



HAL
open science

Techniques itératives efficaces pour la méthode de la streamline diffusion sur maillages adaptatifs

Kacem Saikouk, Robert Boyer

► **To cite this version:**

Kacem Saikouk, Robert Boyer. Techniques itératives efficaces pour la méthode de la streamline diffusion sur maillages adaptatifs. 2005. hal-00016368

HAL Id: hal-00016368

<https://hal.science/hal-00016368>

Preprint submitted on 30 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Techniques itératives efficaces pour la méthode de la streamline diffusion sur des maillages adaptatifs

R. Boyer¹

K. Saikouk²

¹Centre de Mathématiques et d'Informatique, Université de Provence, 39, Rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille, France

²Centre de Mathématiques et d'Informatique, Université de Provence, 39, Rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille, France

Table des matières

1	Introduction	2
2	Problème Modèle. Discrétisation avec affinement local	3
2.1	Problème modèle	3
2.2	Discrétisation avec affinement local	4
2.3	Notion d'extension harmonique	6
3	Description classique d'une itération F.A.C	6
4	Nouvelle formulation de la méthode	7
5	Analyse de la vitesse de convergence	8
5.1	Théorème d'extension	8
5.2	Quelques lemmes utiles	10
5.2.1	Cas d'une approximation EF standard	10
5.2.2	Cas de la méthode SDFEM	11
5.3	Théorème de convergence : cas 1	12
5.4	Théorème de convergence : cas 2	14
6	Résultats numériques	16
6.1	Cas d'un problème avec "couches limites"	16
6.2	Comparaison entre FAC et multigrille	18
6.2.1	Etude en fonction de h	18
6.2.2	Etude en fonction de ϵ	19
6.2.3	Etude en fonction de δ_T	19
6.2.4	Etude en fonction du nombre de niveaux	19
6.3	Conclusions	22
	Bibliographie.	23

1 Introduction

On étudie ici la convergence de la méthode itérative *Fast Adaptive Composite method* (F.A.C) dans le cas d'un problème de convection-diffusion stationnaire discrétisé par la méthode de *streamline-diffusion finite element method* (SDFEM). Dans le cas où la convection est dominante, ce problème admet souvent des solutions présentant ce que l'on appelle des couches limites qui nécessitent un maillage très fin dans leurs voisinages. L'utilisation de plusieurs niveaux de raffinement semble bien adaptée dans ce cas. Les performances des méthodes multigrilles se dégradent lorsque le coefficient de diffusion devient de plus en plus petit.

La méthode FAC étudiée ici est un procédé itératif permettant de résoudre un problème posé sur un maillage affiné localement par une suite de problèmes ayant une structure plus régulière. Une importante propriété de cette méthode (en commun avec les techniques multigrilles) est d'avoir un facteur de convergence majoré par une constante strictement inférieure à 1 indépendamment des pas d'espace grossiers et fins, pourvu que les triangulations utilisées appartiennent à des familles régulières, ce que nous supposons désormais. Cette propriété a été démontrée par [12] et [10] dans le cas symétrique défini (ou semi-défini) positif. On donne ici une démonstration de cette propriété dans le cas de la méthode SDFEM, et plus généralement dans le cas d'un problème elliptique du second ordre non symétrique, avec une technique différente basée sur un important résultat dit *théorème d'extension* ([9], [1], et [13]) largement utilisé dans l'analyse de la convergence des techniques de décomposition de domaine. Les estimations obtenues des facteurs de convergence sont aussi valables pour le cas symétrique défini positif comme cas particulier de celui traité dans ce travail, on montrera en fait que, dans ce cas, on peut améliorer ces estimations.

Pour cela, on donne d'abord une nouvelle formulation de la méthode F.A.C et on montre qu'elle peut être interprétée comme un opérateur agissant à l'interface; ceci est fait en utilisant la notion d'extension harmonique discrète. En utilisant le théorème d'extension on montre que l'opérateur de passage associé à la méthode F.A.C à l'interface est une contraction avec une constante strictement inférieure à 1 indépendamment des pas H (grossier) et h (fin), pourvu que H soit suffisamment petit pour qu'une hypothèse supplémentaire portant sur la partie non symétrique et non coercive de l'opérateur elliptique soit vérifiée.

