



HAL
open science

Holoïdes factoriels

Jean-Eric Pin

► **To cite this version:**

Jean-Eric Pin. Holoïdes factoriels. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 1977, 12, pp.169-184. hal-00017719

HAL Id: hal-00017719

<https://hal.science/hal-00017719>

Submitted on 17 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HOLOÏDES FACTORIELS

JEAN-ÉRIC PIN

RÉSUMÉ. Let H be a commutative monoid and suppose that the relation *divide* is an order on H . Then we say that H is a *holoid* and write \leq for the relation *divide* : $a \leq b$ if and only if there exists $x \in H$ such that $ax = b$.

Dubreil, Fuchs, Mitsch and Bosbach studied certain holoids in which every element has a unique factorization (possibly reduced) into irreducible, prime or maximal elements. We give a specific meaning to the words *reduction* and *reduced*. Then we study a new family of holoids, called *factorial* — a concept which generalizes the previous holoids with *unique factorization* —. The most meaningful difference is that we don't suppose any chain condition. However, we have again the good properties of these holoids : existence of l.c.m., existence of a minimum solution to the equation $ax = b$ in case $a \leq b$ and we prove the following result : if H is factorial, it is factorial too with respect of l.c.m. as a law of composition.

INTRODUCTION

Un monoïde commutatif H dans lequel la relation “divise” est une relation d'ordre est appelé un holoïde (cf Bosbach [1], Dubreil-Jacotin, Lesieur and Croisot [6]). On notera dans ce cas \leq la relation “divise” :

$$a \leq b \iff \text{il existe } x \in H \text{ tel que } ax = b$$

Bosbach, Dubreil, Fuchs et Mitsch ont étudié certains demi-groupes (non nécessairement commutatifs) dans lesquels tout élément possède une décomposition unique — éventuellement *réduite* — en produit de facteurs irréductibles, premiers ou maximaux, cf [1, 2, 3, 6, 7, 9, 10]. Nous donnons une signification précise aux mots *réduction* et *irréductible*, puis nous étudions un nouveau type d'holoïdes — dits *factoriels* — notion qui généralise les holoïdes à *décomposition unique* déjà connus. Ces holoïdes factoriels ne vérifient a priori *aucune condition de chaîne* ni de règle de simplification. Nous retrouvons néanmoins en partie les “bonnes” propriétés de ces holoïdes : existence du ppcm, existence d'une solution minimum à l'équation $ax = b$ dans le cas $a \leq b$ (notion proche mais plus faible que celle de résiduel (Dubreil) ou de quotient (Fuchs)), caractérisation des diviseurs d'un élément et enfin le résultat suivant : si H est factoriel, alors H est factoriel pour la loi \vee (ppcm).

Notations. Soit H un holoïde de neutre e . On notera \leq la relation divise et $a < b$ si $a \leq b$ et $a \neq b$.

— Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie, on note $\prod_{i \in I} x_i$ le produit des x_i . En particulier $\prod_{i \in \emptyset} x_i = e$.

— S'il existe un plus petit majorant m (au sens de la relation \leq) de la famille $(x_i)_{i \in I}$, m est appelé le plus petit commun multiple (en abrégé ppcm) de $(x_i)_{i \in I}$.

— S'il existe un plus grand minorant d , d est appelé pgcd de la famille $(x_i)_{i \in I}$. A quelques nuances près, on a repris la terminologie de Bosbach [1, 2].

Article publié dans *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **12** (1977) 169–184. Cette version corrige quelques fautes de style et de typographie.

1. LE CONCEPT DE RÉDUCTION

Soit H un holoïde de neutre e . I désigne un ensemble fini.

Définition 1. On dit que x est *irréductible* si pour tout I fini,

$$x = \prod_{i \in I} x_i \implies \exists i \in I \ x_i = x$$

Définition 2. On dit que x est *premier* si pour tout I fini,

$$x \leq \prod_{i \in I} x_i \implies \exists i \in I \ x_i \leq x$$

Exemple 1. e n'est pas irréductible car $e = \prod_{i \in \emptyset} x_i$.

Exemple 2. Dans le \vee -demi-treillis de la figure 1, les éléments 1 , p , q et r sont irréductibles; p et q sont premiers mais r ne l'est pas.

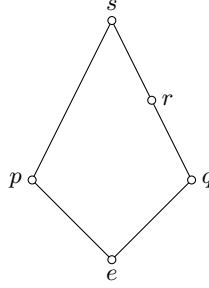


FIGURE 1

Remarque 1. On déduit immédiatement de la définition que tout élément premier est irréductible. Mais la réciproque est en général inexacte (cf Exemple 2).

Examinons quelques propriétés élémentaires des irréductibles (cf. Bosbach [1])

(1) PROPOSITION. *Si x est irréductible et si $a < x$ alors $ax = x$.*

Démonstration. En effet, si $a < x$ il existe b tel que $x = ab$. Comme $x \neq a$, $x = b$. D'où $ax = x$. \square

(2) PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) x est irréductible,
- (2) pour tout I fini, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$

$$(\forall i \in I \ x_i < x) \implies \prod_{i \in I} x_i < x$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (1). \square

Définition 3. On appelle *décomposition* de x une famille $D = (x_i)_{i \in I}$ d'éléments irréductibles dont le produit est x .

On utilisera, suivant le contexte, l'une des notations suivantes pour désigner une décomposition D de x :

$$x = \prod_{i \in I} x_i, \quad x = \prod_D, \quad x = \prod_{y \in \mathcal{S}} y^{n_y(x)}$$

Seule la dernière notation demande des explications. L'ensemble indexant \mathcal{S} est l'ensemble des irréductibles de H et $n_y(x)$ est le nombre d'éléments de D égaux

à y . On utilise parfois une notation de ce genre pour écrire la décomposition d'un entier en facteurs premiers.

Soient D et D' deux décompositions de x . On dit que D est *équivalente* à D' et on note $D \sim D'$ si D et D' ont les mêmes facteurs. Formellement,

$$D = (x_i)_{i \in I} \sim D' = (x'_i)_{i \in I'}$$

si et seulement si il existe une bijection σ de I vers I' telle que pour tout $i \in I$, $x_i = x'_{\sigma(i)}$.

Nous arrivons aux deux définitions les plus importantes.

Définition 4. Soient $D = (x_i)_{i \in I}$ et $D' = (x'_i)_{i \in I'}$ deux décompositions de x . On dit que D est *plus réduite* que D' et on note $D \preceq D'$ s'il existe une injection σ de I vers I' telle que pour tout $i \in I$, $x_i \leq x'_{\sigma(i)}$. On dit dans ce cas que σ est une *injection de réduction*.

Par abus de notation, on notera parfois $\sigma(x_i)$ au lieu de $x'_{\sigma(x_i)}$. On voit facilement que \leq est une relation de préordre sur l'ensemble des décompositions de x .

Définition 5. On dit que H est *factoriel* lorsque pour tout élément x de H , l'ensemble des décompositions de x a un élément *minimum* qu'on appelle *décomposition réduite* de x .

N.B. Cette notion généralise les holoïdes "halbprimkanonisch" de Bosbach et les "primfaktorzerlegungen" de Fuchs.

