})$ , on a

$$\left\langle y_1, \sum_{\alpha \notin J} \mathcal{D}_\alpha \right\rangle = \langle y_1, \mathcal{L}_0 \rangle$$

et le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{i \in I_{J,1}} \left[ \left( 1 - (\mathbf{L}T)^{-\langle m_i, \omega \rangle} \right)^{-1} - 1 \right].$$

Passons au facteur  $P(T)$ . On voit que  $C(I_{J,2})_{J, (e_\alpha)}$  est fini. Pour tout entier  $\kappa$  on a

$$P(\mathbf{L}^{-\kappa}) = \mathbf{L}^{|\Sigma(1)| - \sum_\alpha e_\alpha} \sum_{y_2 \in C(I_{J,2})_{J, (e_\alpha)}} \mathbf{L}^{(1-\kappa) \langle y_2, \mathcal{L}_0 \rangle}.$$

Comme  $\langle y_2, \mathcal{L}_0 \rangle \geq 0$ , on a si  $\kappa \geq 1$

$$P(\mathbf{L}^{-\kappa}) \in \mathcal{F}^{\sum e_\alpha - |\Sigma(1)|} \mathcal{M}_{k, \text{loc}}^\chi.$$

Notons enfin que si  $\delta$  est un cône de dimension maximale, les  $(m_i)_{i \in I_\delta}$  forment une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\text{Pic}(X_\Sigma)^\vee$ , et si  $J \neq \emptyset$  on ne peut avoir  $I_{J,2} = \emptyset$ . Ceci joint au calcul pour  $J = \emptyset$  montre les deux dernières assertions du lemme.  $\square$

**Le cas  $A \neq \emptyset$ .** On écrit

$$Z_{A,\delta}(T) = \sum_{J \subset \Sigma(1) \setminus A} (-1)^{|J|} Z_{A,\delta,J}(T)$$

avec

$$Z_{A,\delta,J}(T) = \sum_{(e_\alpha) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}} \mu_\Sigma^\chi((e_\alpha)) Z_{A,\delta,J,(e_\alpha)}(T) \quad (5.5)$$

où on désigne par  $Z_{A,\delta,J,(e_\alpha)}(T)$  la série

$$\sum_{y \in C(I_\delta)} \mathbf{L}^{\sum_{\alpha \notin A} 1 + \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha} T \langle y, \mathcal{L}_0 \rangle.$$

$\forall \alpha \in A, \quad \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle \geq e_\alpha$   
 $\forall \alpha \in J, \quad \langle y, \mathcal{D}_\alpha \rangle < e_\alpha$

**Proposition 5.20**

Pour  $J \subset \Sigma(1) \setminus A$ , la série

$$D_{\Delta}(\mathbf{L}T) (1 - \mathbf{L}T)^{\dim(\delta)} Z_{A,\delta,J}(T)$$

converge dans  $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\chi}$  pour  $T = \mathbf{L}^{-1}$ . En outre, si  $\dim(\delta) = \text{rg}(\text{Pic}(X_{\Sigma}))$ , sa valeur en  $\mathbf{L}^{-1}$  est nulle.

Cette proposition découle de (5.5), le corollaire 3.4 et le lemme suivant.

**Lemme 5.21**

Soient  $(e_{\alpha}) \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$ ,  $\delta$  un cône de  $\Delta$ ,  $J$  une partie (éventuellement vide) de  $\Sigma(1) \setminus A$ . Alors la série

$$\sum_{\substack{y \in C(I_{\delta}) \\ \forall \alpha \in A, \langle y, \mathcal{D}_{\alpha} \rangle \geq e_{\alpha} \\ \forall \alpha \in J, \langle y, \mathcal{D}_{\alpha} \rangle < e_{\alpha}}} \mathbf{L}^{\sum_{\alpha \notin A} 1 + \langle y, \mathcal{D}_{\alpha} \rangle - e_{\alpha}} T^{\langle y, \mathcal{L}_0 \rangle}$$

s'écrit

$$\left( \prod_{i \in I'} \left[ \left( 1 - (\mathbf{L}T)^{-\langle m_i, \omega \rangle} \right)^{-1} - 1 \right] \right) \times R_{I'}(T)$$

où  $I'$  est un sous-ensemble de  $I_{\delta}$ , et  $R_{I'}$  est un élément de  $\mathcal{M}_k^{\chi}[[T]]$  tel que, pour tout entier  $\kappa \geq 1$ ,  $R_{I'}(\mathbf{L}^{-\kappa})$  converge dans  $\widehat{\mathcal{M}}_k^{\chi}$  vers un élément de  $\mathcal{F}^{-|\Sigma(1)| + \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} e_{\alpha}} \widehat{\mathcal{M}}_k^{\chi}$ . Par ailleurs si  $\delta$  est un cône de dimension maximale,  $I'$  est un sous-sensse strict de  $I_{\delta}$ .