On applique ce résultat à la méthode SDFEM pour un problème de convection-diffusion pour lequel on montre que, sous des hypothèses de régularité des coefficients de l'opérateur et du domaine assez générales, l'hypothèse supplémentaire est vérifiée dès que le pas d'espace grossier H est assez petit.

On présente enfin des résultats numériques pour analyser les performances de la méthode F.A.C pour ce problème, ainsi que la dépendance par rapport aux paramètres de la méthode SDFEM. Ces résultats confirment les résultats théoriques obtenus.

2 Problème Modèle. Discrétisation avec affinement local

2.1 Problème modèle

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d , de frontière $\partial\Omega$ assez régulière, par exemple de type Lipschitz par morceaux. On considère le problème de convection-diffusion stationnaire suivant,

$$\begin{cases} -\epsilon\Delta u + \phi.\nabla u + cu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

dont une forme variationnelle est la suivante:

Trouver $u \in V = H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\epsilon(\nabla u, \nabla v) + (\phi.\nabla u, v) + (cu, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (2.2)$$

où ϕ, c et f sont des fonctions suffisamment régulières, et ϵ un paramètre > 0 .

On supposera par exemple que :

$$0 < \epsilon \leq 1, \phi \in (W^{1,\infty}(\Omega))^2, c \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega), \quad (2.3)$$

$$c \geq 0, \nabla.\phi = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (2.4)$$

Dans le cas où $\nabla.\phi \neq 0$, on supposera que $c - \frac{1}{2}\nabla.\phi \geq 0$.

De manière plus générale, on considérera le problème variationnel suivant:

Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (2.5)$$

où la forme $a(.,.)$ est bilinéaire continue, pas nécessairement symétrique; $f \in L_2(\Omega)$ et on désignera par $(.,.)$ le produit scalaire dans $L_2(\Omega)$.

Le problème (2.2) est la formulation variationnelle d'un problème elliptique linéaire du second ordre, avec conditions aux limites du type Dirichlet homogènes. Ceci n'est pas restrictif, tout ce qui suit peut être étendu, sans grandes modifications, au cas d'autres conditions aux limites: de type Dirichlet non homogènes, Neumann, ...

Sous les hypothèses (2.3), on montre que le problème (2.2) admet une solution unique pour tout $f \in L_2(\Omega)$ (voir par exemple [14]).

Les résultats obtenus dans ce travail peuvent être généralisés au cas de formes bilinéaires qui s'écrivent sous la forme :

$$a(.,.) = a_s(.,.) + b(.,.)$$

où la forme $a_s(.,.)$ est bilinéaire continue, symétrique et coercive sur $H_0^1(\Omega)$, et la forme $b(.,.)$ est bilinéaire vérifiant des hypothèses que l'on précisera ultérieurement (voir section 4 page 7).

2.2 Discrétisation avec affinement local

On se limite à la présentation du cas 2D ($d = 2$), un cas 3D sera illustré dans la section 6 (cf. page 16) sur les résultats numériques. Pour discrétiser le problème (2.5), on utilise une approximation par éléments finis conformes. On considère d'abord une triangulation grossière \mathcal{T}_H de Ω (les éléments de cette triangulation peuvent être des triangles ou des quadrilatères, cf. figure 2.2), et le sous-espace d'éléments finis associé:

$$V_H = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in P_m(T) \forall T \in \mathcal{T}_H, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

où $P_m(T)$ désigne l'espace des fonctions polynômiales de degré au plus m sur l'élément T .