Le résultat suivant éclaire la définition 5.

(3) PROPOSITION. *On a $D \sim D'$ si et seulement si $D \preceq D'$ et $D' \preceq D$.*

Démonstration. En effet, si $D \sim D'$, il est clair que $D \preceq D'$ et $D' \preceq D$. Réciproquement supposons que $D = (x_i)_{i \in I} \preceq D' = (x'_i)_{i \in I'}$ et $D' \preceq D$. Il existe alors des injections de réduction $\sigma : I \rightarrow I'$ et $\sigma' : I' \rightarrow I$. Comme I et I' sont finis, σ et σ' sont bijectives et on a, pour tout $i \in I$, $x_i \leq x'_{\sigma(i)} \leq x_{\sigma' \circ \sigma(i)}$. Posons $\tau = \sigma' \circ \sigma$ et supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} < x_{\tau(i_0)}$. Puisque τ est bijective, il existe $n \geq 1$ tel que $\tau^n(i_0) = i_0$ et donc $x_{i_0} < x_{\tau(i_0)} \leq \dots \leq x_{\tau^n(i_0)} = x_{i_0}$. Contradiction. Donc $x_i = x'_{\sigma(i)} = x_{\tau(i)}$ pour tout $i \in I$ et $D \sim D'$. \square

Remarque 2. Soit $x = \prod_{y \in \mathcal{S}} y^{n_y(x)}$ une décomposition réduite de x . Soient $y_0 < y$ deux irréductibles. Alors $n_{y_0}(x) = 0$ ou $n_y(x) = 0$. Autrement dit deux irréductibles distincts et comparables ne peuvent figurer simultanément dans une décomposition réduite.

Il résulte de [3] que deux décompositions réduites de x ont les mêmes facteurs à l'ordre près. Dans un holoïde factoriel on parlera donc de *la* décomposition réduite d'un élément (qui n'est définie qu'à l'ordre près des facteurs).

Voici un critère permettant de comparer deux décompositions mises sous forme exponentielle.

(4) THÉORÈME. *Pour que $D = \prod_{y \in \mathcal{S}} y^{n_y(a)}$ soit plus réduite que $D' = \prod_{y \in \mathcal{S}} y^{n_y(b)}$, il faut et il suffit que, pour tout partie H de \mathcal{S} , on ait*

$$\sum_{y \in H} n_y(a) \leq \sum_{\substack{y' \geq y \\ y' \in H}} n_{y'}(b)$$

Démonstration. Cela résulte du lemme des mariages. Soit A l'application de I dans $\mathcal{P}(I')$ définie par $A(i) = \{j \mid x_i \leq x'_j\}$. Alors $D \preceq D'$ si et seulement si il existe une injection $\sigma : I \rightarrow I'$ telle que, pour tout $i \in I$, $\sigma(i) \in A(i)$.

D'après le lemme des mariages, il faut et il suffit que, pour toute partie K de I ,

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i \in K} A(i)\right) \geq \text{Card}(K)$$

Posons

$$\overline{K} = \{i \in I \mid \text{il existe } j \in K \text{ tel que } x_i = x_j\}.$$

Il est clair que $\text{Card}(\overline{K}) \geq \text{Card}(K)$ et que $\text{Card}(\bigcup_{i \in K} A(i)) = \text{Card}(\bigcup_{i \in \overline{K}} A(i))$. Donc $D \preceq D'$ si et seulement si pour toute partie K de I , $\text{Card}(\bigcup_{i \in \overline{K}} A(i)) \geq \text{Card}(\overline{K})$ ce qui n'est rien d'autre qu'une formulation différente du théorème. \square

Ce théorème permettrait de démontrer par le calcul certains des énoncés des sections 2, 3, 4 et 5. Donnons tout de suite un résultat simple, mais utile :

(5) PROPOSITION. *Soit $x = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}$ une décomposition réduite de x . Alors toute décomposition $a = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a)}$ — avec, pour tout $y \in \mathcal{J}$, $n_y(a) \leq n_y(x)$ — est une décomposition réduite de a .*

Démonstration. La démonstration est immédiate. \square

Nous allons maintenant donner une caractérisation des décompositions réduites. Pour cela, nous aurons besoin de la proposition suivante :

(6) PROPOSITION. *Si $D = (x_i)_{i \in I}$ est la décomposition réduite de x , si $D' = (x'_i)_{i \in I'}$ est une décomposition quelconque de x , il existe une injection de réduite σ de D dans D' telle que $x'_{\sigma(i)} = x'_{\sigma(j)}$ entraîne $x_i = x_j$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $\text{Card}(D') = n$. C'est évident pour $n = 0$ ou 1. Supposons le résultat acquis jusqu'à $n - 1$. Soit σ une injection de réduite de D dans D' et supposons que $x'_{\sigma(i_1)} = x'_{\sigma(i_2)}$ avec $x_{i_1} \neq x_{i_2}$. Puisque D est réduite, x_{i_1} et x_{i_2} sont incomparables (cf. Remarque 2) et donc $x_{i_1} < x'_{\sigma(i_1)}$, $x_{i_2} < x'_{\sigma(i_2)} = x'_{\sigma(i_1)}$, d'où $x_{i_1} x_{i_2} < x'_{\sigma(i_1)}$ d'après (2). On a donc

$$x = \prod_{i \in I} x_i = x_{i_1} x_{i_2} \prod_{i \in I - \{i_1, i_2\}} x_i \leq x'_{\sigma(i_1)} \prod_{i \in I - \{i_1, i_2\}} x'_{\sigma(i)} = \prod_{i \in I - \{i_2\}} x'_{\sigma(i)} \leq x$$

et $D' - \{x'_{\sigma(i_2)}\}$ est encore une décomposition de x . Or $\text{Card}(D' - \{x'_{\sigma(i_2)}\}) = n - 1$ et l'hypothèse de récurrence permet de conclure facilement. \square

Avant d'énoncer le théorème, précisons une terminologie : si σ est une injection de réduction de $D = (x_i)_{i \in I}$ dans $D' = (x'_i)_{i \in I'}$, on appelle *image dans \mathcal{J} de σ* le sous-ensemble $\{x'_{\sigma(i)} \mid i \in I\}$ de \mathcal{J} .

(7) THÉORÈME. (Caractérisation des décompositions réduites.) *Pour que*

$$x = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)} = D$$

soit la décomposition réduite de x , il faut et il suffit que pour toute décomposition D' de x , il existe, pour chaque $y \in \mathcal{J}$, des injections de réduction σ_y de $y^{n_y(x)}$ dans D' , d'images dans \mathcal{J} deux à deux disjointes.

Démonstration. La condition est suffisante : on peut construire une injection de réduction de D dans D' en "recollant" les σ_y .

La condition est nécessaire : d'après (6), il existe une injection de réduction σ de D dans D' telle que

$$(\alpha) \quad x'_{\sigma(i)} = x'_{\sigma(j)} \implies x_i = x_j$$

Pour chaque $y \in \mathcal{J}$, σ induit une injection de réduction σ_y de $y^{n_y(x)}$ dans D' . Les images des σ_y dans \mathcal{J} sont deux à deux disjointes d'après (α). \square

Ce résultat nous sera très utile dans la Section 4 pour la démonstration du théorème fondamental (27).

