



HAL
open science

Résurgence des solutions BKW d'une EDO singulièrement perturbée

Jean-Marc Rasoamanana

► **To cite this version:**

Jean-Marc Rasoamanana. Résurgence des solutions BKW d'une EDO singulièrement perturbée. 2006. ⟨hal-00018339⟩

HAL Id: hal-00018339

<https://hal.science/hal-00018339v1>

Submitted on 31 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Résurgence des solutions BKW formelles d'une EDO singulièrement perturbée

Jean-Marc Rasoamanana

Département de Mathématiques, UMR CNRS 6093, Université
d'Angers, 2 Boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01, France.

ccsd-00018339, version 1 - 31 Jan 2006

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Présentation	3
1.2	Contenu	5
1.3	Convention	6
2	Cas de l'équation d'Airy	6
2.1	Aspect formel : le symbole BKW d'Airy	6
2.2	Etude du phénomène de Stokes associé	6
3	Analyse BKW formelle dans le cas général	9
3.1	Existence de solutions BKW formelles	9
3.2	Solutions BKW élémentaires	10
4	Résurgence des solutions BKW élémentaires	12
4.1	Construction de fonctions confluentes	12
4.1.1	Représentation de type Laplace	12
4.1.2	Résolution de l'EDP singulière associée	13
4.1.3	Construction explicite	23
4.2	Décomposition et conséquences	26
4.2.1	Décomposition dans S_1	26
4.2.2	Lien avec le modèle d'Airy	27
5	Applications	28
5.1	Un théorème local de réduction	28
5.2	Applications pour l'équation de Schrödinger	28
5.3	Extensions possibles	31
6	Pistes de recherche	32
6.1	Points tournants d'ordre supérieur	32
6.2	Sommabilité	34
A	Appendice : Fonctions confluentes et microfonctions	35
A.1	Décomposition locale (pour la direction $\alpha = 0$)	37

1 Introduction

1.1 Présentation

Les EDO singulièrement perturbées servent très souvent de modèles, notamment en physique quantique (le paramètre de perturbation ε représentant alors la constante de Planck \hbar des physiciens).

Un exemple classique est l'équation de Schrödinger unidimensionnelle stationnaire dans le champ complexe :

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 Y}{dq^2} - V(q)Y = 0, \quad (1)$$

où la fonction potentielle V est analytique (par exemple polynomiale).

L'étude de telles équations conduit de manière naturelle à considérer des solutions formelles (en ε) qu'on appelle développements BKW (du nom des physiciens Brillouin, Krammers et Wentzel) ou développements semi-classiques.

D'une manière générale, ces développements formels sont divergents, ce qui conduit alors à étudier leur caractère réurgent ou sommable (de Borel) par rapport au paramètre de perturbation ε (ce qu'Écalle appelle résurgence quantique ou coéquationnelle dans [17]).

Les techniques de sommation ont été largement développées, notamment grâce aux travaux de J.P. Ramis ([27], [28] et [29] notamment) et de J. Ecalle ([14], [15], [16] et [17] par exemple), et utilisées avec succès pour retrouver, à partir de certains développements formels, des "vraies" solutions exactes de l'équation considérée. De fait, l'intérêt de la sommation de Borel, notamment dans la méthode BKW, est immense, tant au niveau mathématique proprement dit (voir [12], [13], [16] ou [35]) qu'au niveau des applications en physique (voir [5], [7], [32] et [36] par exemple).

Cette méthode de sommation dans le cadre BKW est souvent qualifiée d'analyse BKW exacte (ou d'analyse semi-classique exacte) et cette exactitude permet notamment l'obtention, dans certains cas, de formules de connexion entre les différentes solutions BKW (voir [35] par exemple).

En ce qui concerne l'aspect réurgent de tels développements, il apparaît que les solutions BKW peuvent être perçues comme un véritable codage exact de vraies solutions (voir [11]) et non pas seulement comme de simples approximations. Le phénomène de Stokes s'interprète alors naturellement comme discontinuité dans de tels codages.

Un théorème d'Écalle affirme que dans le cas de l'équation (1), il existe toujours une base de solutions BKW formelles réurgentes, pourvu que le potentiel V se comporte "suffisamment bien à l'infini". Toutefois, de l'avis des spécialistes, ce théorème n'est pas encore complètement démontré dans sa généralité.

Notre point de vue s'inscrit dans ce "courant de pensée".
 Le sujet principal de cet article est l'étude de l'équation différentielle ordinaire singulièrement perturbée :

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \frac{z}{\varepsilon^2}\Phi = F(z)\Phi, \quad (2)$$

où F désigne une fonction holomorphe, au moins au voisinage de l'origine, et ε est un petit paramètre complexe.

Remarquons que cette équation ne rentre pas dans le champ d'applications du théorème d'Ecalte précédemment cité.

En utilisant les outils de la théorie BKW exacte, nous allons analyser les propriétés de résurgence (paramétrique) d'une classe de solutions BKW formelles "bien normalisées".

Nous discuterons également de leur éventuel caractère sommable.

En outre, le résultat principal de cet article est le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Lorsque F est holomorphe au voisinage de l'origine (respectivement entière), il existe une famille de solutions BKW élémentaires résurgentes de type Airy local (respectivement de type Airy) $\Phi_{bkw}(z, \varepsilon)$ de l'équation (2),*

au sens de la définition suivante :

Définition 1.2. Un symbole résurgent élémentaire $\Phi(z, \varepsilon)$ est dit de type Airy local en $(z = 0, \varepsilon = 0)$ (respectivement de type Airy) s'il vérifie les conditions suivantes :

1. son support singulier est inclus dans la courbe algébrique $\mathcal{C} = \{(z, \xi), 9\xi^2 = 4z^3\}$ au voisinage de $(z = 0, \varepsilon = 0)$,
2. pour toute direction α , et tout germe de secteur de Stokes (respectivement secteur de Stokes) S relatif à α , toute détermination du symbole $\Phi(z, \varepsilon)$ peut s'écrire comme la décomposition locale (respectivement décomposition), pour $z \in S$, d'une fonction confluyente (respectivement d'une fonction confluyente résurgente) à support singulier inclus dans \mathcal{C} .

Par ailleurs, l'une de nos motivations est d'appliquer nos résultats à l'équation de Schrödinger (1) : en effet, cette dernière se ramène à notre équation principale (2) via un changement de variable analytique.

En particulier, nous établissons un théorème local résurgent de réduction (au voisinage d'un point tournant simple) qui affirme que l'équation (1) peut se ramener à l'équation d'Airy :

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{s}{\varepsilon^2}y, \quad (3)$$

(i.e l'équation d'Airy est le modèle local universel pour un point tournant simple).

1.2 Contenu

Le papier est organisé de la manière suivante.

Dans un premier temps, nous allons analyser en détail dans la section 2 l'équation (2) dans le cas où $F = 0$. : l'équation (2) n'est alors rien d'autre que l'équation d'Airy, qui va nous servir de modèle pour l'analyse BKW exacte de l'équation (2) dans le cas général. En particulier, nous y définissons le symbole BKW d'Airy, y rappelons ses propriétés de résurgence et sommabilité et analysons en détail le phénomène de Stokes associé.

Dans la section 3, nous commençons par l'analyse BKW formelle de l'équation (2) dans le cas général en montrant l'existence d'une famille de solutions BKW formelles "bien normalisées" de (2).

La section 4 constitue la partie centrale de l'article, où nous allons prouver la résurgence (locale) des solutions BKW formelles élémentaires. La preuve se fait en deux étapes :

1. La première étape consiste à construire dans le cas où la fonction F est holomorphe au voisinage de l'origine (respectivement entière) des fonctions confluentes (respectivement fonctions confluentes résurgentes) solutions de (2) à support singulier la courbe algébrique $\mathcal{C} = \{(z, \xi), 9\xi^2 = 4z^3\}$. Cette construction repose essentiellement sur deux ingrédients : une quantification de la transformation canonique associée à l'opérateur principal intervenant dans l'équation (2), puis la résolution d'une EDP singulière.
2. La deuxième étape consiste alors à démontrer l'existence d'une famille de solutions BKW élémentaires qui peuvent être vues comme la décomposition locale (respectivement décomposition) dans des germes de secteurs de Stokes (respectivement secteurs de Stokes) convenables des fonctions confluentes (respectivement fonctions confluentes résurgentes) précédemment construites.

La section 5 est consacrée aux applications des résultats obtenus en section 4. Un premier paragraphe établit l'existence d'un théorème local résurgent de réduction tandis qu'un deuxième paragraphe est consacré à l'analyse BKW de l'équation de Schrödinger (1) induite par celle de notre équation principale (2). Un dernier paragraphe expose quelques extensions possibles de nos résultats.

Enfin, la section 6 expose quelques pistes de recherche découlant naturellement de notre analyse.

Nous terminons par un appendice qui expose brièvement quelques notions fondamentales utilisées dans ce papier.

1.3 Convention

Dans l'analyse BKW exacte, tous les principaux objets ((pré)sommation de Borel, secteurs de Stokes, etc. . .) sont relatifs à une direction donnée α , qui peut être vue comme un argument.

Dans tout ce qui va suivre, sauf mention contraire, nous supposons que $\alpha = 0$, de sorte que $\Re(\varepsilon) > 0$ (et $|\varepsilon|$ assez petit).

2 Cas de l'équation d'Airy

Nous nous concentrons ici sur l'équation d'Airy :

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{s}{\varepsilon^2} y, \quad (4)$$

c'est-à-dire sur l'équation (2) lorsque $F = 0$.

Comme nous l'avons dit, cette équation va nous servir de référence pour l'analyse BKW de l'équation (2), du fait que l'opérateur principal intervenant dans (2) est précisément celui d'Airy.

Nous rappelons ici les principaux résultats connus concernant l'analyse BKW de l'équation d'Airy.

2.1 Aspect formel : le symbole BKW d'Airy

Nous commençons par introduire une solution BKW formelle "bien normalisée" associée à l'équation d'Airy :

Définition 2.1. La solution BKW élémentaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{bkw}(z, \varepsilon) = \frac{e^{-\frac{2}{3} \frac{z^{3/2}}{\varepsilon}}}{z^{1/4}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(z) \varepsilon^n \right) \\ \alpha_n(z) = \left(-\frac{3}{4} \right)^n \frac{\Gamma(n + \frac{1}{6}) \Gamma(n + \frac{5}{6})}{2\pi \Gamma(n + 1)} z^{-\frac{3n}{2}} \quad n \geq 1. \end{array} \right. \quad (5)$$

sera appelée le *symbole BKW d'Airy*.

Le symbole BKW d'Airy satisfait les propriétés fondamentales de résurgence et de sommabilité (de Borel) suivantes :

Proposition 2.2. *Le symbole BKW d'Airy est résurgent sommable de Borel en ε^{-1} , à dépendance régulière en $z \neq 0$.*

2.2 Etude du phénomène de Stokes associé

Pour cette étude, nous renvoyons à [22, 10, 11, 12] pour plus de détails. Rappelons ici que nous avons fait le choix de prendre la direction $\alpha = 0$

comme direction de sommation de Borel.

Les lignes de Stokes et les secteurs de Stokes sont alors ceux dessinés sur la figure 1.a.

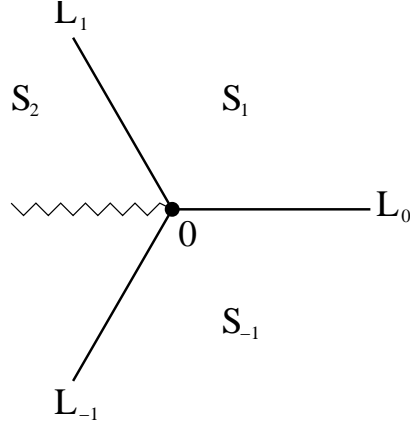


Fig. 1.a

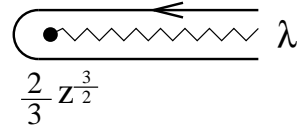


Fig. 1.b

FIG. 1 – Fig. 1.a : L_0 , L_1 et L_{-1} sont les lignes de Stokes (dans le z -plan) associées à la direction $\alpha = 0$. Les trois secteurs de Stokes sont les secteurs ouverts connexes bornés par les lignes de Stokes (en oubliant la ligne ondulée). Fig. 1.b : Le contour d'intégration dans le ξ -plan. Les lignes ondulées sont des coupures.

Tant que z reste dans l'un des secteurs de Stokes, le symbole BKW d'Airy est sommable de Borel. Par exemple, fixons les conventions suivantes :

Convention : en dessinant une coupure comme sur la Fig. 1.a, nous fixons la détermination de $z^{3/2}$ (resp. $z^{1/4}$) de sorte que $z^{3/2}$ (resp. $z^{1/4}$) est réel positif le long de L_0 . Nous notons $A_{bkw}^+(z, \varepsilon)$ la détermination de $A_{bkw}(z, \varepsilon)$ ainsi définie, et $A_{bkw}^-(z, \varepsilon) := A_{bkw}^+(z, -\varepsilon)$.