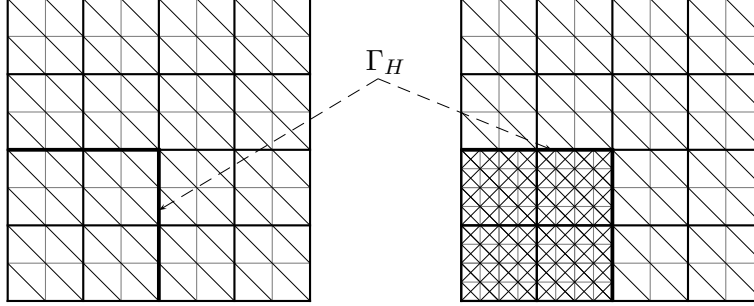


FIG. 1 – Maillages grossier (Ω_H) et composite (Ω_h)

On suppose ensuite qu'on a affiné une partie des triangles de \mathcal{T}_H contenus dans une partie ouverte $\Omega_1 \subset \Omega$. On désigne par $V_{1,H}$ (resp. $V_{2,H}$) le sous-espace d'éléments finis associé à cette triangulation fine (resp. grossière) dans Ω_1 (resp. Ω_2). Soit Γ l'interface entre la partie affinée et la partie grossière du domaine (cf. figure 2.2):

$$\Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$$

On désigne alors par $\Omega_{1,h}$ l'ensemble des sommets (ou plus généralement des degrés de liberté) contenus dans Ω_1 et sur l'interface; et par $\Omega_{2,H}$ l'ensemble des sommets à l'extérieur de Ω_1 . Les noeuds à l'interface sont alors, par construction, grossiers; cette propriété est fondamentale pour tous les algorithmes de type FAC étudiés dans ce travail.

On définit ainsi un maillage composite $\Omega_h = \Omega_{1,h} \cup \Omega_{2,H}$ et on note V_h le sous-espace d'éléments finis associé à la triangulation composite \mathcal{T}_h sur Ω_h . Un exemple d'une telle triangulation est donné par la figure 2.2.

On pose

$$V_{1,h}^0 = \{v \in V_{1,h} : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1\}.$$

Le problème discret obtenu est alors le suivant:

trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h \quad (2.6)$$

La méthode de la *streamline diffusion finite element method* (SDFEM) a été introduite dans [6] pour l'approximation numérique du problème de convection-diffusion avec convection dominante. Elle peut être interprétée comme une méthode de Petrov-Galerkin, elle est aussi connue sous le nom de *streamline upwind Petrov-Galerkin method* (SUPG-method). Elle peut être aussi vue comme un cas particulier de la méthode Residual Free Bubble (RFB) ([?]). Dans le cas d'une approximation EF par des éléments de type P_1 , elle coïncide aussi avec la méthode de Galerkin Least-Squares (GLSFEM) ou encore la méthode USFEM de Franca & al. ([?]).

La méthode SDFEM consiste à ajouter un résidu pondéré à la méthode de Galerkin usuelle, ce qui conduit à la formulation suivante :

trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a_h(u_h, v) = f_h(v) \quad \forall v \in V_h$$

avec

$$a_{\underline{h}}(u, v) = \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (\phi \cdot \nabla u, v) + (cu, v) + \sum_{T \in \mathcal{T}_{\underline{h}}} \delta_T (-\varepsilon \Delta u + \phi \cdot \nabla u + cu, \phi \cdot \nabla v)_T$$

$$f_{\underline{h}}(v) = (f, v) + \sum_{T \in \mathcal{T}_{\underline{h}}} \delta_T (f, \phi \cdot \nabla v)_T$$

où $(\cdot, \cdot)_T$ désigne le produit scalaire dans $L_2(T)$. La constante δ_T est appelée *SD-paramètre*, et son choix joue un rôle crucial dans les propriétés de stabilisation de la SDFEM.

Pour la décomposition de la forme bilinéaire $a_{\underline{h}}(\cdot, \cdot)$ en partie symétrique et non symétrique, on utilise les formes suivantes :

$$a_s(u, v) = \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + ((c - \frac{1}{2} \nabla \cdot \phi)u, v) + \sum_{T \in \mathcal{T}_{\underline{h}}} \delta_T (\phi \cdot \nabla u, \phi \cdot \nabla v)_T$$

$$b(u, v) = \frac{1}{2}((\phi \cdot \nabla u, v) - (\phi \cdot \nabla v, u)) + \sum_{T \in \mathcal{T}_{\underline{h}}} \delta_T (-\varepsilon \Delta u + cu, \phi \cdot \nabla v)_T$$