Avant de terminer cette section, donnons un exemple d'holoïde factoriel. Il s'agit du \vee -demi-treillis de la Figure 2 ci-dessous. Les éléments irréductibles sont a , b , les x_n et les y_n . Il n'y a que deux éléments premiers : a et y_1 . En effet y_2 , par exemple, n'est pas premier car $y_2 \leq ay_1 = x$ mais $y_2 \not\leq a$ et $y_2 \not\leq y_1$. La décomposition réduite de x est $x = ay_1$. Les éléments minimaux sont a et y_1 .

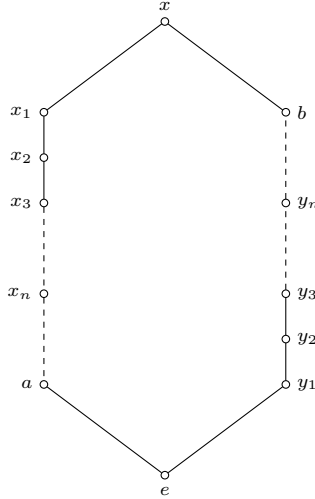


FIGURE 2

Cet holoïde ne vérifie ni la condition de chaîne ascendante, ni la condition de chaîne descendante : c'est là une différence essentielle avec les holoïdes étudiés par Bosbach ou avec les demi-groupes à décomposition unique en facteurs premiers de Fuchs et Dubreil-Jacotin.

2. DIVISEURS D'UN ÉLÉMENT DANS UN HOLOÏDE FACTORIEL

En voici une première caractérisation :

(8) THÉORÈME. (Première caractérisation des diviseurs d'un élément.) *Soit un holoïde factoriel. Soit $x \leq z$ et $z = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z)}$ la décomposition réduite de z . Alors $x = x_1 x_2$ où x_1 est absorbé par z et où x_2 admet une décomposition réduite de la forme $x_2 = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x_2)}$ avec, pour tout $y \in \mathcal{J}$, $n_y(x_2) \leq n_y(z)$.*

Démonstration. Soit $x = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)} = D_1$ une décomposition de x . Posons

$$\begin{cases} x_1 = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x_1)}, \\ x_2 = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x_2)}, \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} n_y(x_1) = (n_y(x) - n_y(z))^+, \\ n_y(x_2) = \inf(n_y(x), n_y(z)). \end{cases}$$

En vertu de (5), x_2 vérifie bien les conditions de l'énoncé. De plus $x_1 x_2 = x$. Reste à montrer que $x_1 z = z$. Soit a tel que $ax = z$ et soit $\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a)} = D_2$ une décomposition de a . On a :

$$\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z)} = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a) + n_y(x)} = \prod_{D_1 \dot{\cup} D_2}$$

où $D_1 \dot{\cup} D_2$ désigne l'union disjointe des familles D_1 et D_2 .

Mais puisque $\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}$ est réduite, il existe une injection de réduction σ de $\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}$ dans $\prod_{D_1 \dot{\cup} D_2} = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x) + n_y(x)}$. Posons

$$z_1 = \prod_{\sigma^{-1}(D_2)} , \quad z_2 = \prod_{\sigma^{-1}(D_1) \cap \{y | \sigma(y) = y\}} , \quad z_3 = \prod_{\sigma^{-1}(D_1) \cap \{y | \sigma(y) > y\}} .$$

On a

$$z \leq z x_1 = z \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{[n_y(x) - n_y(z)]^+} \leq z \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{(n_y(x) - n_y(z_2))} .$$

En effet, $n_y(z_2) \leq n_y(z)$ et donc

$$[n_y(x) - n_y(z)]^+ \leq [n_y(x) - n_y(z_2)]^+ = n_y(x) - n_y(z_2)$$

car $n_y(x) \geq n_y(z_2)$. Comme $z = z_1 z_2 z_3$, on obtient

$$z \leq z_1 z_2 z_3 \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{(n_y(x) - n_y(z_2))}$$

Or d'après (1), z_3 est absorbé par $\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{(n_y(x) - n_y(z_2))}$. Donc

$$z \leq z_1 x \leq z_1 z_2 \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{(n_y(x) - n_y(z_2))} \leq z_1 x \leq ax = z$$

Donc $z x_1 = z$. □

Voici quelques conséquences de ce théorème.

(9) COROLLAIRE. *Soit y_0 un irréductible et soit $z = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}$ la décomposition réduite de z . On suppose que $y_0^m \leq z$. Alors $m \leq n_{y_0}(z)$ ou bien z absorbe y_0 .*

Démonstration. Reprenons la démonstration de (8) avec $x = y_0^m$. Si $m > n_{y_0}(z)$, alors $x_1 = y_0^{m - n_{y_0}(z)}$ est absorbé par z ; donc y_0 et par conséquent y_0^m sont absorbés par z . □

(10) COROLLAIRE. *Soit $a = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a)}$ une décomposition de a (pas nécessairement réduite). Pour montrer que $a \leq x$, il suffit de montrer que $y^{n_y(a)} \leq x$ pour tout $y \in \mathcal{J}$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (9). □

Citons encore un corollaire qui situe bien la différence entre éléments irréductible et premier.

(11) COROLLAIRE. *Soit y_0 un irréductible. Si $y_0 \leq ab$, alors $y_0 \leq a$, $y_0 \leq b$ ou y_0 est absorbé par ab .*

Démonstration. Soient

$$ab = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(ab)} , \quad a = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a)} , \quad b = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(b)}$$

les décompositions réduites de ab , a et b respectivement. D'après (9), ou bien y_0 est absorbé par ab , ou bien $n_{y_0}(ab) \geq 1$. Plaçons-nous dans ce dernier cas : alors $\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(ab)}$ est plus réduite que $\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{(n_y(a) + n_y(b))}$. D'après (4) appliqué à $H = \{y_0\}$, on a

$$1 \leq n_{y_0}(ab) \leq \sum_{y \geq y_0} n_y(a) + n_y(b)$$

Donc $\sum_{y \geq y_0} n_y(a) \geq 1$ ou $\sum_{y \geq y_0} n_y(b) \geq 1$ et $y_0 \leq a$ ou $y_0 \leq b$. □

Enfin on a le

(12) COROLLAIRE. Soient y_1 et y_2 deux irréductibles. Si $y_1^{n_1} = y_2^{n_2}$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$), alors $y_1 = y_2$.

Démonstration. En effet soit $z = y_1^{n_1} = y_2^{n_2}$ et D la décomposition réduite de z . Supposons $y_1 \neq y_2$. De (10) on déduit alors $y_1^{n_1} y_2^{n_2} \leq z$, d'où $y_1 z = z$ et $y_2 z = z$ et par conséquent ni y_1 ni y_2 ne figurent dans D . Soit σ l'injection de réduction de D dans $y_1^{n_1}$. Pour tout $x \in D$, on a $x \leq \sigma(x) = y_1$ donc $x < y_1$ (puisque y_1 ne figure pas dans D). On en déduit d'après (2) $z = \prod_D < y_1 \leq y_1^{n_1} = z$. Contradiction. Donc $y_1 = y_2$. \square

3. ASSOCIÉS MINIMA

Nous introduisons maintenant une notion proche — *mais distincte* comme on va le voir — de la notion de « quotient » (Fuchs [7]) ou de « résiduel » (Dubreil [6]). La terminologie est due à Bosbach [2].