Notation : nous avons vu dans la proposition 2.2 que le symbole BKW d'Airy A_{bkw}^+ est sommable de Borel.

Nous noterons par :

$$\mathcal{A}(z, \varepsilon) = s_0(A_{bkw}^+)(z, \varepsilon) \quad (6)$$

sa somme de Borel.

Rappelons que cette dernière est holomorphe en (z, ε) , $\Re(\varepsilon) > 0$ et $z \in S_1$ (resp. S_{-1}) et s'étend analytiquement en une fonction entière en z . En particulier, $\mathcal{A}(z, \varepsilon) = 2\sqrt{\pi}\varepsilon^{-1/6} \text{Airy}(z\varepsilon^{-2/3})$, où *Airy* est la fonction d'Airy.

Historiquement, c'est par l'intermédiaire de l'équation d'Airy que Stokes découvrit le phénomène qui porte aujourd'hui son nom (voir son article fondateur de 1857 [33]).

Il y a plusieurs façons de décrire le phénomène de Stokes : le point de vue adopté ici est de décrire ce phénomène comme une rupture dans la décomposition de la fonction $\mathcal{A}(z, \varepsilon)$ lors de la traversée d'une ligne de Stokes. Cette rupture est due à la présence de singularités pour le mineur associé à $\mathcal{A}(z, \varepsilon)$.

Précisons les choses.

La sommabilité de Borel induit une correspondance bijective entre un développement formel et sa somme de Borel de sorte que nous pouvons associer à \mathcal{A} sa *décomposition* A_{bkw}^+ pour $z \in S_1$ (*resp.* S_{-1}) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z, \varepsilon) &\xrightarrow{\sigma_{S_1}} A_{bkw}^+(z, \varepsilon). \\ \left(\text{resp. } \mathcal{A}(z, \varepsilon) &\xrightarrow{\sigma_{S_{-1}}} A_{bkw}^+(z, \varepsilon). \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Le fait que la décomposition de $\mathcal{A}(z, \varepsilon)$ dans S_1 et S_{-1} est donnée par le même développement formel, ou autrement dit, que la sommation de Borel et prolongement analytique en z commutent encore lorsque l'on franchit la ligne de Stokes L_0 , est dû au fait que le symbole BKW d'Airy A_{bkw}^+ est *récessif le long de L_0* (avec la détermination précédemment choisie pour $z^{3/2}$).

En revanche, ce n'est plus vrai lorsque, venant de S_1 (*resp.* S_{-1}) l'on traverse la ligne de Stokes L_1 (*resp.* L_{-1}) : pour z sur ces lignes, un phénomène de Stokes apparaît, et ce dernier est complètement décrit par l'action de la dérivation étrangère suivante :

$$\dot{\Delta}_{-\frac{4}{3}z^{3/2}} A_{bkw}^+(z, \varepsilon) = \ell A_{bkw}^+(z, \varepsilon) = -i A_{bkw}^-(z, \varepsilon) \quad (8)$$

où ℓ est le prolongement analytique en z autour de 0 dans le sens trigonométrique. Cela signifie que la décomposition de \mathcal{A} pour $z \in S_2$ (disons) devient :

$$\mathcal{A}(z, \varepsilon) \xrightarrow{\sigma_{S_2}} A_{bkw}^+(z, \varepsilon) - \ell A_{bkw}^+(z, \varepsilon) = A_{bkw}^+(z, \varepsilon) + i A_{bkw}^-(z, \varepsilon) \quad (9)$$

De même, pour $z \in L_0$, nous avons :

$$\dot{\Delta}_{+\frac{4}{3}z^{3/2}} A_{bkw}^-(z, \varepsilon) = \ell A_{bkw}^-(z, \varepsilon) = -i A_{bkw}^+(z, \varepsilon). \quad (10)$$

La présence de ces deux singularités (mobiles avec z) pour le mineur associé à $\mathcal{A}(z, \varepsilon)$ se traduit également naturellement en termes de lieu singulier d'un majeur.

En effet, la somme de Borel de A_{bkw} pour $z \in S_1$ (disons) peut être définie comme une intégrale,

$$s_0(A_{bkw})(z, \varepsilon) = \int_{\lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\xi} A_{bkw}^{\vee}(z, \xi) d\xi. \quad (11)$$

où $A_{bkw}^\vee(z, \xi)$ est un majeur associé au symbole BKW d'Airy. Ce majeur est holomorphe sur le revêtement universel de $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$, où le support singulier \mathcal{C} est la courbe algébrique $\mathcal{C} = \{(z, \xi), 9\xi^2 = 4z^3\}$. Le contour d'intégration λ est dessiné sur la figure 1.b pour $z \in S_1$, et sa déformation pour $z \in S_2$ après la traversée de la ligne de Stokes L_1 est dessinée sur la figure 2.

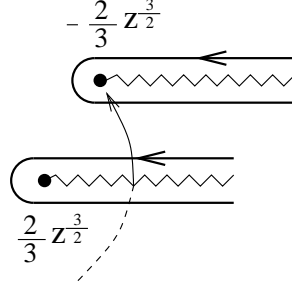


FIG. 2 – Effet du phénomène de Stokes décrit par (8) en termes de la déformation du contour d'intégration pour la somme de Borel (11).

Notons pour terminer que la représentation intégrale (11) ci-dessus peut être déduite de la représentation usuelle pour la fonction d'Airy, plus précisément (à un facteur de normalisation près) :

$$\int e^{-\frac{1}{\varepsilon}S(z, \hat{z})} d\hat{z} \quad \text{où} \quad S(z, \hat{z}) = z\hat{z} - \frac{1}{3}\hat{z}^3. \quad (12)$$

Notre analyse dans la section 4 sera basée sur une extension de cette représentation intégrale.

3 Analyse BKW formelle dans le cas général

Nous nous focalisons maintenant sur l'équation :

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \frac{z}{\varepsilon^2}\Phi = F(z)\Phi, \quad (13)$$

en supposant désormais que F est une fonction analytique au voisinage de l'origine quelconque.

Nous nous intéressons tout d'abord au problème de l'existence de solutions BKW formelles de l'équation (2) (de manière analogue à la section 2).

3.1 Existence de solutions BKW formelles

Etant donné que l'opérateur principal apparaissant dans l'équation (2) est celui d'Airy, il est naturel de rechercher des solutions BKW formelles de la même forme que celle du symbole BKW d'Airy.

Ceci nous conduit à la proposition suivante (dont la démonstration est immédiate) :

Proposition 3.1. *Il existe des solutions BKW formelles de l'équation (2) de la forme :*

$$\Phi_{bkw}(z, \varepsilon) = \frac{e^{-\frac{2}{3} \frac{z^{3/2}}{\varepsilon}}}{z^{\frac{1}{4}}} (1 + g_1(z)\varepsilon^1 + g_2(z)\varepsilon^2 + \dots). \quad (14)$$

Dans ce cas, les fonctions g_n vérifient les équations (différentielles) de transport suivantes :

$$\begin{cases} 32z^{5/2} \frac{dg_1}{dz} + 16z^2 F(z) - 5 = 0 \\ 32z^{5/2} \frac{dg_{n+1}}{dz} - 16z^2 \frac{d^2 g_n}{dz^2} + 8z \frac{dg_n}{dz} + (16z^2 F(z) - 5) g_n = 0, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Bien évidemment, le développement (14), qui est multivalué en z , dépend du choix de la détermination pour $z^{3/2}$ (de même que pour $z^{\frac{1}{4}}$).

Puisque l'équation (13) est invariante sous l'action de $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$, nous en déduisons que

$$\Phi_{bkw}(z, -\varepsilon) \quad (16)$$

est une autre solution BKW formelle, et que de plus $\{\Phi_{bkw}(z, \varepsilon), \Phi_{bkw}(z, -\varepsilon)\}$ définit une base de solutions BKW formelles pour l'équation (13).

3.2 Solutions BKW élémentaires

Nous voudrions obtenir une normalisation analogue à celle adoptée pour le symbole BKW d'Airy.

Pour cela, il est intéressant d'utiliser une autre représentation de ces développements BKW. En écrivant $\Phi_{bkw}(z, \varepsilon)$ sous la forme

$$\Phi_{bkw}(z, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int^z P(t, \varepsilon) dt\right), \quad (17)$$

l'équation (13) devient :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{dP}{dz} + \frac{1}{\varepsilon^2} (z - P^2) + F(z) = 0. \quad (18)$$

Cela signifie que si

$$P(z, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} p_n(z) \varepsilon^n \quad (19)$$

alors :

$$\begin{cases} p_0^2 = z \\ 2p_0p_1 = \frac{dp_0}{dz} \\ 2p_0p_2 = \frac{dp_1}{dz} - p_1^2 + F(z) \\ 2p_0p_{n+1} = \frac{dp_n}{dz} - \sum_{1 \leq j \leq n} p_j p_{n+1-j}, \quad n \geq 2. \end{cases} \quad (20)$$

Nous montrons facilement par récurrence que :

$$\begin{cases} p_0(z) = z^{\frac{1}{2}} \\ p_1(z) = \frac{1}{4z} \\ p_n(z) \in z^{-\frac{3n-1}{2}} \mathbb{C}\{z\}, \quad n \geq 2. \end{cases} \quad (21)$$

En introduisant la décomposition $P = P_{pair} + P_{impair}$,
$$\begin{cases} P_{pair} = \sum_{k \geq 0} p_{2k} \varepsilon^{2k} \\ P_{impair} = \sum_{k \geq 0} p_{2k+1} \varepsilon^{2k+1} \end{cases},$$

nous déduisons de (18) que $P_{impair} = \frac{\varepsilon P'_{pair}}{2 P_{pair}}$ où $P'_{pair} = \frac{dP_{pair}}{dz}$. Par conséquent, nous avons la représentation :

$$\Phi_{bkw}(z, \varepsilon) = \frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{P_{pair}(t, \varepsilon)}} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int^z P_{pair}(t, \varepsilon) dt\right), \quad \text{avec } C(\varepsilon) \in \mathbb{C}[[\varepsilon]]. \quad (22)$$

Proposition 3.2. *Les solutions BKW formelles (14) de (13) peuvent être normalisées de telle manière que pour tout $n \geq 0$, $g_n(z) \in z^{-\frac{3n}{2}} \mathbb{C}\{z\}$.*

Démonstration. Pour $n = 1$, nous déduisons de (15) que $g_1(z) = h_1(z) + Cste$, où $h_1(z) \in z^{-\frac{3}{2}} \mathbb{C}\{z\}$ tandis que $Cste$ est un nombre complexe quelconque. En choisissant $Cste = 0$, cela fournit le résultat.

Maintenant, pour un $n \geq 1$ fixé, nous supposons que $g_n(z) \in z^{-\frac{3n}{2}} \mathbb{C}\{z\}$. De (15) nous tirons :

$$g_{n+1}(z) = -\frac{1}{32} \int H_n(z) dz,$$

où

$$H_n(z) = \frac{-16z^2 g_n''(z) + 8z g_n'(z) + (16z^2 F(z) - 5) g_n(z)}{z^{5/2}} \in z^{-\frac{3n+5}{2}} \mathbb{C}\{z\}.$$

Si n est pair, nous obtenons que $g_{n+1}(z) = h_{n+1}(z) + Cste$, où $h_{n+1}(z) \in z^{-\frac{3n+3}{2}} \mathbb{C}\{z\}$. En choisissant $Cste = 0$ pour la constante d'intégration, cela donne le résultat. Si n est impair, un $\ln(z)$ pourrait *a priori* apparaître par intégration, mais cela serait en contradiction avec la représentation équivalente (22) et la propriété (21). \square

Définition 3.3. Les solutions BKW formelles décrites dans la proposition 3.2 seront appelées les *solutions BKW élémentaires de l'équation (13)*.

4 Résurgence des solutions BKW élémentaires

4.1 Construction de fonctions confluentes

Nous revenons maintenant aux solutions BKW élémentaires décrites dans la proposition 3.2. Nous voudrions "réaliser" le théorème de Borel-Ritt, c'est-à-dire construire des fonctions analytiques dont l'asymptotique est gouvernée par (au moins une famille de) ces symboles BKW élémentaires.

Le point de vue est donc ici "inverse" par rapport au cas d'Airy : nous ne partons pas d'objets formels pour en déduire des fonctions analytiques par (pré)sommation mais au contraire nous voulons partir de fonctions confluentes (respectivement confluentes résurgentes) et déduire nos objets formels (plus précisément une famille de symboles BKW élémentaires) par décomposition dans des germes de secteurs de Stokes (respectivement secteurs de Stokes) convenables. Ce point de vue "inverse" est en effet souvent plus commode lorsque l'on manipule des objets dépendant analytiquement d'un paramètre (typiquement lorsqu'on étudie la résurgence paramétrique d'objets formels).