Pour étudier les propriétés de la SDFEM, on utilisera la norme suivante :

$$\|v\|_{SD} = \left(\varepsilon |v|_1^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_{\underline{h}}} \delta_T \|\phi \cdot \nabla v\|_{0,T}^2 + \|\sqrt{c}v\|_{0,T}^2 \right)^{1/2}.$$

Pour l'étude de la stabilité et de la convergence de la méthode SDFEM, on introduit les constantes c_T et μ_{inv} vérifiant

$$c_T = \max_{x \in T} |c(x)| \quad \text{pour } T \in \mathcal{T}_{\underline{h}} \quad (2.7)$$

$$\|\Delta v\|_{0,T} \leq \mu_{inv} h_T^{-1} |v|_{1,T} \quad \forall v \in V_{\underline{h}} \quad (2.8)$$

où h_T désigne le diamètre de l'élément T . La deuxième inégalité est une propriété inverse locale pour les éléments finis utilisés ([4], [2]).

On a alors le théorème suivant ([14]) :

Théorème 2.1. *On suppose que le SD-paramètre δ_T vérifie*

$$0 < \delta_T \leq \frac{1}{2} \min \left(\frac{c_0}{c_T^2}, \frac{h_T^2}{\varepsilon \mu_{inv}^2} \right) \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{T}_{\underline{h}}. \quad (2.9)$$

Alors la forme bilinéaire discrète $a_{\underline{h}}(\cdot, \cdot)$ est coercive :

$$a_{\underline{h}}(v, v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_{SD}^2 \quad \forall v \in V_{\underline{h}}.$$

On déduit de ce théorème l'estimation a priori suivante :

$$\|v\|_{SD} \leq C (\|f\|_0^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_{\underline{h}}} \delta_T \|f\|_{0,T}^2)^{1/2}.$$

Concernant le choix de δ_T pour améliorer les propriétés de convergence de la SDFEM, on introduit le nombre de Peclet local

$$Pe_T = \frac{\|\phi\|_{0,\infty,T} h_T}{2\varepsilon}$$

et on utilise le choix suivant

$$\delta_T = \begin{cases} \delta_0 Pe_T & \text{si } Pe_T > 1 \text{ (convection dominante)} \\ \delta_1 \frac{h_T^2}{\varepsilon} & \text{si } Pe_T \leq 1 \text{ (diffusion dominante)} \end{cases} \quad (2.10)$$

où δ_0 et δ_1 sont des constantes choisies judicieusement. On a alors le théorème suivant ([14]):

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et avec le choix de δ_T donné par (2.10), la solution u_h de la méthode SDFEM satisfait l'estimation d'erreur suivante*

$$\|u - u_h\|_{SD} \leq C(\varepsilon^{1/2} + h^{1/2}) h^k |u|_{k+1}.$$

2.3 Notion d'extension harmonique

Soit Σ_h la décomposition induite sur l'interface Γ par la triangulation composite \mathcal{T}_h . On définit alors le sous-espace suivant :

$$\Phi_h = \{\varphi \in C^0(\Gamma) : \varphi|_I \in P_m(I) \forall I \in \Sigma_h, \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Gamma\}$$

Φ_h est égal à l'ensemble des restrictions à Γ de fonctions appartenant à V_h . Dans ce qui suit on désignera par Tr_Γ l'opérateur de restriction à l'interface Γ défini sur V_h et donc à valeurs dans Φ_h .

On définit ensuite les opérateurs suivants sur Φ_h :

– $R_{1,h}\varphi \in \Phi_h \mapsto R_{1,h}\varphi \in V_{1,h}$ solution du problème suivant

$$\begin{aligned} a_1(R_{1,h}\varphi, v) &= 0 & \forall v \in V_{1,h}^0 \\ Tr_\Gamma R_{1,h}\varphi &= \varphi & \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (2.11)$$

– $R_{2,H}\varphi \in \Phi_h \mapsto R_{2,H}\varphi \in V_{2,H}$ solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} a_2(R_{2,H}\varphi, v) &= 0 & \forall v \in V_{2,H}^0 \\ Tr_\Gamma R_{2,H}\varphi &= \varphi & \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (2.12)$$

où la forme $a_1(.,.)$ (resp. $a_2(.,.)$) désigne la restriction de la forme $a(.,.)$ aux éléments de $V_{1,h}$ (resp. $V_{2,H}$).