Definition 6. Soit $x \leq z$ et soit A l'ensemble des a tels que $ax = z$ (appelés associés de x dans z). On appelle *associé minimum de x dans z* un élément minimum de A relativement à \leq . Si cet élément existe on le note $z : x$.

Si a est le « quotient » (au sens de Fuchs) de z par x alors on a l'équivalence $a \leq t \iff z \leq xt$. On en déduit facilement que a est l'associé minimum de x dans z mais *la réciproque n'est pas vraie* ainsi que le montre l'exemple 2 : r est l'associé minimum de q dans r , $r \leq qp$ mais $q \not\leq p$.

On sait (Dubreil [6] partie 2 chap. 5, Fuchs [7] chap. 12), que dans un holoïde à décomposition en facteurs premiers (mit eindeutigen Primfaktorzerlegungen) il existe des résiduels (Quotienten). Voici un résultat analogue pour les holoïdes factoriels.

(13) THÉORÈME. Soit H un holoïde factoriel. Soit $x \leq z$ et $x = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}$, $z = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z)}$ les décompositions réduites de x et z . Alors $z : x$ existe et sa décomposition réduite est $\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z:x)}$ avec $n_{y_0}(z : x) = 0$ s'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$, $n_{y_0}(z : x) = (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x))^+$ sinon.

Démonstration. Posons $x' = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x')}$ avec $n_{y_0}(x') = 0$ s'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$, $n_{y_0}(x') = (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x))^+$ sinon. On va montrer $z \leq xx'$, puis $xx' \leq z$ et enfin $x' = z : x$.

a) $z \leq xx'$.

D'après (10) il suffit de montrer que, pour tout $y_0 \in \mathcal{J}$, $y_0^{n_{y_0}(z)} \leq xx'$.

— S'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$, y_0 est absorbé par x d'après (1) donc par xx' et c'est démontré.

— Sinon $n_{y_0}(x') = (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x))^+$ et $n_{y_0}(z) \leq n_{y_0}(x) + n_{y_0}(x')$ donc $y_0^{n_{y_0}(z)} \leq xx'$.

b) $xx' \leq z$.

D'après (10) il suffit de prouver que, pour tout $y_0 \in \mathcal{J}$, $y_0^{n_{y_0}(x) + n_{y_0}(x')} \leq z$.

— S'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$, alors $n_{y_0}(x') = 0$ et $n_{y_0}(x) = 0$ d'après la remarque suivant (3). Donc $0 = n_{y_0}(x) + n_{y_0}(x') \leq n_{y_0}(z)$.

— Sinon $n_{y_0}(x') = (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x))^+$ d'où $n_{y_0}(x) + n_{y_0}(x') = \max(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z))$. Si $n_{y_0}(x) \leq n_{y_0}(z)$ c'est terminé et si $n_{y_0}(x) > n_{y_0}(z)$, (11) appliqué à l'inégalité $y_0^{n_{y_0}(x)} \leq z$ montre que y_0 est absorbé par z et donc $y_0^{n_{y_0}(x) + n_{y_0}(x')} \leq z$. D'où $xx' = z$.

c) $x' = z : x$

Supposons que $ax = z$ et soit $a = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a)}$ la décomposition réduite de a . Il s'agit de montrer que $x' \leq a$. Là encore il suffira de prouver que $y_0^{n_{y_0}(x')} \leq a$ pour

tout $y_0 \in \mathcal{J}$. Le seul cas à étudier est celui où $n_{y_0}(x') > 0$: on a donc $\sum_{y > y_0} n_y(x) = 0$. Appliquons (4) avec $H = \{y_0\}$ à $\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z)} \preceq \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x) + n_y(a)}$. Il vient :

$$n_{y_0}(z) \leq \sum_{y \geq y_0} (n_y(a) + n_y(x)) = n_{y_0}(x) + \sum_{y \geq y_0} n_y(a).$$

D'où

$$n_{y_0}(x') = (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x))^+ \leq \sum_{y \geq y_0} n_y(a).$$

D'après (4), $y_0^{n_{y_0}(x')} \preceq \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a)}$ et donc $y_0^{n_{y_0}(x')} \leq a$.

Enfin, la décomposition de x' est réduite, d'après (5). \square

Remarque 3. Les résultats suivants sont faux en général :

- $(ax : x) = a$; prendre $a = x = x^2 \neq e$, $x^2 : x = x : x = e$.
- Si $(x : a) = b$, alors $(x : b) = a$. Dans l'exemple 2, $s : r = p$, mais $s : p = q$.
- $z(y : x) = zy : x$. Dans l'exemple 2, $r(p : p) = r$, $rp : p = s : p = q$ (cependant on a toujours $z(y : x) \geq zy : x$).
- $(a : x_1x_2) = (a : x_1) : x_2 = (a : x_2) : x_1$ (prendre $a = a^2 = x_1 = x_2$). Le premier membre existe, mais ni le second, ni le troisième n'ont de sens.
- $x \leq a \leq b$, alors $(a : x) \leq (b : x)$. Considérons en effet le \vee -demi-treillis représenté par la Figure 3. On a $a \leq ap \leq s$, $ap : a = p$, $s : a = b$, mais p et b sont incomparables.

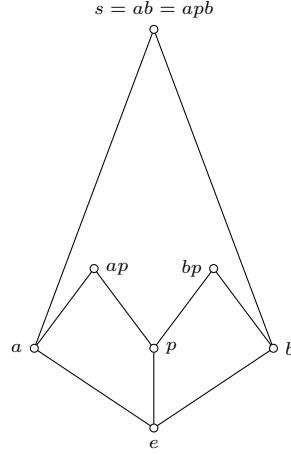


FIGURE 3

En revanche, on a le résultat suivant :

(14) PROPOSITION. *Si $a \leq b \leq x$, alors $(x : b) \leq (x : a)$.*

Démonstration. Soient

$$x = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}, \quad a = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a)}, \quad b = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(b)}$$

les décompositions réduites de x , a et b respectivement. D'après (10), il suffit de prouver que pour tout $y_0 \in \mathcal{J}$, $y_0^{n_{y_0}(x:b)} \leq x : a$. D'après (13), le seul cas où $n_{y_0}(x : b) \neq 0$ est celui où

$$\sum_{y > y_0} n_y(b) = 0, \quad n_{y_0}(x) > n_{y_0}(b).$$

Dans ce cas, b n'absorbe pas y_0 car sinon on aurait

$$b(x : b) = x = b \prod_{\substack{y \in \mathcal{I} \\ y \neq y_0}} y^{n_y(x:b)} \text{ d'où } n_{y_0}(x : b) = 0$$

Par conséquent y_0 n'est pas absorbé par b — ni par a — et $\sum_{y > y_0} n_y(a) = 0$. (9), appliqué à l'inégalité $y_0^{n_{y_0}(a)} \leq b$ montre que $n_{y_0}(a) \leq n_{y_0}(b)$. Il vient alors :

$$0 < n_{y_0}(x) - n_{y_0}(b) \leq n_{y_0}(x) - n_{y_0}(a) \leq (n_{y_0}(x) - n_{y_0}(a))^+$$

Comme $\sum_{y > y_0} n_y(a) = 0$, $n_{y_0}(x : a) = (n_{y_0}(x) - n_{y_0}(a))^+$. On a donc montré que $n_{y_0}(x : b) \leq n_{y_0}(x : a)$ ce qui achève la démonstration. \square

Nous allons maintenant caractériser les associés minima des différents diviseurs de z , qu'on appelle également *diviseurs minima* de z .