4.1.1 Représentation de type Laplace

Puisque le symbole principal $p^2 - z$ de l'opérateur définissant l'équation (13) est simplement l'opérateur d'Airy, en nous inspirant des deux différentes représentations de la somme de Borel du symbole BKW d'Airy, nous pouvons rechercher de telles solutions analytiques sous deux formes :

1. Une première piste est de partir de la représentation (12) ci-dessus, en pensant $S(z, \widehat{z}) = z\widehat{z} - \frac{1}{3}\widehat{z}^3$ comme une fonction génératrice de la transformation canonique $(p, z) \leftrightarrow (\widehat{p}, \widehat{z})$ dans l'espace cotangent, dont l'effet est de redresser la sous-variété Lagrangienne $\widehat{p} = p^2 - z = 0$. Cette piste de recherche nous amène à considérer, comme dans [25], la quantification de la transformation canonique, i.e rechercher des solutions de la forme :

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int e^{-\frac{1}{\varepsilon}S(z, \widehat{z})} \widetilde{\varphi}(\widehat{z}, \varepsilon) d\widehat{z}. \quad (23)$$

2. Une seconde piste est de rechercher des solutions de (13) définies comme somme de Borel, i.e :

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int e^{-\frac{1}{\varepsilon}\xi} \check{\Phi}(z, \xi) d\xi, \quad (24)$$

où $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ doit être un majeur d'une microfonction confluente convenable (au sens développé dans l'appendice A). Ce que nous entendons par "convenable" est la chose suivante : dans la représentation intégrale (24), en dérivant sous le signe somme et en intégrant formellement par parties, nous traduisons le fait que Φ est solution de (13) par le fait de demander à $\overset{\vee}{\Phi}$ de satisfaire l'équation :

$$\frac{\partial^2 \overset{\vee}{\Phi}}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \overset{\vee}{\Phi}}{\partial \xi^2} = F(z) \overset{\vee}{\Phi}. \quad (25)$$

Au lieu de rechercher directement des solutions pour l'EDP (25), nous allons combiner les deux idées précédentes liées aux représentations intégrales (23) et (24).

En faisant dans (24) le changement de variable $\xi \leftrightarrow \widehat{z}$ défini par $\xi = S(z, \widehat{z})$, nous obtenons la représentation intégrale :

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{\varepsilon} S(z, \widehat{z})} \Psi(z, \widehat{z}) d\widehat{z}, \quad \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi) \Big|_{\xi = S(z, \widehat{z})} = \frac{\Psi(z, \widehat{z})}{z - \widehat{z}^2}, \quad (26)$$

où le chemin d'intégration γ est, pour l'instant, vu comme un chemin sans fin, allant à l'infini dans les zones où $\Re(\frac{1}{\varepsilon} S(z, \widehat{z})) \rightarrow +\infty$.

En posant $\widetilde{\Psi}(z, \widehat{z}) = \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$, nous déduisons facilement de (25) que $\widetilde{\Psi}$ doit être solution de l'EDP linéaire suivante :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\Psi}}{\partial z^2} - \frac{2\widehat{z}}{z - \widehat{z}^2} \frac{\partial^2 \widetilde{\Psi}}{\partial z \partial \widehat{z}} - \frac{1}{z - \widehat{z}^2} \frac{\partial^2 \widetilde{\Psi}}{\partial \widehat{z}^2} = F(z) \widetilde{\Psi}. \quad (27)$$

4.1.2 Résolution de l'EDP singulière associée

Deux exemples

– Lorsque $F(z) = \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, nous montrons facilement que

$$\widetilde{\Psi}(z, \widehat{z}) = \frac{e^{\pm \lambda(z - \widehat{z}^2)}}{z - \widehat{z}^2} \quad (28)$$

sont solutions particulières de (27). En choisissant dans (26) des contours d'intégration convenables γ , nous obtenons ainsi une base de solutions résurgentes de (13) de la forme :

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{\varepsilon} S(z, \widehat{z})} \Psi(z, \widehat{z}) d\widehat{z}, \quad \Psi(z, \widehat{z}) = e^{\pm \lambda(z - \widehat{z}^2)}. \quad (29)$$

– Lorsque $F(z) = \lambda^2 z$, $\lambda \in \mathbb{C}$, des solutions particulières de (27) sont données par

$$\widetilde{\Psi}(z, \widehat{z}) = \frac{e^{\pm \frac{1}{3} \lambda(z - \widehat{z}^2) \sqrt{4z - \widehat{z}^2}}}{z - \widehat{z}^2}, \quad (30)$$

qui, par linéarité, fournissent des solutions de (13) de la forme :

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{\varepsilon} S(z, \widehat{z})} \Psi(z, \widehat{z}) d\widehat{z}, \quad \Psi(z, \widehat{z}) = \cosh \left(\frac{1}{3} \lambda(z - \widehat{z}^2) \sqrt{4z - \widehat{z}^2} \right). \quad (31)$$

Notons que $\Psi(z, \widehat{z})$ est holomorphe pour $(z, \widehat{z}) \in \mathbb{C}^2$, et que cette intégrale converge pour $|\varepsilon|$ assez petit (pour un choix convenable de γ).

Résolution dans le cas général Dans la représentation intégrale (26), ayant en tête la méthode du col, nous demandons à la fonction $\Psi(z, \widehat{z})$ d'être holomorphe au voisinage du lieu $\frac{\partial S(z, \widehat{z})}{\partial \widehat{z}} = 0$ définissant les points cols. Puisque $\frac{\partial S(z, \widehat{z})}{\partial \widehat{z}} = z - \widehat{z}^2$, nous introduisons la transformation :

$$\begin{cases} (z, \widehat{z}) \leftrightarrow (z, x = z - \widehat{z}^2) \\ \psi(z, x) := \Psi(z, \widehat{z}) = \widetilde{\Psi}(z, \widehat{z})(z - \widehat{z}^2). \end{cases} \quad (32)$$

Par cette transformation, l'équation (27) se traduit pour ψ en l'équation suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (4xz - 2x^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (2x - 4z) \frac{\partial \psi}{\partial z} - x^2 F(z) \psi = 0. \quad (33)$$

Nous allons maintenant rechercher des solutions holomorphes de l'équation (33) pour x au voisinage de zéro (et z proche de 0 également).

Etant donné que dans l'équation (33), $x = 0$ est un point singulier, le résultat est non trivial car il ne peut découler simplement du théorème de Cauchy-Kovalevska.

Nous allons d'abord commencer par regarder l'existence de solutions formelles pour (33) de la forme

$$\psi(z, x) = \sum_{n \geq 0} a_n(z) x^n. \quad (34)$$

Lemme 4.1. *Soit $h(z)$ une fonction holomorphe au voisinage de l'origine. Alors il existe un unique développement formel $\psi(z, x) = \sum_{n \geq 0} a_n(z) x^n$ solution de (33) tel que les $a_n(z)$ soient des fonctions holomorphes au voisinage de $z = 0$, avec*

$$\begin{cases} a_0(z) = 1 \\ a_1(z) = h(z). \end{cases} \quad (35)$$

Dans ce cas, nous avons de plus, pour $n \geq 2$:

$$a_n(z) = \frac{1}{n-1} \int_0^1 u^{n-1} \left(-a''_{n-2}(u^4 z) + 2(n-2)a'_{n-1}(u^4 z) + F(u^4 z)a_{n-2}(u^4 z) \right) du \quad (36)$$

Démonstration. En remplaçant $\psi(z, x)$ par (34) dans l'équation (33), et en identifiant les puissances de x , nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial a_0}{\partial z} = 0 \\ 4z \frac{\partial a_n}{\partial z} + na_n = \frac{1}{n-1} \left(-\frac{\partial^2 a_{n-2}}{\partial z^2} + 2(n-2) \frac{\partial a_{n-1}}{\partial z} + F(z)a_{n-2} \right), \quad \text{pour } n \geq 2. \end{cases} \quad (37)$$

Il suffit alors d'intégrer l'équation (37) en tenant compte du fait que les a_n doivent être holomorphes au voisinage de $z = 0$. \square

Nous avons démontré au lemme 4.1 l'existence d'une famille de solutions formelles de (33).

A notre connaissance, les théories classiques (voir [19, 23]) pour analyser la convergence de ces solutions formelles de l'EDP singulière (33) ne s'appliquent pas dans notre cas.

Afin de montrer la convergence, nous allons utiliser le résultat suivant :

Lemme 4.2. *La série formelle donnée au lemme 4.1 représente la série de Taylor d'une fonction holomorphe $\psi(z, x)$ au voisinage de $(z, x) = (0, 0)$ si et seulement si $\varphi(z, x) := \frac{\psi(z, x)}{x} - \frac{1}{x}$ satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} \varphi(z, x) = & h(z) + \int_0^1 du \int_0^{ux} dt F(zu^4) + 2x \int_0^1 u \partial_1 \varphi(zu^4, ux) du \\ & - \int_0^1 du \int_0^{ux} dt \left(t \partial_1^2 \varphi(zu^4, t) + 2 \partial_1 \varphi(zu^4, t) - t F(zu^4) \varphi(zu^4, t) \right), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{où } \partial_1^2 \varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \text{ et } \partial_1 \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Démonstration. Nous considérons la série $\psi(z, x) = \sum_{n \geq 0} a_n(z)x^n$ donnée par

le lemme 4.1, en supposant la convergence.

Comme $\int_0^x x_1^{n-2} dx_1 = \frac{x^{n-1}}{n-1}$, nous pouvons écrire, pour $u \in [0, 1]$ et (z, x)

dans un voisinage de l'origine,

$$\begin{aligned}
-\sum_{n \geq 2} \frac{u^{n-1}}{n-1} a''_{n-2}(zu^4) x^n &= -x \sum_{n \geq 2} u^{n-1} a''_{n-2}(zu^4) \int_0^x x_1^{n-2} dx_1 \\
&= -xu \int_0^x \sum_{n \geq 2} a''_{n-2}(zu^4) (ux_1)^{n-2} dx_1 \\
&= -xu \int_0^x \sum_{n \geq 0} a''_n(zu^4) (ux_1)^n dx_1 \\
&= -xu \int_0^x \partial_1^2 \psi(zu^4, ux_1) dx_1 \\
&= -x \int_0^{ux} \partial_1^2 \psi(zu^4, t) dt,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé $a_0(z) = 1$ (voir (35)). Par conséquent,

$$\sum_{n \geq 2} \left(\int_0^1 \left(\frac{u^{n-1}}{n-1} - a''_{n-2}(zu^4) \right) du \right) x^n = -x \int_0^1 du \int_0^{ux} \partial_1^2 \psi(zu^4, t) dt. \tag{39}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 2} \frac{u^{n-1}}{n-1} F(zu^4) a_{n-2}(zu^4) x^n &= x \sum_{n \geq 2} u^{n-1} F(zu^4) a_{n-2}(zu^4) \int_0^x x_1^{n-2} dx_1 \\
&= ux \int_0^x \sum_{n \geq 2} F(zu^4) a_{n-2}(zu^4) (ux_1)^{n-2} dx_1 \\
&= ux \int_0^x \sum_{n \geq 0} F(zu^4) a_n(zu^4) (ux_1)^n dx_1 \\
&= ux \int_0^x F(zu^4) \psi(zu^4, ux_1) dx_1 \\
&= x \int_0^{ux} F(zu^4) \psi(zu^4, t) dt,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\sum_{n \geq 2} \left(\int_0^1 \left(\frac{u^{n-1}}{n-1} F(zu^4) a_{n-2}(zu^4) \right) du \right) x^n = x \int_0^1 du \int_0^{ux} F(zu^4) \psi(zu^4, t) dt. \tag{40}$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 2} 2(n-2) \frac{u^{n-1}}{n-1} a'_{n-1}(zu^4) x^n &= \sum_{n \geq 2} 2u^{n-1} a'_{n-1}(zu^4) x^n - 2x \sum_{n \geq 2} a'_{n-1}(zu^4) u^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n-1} \\
&= 2x \sum_{n \geq 0} a'_n(zu^4) (ux)^n - 2x \sum_{n \geq 2} u^{n-1} a'_{n-1}(zu^4) \int_0^x x_1^{n-2} dx_1 \\
&= 2x \partial_1 \psi(zu^4, ux) - 2x \int_0^x \sum_{n \geq 2} a'_{n-1}(zu^4) (ux_1)^{n-1} \frac{dx_1}{x_1}
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 2} 2(n-2) \frac{u^{n-1}}{n-1} a'_{n-1}(zu^4) x^n &= 2x \partial_1 \psi(zu^4, ux) - 2x \int_0^x \sum_{n \geq 0} a'_n(zu^4) (ux_1)^n \frac{dx_1}{x_1} \\
&= 2x \partial_1 \psi(zu^4, ux) - 2x \int_0^x \partial_1 \psi(zu^4, ux_1) \frac{dx_1}{x_1} \\
&= 2x \partial_1 \psi(zu^4, ux) - 2x \int_0^{ux} \partial_1 \psi(zu^4, t) \frac{dt}{t},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé $a_0(z) = 1$ (voir (35)). Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \geq 2} \left(\int_0^1 \left(\frac{u^{n-1}}{n-1} 2(n-2) a'_{n-1}(zu^4) \right) du \right) x^n \\
&= 2x \int_0^1 \partial_1 \psi(zu^4, ux) du - 2x \int_0^1 \int_0^{ux} \partial_1 \psi(zu^4, t) \frac{dt}{t} du. \quad (41)
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant (35) et (36), nous déduisons de (39), (40) et (41) que :

$$\begin{aligned}
\psi(z, x) &= 1 + h(z)x + \sum_{n \geq 2} a_n(z) x^n \\
&= 1 + h(z)x - x \int_0^1 du \int_0^{ux} \partial_1^2 \psi(zu^4, t) dt + x \int_0^1 du \int_0^{ux} F(zu^4) \psi(zu^4, t) dt \\
&\quad + 2x \int_0^1 \partial_1 \psi(zu^4, ux) du - 2x \int_0^1 du \int_0^{ux} \partial_1 \psi(zu^4, t) \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

En se rappelant que $\varphi(z, x) := \frac{\psi(z, x)}{x} - \frac{1}{x}$, cela nous donne (38). \square

Le lemme 4.2 va nous permettre de prouver la convergence des développements formels définis dans le lemme 4.1. A cet effet, introduisons une définition.