La fonction $R_{1,h}\varphi$ (resp. $R_{2,H}\varphi$) est appelée extension harmonique de φ sur $\Omega_{1,h}$ (resp. $\Omega_{2,H}$) relativement à la forme $a_1(.,.)$ (resp. $a_2(.,.)$). On aura aussi besoin de l'extension harmonique $R_{1,H}\varphi$ définie de façon analogue à $R_{1,h}\varphi$ en remplaçant $V_{1,h}$ par $V_{1,H}$.

On supposera que toutes les extensions harmoniques sont définies de façon unique.

On définit enfin les normes utilisées : pour tout $u \in V_{i,h}$ (ou $V_{i,H}$) :

$$\|u\|_i^2 = a_{is}(u, u)$$

et pour tout $\varphi \in \Phi_h$:

$$|||\varphi||| = \|R_{1,H}\varphi\|_1$$

où la forme $a_{is}(.,.)$ désigne la restriction de la forme $a_s(.,.)$ à $V_{i,h}$.

On pourrait définir d'autres normes sur Φ_h , par exemple :

$$|||\varphi|||_h = \|R_{1,h}\varphi\|_1 \quad \text{ou} \quad |||\varphi|||_H = \|R_{1,h}\varphi\|_2 ;$$

mais le choix que nous avons fait ici : $|||\varphi||| = \|R_{1,H}\varphi\|_1$ nous a paru le plus simple et suffisant pour l'analyse de la convergence; et en fait, comme nous le verrons dans la section suivante, toutes les normes ci-dessus (définies sur Φ_h) sont équivalentes avec des constantes indépendantes des pas h, H , si les triangulations composite et grossière appartiennent à des familles régulières ([4]).

Remarque 2.1. *Comme la forme $a_s(.,.)$ est symétrique et coercive, la norme énergie qui lui est associée est équivalente à la norme $H_0^1(\Omega)$ avec des constantes indépendantes des pas d'espace h et H , on utilisera dans tous ce qui suit les 2 normes de façon indifférente; et de même en ce qui concerne les normes sur $H_0^1(\Omega_i)$ pour $i = 1, 2$.*

3 Description classique d'une itération F.A.C

On considère ici le cas de l'itération F.A.C à 2 niveaux. Partant d'une valeur initiale $u_h^0 \in V_h$, on construit une séquence (u_h^k) convergeant vers la solution exacte u_h du problème (2.6) de la façon suivante :

Correction locale fine:

On cherche $z_h \in V_{1,h}^0$ tel que :

$$a_1(z_h, v) = (f, v)_1 - a_1(u_h^k, v) \quad \forall v \in V_{1,h}^0 \quad (3.1)$$

et on pose alors :

$$u_{\underline{h}}^{k+1/2} = u_{\underline{h}}^k + z_h \quad (3.2)$$

Correction globale grossière:

On cherche $z_H \in V_H$ tel que :

$$a(z_H, v) = (f, v) - a(u_{\underline{h}}^{k+1/2}, v) \quad \forall v \in V_H \quad (3.3)$$

et on pose alors :

$$u_{\underline{h}}^{k+1} = u_{\underline{h}}^{k+1/2} + z_H \quad (3.4)$$

La nouvelle valeur $u_{\underline{h}}^{k+1}$ est définie sur le maillage composite Ω_h par :

$$u_h^{k+1} = \begin{cases} u_{\underline{h}}^k + z_H + z_h & \text{dans } \Omega_{1,h} \\ u_{\underline{h}}^k + z_H & \text{dans } \Omega_{2,H} \end{cases}$$

Remarque 3.1. On supposera, dans tout le reste de ce travail, que tout élément de $V_{1,h}^0$ "appartient" aussi à $V_{\underline{h}}$ par prolongement par zéro à l'extérieur de Ω_1 .