(15) PROPOSITION. *Soit $z = \prod_{y \in \mathcal{I}} y^{n_y(z)}$ la décomposition réduite de z . Les diviseurs minima de z sont les éléments a dont la décomposition réduite est de la forme $a = \prod_{y \in \mathcal{I}} y^{n_y(a)}$ avec $n_y(a) \leq n_y(z)$ pour tout $y \in \mathcal{I}$.*

Démonstration. D'après (13) les diviseurs minima sont tous de cette forme. Réciproquement, soit a un élément de la forme indiquée ci-dessus. Posons

$$x = \prod_{y \in \mathcal{I}} y^{n_y(x)} \text{ avec } n_y(x) = n_y(z) - n_y(a).$$

Il est clair que $x \leq z$. On va montrer que $z : x = a$. Soit $y_0 \in \mathcal{I}$.

— S'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(z) > 0$, alors $n_{y_0}(z) = 0$ d'après la remarque suivant (3) et $n_{y_0}(a) = 0$ d'après l'hypothèse. Donc $n_{y_0}(z : x) = 0 = n_{y_0}(a)$.

— Sinon

$$n_{y_0}(z : x) = [n_{y_0}(z) - [n_{y_0}(z) - n_{y_0}(a)]]^+ = n_{y_0}(a)$$

On conclut à l'aide de (10). \square

De (8) et (15) on déduit la seconde caractérisation des diviseurs d'un élément.

(16) THÉORÈME. *Soit $z \in H$. Tout diviseur de z est produit d'un diviseur minimum de z et d'un élément absorbé par z . Réciproquement tout élément qui se factorise de cette manière est un diviseur de z .*

4. P.P.C.M.

On notera $\bigvee_{i=1}^n x_i$ le plus petit commun multiple (p.p.c.m.) d'une famille d'éléments $(x_i)_{i=1}^n$ — s'il existe. — On sait (cf. Dubreil [6] et Fuchs [7]) que dans un holoïde à décomposition en facteurs premiers unique le p.p.c.m. existe. Comme on va le voir, ce résultat est conservé dans les holoïdes factoriels.

(17) THÉORÈME. *Soit $(x_i)_{i=1}^m$ une famille finie d'éléments d'un holoïde factoriel H . Soit $x_i = \prod_{y \in \mathcal{I}} y^{n_y(x_i)}$ une décomposition — pas nécessairement réduite — de x_i . Alors le p.p.c.m. des $(x_i)_{i=1}^m$ existe et on a :*

$$\bigvee_{i=1}^m x_i = \prod_{y \in \mathcal{I}} y^{\max_{i=1}^m n_y(x_i)}$$

(décomposition non réduite en général).

Démonstration. Posons $z = \prod_{y \in \mathcal{I}} y^{\max_{i=1}^m n_y(x_i)}$. Il est clair que $x_i \leq z$ pour $1 \leq i \leq m$.

Réciproquement soit $a \geq x_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et soit $a = \prod_{y \in \mathcal{I}} y^{n_y(a)}$ la décomposition réduite de a . Soit $y_0 \in \mathcal{I}$. Puisque $x_i \leq a$, on a d'après (9) :

- Soit $n_{y_0}(x_i) \leq n_y(a)$ pour $1 \leq i \leq m$ et donc $\max_{i=1}^m n_{y_0}(x_i) \leq n_{y_0}(a)$.
- Soit a absorbe y_0 et donc également $y_0^{\max_{i=1}^m n_{y_0}(x_i)}$.

Dans les deux cas $y_0^{\max_{i=1}^m n_{y_0}(x_i)} \leq a$. Donc $z \leq a$ d'après (10). \square

Remarque 4. En revanche deux éléments n'ont pas toujours de p.g.c.d. dans un holoïde factoriel. Considérons en effet le \vee -demi-treillis représenté par la figure 4 : les éléments x et y n'ont pas de p.g.c.d.

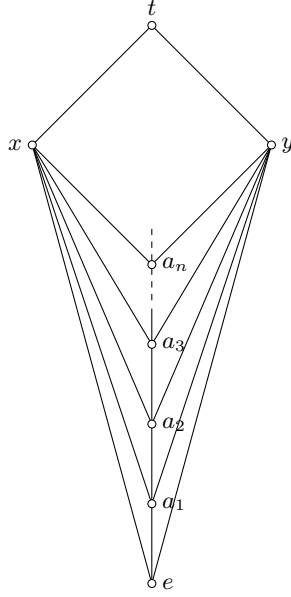


FIGURE 4

Outre les propriétés classiques (commutativité, associativité, idempotence), \vee possède une propriété de distributivité.

$$(18) \text{ PROPOSITION. } z \left(\bigvee_{i=1}^n x_i \right) = \bigvee_{i=1}^n (zx_i)$$

Démonstration. Soient $z = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z)}$ et $x_i = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x_i)}$ des décompositions de z et x_i . On a :

$$z \left(\bigvee_{i=1}^n x_i \right) = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{(n_y(z) + \max_{i=1}^n n_y(x_i))} = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{\max_{i=1}^n (n_y(z) + n_y(x_i))} = \bigvee_{i=1}^n (zx_i)$$

\square

Voici une autre propriété du p.p.c.m.

$$(19) \text{ PROPOSITION. } \text{Si } m = \bigvee_{i=1}^n x_i, \text{ alors } m^q = \bigvee_{i=1}^n x_i^q.$$

Démonstration. C'est évident à l'aide de (17). \square

Nous allons maintenant examiner les relations entre p.p.c.m. et diviseurs minima : ce sera l'objet des propositions qui suivent.

(20) PROPOSITION. Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une famille d'éléments de H et m leur p.p.c.m. Soient $(m : x_i) = \prod_{y \in \mathcal{S}} y^{n_y(m:x_i)}$ les décompositions réduites des $m : x_i$. Alors pour tout $y_0 \in \mathcal{S}$, $\prod_{i=1}^n n_{y_0}(m : x_i) = 0$. De plus cette condition caractérise le p.p.c.m. parmi les multiples communs aux x_i .

Démonstration. On a $\prod_{y \in \mathcal{S}} y^{n_y(m)} \leq \prod_{y \in \mathcal{S}} y^{\max_{i=1}^n n_y(x_i)}$. En appliquant (4) à $H = \{y_0\}$, on obtient $n_{y_0}(m) \leq \sum_{y \geq y_0} \max_{i=1}^n n_y(x_i)$.