Définition 4.3. Si W est un ouvert borné de \mathbb{C}^n , $n \geq 1$, et E espace de Banach, nous notons par $H(\overline{W}, E)$ l'espace des fonctions $f : Z \mapsto f(Z) \in E$ qui sont continues pour $Z \in \overline{W}$ et holomorphes dans W .

Nous rappelons le résultat classique suivant :

Proposition 4.4. Soit W un ouvert borné de \mathbb{C}^n , $n \geq 1$, et E un espace de Banach. Nous munissons l'espace $H(\overline{W}, E)$ de la norme du maximum :

$$\|f\|_W = \sup_{Z \in W} |f(Z)|.$$

Alors $(H(\overline{W}, E), \|\cdot\|_W)$ est un espace de Banach.

Dans toute la suite, $D(0, l) \subset \mathbb{C}$ désigne le disque ouvert centré en 0 de rayon $l > 0$.

Théorème 4.5. Soit $R > 0$, $r_1 > 0$ et r_0 tel que $0 < r_0 < r_1$. Notons $d_0 = r_1 - r_0$.

Supposons que $F \in H(\overline{D(0, r_1)}, \mathbb{C})$ et $h \in H(\overline{D(0, r_1)}, \mathbb{C})$. Posons $r' = \min \left\{ \frac{3r_1}{2e} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4r_0 d_0}{9er_1^2}} \right), R \right\}$.

Alors, il existe une unique fonction holomorphe $\psi(z, x)$ au voisinage de $(0, 0)$ solution de l'équation (33), et satisfaisant les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \psi(z, 0) = 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(z, 0) = h(z). \end{cases} \quad (42)$$

De plus, $\psi(z, x)$ s'étend analytiquement sur $D(0, r_1) \times D(0, r')$.

Démonstration. La preuve est inspirée plus ou moins de techniques standards (voir, par exemple, [34], §17).

1. Pour $0 \leq s \leq 1$ nous notons $U_s := D(0, r_s)$ avec $r_s := r_0 + s d_0$.
2. Pour $u \in [0, 1]$ et $x \in \overline{D(0, R)}$ nous introduisons les fonctions $T : (u, x) \mapsto T(u, x)$ et $L : (u, x) \mapsto L(u, x)$ définies par

$$\begin{cases} T(u, x) : \psi(z) \mapsto \partial^1 \psi(zu^4) \\ L(u, x) : \psi(z) \mapsto x \partial^2 \psi(zu^4) + 2T(u, x) \psi(z) - x F(zu^4) \psi(zu^4). \end{cases} \quad (43)$$

Nous voyons $T(u, x)$ et $L(u, x)$ comme des opérateurs linéaires agissant sur l'espace de Banach $H(\overline{U_s}, \mathbb{C})$ et à valeurs dans $H(\overline{U_{s'}}, \mathbb{C})$, $T(u, x), L(u, x) : H(\overline{U_s}, \mathbb{C}) \rightarrow H(\overline{U_{s'}}, \mathbb{C})$, où $0 \leq s' < s \leq 1$.

Par les formules de Cauchy,

$$\begin{cases} \partial^1 \psi(zu^4) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{\psi(t)}{(t - zu^4)^2} dt \\ \partial^2 \psi(zu^4) = \frac{2}{2i\pi} \oint \frac{\psi(t)}{(t - zu^4)^3} dt, \end{cases} \quad (44)$$

où nous intégrons dans le sens direct sur un cercle centré en zu^4 . Etant donné que $r_s - u^4 r_{s'} = (1 - u^4)r_0 + (s - u^4 s')d_0$, nous avons :

$$\begin{cases} \|\partial^1 \psi(u)\|_{u_{s'}} \leq \frac{\|\psi\|_{u_s}}{(1 - u^4)r_0 + (s - u^4 s')d_0} \\ \|\partial^2 \psi(u)\|_{u_{s'}} \leq \frac{2\|\psi\|_{u_s}}{((1 - u^4)r_0 + (s - u^4 s')d_0)^2}, \end{cases} \quad (45)$$

où $\partial^i \psi(u) : z \mapsto \partial^i \psi(zu^4)$, avec $i = 1, 2$. Par suite, pour tout $(u, x) \in [0, 1] \times \overline{D(0, R)}$, nous avons :

$$\begin{cases} \|T(u, x)\psi\|_{u_{s'}} \leq \frac{\|\psi\|_{u_s}}{(1 - u^4)r_0 + (s - u^4 s')d_0} \\ \|L(u, x)\psi\|_{u_{s'}} \leq \frac{2|x|\|\psi\|_{u_s}}{((1 - u^4)r_0 + (s - u^4 s')d_0)^2} + \frac{2\|\psi\|_{u_s}}{(1 - u^4)r_0 + (s - u^4 s')d_0} \\ \quad + |x|\|F\|_{D(0, r_1)}\|\psi\|_{u_s} \end{cases} \quad (46)$$

3. Introduisons maintenant :

$$\begin{cases} \theta_0(x) := z \mapsto h(z) + \int_0^1 du \int_0^{ux} F(zu^4) dt \\ \theta_{k+1}(x) = \theta_0(x) + 2x \int_0^1 uT(u, x)\theta_k(ux) du - \int_0^1 du \int_0^{ux} L(u, t)\theta_k(t) dt, \quad k \geq 0. \end{cases} \quad (47)$$

Evidemment (47) définit une suite $(\theta_k)_k$ de fonctions holomorphes en $x \in D(0, R)$, continues pour $x \in \overline{D(0, R)}$, à valeurs dans $H(\overline{U_s}, \mathbb{C})$, i.e pour tout $0 \leq s < 1$:

$$\forall k \geq 0, \theta_k \in H\left(\overline{D(0, R)}, H(\overline{U_s}, \mathbb{C})\right). \quad (48)$$

Posons également :

$$\begin{cases} \delta_0(x) := \theta_0(x) \\ \delta_{k+1}(x) := \theta_{k+1}(x) - \theta_k(x) \\ \quad = 2x \int_0^1 uT(u, x)\delta_k(ux) du - \int_0^1 du \int_0^{ux} L(u, t)\delta_k(t) dt, \quad k \geq 0. \end{cases} \quad (49)$$

Observons dans un premier temps que, pour tout $0 \leq s < 1$, et tout $x \in \overline{D(0, R)}$,

$$\|\delta_0(x)\|_{U_s} \leq M, \quad \text{avec } M = \|h\|_{D(0, r_1)} + \frac{R}{2}\|F\|_{D(0, r_1)}. \quad (50)$$

Nous allons alors montrer le lemme suivant

Lemme 4.6. *Pour tout $0 \leq s < 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \overline{D(0, R)}$,*

$$\|\delta_k(x)\|_{U_s} \leq M \left(\frac{e|x|(\alpha_k|x| + \beta)}{r_0 d_0 (1-s)} \right)^k, \quad (51)$$

avec $\alpha_k = 1 + \frac{r_0 d_0 (1-s) \|F\|_{D(0, r_1)}}{k}$ et $\beta = 3r_1$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur k .

Le cas $k = 0$ est donné par (50).

Supposons maintenant que (51) soit satisfaite pour un $k \in \mathbb{N}$ donné et pour tout $0 \leq s < 1$.

Pour tout $0 \leq s' < s < 1$, nous déduisons de (49) et (46) que :

$$\begin{aligned} \|\delta_{k+1}(x)\|_{U_{s'}} &\leq 2|x| \int_0^1 \frac{u \|\delta_k(ux)\|_{U_s}}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} du \\ &+ \int_0^1 du \int_0^{u|x|} \left(\frac{2t}{((1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0)^2} + \frac{2}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} \right. \\ &\quad \left. + t \|F\|_{D(0, r_1)} \right) \|\delta_k(t)\|_{U_s} dt. \end{aligned} \quad (52)$$

Par l'hypothèse de récurrence faite sur $\delta_k(x)$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= 2|x| \int_0^1 \frac{u \|\delta_k(ux)\|_{U_s}}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} du \\ &\leq \frac{2Me^k}{(r_0 d_0 (1-s))^k} \int_0^1 \frac{(u|x|)^{k+1} (\alpha_k u|x| + \beta)^k}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} du \\ &\leq \frac{2Me^k |x|^{k+1} (\alpha_k |x| + \beta)^k}{(r_0 d_0 (1-s))^k} \int_0^1 \frac{u^{k+1}}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} du. \end{aligned}$$

Or, nous avons la majoration suivante :

$$\int_0^1 \frac{u^{k+1}}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} du \leq \frac{1}{d_0(s-s')} \int_0^1 u^{k+1} du \leq \frac{1}{(k+1)d_0(s-s')}.$$

Par suite, nous en déduisons que :

$$I_1 \leq \frac{Me^k (\alpha_k |x| + \beta)^k |x|^{k+1}}{(k+1)(r_0 d_0 (1-s))^k} \left(\frac{2r_1}{r_0 d_0 (s-s')} \right). \quad (53)$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 du \int_0^{u|x|} \frac{2t \|\delta_k(t)\|_{U_s}}{((1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0)^2} dt \\
&\leq \frac{2Me^k(\alpha_k|x| + \beta)^k}{(r_0d_0(1-s))^k} \int_0^1 du \int_0^{u|x|} \frac{t^{k+1}}{((1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0)^2} dt \\
&\leq \frac{2Me^k|x|^{k+2}(\alpha_k|x| + \beta)^k}{(k+1)(r_0d_0(1-s))^k} \int_0^1 \frac{u^{k+1}}{((1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0)^2} du.
\end{aligned}$$

Or, nous avons la majoration suivante :

$$\int_0^1 \frac{u^{k+1}}{((1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0)^2} du \leq \int_0^1 \frac{u}{((1-u^2)r_0 + (s-u^2s')d_0)^2} du \leq \frac{1}{2r_0d_0(s-s')}.$$

Par suite, nous en déduisons que :

$$I_2 \leq \frac{Me^k(\alpha_k|x| + \beta)^k|x|^{k+2}}{(k+1)(r_0d_0(1-s))^k} \left(\frac{1}{r_0d_0(s-s')} \right). \quad (54)$$

Par ailleurs, nous avons également :

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2 \int_0^1 du \int_0^{u|x|} \frac{\|\delta_k(t)\|_{U_s}}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} dt \\
&\leq \frac{2Me^k(\alpha_k|x| + \beta)^k}{(r_0d_0(1-s))^k} \int_0^1 du \int_0^{u|x|} \frac{t^k}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} dt \\
&\leq \frac{2Me^k(\alpha_k|x| + \beta)^k|x|^{k+1}}{(k+1)(r_0d_0(1-s))^k} \int_0^1 \frac{u^{k+1}}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} du.
\end{aligned}$$

Or, nous avons les majorations suivantes :

$$\int_0^1 \frac{u^{k+1}}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} du \leq \int_0^1 \frac{u}{(1-u^2)r_0 + (s-u^2s')d_0} du,$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{u^{k+1}}{(1-u^4)r_0 + (s-u^4s')d_0} du \leq \frac{1}{2(r_0 + s'd_0)} \ln \left(\frac{r_0 + sd_0}{d_0(s-s')} \right) \leq \frac{r_1}{2r_0d_0(s-s')}.$$

Par suite, nous en déduisons que :

$$I_3 \leq \frac{Me^k(\alpha_k|x| + \beta)^k|x|^{k+1}}{(k+1)(r_0d_0(1-s))^k} \left(\frac{r_1}{r_0d_0(s-s')} \right). \quad (55)$$