*Démonstration :* Nous désignons l'ensemble

$$\{y \in C(I_{\delta})_{J, (e_{\alpha})}, \quad \forall \alpha \in A, \quad \langle y, \mathcal{D}_{\alpha} \rangle \geq e_{\alpha}\}$$

par  $C(I_{\delta})_{J, (e_{\alpha})}^A$ .

La série considérée s'écrit donc

$$\sum_{y \in C(I_{\delta})_{J, (e_{\alpha})}^A} \mathbf{L}^{\sum_{\alpha \notin A} (1 + \langle y, \mathcal{D}_{\alpha} \rangle - e_{\alpha})} T^{\langle y, \mathcal{L}_0 \rangle}.$$

Nous posons

$$I_{A,J,1} = \{i \in I_{\delta}, \quad \forall \alpha \in A \cup J, \quad \langle m_i, \mathcal{D}_{\alpha} \rangle = 0\}$$

et  $I_{A,J,2} = I_{\delta} \setminus I_{A,J,1}$ . Ainsi tout élément de  $C(I_{\delta})_{J, (e_{\alpha})}^A$  s'écrit de manière unique  $y_1 + y_2$  avec

$$y_1 \in C(I_{A,J,1})$$

et

$$y_2 \in \prod_{\substack{h_{\alpha} \in \mathbf{N}^A \\ h_{\alpha} \geq e_{\alpha}}} \{y \in C(I_{A,J,2})_{J, (e_{\alpha})}, \quad \forall \alpha \in A, \quad \langle y, \mathcal{D}_{\alpha} \rangle = h_{\alpha}\}.$$

La série considérée se décompose donc en un produit

$$R(T) \times \sum_{y_1 \in C(I_{A,J,1})} \mathbf{L} \left\langle y_1, \sum_{\alpha \notin A \cup J} \mathcal{D}_\alpha \right\rangle T \langle y_1, \mathcal{L}_0 \rangle$$

avec

$$R(T) = \sum_{\substack{h_\alpha \in \mathbf{N}^A \\ h_\alpha \geq e_\alpha}} R_{(h_\alpha)}(T),$$

$R_{(h_\alpha)}(T)$  désignant la série

$$\sum_{\substack{y_2 \in C(I_{A,J,2})_{J, (e_\alpha)} \\ \forall \alpha \in A, \langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle = h_\alpha}} \mathbf{L} \sum_{\alpha \notin A} (1 + \langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha) T \langle y_2, \mathcal{L}_0 \rangle.$$

Le deuxième facteur est égal à

$$\prod_{i \in I_{A,J,1}} \left[ \left( 1 - (\mathbf{L} T)^{-\langle m_i, \omega \rangle} \right)^{-1} - 1 \right].$$

Il n'y a qu'un nombre fini d'éléments  $y_2$  de  $C(I_{A,J,2})_{J, (e_\alpha)}$  vérifiant  $\langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle = h_\alpha$  pour tout  $\alpha \in A$ .

Pour un tel  $y_2$ , on a pour tout entier  $\kappa$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \sum_{\alpha \notin A} (1 + \langle y_2, \mathcal{D}_\alpha \rangle - e_\alpha) \mathbf{L}^{-\kappa} \langle y_2, \mathcal{L}_0 \rangle &= \mathbf{L}^{|\Sigma(1)| - |A| - \sum_{\alpha \notin A} e_\alpha - \sum_{\alpha \in A} h_\alpha} \mathbf{L}^{(1-\kappa) \langle y_2, \mathcal{L}_0 \rangle} \\ &= \mathbf{L}^{|\Sigma(1)| - |A| - \sum_{\alpha \in \Sigma(1)} e_\alpha - \sum_{\alpha \in A} (h_\alpha - e_\alpha)} \mathbf{L}^{(1-\kappa) \langle y_2, \mathcal{L}_0 \rangle}. \end{aligned}$$

Comme  $\langle y_2, \mathcal{L}_0 \rangle \geq 0$ , on a donc si  $\kappa \geq 1$

$$R_{(h_\alpha)}(\mathbf{L}^{-\kappa}) \in \mathcal{F}^{\sum_{\alpha \in \Sigma(1)} e_\alpha - |\Sigma(1)| + \sum_{\alpha \in A} (h_\alpha - e_\alpha)} \mathcal{M}_{k, \text{loc}}^\chi.$$

Ainsi  $R(\mathbf{L}^{-\kappa})$  converge dans  $\widehat{\mathcal{M}}_k^\chi$  vers un élément de

$$\mathcal{F}^{\sum_{\alpha \in \Sigma(1)} e_\alpha - |\Sigma(1)|} \widehat{\mathcal{M}}_k^\chi.$$

Notons enfin que comme  $A$  est non vide, si  $I = I_\delta$  pour un cône  $\delta$  maximal  $I_{A,J,2}$  ne peut être vide. Ceci montre la dernière assertion du lemme.  $\square$

Comme déjà annoncé, des propositions 5.15, 5.18 et 5.20 on déduit le théorème 4.15.