- S'il existe $y > y_0$ tel que $\max_{i=1}^n n_y(x_i) > 0$, il existe i_0 tel que $n_y(x_{i_0}) > 0$ et donc $n_{y_0}(m : x_{i_0}) = 0$.
- Sinon $n_{y_0}(m) \leq \max_{i=1}^n n_{y_0}(x_i)$. Il existe i_0 tel que $n_{y_0}(m) = n_{y_0}(x_{i_0})$ et donc $n_{y_0}(m : x_{i_0}) = 0$.

Supposons maintenant $x_i \leq m'$ pour tout i et $\prod_{i=1}^n n_{y_0}(m' : x_i) = 0$ pour tout $y_0 \in \mathcal{S}$. Soit $m' = \prod_{y \in \mathcal{S}} y^{n_y(m')}$ la décomposition réduite de m' . Soit i_0 tel que $n_{y_0}(m' : x_{i_0}) = 0$.

Premier cas. Il existe $y > y_0$ avec $n_y(x_{i_0}) > 0$. Alors y_0 est absorbé par x_{i_0} et donc par m . Donc $y_0^{n_{y_0}(m')} \leq m$.

Deuxième cas. $\sum_{y > y_0} n_y(x_{i_0}) = 0$. Alors

$$0 = n_{y_0}(m' : x_{i_0}) = (n_{y_0}(m') - n_{y_0}(x_{i_0}))^+$$

donc

$$n_{y_0}(m') \leq n_{y_0}(x_{i_0}) \leq \max_{i=1}^n n_{y_0}(x_i) \quad \text{et} \quad y_0^{n_{y_0}(m')} \leq m.$$

On conclut à l'aide de (10) que $m' \leq m$ et donc $m' = m$ par définition du p.p.c.m. \square

(21) PROPOSITION. Soient x_1 et x_2 des éléments de H , m leur p.p.c.m. Alors $(m : x_1)x_1 = (m : x_2)x_2 = m$ et $(m : x_1) \vee (m : x_2) = (m : x_1)(m : x_2)$.

Démonstration. Les deux premières égalités résultent uniquement de la définition 6. La troisième égalité résulte de la Proposition (20). En effet, on a pour tout $y_0 \in \mathcal{S}$, $n_{y_0}(m : x_1) = 0$ ou $n_{y_0}(m : x_2) = 0$. D'où

$$n_{y_0}(m : x_1) + n_{y_0}(m : x_2) = \max(n_{y_0}(m : x_1), n_{y_0}(m : x_2))$$

et donc $(m : x_1)(m : x_2) = (m : x_1) \vee (m : x_2)$. \square

Remarque 5. Si $x \leq a$ et $x \leq b$ on n'a pas en général $(a : x) \vee (b : x) = (a \vee b) : x$. En effet considérons le \vee -demi-treillis représenté par la figure 5. On a

$$a : x = z \quad \text{et} \quad b : x = y, \quad z \vee y = a \quad \text{mais} \quad (a \vee b) : x = a : x = z.$$

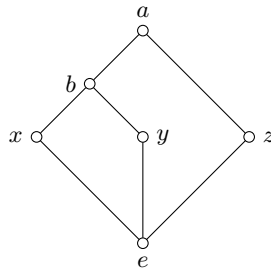


FIGURE 5

Nous introduisons maintenant la notion d'adjoint. C'est l'analogue du « a^Δ » de Fuchs [7, page 256]. On trouvera plus loin des propriétés voisines du « a^Δ ».

Definition 7. Soit $x \leq z$. On appelle *adjoint de x dans z* l'élément $\bar{x} = z : (z : x)$.

Remarquons tout d'abord ceci : $(x : z) = z$ et donc $\bar{x} = z : (z : x) \leq x$.

L'objet de la proposition suivante est le calcul de \bar{x} , $x : \bar{x}$ et $z : \bar{x}$. Soient

$$\begin{aligned} x &= \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}, & z &= \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z)}, & \bar{x} &= \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(\bar{x})}, \\ (x : \bar{x}) &= \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x:\bar{x})}, & (z : \bar{x}) &= \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z:\bar{x})} \end{aligned}$$

les décompositions réduites de x , z , \bar{x} , $x : \bar{x}$ et $z : \bar{x}$ respectivement.

(22) PROPOSITION.

- (a) $n_{y_0}(\bar{x}) = \begin{cases} n_{y_0}(z) & \text{s'il existe } y > y_0 \text{ tel que } n_y(x) > 0, \\ \min(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)) & \text{sinon.} \end{cases}$
- (b) $n_{y_0}(x : \bar{x}) = (n_{y_0}(x) - n_{y_0}(z))^+$,
- (c) $n_{y_0}(z : \bar{x}) = n_{y_0}(z : x)$.

Démonstration. (a) Tout d'abord supposons $n_{y_0}(z) = 0$. Alors, d'après (13), $n_{y_0}(z : x) = 0$ et $n_{y_0}(\bar{x}) = 0$. Donc (a) est vérifié.

Supposons $n_{y_0}(z) > 0$. Alors $n_y(z) = 0$ pour $y > y_0$ et donc $n_y(z : x) = 0$ pour $y > y_0$. On distingue alors deux cas.

- Il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$; alors $n_{y_0}(z : x) = 0$ d'après (13) et $n_{y_0}(\bar{x}) = (n_{y_0}(z) - 0)^+ = n_{y_0}(z)$ toujours d'après (13).
- $n_y(x) = 0$ pour $y > y_0$, d'où $n_{y_0}(z : x) = (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x))^+$. On a alors

$$\begin{aligned} n_{y_0}(\bar{x}) &= (n_{y_0}(z) - (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x))^+)^+ = \begin{cases} n_{y_0}(x) & \text{si } n_{y_0}(z) \geq n_{y_0}(x) \\ n_{y_0}(z) & \text{si } n_{y_0}(x) \geq n_{y_0}(z) \end{cases} \\ &= \min(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)). \end{aligned}$$

(b) Si $n_{y_0}(x) = 0$ la formule est évidente.

Si $n_{y_0}(x) > 0$, alors $n_y(x) = 0$ pour $y > y_0$, donc $n_{y_0}(\bar{x}) = \min(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z))$ et $n_y(\bar{x}) = 0$ pour $y > y_0$ d'après (a). Par conséquent

$$n_{y_0}(x : \bar{x}) = n_{y_0}(x) - \min(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)) = (n_{y_0}(x) - n_{y_0}(z))^+.$$

(c) Si $n_{y_0}(z) = 0$ la formule est évidente.

Si $n_{y_0}(z) > 0$, alors $n_y(z) = 0$ pour $y > y_0$ (même raisonnement qu'au (b)). On en déduit

$$\begin{aligned} n_{y_0}(z : \bar{x}) &= (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(\bar{x}))^+ \\ &= \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } y > y_0 \text{ tel que } n_y(x) > 0 \\ (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x))^+ & \text{sinon} \end{cases} \\ &= n_{y_0}(z : x). \end{aligned}$$

□

Remarque 6. Si x est un diviseur minimum de z , on déduit de (b) que $\bar{x} = x$.