Enfin, nous avons :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 du \int_0^{u|x|} t \|F\|_{D(0,r_1)} \|\delta_k(t)\|_{U_s} dt \\
&\leq \frac{Me^k(\alpha_k|x| + \beta)^k \|F\|_{D(0,r_1)}}{(r_0 d_0(1-s))^k} \int_0^1 du \int_0^{u|x|} t^{k+1} dt \\
&\leq \frac{Me^k|x|^{k+2}(\alpha_k|x| + \beta)^k \|F\|_{D(0,r_1)}}{(k+1)(r_0 d_0(1-s))^k}
\end{aligned}$$

d'où :

$$I_4 \leq \frac{Me^k(\alpha_k|x| + \beta)^k|x|^{k+2}}{(k+1)(r_0 d_0(1-s))^k} \left(\frac{r_0 d_0(s-s') \|F\|_{D(0,r_1)}}{r_0 d_0(s-s')} \right). \quad (56)$$

Au final, en utilisant les majorations (53), (54), (55) et (56), nous obtenons :

$$\|\delta_{k+1}\|_{U_{s'}} \leq \frac{Me^k(\alpha_k|x| + \beta)^k|x|^{k+1}}{(r_0 d_0(1-s))^k(k+1)} \left[(1+r_0 d_0(s-s') \|F\|_{D(0,r_1)})|x| + \beta \right] \frac{1}{r_0 d_0(s-s')}. \quad (57)$$

En choisissant dans (57) : $s = s' + \frac{1-s'}{k+1}$, i.e $1-s = \frac{k}{k+1}(1-s')$, nous obtenons :

$$\|\delta_{k+1}\|_{U_{s'}} \leq \frac{Me^k(\alpha_{k+1}|x| + \beta)^k|x|^{k+1}}{(r_0 d_0(1-s'))^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \frac{1}{r_0 d_0(1-s')}. \quad (58)$$

Mais, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(1 + \frac{1}{k})^k \leq e$, donc nous en déduisons finalement que :

$$\|\delta_{k+1}\|_{U_{s'}} \leq M \left[\frac{e|x|(\alpha_{k+1}|x| + \beta)}{r_0 d_0(1-s')} \right]^{k+1}, \quad (59)$$

ce qui achève la récurrence. \square

4. Remarquons alors que

$$(\alpha_k|x| + \beta)^k = (|x| + 3r_1)^k \left(1 + \frac{r_0 d_0(1-s) \|F\|_{D(0,r_1)} |x|}{(|x| + 3r_1)k} \right)^k.$$

Par suite, par le lemme 4.6, nous en déduisons que la série majorante de $\sum_{k \geq 0} \delta_k(x)$ converge dès que

$$\frac{e|x|(|x| + 3r_1)}{r_0 d_0(1-s)} < 1,$$

c'est-à-dire pour

$$0 \leq |x| \leq \frac{3r_1}{2e} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4r_0 d_0 (1-s)}{9er_1^2}} \right).$$

Par conséquent, la série $\sum_{k \geq 0} \delta_k(x)$ converge absolument dans $H(\overline{U_s}, \mathbb{C})$ (pour tout $0 \leq s < 1$) et uniformément en $x \in K$, où K est un compact quelconque du disque ouvert $|x| < \min \left\{ \frac{3r_1}{2e} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4r_0 d_0 (1-s)}{9er_1^2}} \right), R \right\}$.

Par construction, sa somme $\theta(x)$ satisfait l'équation :

$$\theta(x) = \theta_0(x) + \int_0^1 du \int_0^{ux} dt L(u, t) \theta(t), \quad (60)$$

de sorte que la fonction holomorphe $\varphi(z, x) := \theta(x)(z)$ est solution de l'équation intégrale (38). En spécialisant le résultat pour $s = 0$, nous obtenons le théorème par le lemme 4.2.

□

Nous déduisons facilement du théorème 4.5 le résultat suivant :

Corollaire 4.7. *Dans le théorème 4.5, si F et h sont des fonctions entières de z , alors $\psi(z, x)$ s'étend analytiquement à \mathbb{C}^2 .*

4.1.3 Construction explicite

Nous revenons maintenant à la fonction $\Psi(z, \widehat{z})$ associée à $\psi(z, x)$ par (32). Du lemme 4.1, du théorème 4.5 et de son corollaire 4.7, nous déduisons le résultat suivant :

Proposition 4.8. *Supposons que F et h soient des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine. Alors il existe une unique fonction holomorphe $\Psi(z, \widehat{z})$ au voisinage de $(0, 0)$ satisfaisant les conditions :*

$$\begin{cases} \Psi(z, \widehat{z})|_{z = \widehat{z}^2} = 1 \\ \left(-\frac{1}{2\widehat{z}} \frac{\partial \Psi}{\partial \widehat{z}}(z, \widehat{z}) \right) |_{z = \widehat{z}^2} = h(z). \end{cases} \quad (61)$$

et telle que $\widetilde{\Psi}(z, \widehat{z}) := \frac{\Psi(z, \widehat{z})}{z - \widehat{z}^2}$ soit solution de l'EDP linéaire (27).

De plus, si F et h sont des fonctions entières, alors $\Psi(z, \widehat{z})$ s'étend analytiquement à \mathbb{C}^2 .

Par suite, nous avons facilement :

Proposition 4.9. *Supposons que F et h soient des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine. Alors la fonction $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ définie par :*

$$\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)|_{\xi = S(z, \widehat{z})} := \frac{\Psi(z, \widehat{z})}{z - \widehat{z}^2} \quad (62)$$

avec Ψ comme dans la proposition 4.8, est solution de (25) et est un majeur d'une microfonction confluente en $(0, 0)$ à support singulier la courbe algébrique $\mathcal{C} = \{(z, \xi), 9\xi^2 = 4z^3\}$ (cf. définition A.2).

Lorsque F et h sont des fonctions entières, alors $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ est un majeur d'une microfonction confluente résurgente en $(0, 0)$ à support singulier la courbe algébrique \mathcal{C} .

L'existence d'un tel majeur va nous permettre de construire in fine les fonctions confluentes recherchées en utilisant la représentation intégrale (26).

Proposition 4.10. *Considérons la représentation intégrale*

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{\varepsilon}S(z, \widehat{z})} \Psi(z, \widehat{z}) d\widehat{z} \quad (63)$$

avec Ψ comme dans la proposition 4.8 (ou d'une manière équivalente la représentation intégrale

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\lambda} e^{-\frac{\xi}{\varepsilon}} \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi) d\xi. \quad (64)$$

avec $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ comme dans la proposition 4.9).

Notons $\overline{\gamma}$ le chemin γ tronqué comme dans la figure 3 (et $\overline{\lambda}$ son image par la transformation $\widehat{z} \mapsto \xi = S(z, \widehat{z})$ pour la représentation (64)).

Alors, si F et h sont holomorphes au voisinage de l'origine (respectivement entières), alors les représentations intégrales

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\overline{\gamma}} e^{-\frac{1}{\varepsilon}S(z, \widehat{z})} \Psi(z, \widehat{z}) d\widehat{z}, \quad (65)$$

et

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\overline{\lambda}} e^{-\frac{\xi}{\varepsilon}} \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi) d\xi \quad (66)$$

représentent une fonction confluente $\Phi(z, \varepsilon)$ (respectivement une fonction confluente résurgente) à support singulier la courbe algébrique \mathcal{C} (au sens de la définition A.3).

Démonstration. 1. Dans le cas où F et h sont holomorphes au voisinage de l'origine, en suivant la proposition 4.8, nous savons que $\Psi(z, \widehat{z})$ est holomorphe dans un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^2 , disons pour $(z, \widehat{z}) \in D(0, \frac{r^2}{4}) \times D(0, r)$ avec $r > 0$ assez petit, où $D(0, r)$ désigne le

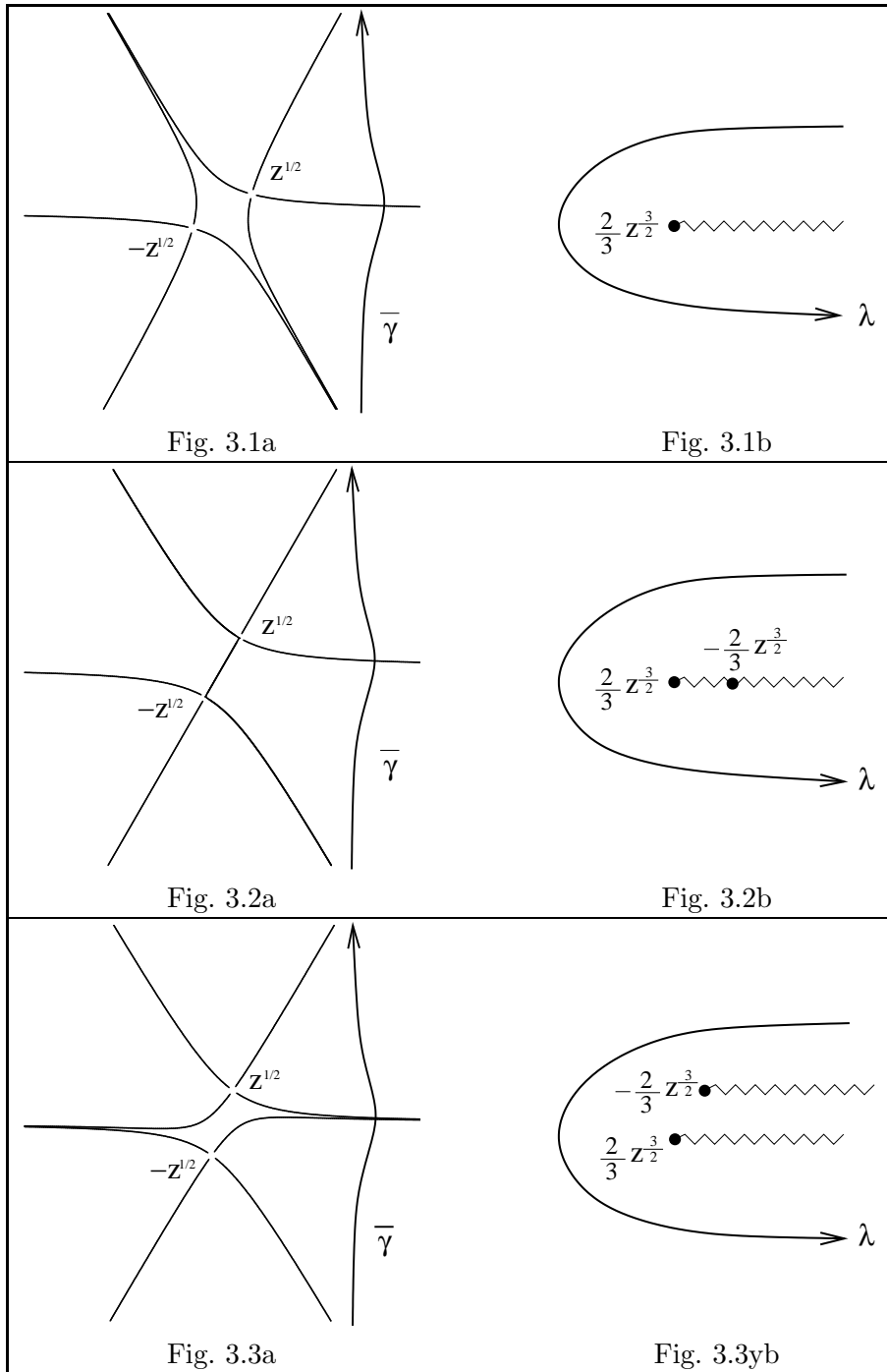


FIG. 3 – Sur les figures de gauche les chemins de plus grande pente et le chemin $\bar{\gamma}$, et sur les figures de droite son image $\bar{\lambda}$ par la transformation $\hat{z} \mapsto \xi = S(z, \hat{z})$ (les lignes ondulées sont coupées). Fig. 3.1 pour $z \in S_1$, Fig. 3.2 pour z sur L_1 , Fig. 3.3 pour $z \in S_2$ (voir figure 1).

disque ouvert de rayon r centré en 0. Par conséquent, l'intégrale (26) est bien définie pourvu que nous tronquions le chemin d'intégration γ qui est alors noté par $\overline{\gamma}$, comme sur la figure 3.

Alors, dans la représentation intégrale

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\overline{\gamma}} e^{-\frac{1}{\varepsilon} S(z, \widehat{z})} \Psi(z, \widehat{z}) d\widehat{z}, \quad (67)$$

en faisant le changement de variable $\xi = S(z, \widehat{z})$, nous avons l'intégrale correspondante, où le chemin $\overline{\lambda}$ est dessiné sur la figure 3.

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\overline{\lambda}} e^{-\frac{\xi}{\varepsilon}} \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi) d\xi. \quad (68)$$

Une conséquence de la proposition 4.9 est que l'intégrale de Laplace (68) représente une fonction confluyente $\Phi(z, \varepsilon)$ à support singulier dans \mathcal{C} , au sens de la définition A.3.

2. Lorsque F et h sont des fonctions entières, puisque par la proposition 4.8 (*resp* proposition 4.9) $\Psi(z, \widehat{z})$ (*resp* $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$) s'étend analytiquement dans tout \mathbb{C}^2 (*resp* s'étend comme un majeur d'une microfonction confluyente résurgente), l'intégrale tronquée (67) (*resp.* (68)) a encore un sens pour toute tronquature, et nous pouvons interpréter les représentations intégrales (68) et (67) comme une *présomme de Borel* [12, 9], définissant ainsi fonction confluyente résurgente $\Phi(z, \varepsilon)$ à support singulier dans \mathcal{C} (cf. remarque A.4).