## Références

- [Bit] F. BITTNER. The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero. *Compos. Math.*, **140**, 2004. p. 1011-1032.
- [Bo1] D. BOURQUI. Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel. *J. of Number Theory*, **94**, 2002. p. 343-358.

- [Bo2] D. BOURQUI. Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques dans le cas fonctionnel. *J. reine angew. Math.*, **562**, 2003. p. 171-199.
- [Bo3] D. BOURQUI. Fonctions zêta des hauteurs des variétés toriques en caractéristique positive. Thèse de doctorat, université de Grenoble I, 2003. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/ps/t130.ps.gz>
- [Co1] D.A. COX. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. of Algebraic Geometry* **4**, 1995. p. 17-50.
- [Co2] D.A. COX. The functor of a smooth toric variety. *Tohoku Math. J. (2)* **47**, 1995. p. 251-262.
- [dlBr1] R. DE LA BRETÈCHE. Compter des points d'une variété torique. *J. of Number Theory* **87**, 2001. p. 315-331.
- [dlBr2] R. DE LA BRETÈCHE. Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5. *Duke Math. Journal*, **113**, n° 3, 2002. p. 421-464.
- [DeLo1] J. DENEFF, F. LOESER. Definable sets, motives and  $p$ -adic integrals. *J. Am. Math. Soc.*, **14**, n° 2, 2002. p. 429-469.
- [DeLo2] J. DENEFF, F. LOESER. Motivic integration and the Grothendieck group of pseudo-finite fields in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* Higher Ed. Press, Beijing, 2002. p. 13-23.
- [DeLo3] J. DENEFF, F. LOESER. On some rational generating series occurring in arithmetic geometry in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II* Walter de Gruyter GmbH & Co., Berlin, 2004. p. 509-526.
- [Ew] G. EWALD. *Combinatorial convexity and algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics **168**, Springer (1996).
- [Fu] W. FULTON. *Introduction to toric varieties*. Annals of Mathematics Studies **31**, Princeton University Press (1993).
- [GiSo] H. GILLET, C. SOULÉ. Descent, motives and K-theory. *J. reine angew. Math.*, **478**, 1996. p. 127-176.
- [Gr] A. GROTHENDIECK. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki **221** 1960/61.
- [GuNa] F. GUILLÉN, V. NAVARRO AZNAR. Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **95**, 2002. p. 1-91.
- [GuLuMe] S. M. GUSEIN-ZADE, I. LUENGO, A. MELLE-HERNANDEZ. A power structure over the Grothendieck ring of varieties. *Math. Res. Lett.*, **11**, 2004. p. 49-57.
- [Ka] M. KAPRANOV. The elliptic curve in the S-duality theory, and Eisenstein series for Kac-Moody groups. Prépublication, math.AG/0001005.
- [LaLu1] M. LARSEN, V.A. LUNTS. Motivic measures and stable birational geometry. *Mosc. Math. J.*, **3**, 2003. p.85-95.
- [LaLu2] M. LARSEN, V.A. LUNTS. Rationality criteria for motivic zeta functions. *Compos. Math.*, **140**, 2004. p. 1537-1560.
- [Mad] D. MADORE. Very free R-equivalence on toric models. Prépublication 2005.

- [Man] J. I. MANIN. Correspondences, motifs and monoidal transformations. *Math. USSR-Sb.*, **6**, 1968. p. 439-470.
- [Od] T. ODA. *Convex bodies and algebraic geometry*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **15**, Springer-Verlag (1988).
- [Pe1] E. PEYRE. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. Journal*, **79**, 1995. p. 101-218.
- [Pe2] E. PEYRE. Étude asymptotique des points de hauteur bornée. Notes de l'école d'été sur les variétés toriques, Grenoble, juin 2000. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre/notes/textes/hauteurs.ps.gz>
- [Pe3] E. PEYRE. Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie. Prépublication, math.NT/0303067.
- [Pe4] E. PEYRE. Rational points and curves on flag varieties (joint work with A. Chambert-Loir). *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report*, **12**, 2004. p. 650-654. [www.mfo.de/programme/schedule/2004/10/OWR\\_2004\\_12.ps](http://www.mfo.de/programme/schedule/2004/10/OWR_2004_12.ps)
- [Pe5] E. PEYRE. Points de hauteur bornée et géométrie des variétés, d'après Y. Manin et al. Séminaire Bourbaki **891**, juin 2001.
- [Pe6] E. PEYRE. Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesure de Tamagawa. *J. Th. Nombres de Bordeaux*, **15**, 2003. p. 319-349.
- [Sa] P. SALBERGER. Tamagawa measure on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Astérisque*, **251**, 1998. p. 91-258.
- [Sc] A.J. SCHOLL Classical motives in *Motives (Seattle, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. p. 163-187