(23) COROLLAIRE. Si \bar{x} est l'adjoint de x dans z

- (a) $z : \bar{x} = z : x$,
- (b) $x : \bar{x}$ est absorbé par z .

Démonstration. Le (a) résulte du (c) de (22).

Le (b) résulte du (b) de (22) et de (9) : si $n_{y_0}(x : \bar{x}) > 0$, $n_{y_0}(x) > n_{y_0}(z)$. D'après (9) appliqué à $y_0^{n_{y_0}(x)} \leq z$, y_0 est absorbé par z , donc $y_0^{n_{y_0}(x:\bar{x})}$ est absorbé par z . \square

Remarque 7. On retrouve ainsi le théorème (16).

Voici quelques autres propriétés de \bar{x} .

(24) PROPOSITION. Si $\bigvee_{i=1}^n x_i = m$ et si \bar{x}_i est l'adjoint de x_i dans m , $\bigvee_{i=1}^n \bar{x}_i = m$.

Démonstration. Posons $m' = \bigvee_{i=1}^n \bar{x}_i$. Puisque $\bar{x}_i \leq x_i \leq m$, on a $m' \leq m$. D'autre part, $m : \bar{x}_i = m : x_i$ d'après (23), d'où $m = m'$ d'après (20). \square

(25) THÉORÈME. Soient a et b des diviseurs de z .

- (a) $\bar{a} \leq a$,
- (b) $\bar{\bar{a}} = a$,
- (c) $a \leq b \implies \bar{a} \leq \bar{b}$,
- (d) $\bar{a} \vee \bar{b} = \overline{a \vee b}$.

Démonstration. (a) a déjà été démontré (après la définition 7).

(b) D'après (23) on a $\bar{a} = z : (z : \bar{a}) = z : (z : a) = \bar{a}$.

(c) D'après (14) on a

$$a \leq b \leq z \implies (z : b) \leq (z : a) \leq z \implies z : (z : a) \leq z : (z : b),$$

soit encore $\bar{a} \leq \bar{b}$.

(d) On utilise (22) pour calculer les décompositions réduites de $\overline{a \vee b}$ et $\bar{\bar{a} \vee \bar{b}}$. Soient

$$a = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a)}, \quad b = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(b)}, \quad z = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z)}$$

les décompositions réduites de a , b et z respectivement. D'après (22) et (17), on a $\bar{a} \vee \bar{b} = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(\bar{a} \vee \bar{b})}$ avec

$$n_y(\bar{a} \vee \bar{b}) = \begin{cases} n_{y_0}(z) & \text{s'il existe } y > y_0 \text{ tel que } n_y(a) > 0 \text{ ou } n_y(b) > 0 \\ \max(\min(n_{y_0}(a), n_{y_0}(z)), \min(n_{y_0}(b), n_{y_0}(z))) & \\ = \min(n_{y_0}(z), \max(n_{y_0}(a), n_{y_0}(b))) & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette décomposition est *a priori* non réduite, mais puisque pour tout $y \in \mathcal{J}$, $n_y(\bar{a} \vee \bar{b}) \leq n_y(z)$, la décomposition est réduite d'après (5). Donc $\bar{a} \vee \bar{b}$ est un diviseur minimum de z . Soit $a = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a \vee b)}$ la décomposition réduite de $a \vee b$. D'après (22), on a :

$$n_y(\bar{a} \vee \bar{b}) = \begin{cases} n_{y_0}(z) & \text{s'il existe } y > y_0 \text{ tel que } n_y(a \vee b) > 0 \\ \min(n_{y_0}(z), n_{y_0}(a \vee b)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or, s'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(a \vee b) > 0$, on a $\sum_{y > y_0} n_y(a \vee b) > 0$. Or d'après (4)

appliqué à $H = \{y \in \mathcal{J} \mid y > y_0\}$, $D = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(a \vee b)}$ et $D' = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{\max(n_y(a), n_y(b))}$,

on a

$$0 < \sum_{y > y_0} n_y(a \vee b) \leq \sum_{y > y_0} \max(n_y(a), n_y(b))$$

donc il existe $y > y_0$ tel que $n_y(a) > 0$ ou $n_y(b) > 0$. On en déduit $n_{y_0}(\bar{a} \vee \bar{b}) = n_{y_0}(z) = n_{y_0}(\overline{a \vee b})$.

Si $\sum_{y > y_0} n_y(a \vee b) = 0$, $n_{y_0}(\bar{a} \vee \bar{b}) = \min(n_{y_0}(z), n_{y_0}(a \vee b))$. Or d'après (4) appliqué à $H = \{y_0\}$, D et D' , on a $n_{y_0}(a \vee b) \leq \max(n_{y_0}(a), n_{y_0}(b))$, donc $n_{y_0}(\overline{a \vee b}) \leq n_{y_0}(\bar{a} \vee \bar{b})$. On en déduit finalement $\overline{a \vee b} \leq \bar{a} \vee \bar{b}$.

Réciproquement, on a $\bar{a} \leq a \leq a \vee b$, $\bar{b} \leq b \leq a \vee b$ donc $\bar{a} \vee \bar{b} \leq a \vee b$, d'où d'après (c), $\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} \leq \overline{a \vee b}$, mais comme $\overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$ est un diviseur minimum de z , on a $\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = \overline{a \vee b}$. \square

Conséquence. Soit Z l'ensemble des diviseurs de z . L'opérateur de Z dans Z défini par $x \rightarrow \bar{x}$ est un opérateur de fermeture pour la relation \geq , compatible avec la loi \vee (cf. Fuchs [7, p. 257] pour des propriétés analogues).

L'ensemble H muni de la loi \vee est un holoïde. L'ordre est en effet le même que dans (H, \cdot) puisque $a \leq b$ si et seulement si $a \vee b = b$. On peut donc définir des éléments irréductibles pour la loi \vee , qu'on appellera éléments \vee -irréductibles. On introduit de façon analogue les notions de \vee -décompositions, d'holoïde \vee -factoriel, etc.

Voici une caractérisation des éléments \vee -irréductibles.

(26) PROPOSITION. *x est \vee -irréductible si et seulement si x est une puissance (non nulle) d'irréductible.*

Démonstration. Soit $y \in \mathcal{J}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $y^n = \bigvee_{y \in \mathcal{J}} a_i$. Soient \bar{a}_i les adjoints de a_i dans y^n . Alors $y^n = \bigvee_{y \in \mathcal{J}} \bar{a}_i$ d'après (24). Puisque \bar{a}_i est un diviseur minimum de y^n , $\bar{a}_i = y^{n_i}$ avec $n_i \leq n$ d'après (15). Comme il est clair que $\bigvee_{i \in I} y^{n_i} = y^{\max_{i \in I} n_i}$, ou bien il existe $i_0 \in I$ tel que $\max_{i \in I} n_i = n_{i_0}$, ou bien $I = \emptyset$. Le second cas est exclu car $n > 0$. Donc $y^{n_{i_0}} = \bar{a}_{i_0} = y^n$. Mais comme $\bar{a}_{i_0} \leq a_{i_0} \leq y^n$, on a $a_{i_0} = y^n$ et donc y^n est \vee -irréductible.