□

4.2 Décomposition et conséquences

La décomposition locale (*resp.* décomposition) de la fonction confluyente $\Phi(z, \varepsilon)$ (*resp* fonction confluyente résurgente $\Phi(z, \varepsilon)$) de la proposition 4.10 peut se déduire de la représentation intégrale (65) par la méthode du col. Nous décrivons ce que nous obtenons pour un germe de secteurs de Stokes (*resp.* secteurs de Stokes) dans la figure 1.a.

4.2.1 Décomposition dans S_1

Lemme 4.11. *Pour z dans le germe de secteurs de Stokes (*resp.* secteur de Stokes) S_1 , la décomposition locale (*resp.* décomposition) de la fonction confluyente (*resp.* fonction confluyente résurgente) $\Phi(z, \varepsilon)$ induit un développement BKW formel unique :*

$$\Phi(z, \varepsilon) \xrightarrow{\sigma_{S_1}} i\sqrt{\pi\varepsilon} \Phi_{bkw}^+(z, \varepsilon), \quad (69)$$

Démonstration. Pour la représentation intégrale (65), z étant dans le (germe de) secteur de Stokes S_1 , cela correspond à la situation décrite sur la Fig. 3.1a. En déformant le chemin d'intégration $\bar{\gamma}$ sous le flot $\nabla \left(\Re \left(\frac{S(z, \hat{z})}{\varepsilon} \right) \right)$ (les extrémités $\bar{\gamma}$ restant fixées), nous voyons que seul le point col $\hat{z} = \sqrt{z}$ a une contribution non triviale à la décomposition. Ceci donne la formule (69). Notons que le développement BKW formel ainsi obtenu est une solution formelle de l'équation (13) puisque le majeur $\check{\Phi}(z, \xi)$ est une solution de (25) (cf. Prop. 4.9). \square

De la même manière, nous pouvons montrer que, pour z sur la ligne de Stokes L_1 , un phénomène de Stokes se produit (voir Fig. 3.2) de sorte que, pour z dans le germe de secteur de Stokes (*resp.* secteur de Stokes) S_2 (voir Fig. 3.3a), la décomposition locale (*resp.* décomposition) de la fonction confluyente $\Phi(z, \varepsilon)$ induit maintenant une somme de deux développements BKW formels :

$$\Phi(z, \varepsilon) \xrightarrow{\sigma_{S_2}} i\sqrt{\pi\varepsilon}\Phi_{bkw}^+(z, \varepsilon) - \sqrt{\pi\varepsilon}\Phi_{bkw}^-(z, \varepsilon), \quad (70)$$

où $\Phi_{bkw}^-(z, \varepsilon) = \Phi_{bkw}^+(z, -\varepsilon)$.

Réciproquement, considérons la solution BKW élémentaire $\Phi_{bkw}(z, \varepsilon)$ de l'équation (13). Par (69), à un facteur $i\sqrt{\pi\varepsilon}$ près, une détermination de cette solution BKW élémentaire apparaît comme la décomposition locale dans un germe de secteur de Stokes d'une fonction confluyente. Plus généralement, toute détermination de $\Phi_{bkw}(z, \varepsilon)$ dans n'importe quel germe de secteur de Stokes peut être vue comme la décomposition locale dans ce germe de secteur de Stokes d'une fonction confluyente (à un facteur $c\sqrt{\pi\varepsilon}$, $c \in \{\pm 1, \pm i\}$ près) : dans la représentation intégrale (65), cela en découle simplement en choisissant un chemin d'intégration tronqué convenable $\bar{\gamma}$. En outre, puisque toute notre analyse peut être reconduite en choisissant une autre direction α que 0, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.12. *Lorsque F est holomorphe au voisinage de l'origine (respectivement entière), il existe une famille de solutions BKW élémentaires (respectivement élémentaires résurgentes) de type Airy local (respectivement de type Airy) $\Phi_{bkw}(z, \varepsilon)$ de l'équation (13) (au sens de la définition 1.2).*

4.2.2 Lien avec le modèle d'Airy

Nous déduisons alors du théorème 4.12 précédent, en appliquant simplement un théorème de Jidoumou [22] :

Théorème 4.13. *Si F est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine (respectivement entière), et si nous notons $\Phi_{bkw}(z, \varepsilon)$ une solution BKW élémentaire (respectivement élémentaire résurgente) donnée par le théorème*

4.12, alors pour $z \neq 0$ dans un voisinage de 0 (respectivement $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), nous avons la décomposition unique suivante :

$$\Phi_{bkw}(z, \varepsilon) = a(z, \varepsilon)A_{bkw}(z, \varepsilon) + b(z, \varepsilon)\varepsilon \frac{\partial A_{bkw}}{\partial z}(z, \varepsilon),$$

où $A_{bkw}(z, \varepsilon)$ désigne le symbole BKW d'Airy (5), tandis que a et b (qui dépendent de Φ_{bkw}) sont des constantes locales de résurgence (respectivement constantes de résurgence), a inversible et b petite.

Notons qu'ici, "une constante (locale) de résurgence" signifie la chose suivante :

Définition 4.14. Une constante locale de résurgence (respectivement constante de résurgence) $c(Z, \eta)$ est un développement BKW formel $c(Z, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} c_n(Z)\varepsilon^n$ tel que son mineur $\sum_{n \geq 1} c_n(Z) \frac{\xi^{n-1}}{\Gamma(n)}$ définit un germe de fonctions holomorphes en $(Z, \xi) = (0, 0) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}$, $m \geq 1$ (respectivement une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}$, $m \geq 1$).

5 Applications

5.1 Un théorème local de réduction

En reproduisant le raisonnement de Pham ([26] §2.4), nous déduisons du théorème 4.13 le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Supposons que $F(z)$ dans (13) est holomorphe au voisinage de l'origine (resp. une fonction entière). Alors il existe une constante locale de résurgence (resp. une constante de résurgence) $s(z, \varepsilon)$ telle que, sous l'action de la transformation*

$$\begin{cases} s(z, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} s_k(z)\varepsilon^k, & s_0(z) = z \\ \Phi(z, \varepsilon) = \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{2}} y(s(z, \varepsilon), \varepsilon), \end{cases} \quad (71)$$

l'équation (13) devient l'équation (4), pour z (resp. s) au voisinage de l'origine. De plus, sous l'action (71), une solution BKW élémentaire de (4) est transformée en une solution BKW élémentaire de (13).

5.2 Applications pour l'équation de Schrödinger

Nous nous focalisons maintenant sur l'équation de Schrödinger :

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 Y}{dq^2} = V(q)Y \quad (72)$$

avec

$$V(q) = q + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n q^n \quad (73)$$

analytique au voisinage de l'origine admettant 0 comme zéro simple. Cette hypothèse sur V signifie que $q = 0$ est un point tournant simple pour les solutions formelles BKW. Nous rappelons que ces solutions BKW sont des combinaisons linéaires de solutions formelles BKW élémentaires de (72) de la forme :

$$Y_{bkw}(q, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int^q \sqrt{V(t)} dt} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} Y_k(q) \varepsilon^k \right). \quad (74)$$

Nous rappelons également que ces solutions formelles BKW élémentaires (définies localement en q) sont définies de manière unique à normalisation près, i.e à multiplication près par un développement formel inversible de la forme $e^{\frac{c}{\varepsilon}} \sum_{k \geq 0} c_k \varepsilon^k$, $c, c_k \in \mathbb{C}$, $c_0 \neq 0$.

Nous voulons traduire l'analyse BKW que nous avons faite pour l'équation (13) en une analyse analogue pour l'équation (72).

En suivant [1] et [26], le premier pas naturel afin d'obtenir notre théorème de réduction est de "redresser" la géométrie au voisinage de l'origine via un changement de variable $q \leftrightarrow z$ qui transforme la forme différentielle $\sqrt{V(q)} dq$ en $\sqrt{z} dz$ (l'application cotangente associée transforme l'équation de la sous-variété Lagrangienne $P^2 - V(q) = 0$ en $p^2 - z = 0$).

Ceci nous amène à poser la transformation :

$$\begin{cases} z(q) = \left(\frac{3}{2} \int_0^q V(t)^{\frac{1}{2}} dt \right)^{\frac{2}{3}} \\ Y(q, \varepsilon) = \left(\frac{dz}{dq} \right)^{-\frac{1}{2}} \Phi(z, \varepsilon). \end{cases} \quad (75)$$

Ce changement de variable transforme (72) en notre équation "canonique" :

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{z}{\varepsilon^2} \Phi = F(z) \Phi,$$

avec

$$F(z) = \frac{z}{2V(q)} \{z, q\} |_{q=q(z)}, \quad (76)$$

où $\{z, q\} = \frac{z'''(q)}{z'(q)} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''(q)}{z'(q)} \right)^2$ désigne la dérivée Schwarzienne de z par rapport à q .

La fonction F ainsi définie satisfait la propriété suivante :

Lemme 5.2. *Si $V(q)$ est holomorphe au voisinage de 0, $V(q) \sim q$, alors $F(z)$ est holomorphe au voisinage de l'origine.*

Démonstration. Du développement en série de Taylor convergent (73), nous en déduisons que $\frac{3}{2} \int_0^q V(t)^{\frac{1}{2}} dt - q^{\frac{3}{2}} \in q^{\frac{5}{2}} \mathbb{C}\{q\}$, de sorte que $z(q) - q \in q\mathbb{C}\{q\}$. Le théorème de Lagrange nous permet d'obtenir la fonction inverse $q(z)$ qui est elle aussi une fonction holomorphe au voisinage de 0. Etant donné que $\{z, q\} = -\{q, z\} \left(\frac{dz}{dq}\right)^2$, nous en déduisons facilement que $F(z)$ est holomorphe au voisinage de 0 (et $F(z) = \frac{3}{7}v_3 - \frac{9}{35}v_2^2 + O(z)$, où les v_i sont définis en (73)). \square

Lorsque $V(q)$ est une fonction entière (ou même une fonction méromorphe), un résultat plus précis peut être obtenu en utilisant les propriétés bien connues de la transformation $q \mapsto \int_0^q V(t)^{\frac{1}{2}} dt$ en termes de transformation conforme (voir, par exemple, [21, 30, 18]). La figure 4 illustre ce type de résultat :

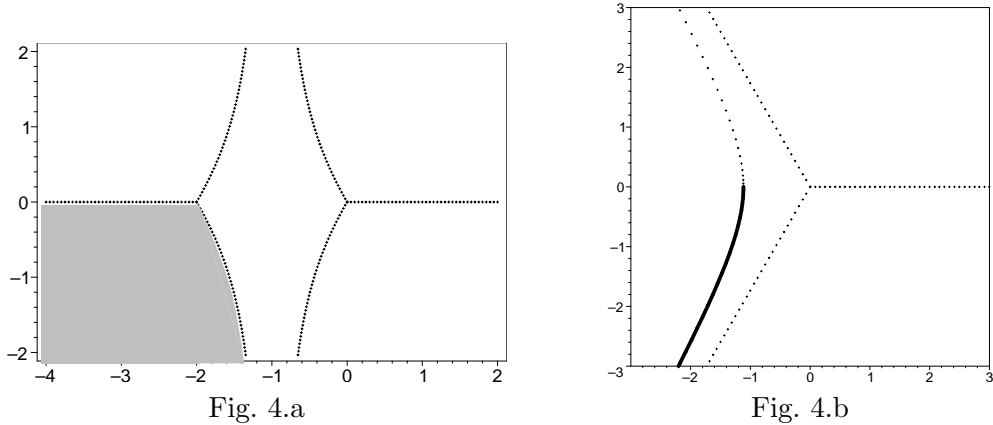


FIG. 4 – La transformation $q \rightarrow z$ (donnée par (75)) pour $V(q) = q + \frac{1}{2}q^2$. L'ouvert complémentaire de la zone grisée dans le q -plan (Fig. 4.a) est envoyé conformément sur le domaine coupé dans le z -plan (Fig. 4.b). La coupure est la ligne pleine). Les lignes en pointillés sont les lignes de Stokes (relatives à la direction d'argument 0). La fonction $F(z)$ est holomorphe dans le domaine coupé dessiné à la Fig. 4.b.

Par la transformation (75), nous déduisons maintenant du théorème 5.1 le théorème suivant :

Théorème 5.3. *Il existe une constante locale de résurgence $(s_k(q))_{k \geq 0}$ telle*

que, sous l'action de la transformation

$$\begin{cases} s(q, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} s_k(q) \varepsilon^k \\ Y(q, \varepsilon) = \left(\frac{\partial s}{\partial q} \right)^{-\frac{1}{2}} y(s(q, \varepsilon), \varepsilon), \end{cases} \quad (77)$$

l'équation (72) est changée en l'équation (4), pour q (resp. s) au voisinage de l'origine. De plus, sous l'action de (77), une solution BKW formelle (4) est transformée en une solution BKW formelle de (72).