Réciproquement, soit x \vee -irréductible. Si $x = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}$ est une décomposition de x , il vient $x = \bigvee_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}$ d'après (17). Donc $x = y_0^{n_{y_0}(x)}$ pour un $y_0 \in \mathcal{J}$. \square

Énonçons maintenant le théorème le plus important.

(27) THÉORÈME. *Si H est factoriel, alors H est \vee -factoriel.*

Démonstration. Soit $D = x = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}$ la décomposition réduite de x . Alors $x = \bigvee_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)} = D^\vee$ est une \vee -décomposition de x d'après (17).

Considérons une autre \vee -décomposition de x , soit $x = \bigvee_{y \in \mathcal{J}} y^{n'_y(x)} = D'^\vee$. On a alors pour la même raison $x = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n'_y(x)} = D'$. Puisque D est réduite, (7) s'applique : pour tout $y_0 \in \mathcal{J}$, il existe une injection de réduction $\sigma_{y_0} : y_0^{n_{y_0}(x)} \rightarrow D'$ et les images dans \mathcal{J} des σ_{y_0} sont deux à deux disjointes.

— Si l'image dans \mathcal{J} de σ_{y_0} contient un $y > y_0$, on pose

$$\sigma^\vee(y_0^{n_{y_0}(x)}) = y_0^{n'_y(x)}.$$

— Sinon on pose

$$\sigma^\vee(y_0^{n_{y_0}(x)}) = y_0^{n'_{y_0}(x)}.$$

σ^\vee est une injection de D^\vee dans D'^\vee . En effet, si

$$\sigma^\vee(y_1^{n_{y_1}(x)}) = x_1^{n_1} = \sigma^\vee(y_2^{n_{y_2}(x)}) = x_2^{n_2}$$

alors $x_1 = x_2$ d'après (12). Mais x_1 et x_2 sont dans l'image dans \mathcal{J} de σ_{y_1} et σ_{y_2} respectivement et donc $y_1 = y_2$. Enfin il est clair que $x \leq \sigma^\vee(x)$, donc $x \vee \sigma^\vee(x) = \sigma^\vee(x)$ et x est inférieur ou égal à $\sigma^\vee(x)$ pour l'ordre associé à la loi \vee .

Donc σ^\vee est une injection de réduction de D^\vee dans D'^\vee et D^\vee est la \vee -décomposition réduite de x . \square

Remarque 8. La réciproque du théorème (27) est fautive. Considérons en effet l'holoïde $H = \{e, p, q, z\}$ dont la table est

	p	q	z	\vee	p	q	z
p	z	z	z	p	p	z	z
q	z	z	z	q	z	q	z
z	z	z	z	z	z	z	z

H est \vee -factoriel : p et q sont \vee -irréductibles et $z = p \vee q$. Mais H n'est pas factoriel puisque $pq = p^2 = q^2 = z$.

(28) COROLLAIRE. *L'équation en x $a \vee x = m$ (pour $a \leq m$) admet une solution minimum.*

Démonstration. C'est la traduction du théorème (13). \square

5. P.G.C.D.

Nous ne mentionnerons dans ce paragraphe qu'une seule propriété.

(29) PROPOSITION. *Soit H un holoïde factoriel, x et z des éléments de H . Si le p.g.c.d. de x et z existe (on le note $x \wedge z$), on a $(x \wedge z)(x \vee z) = xz$.*

Démonstration. Soient $x = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(x)}$ et $z = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(z)}$ les décompositions réduites de x et z respectivement.

Posons $t = \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(t)}$ où $n_y(t) = \min(n_y(x), n_y(z))$. On a $t \leq x$ et $t \leq z$ donc $t \leq x \wedge z$. Or

$$\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{\min(n_y(x), n_y(z))} \prod_{y \in \mathcal{J}} y^{\max(n_y(x), n_y(z))} = xz.$$

Donc $xz = t(x \vee z) \leq (x \wedge z)(x \vee z)$.

Réciproquement, soit d tel que $d \leq x$ et $d \leq z$. Soit $\prod_{y \in \mathcal{J}} y^{n_y(d)}$ la décomposition réduite de d . Soit $y_0 \in \mathcal{J}$. Le corollaire (9) appliqué aux inégalités $y_0^{n_{y_0}(d)} \leq x$ et $y_0^{n_{y_0}(d)} \leq z$ conduit à la discussion suivante :

Premier cas : $n_{y_0}(d) \leq n_{y_0}(x)$ et $n_{y_0}(d) \leq n_{y_0}(z)$.

Alors $n_{y_0}(d) \leq n_{y_0}(t)$, d'où

$$n_{y_0}(d) + \max(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)) \leq n_{y_0}(x) + n_{y_0}(z).$$

Deuxième cas : y_0 est absorbé soit par x , soit par z , donc par xz . Alors

$$y_0^{n_{y_0}(d) + \max(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z))} \leq xz.$$

On conclut d'après (10) que $(x \wedge z)(x \vee z) \leq xz$. \square

Remarque 9. En général $p(x \wedge z) \neq px \wedge pz$ (même si les deux membres sont définis).

Remerciements Je tiens à remercier mon ami Jacques Van de Wiele qui a largement contribué à la genèse de cet article et Messieurs les professeurs K. Keimel, B. Bosbach, G. Lallement et H. Mitsch pour leurs précieux conseils.

RÉFÉRENCES

- [1] B. BOSBACH, Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen, *Math. Ann.* **139** (1960), 184–196.
- [2] B. BOSBACH, Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen unter Berücksichtigung der Verbände und Ringe., *Math. Ann.* **141** (1960), 193–209.
- [3] B. BOSBACH, Arithmetische Halbgruppen, *Math. Ann.* **144** (1961), 239–252.
- [4] B. BOSBACH, Transzendente Ringerweiterungen mit eindeutigen Faktorzerlegungen, *Math. Ann.* **178** (1968), 299–301.
- [5] R. P. DILWORTH, Structure and decomposition theory of lattices, in *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. II, pp. 3–16, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
- [6] M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR AND R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [7] L. FUCHS, *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*, *Studia Mathematica–Mathematische Lehrbücher, Band XIX*. Übersetzt aus dem Englischen von Éva Vas, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966.
- [8] G. GRÄTZER, *Lattice theory. First concepts and distributive lattices*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1971.
- [9] H. MITSCH, Rechtsteilweise geordnete Halbgruppen, *Wiss. Beitr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Reihe M Math.* **4** (1973), 61–72 (1974). Beiträge zur Algebra und Geometrie, 2.
- [10] H. MITSCH, Rechtsteilweise geordnete Halbgruppen mit Teilbarkeitsordnungen, *Wiss. Beitr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Reihe M Math.* **5** (1974), 23–35. Beiträge zur Algebra und Geometrie, 3.

IRIF, CNRS AND UNIVERSITÉ PARIS-DIDEROT, CASE 7014, 75205 PARIS CEDEX 13, FRANCE.