Autrement dit, nous avons montré que, dans le cadre de l'analyse BKW, l'équation (72) se ramène à l'équation (4).

Au niveau formel, ce type de résultat a déjà été établi dans un article de Silverstone [31], et depuis d'autres résultats plus précis concernant les propriétés de la transformation s dans (77) ont été établis :

- Dans [1] (voir aussi [24]), T. Aoki, T. Kawai et Y. Takei démontrent le théorème 5.3 : nous retrouvons ainsi leur résultat à la différence que nous n'avons à aucun moment utilisé le calcul microdifférentiel de Sato. Par la suite, ce résultat a été étendu dans [4] au cas où dans l'équation (72) la fonction potentielle V est une constante de résurgence locale.
- Dans [26], F. Pham montre que le développement $s(q, \varepsilon)$ est *résurgent* en ε^{-1} à dépendance régulière en q . Cependant, ce résultat est basé sur l'hypothèse qu'une base de solutions BKW résurgentes de (72) puisse être définie, avec une dépendance régulière en q excepté aux points tournants.

5.3 Extensions possibles

Nous pouvons étendre facilement nos résultats à l'équation :

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{z}{\varepsilon^2} \Phi = F(z, \beta) \Phi, \quad (78)$$

où F dépend holomorphiquement de $(z, \beta) \in \mathbb{C}^2$ au voisinage de l'origine. Dans ce cas, les théorèmes 4.12 et 4.13 deviennent :

Théorème 5.4. *Il existe une famille de solutions BKW élémentaires $\Phi_{bkw}(z, \beta, \varepsilon)$ de l'équation (78) qui sont de type Airy local, à dépendance régulière en β au voisinage de l'origine. Pour une telle solution BKW élémentaire $\Phi_{bkw}(z, \beta, \varepsilon)$, et pour $z \neq 0$ dans un voisinage de 0 et β près de l'origine, nous avons l'unique décomposition suivante :*

$$\Phi_{bkw}(z, \beta, \varepsilon) = a(z, \beta, \varepsilon) A_{bkw}(z, \varepsilon) + b(z, \beta, \varepsilon) \frac{\partial A_{bkw}}{\partial z}(z, \varepsilon),$$

où $A_{bkw}(z, \varepsilon)$ est le symbole BKW d'Airy (5), tandis que a et b sont des constantes locales de résurgence.

Nous traduisons également facilement le théorème 5.1.

Nous en déduisons la conséquence suivante : en substituant à β une petite série Gevrey-1 $\beta(\varepsilon) = \sum_{k \geq 1} \beta_k \varepsilon^k$ dans une constante locale de résurgence, nous

obtenons encore une constante locale de résurgence [12], nous retrouvons le résultat de Aoki *et al* [4].

De même, par extension, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 5.5. *Considérons l'équation différentielle*

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{z}{\varepsilon^2} \Phi = F(z, \varepsilon) \Phi, \quad (79)$$

où $F(z, \varepsilon)$ est une constante locale de résurgence . Alors il existe une constante locale de résurgence $s(z, \varepsilon)$ telle que, sous l'action de la transformation

$$\begin{cases} s(z, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} s_k(z) \varepsilon^k, & s_0(z) = z \\ \Phi(z, \varepsilon) = \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)^{-\frac{1}{2}} y(s(z, \varepsilon), \varepsilon), \end{cases} \quad (80)$$

l'équation (79) est changée en l'équation (4), pour z (resp. s) au voisinage de l'origine. De plus, sous l'action de (80), une solution BKW élémentaire de (4) est transformée en une solution BKW élémentaire de (79).

6 Pistes de recherche

6.1 Points tournants d'ordre supérieur

L'analogie de notre forme canonique pour les points tournants d'ordre supérieur est l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{z^n}{\varepsilon} \Phi = F(z) \Phi, \quad (M_n)$$

où $F(z)$ est holomorphe au voisinage de l'origine et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Afin de copier ce que nous avons fait dans la section 3, il nous faut définir une fonction génératrice convenable dans une transformation canonique $(p, z) \leftrightarrow (\widehat{p}, \widehat{z})$ de l'espace cotangent qui simplifie la géométrie de la sous-variété Lagrangienne $p^2 - z^n = 0$.

Un point de départ intéressant est l'article [20] où Hardy introduit un ensemble de fonctions spéciales Φ_n solutions de :

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{z^n}{\varepsilon} \Phi = 0, \quad (A_n)$$

sous la forme¹

$$\Phi_n(z, \varepsilon) = \int e^{-\frac{1}{\varepsilon} S_n(z, \widehat{z})} d\widehat{z}. \quad (81)$$

Les fonctions S_n peuvent être définies de la manière suivante : pour $m = n + 2 \geq 3$, nous introduisons la fonction polynomiale $P_m(t) \in \mathbb{Z}[t]$ d'ordre m définie par :

- si m est pair, nous posons $\cosh(mq) = P_m(\sinh(q))$.
- si m est impair, nous posons $\sinh(mq) = P_m(\sinh(q))$.

Nous associons à P_m la fonction polynomiale Q_m ,

$$Q_m(z, \widehat{z}) = z^{m/2} P_m(\widehat{z}/\sqrt{z}),$$

et $S_n(z, \widehat{z}) \in \mathbb{Q}[z, \widehat{z}]$ est définie comme la fonction polynomiale quasi-homogène donnée par :

$$S_n(z, \widehat{z}) = \frac{2}{n+2} Q_{n+2}(-z, \widehat{z}). \quad (82)$$

Ces fonctions polynomiales S_n satisfont les propriétés suivantes :

$$\left(\frac{\partial S_n}{\partial z} \right)^2 = T_n(z, \widehat{z}) \frac{\partial S_n}{\partial \widehat{z}} + z^n \quad (83)$$

où la fonction polynomiale $T_n(z, \widehat{z})$ satisfait :

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial z^2} = \frac{\partial T_n}{\partial \widehat{z}}. \quad (84)$$

A titre d'exemple, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_1(z, \widehat{z}) = \frac{8}{3} \widehat{z}^3 - 2\widehat{z}z & T_1(z, \widehat{z}) = \frac{1}{2} \\ S_2(z, \widehat{z}) = 4\widehat{z}^4 - 4\widehat{z}^2 z + \frac{1}{2} z^2 & T_2(z, \widehat{z}) = \widehat{z} \\ S_3(z, \widehat{z}) = \frac{32}{5} \widehat{z}^5 - 8\widehat{z}^3 z + 2\widehat{z} z^2 & T_3(z, \widehat{z}) = 2\widehat{z}^2 - \frac{1}{2} z \\ \dots & \dots \end{array} \right.$$

Le fait que la fonction $\Phi_n(z, \varepsilon)$ donnée par (81) soit en effet une solution de (A_n) peut se montrer par intégration par parties, en utilisant les propriétés fondamentales (83) et (84), cf. [8].

Notons que, à normalisation près, $\Phi_1(z, \varepsilon)$ correspond à fonction d'Airy, tandis que $\Phi_2(z, \varepsilon)$ correspond à la fonction cylindro-parabolique de Weber.

En revenant à ce que nous avons fait dans la section 3, cela nous amène à considérer une solution de (M_n) de la forme :

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int e^{-\frac{\xi}{\varepsilon}} \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi) d\xi = \int e^{-\frac{1}{\varepsilon} S_n(z, \widehat{z})} \Psi(z, \widehat{z}) d\widehat{z}, \quad (85)$$

¹Hardy montre en particulier comment ces fonctions sont reliées aux fonctions de Bessel.

où $\check{\Phi}$ doit satisfaire l'équation :

$$\frac{\partial^2 \check{\Phi}}{\partial z^2} - z^n \frac{\partial^2 \check{\Phi}}{\partial \xi^2} = F(z) \check{\Phi}. \quad (86)$$

En utilisant (83) et (84), ceci se traduit par le fait que $\tilde{\Psi}(z, \hat{z}) = \check{\Phi}(z, \xi)$ doit satisfaire l'EDP linéaire :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial z^2} - \frac{2 \frac{\partial S_n}{\partial z}}{\frac{\partial S_n}{\partial \hat{z}}} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial z \partial \hat{z}} + \frac{T_n}{\frac{\partial S_n}{\partial \hat{z}}} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \hat{z}^2} = F(z) \tilde{\Psi}. \quad (87)$$

Comme dans la section 3, le problème se réduit maintenant à analyser les propriétés d'holomorphie de $\Psi(z, \hat{z}) := \tilde{\Psi}(z, \hat{z}) \frac{\partial S_n}{\partial \hat{z}}$ avec $\tilde{\Psi}(z, \hat{z})$ une solution de (87) telle que $\Psi(z, \hat{z})$ se comporte bien au voisinage du lieu $\frac{\partial S_n}{\partial \hat{z}} = 0$ définissant les points cols.

La difficulté réside maintenant dans le fait que la transformation

$$\left\{ \begin{array}{l} (z, \hat{z}) \leftrightarrow (z, x = \frac{\partial S_n}{\partial \hat{z}}) \\ \psi(z, x) := \tilde{\Psi}(z, \hat{z}) \frac{\partial S_n}{\partial \hat{z}}, \end{array} \right.$$

qui définit un changement de variables ramifié, ne s'inverse plus facilement (nous devons résoudre une équation algébrique de degré $n + 2$) et l'analyse devient d'autant plus délicate que n devient grand.

6.2 Sommabilité

En ce qui concerne les propriétés de sommabilité des solutions BKW élémentaires du théorème 4.12, il semble, au regard des exemples explicites obtenus dans la section 4.1.2, que nous perdions assez vite le caractère 1-sommable.

Notre conjecture est qu'en réalité nous obtenons des solutions formelles multisolomables, au moins dans le cas où la fonction F est polynomiale (les travaux de Balser *et al* dans [] ne sont d'ailleurs certainement pas sans lien avec ce phénomène).

Un travail est engagé dans cette présente voie afin de déterminer notamment les différents niveaux de sommabilité (qui doivent a priori dépendre du degré de F).

A Appendice : Fonctions confluentes et microfonctions

Nous rappelons ici quelques notions adaptées de [22, 12].

Définition A.1. Une microfonction $\overset{\nabla}{\Phi}(z, \xi)$ à (z_0, ξ_0) est la classe modulo $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}, z_0 \times \xi_0}$ d'une fonction $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ holomorphe dans un voisinage sectoriel de (z_0, ξ_0) . La fonction $\overset{\vee}{\Phi}$ est appelée un majeur et la microfonction correspondante sa singularité à (z_0, ξ_0) .

La microfonction $\overset{\nabla}{\Phi}(z, \xi)$ est résurgente si son majeur $\overset{\vee}{\Phi}$ est prolongeable sans fin (par rapport à ξ pour tout z dans un voisinage de z_0).

Dans cette définition, un *voisinage sectoriel* de (z_0, ξ_0) désigne un ouvert $W \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ intersectant $\{z_0\} \times \mathbb{C}$ comme le montre la figure 5 pour $(z_0, \xi_0) = (0, 0)$.

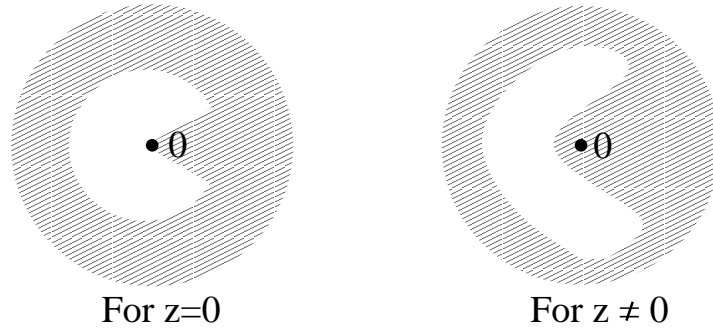


FIG. 5 – La trace dans le ξ -plan d'un voisinage sectoriel de $(0, 0)$.

Nous rappelons que \mathcal{C} désigne la courbe algébrique $\mathcal{C} = \{(z, \xi) \in \mathbb{C}^2, 9\xi^2 = 4z^3\}$. Nous allons utiliser la définition suivante :

Définition A.2. Une microfonction (*resp.* microfonction résurgente) $\overset{\nabla}{\Phi}(z, \xi)$ à $(0, 0)$ est dite *confluente à support singulier dans \mathcal{C}* si l'un de ses majeurs $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ s'étend analytiquement sur le revêtement universel de $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \setminus \mathcal{C}$ (*resp.* de $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$), où $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ est un voisinage de $(0, 0)$. Dans ce cas, $\overset{\nabla}{\Phi}$ sera dit *confluent* (*resp.* *confluent résurgent*) à support singulier dans \mathcal{C} .

Par exemple, la microfonction (résurgente) à $(0, 0)$ associée à $A_{bkw}^{\vee}(z, \xi)$ (cf. formule (11)) est confluente (résurgente) à support singulier dans \mathcal{C} .

Considérons maintenant une microfonction confluente à $(0, 0)$ à support singulier dans \mathcal{C} , et notons $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ l'un de ses majeurs holomorphes dans un voisinage sectoriel de $(0, 0)$. En gardant z dans un voisinage suffisamment

petit \mathcal{U} de 0, nous pouvons définir un ouvert Ω comme sur la figure 6 tel que $\overset{\vee}{\Phi}$ est holomorphe pour $(z, \xi) \in \mathcal{U} \times \Omega$.

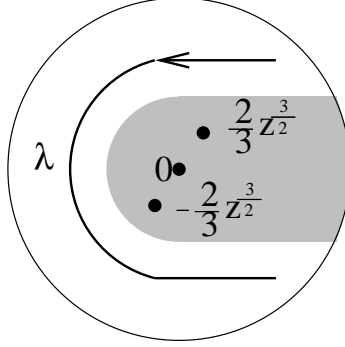


FIG. 6 – L’ouvert Ω (le complémentaire de l’ensemble grisé) et le chemin λ . Les extrémités de λ doivent être dans le demi-plan $\Re(\xi) > 0$.

Cela permet de définir la transformée de Laplace suivante :

$$\Phi(z, \varepsilon) = \int_{\lambda} e^{-\frac{\xi}{\varepsilon}} \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi) d\xi, \quad (88)$$

pour un contour d’intégration λ comme sur la figure 6. La fonction $\Phi(z, \varepsilon)$ est holomorphe pour $(z, \varepsilon) \in \mathcal{U} \times \mathbb{C}$, et admet une *croissance sous-exponentielle d’ordre 1 à l’infini en ε^{-1}* au sens suivant :

$\forall \eta > 0$, il existe un voisinage \mathcal{U}_{η} de 0, un voisinage sectoriel Σ_{η} de l’origine d’ouverture $]-\delta_{\eta}, \delta_{\eta}[$ ($\delta_{\eta} > 0$) et $c_{\eta} > 0$ tels que

$$\forall (z, \varepsilon) \in \mathcal{U}_{\eta} \times \Sigma_{\eta}, \quad |\Phi(z, \varepsilon)| \leq ce^{\eta|\varepsilon|^{-1}} \quad (89)$$

Si dans (88) nous remplaçons le majeur $\overset{\vee}{\Phi}$ par un autre représentant de la classe de la microfonction confluyente $\overset{\vee}{\Phi}$, ou changeons les extrémités de λ , la fonction $\Phi(z, \varepsilon)$ est décalée d’une fonction holomorphe $\varphi(z, \varepsilon)$ en z dans un voisinage \mathcal{U}' de 0, et en $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ qui est à *décroissance exponentielle d’ordre 1 à l’infini en ε^{-1}* au sens suivant :

il existe $\eta > 0$ et un voisinage sectoriel Σ_{η} de l’origine d’ouverture $]-\delta_{\eta}, \delta_{\eta}[$ ($\delta_{\eta} > 0$), il existe $c > 0$ tels que

$$\forall (z, \varepsilon) \in \mathcal{U}' \times \Sigma_{\eta}, \quad |\varphi(z, \varepsilon)| \leq ce^{-\eta|\varepsilon|^{-1}} \quad (90)$$

Cela justifie la définition suivante [22] :

Définition A.3. La fonction confluyente $\overset{\vee}{\Phi}(z, \varepsilon)$ à support singulier dans \mathcal{C} associée à la microfonction confluyente $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ à $(0, 0)$ est la classe de $\Phi(z, \varepsilon)$ définie par (88) modulo les fonctions holomorphes en $(0, 0)$ qui sont à décroissance exponentielle d’ordre 1 à l’infini en ε^{-1} .

Remarque A.4. Si $\overset{\vee}{\Phi}$ est confluent résurgent à support singulier dans \mathcal{C} , alors la fonction confluyente résurgente $\Phi(z, \varepsilon)$ à support singulier dans \mathcal{C} associée à la microfonction confluyente résurgente $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ à $(0, 0)$ est définie comme une présomme de Borel, voir [12, 9].

A.1 : Décomposition locale (pour la direction $\alpha = 0$)

Pour la notion de décomposition d'une fonction résurgente, nous renvoyons le lecteur à [12, 9]. Nous introduisons ici son analogue local. Considérons de nouveau un majeur $\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ dans la classe d'une microfonction confluyente à $(0, 0)$ à support singulier dans \mathcal{C} . Nous gardons z dans un voisinage suffisamment petit \mathcal{U} de 0 et $z \neq 0$. Pour un tel z , la fonction $\xi \mapsto \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ peut se prolonger dans un domaine coupé (localement près de $\xi = 0$) comme sur la figure 1.b, (cas I), ou sur la figure 2 (cas II).

En considérant les prolongements analytiques de $\xi \mapsto \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi)$ au voisinage de chaque singularité $\omega(z)$ (définie par \mathcal{C}), et les microfonctions associées (i.e., la classe modulo $O_{\omega(z)}$, $\omega(z)$ étant le *support* de la microfonction), nous obtenons la *décomposition locale* d'une microfonction confluyente $\overset{\vee}{\Phi}$. Par exemple, dans le cas I, la décomposition locale est donnée par seulement une microfonction $\overset{\vee}{\Phi} \underset{\frac{2}{3}z^{3/2}}{\text{à}}$, alors que dans le cas II, la décomposition locale fait intervenir deux microfonctions, l'une $\overset{\vee}{\Phi} \underset{\frac{2}{3}z^{3/2}}{\text{à}}$, et l'autre $\overset{\vee}{\Phi} \underset{-\frac{2}{3}z^{3/2}}{\text{à}}$.

Nous utilisons maintenant les germes de secteurs de Stokes, comme sur la figure 1.a. Tant que nous restons dans un tel germe de secteurs de Stokes S , les microfonctions $\overset{\vee}{\Phi} \underset{\nabla \omega(z)}{\text{à}}$ intervenant dans la décomposition locale de la microfonction confluyente $\overset{\vee}{\Phi}$ sont holomorphes en z . Cela nous permet de définir le morphisme

$$\overset{\vee}{\Phi}(z, \xi) \xrightarrow{\sigma_S} \left(\overset{\vee}{\Phi} \underset{\omega(z)}{\text{à}}(z, \xi) \right) \quad (91)$$

A chaque microfonction $\overset{\vee}{\Phi} \underset{\nabla \omega(z)}{\text{à}}(z, \xi)$ nous pouvons associer, par l'intermédiaire d'une transformée de Laplace formelle, un unique symbole BKW élémentaire $\Phi_{bkw}^{\omega(z)}(z, \varepsilon)$. Par suite, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \overset{\vee}{\Phi}(z, \xi) & \xrightarrow{\sigma_S} & \left(\overset{\vee}{\Phi} \underset{\omega(z)}{\text{à}}(z, \xi) \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi(z, \varepsilon) & \xrightarrow{\sigma_S} & \sum_{\omega(z)} \Phi_{bkw}^{\omega(z)}(z, \varepsilon) \end{array} \quad (92)$$

où $\sum_{\omega(z)} \Phi_{bkw}^{\omega(z)}(z, \varepsilon)$, qui désigne la série transasymptotique locale associée à la fonction confluyente $\Phi(z, \varepsilon)$, est appelée la *décomposition locale dans S de la fonction confluyente $\Phi(z, \varepsilon)$* .

Lorsque nous traversons une ligne de Stokes, un phénomène de Stokes apparaît. Ce dernier se traduit par une discontinuité de la décomposition locale, et peut s'analyser en termes de dérivations étrangères. Cette étude a déjà été menée par exemple pour le cas Airy dans la section 2.

Références

- [1] T. Aoki, T. Kawai, Y. Takei, *The Bender-Wu analysis and the Voros theory*, Special functions (Okayama, 1990), 1–29, ICM-90 Satell. Conf. Proc., Springer, Tokyo, 1991.
- [2] T. Aoki, T. Kawai, Y. Takei, *New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations*, in *Analyse algébrique des perturbations singulières, I* (Marseille-Luminy, 1991), xiii, xv, 69–84, Travaux en Cours **47**, Hermann, Paris, 1994.
- [3] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike, Y. Takei, *On the exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases*, Adv. Math. **181** (2004), no. 1, 165–189.
- [4] T. Aoki, J. Yoshida, *Microlocal reduction of ordinary differential operators with a large parameter*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29** (1993), no. 6, 959–975.
- [5] R. Balian, C. Bloch, *Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths*, Ann. of Physics **85** (1974), 514–545.
- [6] W. Balsler, J. Mozo-Fernández, *Multisummability of Formal Solutions of Singular Perturbation Problems*, Journal of Differential Equations **183** (2002), 526–545.
- [7] C.M. Bender, T.T. Wu, *Anharmonic oscillator*, Phys. Rev. **184**, 1231–1260 (1969).
- [8] B. Candelpergher, *Solutions asymptotiques de l'équation de Schrödinger stationnaire*. J. Math. pures et appl. **60** (1981), 323–339.
- [9] B. Candelpergher, C. Nosmas, F. Pham, *Approche de la résurgence*, Actualités mathématiques, Hermann, Paris (1993).
- [10] E. Delabaere, H. Dillinger, F. Pham, *Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques*, Annales de l'Institut Fourier **43** (1993), no. 1, 163–199.
- [11] E. Delabaere, H. Dillinger, F. Pham, *Exact semi-classical expansions for one dimensional quantum oscillators*, Journal Math. Phys. **38** (1997), 12, 6126–6184.
- [12] E. Delabaere, F. Pham, *Resurgent methods in semi-classical asymptotics*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect. A **71** (1999), no 1, 1–94.
- [13] R.B. Dingle, *Asymptotic expansions : their derivation and interpretation*, Acad. Press, Oxford (1973).
- [14] J. Ecalle, *Les algèbres de fonctions résurgentes*, Publ. Math. D'Orsay, Université Paris-Sud, 1981.05 (1981).
- [15] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération*, Publ. Math. D'Orsay, Université Paris-Sud, 1981.06 (1981).

- [16] J. Ecalle, *Cinq applications des fonctions résurgentes*, preprint 84T 62, Orsay, (1984).
- [17] J. Ecalle, *L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux*, Publ. Math. D'Orsay, Université Paris-Sud, 1985.05 (1985).
- [18] B. Elsner, *Hyperelliptic action integral*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), no. 1, vii, xi, 303–331.
- [19] R. Gérard, H. Tahara, *Singular nonlinear partial differential equations*. Aspects of Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.
- [20] G.H. Hardy, *On certain definite integrals considered by Airy and by Stokes*. Quaterly Journal **XLI** (1910), 226-240.
- [21] J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
- [22] A. O. Jidoumou, *Modèles de résurgence paramétrique : fonctions d'Airy et cylindro-paraboliques*. J. Math. Pures Appl. (9) **73** (1994), no. 2, 111–190.
- [23] M. Kashiwara, T. Kawai, J. Sjöstrand, *On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge*. Ark. Mat. **17** (1979), no. 1, 83–91.
- [24] T. Kawai, Y. Takei, *Secular equations through the exact WKB analysis*. Analyse algébrique des perturbations singulières, I (Marseille-Luminy, 1991), xiv, xvi, 85–102, Travaux en Cours **47**, Hermann, Paris, 1994.
- [25] F. Pham, *Resurgence, Quantized canonical transformations and multi-instanton expansions*. in Algebraic Analysis II, vol. in honor of M. Sato, R.I.M.S. Kyoto, Kashiwara Kawai ed., Acad. Press, 699-726 (1988).
- [26] F. Pham, *Multiple turning points in exact WKB analysis (variations on a theme of Stokes)*. Toward the exact WKB analysis of differential equations linear or non-linear (C. Howls, T. Kawai, Y. Takei ed.), Kyoto University Press (2000),71-85.
- [27] J.P. Ramis, *Les séries k -sommables et leurs applications*, Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Proceeding Les Houches (1979), Springer Notes in Physics **126**, 178–199 (1980).
- [28] J.P. Ramis, *Phénomène de Stokes et resommation*, C.R.Acad.Sc. Paris, **t.301**, 99-102 (1985).
- [29] J.P. Ramis, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the American Mathematical Society **296**, 1–95 (1984).
- [30] Y. Sibuya, *Global Theory of a Second Order Linear Differential Equation with a Polynomial Coefficient*, Mathematics Studies **18** (1975), North-Holland Publishing Company.
- [31] H. Silverstone, *JWKB connection-formula problem revisited via Borel summation*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), no. 23, 2523–2526.

- [32] B.Simon, *Large orders and summability of eigenvalue perturbation theory : a mathematical overview*. International Journal of Quantum Chemistry, Vol. XXI, 3-25 (1982).
- [33] G.G. Stokes, *On the Discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol.X, Part.I (1857).
- [34] F. Trèves, *Basic linear partial differential equations.*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 62. Academic Press, New York-London, 1975.
- [35] A. Voros, *The return of the quartic oscillator. The complex WKB method*, Ann. Inst. H.Poincaré, Physique Théorique **39** (1983), 211-338.
- [36] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford science publications (1989).