4 Nouvelle formulation de la méthode

Pour analyser la méthode, on va étudier le comportement de l'erreur $e_{\underline{h}}^k = u_{\underline{h}}^k - u_{\underline{h}}$. Si on désigne par $e_{1,h}^k$ (resp. $e_{2,H}^k$) la restriction de $e_{\underline{h}}^k$ à $\Omega_{1,h}$ (resp. $\Omega_{2,H}$), on a alors :

$$Tr_{\Gamma} e_{1,h}^k = Tr_{\Gamma} e_{1,H}^k = Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k \quad \text{sur } \Gamma.$$

L'erreur obtenue à la fin de l'étape (3.3) vérifie :

$$\begin{cases} a_1(e_{\underline{h}}^{k+1/2}, v) = 0 & \forall v \in V_{1,h}^0 \\ Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^{k+1/2} = Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

ce qui, par définition de l'extension harmonique $R_{1,h}$, est équivalent à écrire que :

$$e_{1,h}^{k+1/2} = R_{1,h} Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k$$

et donc:

$$e_{\underline{h}}^{k+1/2} = \begin{cases} R_{1,h} Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k & \text{dans } \Omega_{1,h} \\ e_{2,H}^k & \text{dans } \Omega_{2,H} \end{cases}$$

L'étape de correction sur grille grossière (3.3) s'écrit: on cherche $z_H \in V_H$ tel que

$$a(z_H, v) = -a(e_{\underline{h}}^{k+1/2}, v) \quad \forall v \in V_H \quad (4.1)$$

Or:

$$a(e_{\underline{h}}^{k+1/2}, v) = a_1(R_{1,h} Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k, v) + a_2(e_{2,H}^k, v) \quad \forall v \in V_H$$

Posons:

$$w_H^k = \begin{cases} R_{1,H} Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k & \text{dans } \Omega_{1,h} \\ e_{2,H}^k & \text{dans } \Omega_{2,H} \end{cases}$$

On a alors:

$$a(e_{\underline{h}}^{k+1/2}, v) = a(w_H^k, v) - a_1(R_{1,H} Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k, v) + a_1(R_{1,h} Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k, v)$$

donc la solution z_H du problème (3.3) vérifie :

$$a(z_H, v) = -a(w_H^k, v) + a_1(R_{1,H} Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k - R_{1,h} Tr_{\Gamma} e_{\underline{h}}^k, v) \quad \forall v \in V_H$$

Si on pose:

$$\tilde{e}_H = w_H^k + z_H,$$

on obtient finalement que l'élément $\tilde{e}_H \in V_H$ vérifie:

$$a(\tilde{e}_H, v) = a_1(R_{1,H}Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^k - R_{1,h}Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^k, v) \quad \forall v \in V_H \quad (4.2)$$

Ce problème est global grossier; sa résolution permet d'avoir l'élément $\tilde{e}_{2,H} = e_{2,H}^k + z_{2,H} = e_{2,H}^{k+1}$ et on a alors:

$$e_{\underline{h}}^{k+1} = \begin{cases} R_{1,h}Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^k + \tilde{e}_{1,H} - R_{1,H}Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^k & \text{dans } \Omega_{1,h} \\ \tilde{e}_{2,H} & \text{dans } \Omega_{2,H} \end{cases}$$

On a en particulier:

$$Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^{k+1} = Tr_\Gamma \tilde{e}_H \quad (4.3)$$

On va d'abord montrer dans le lemme suivant que la connaissance de $Tr_\Gamma \tilde{e}_H$ suffit pour déterminer \tilde{e}_H sur tout le domaine global grossier Ω_H :

Lemme 4.1. *Si $\tilde{e}_H \in V_H$ vérifie (4.2), alors on a :*

$$\tilde{e}_H = \begin{cases} R_{1,H}Tr_\Gamma \tilde{e}_H & \text{dans } \Omega_{1,H} \\ R_{2,H}Tr_\Gamma \tilde{e}_H & \text{dans } \Omega_{2,H} \end{cases}$$

Démonstration. Prenons $v \in V_{i,H}^0 (i = 1; 2)$ dans (4.2), on a alors :

$$a(\tilde{e}_H, v) = a_1(R_{1,H}Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^k, v) - a_1(R_{1,h}Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^k, v) = 0$$

soit:

$$a(\tilde{e}_H, v) = a_i(\tilde{e}_{i,H}, v) = 0;$$

et comme $Tr_\Gamma \tilde{e}_{i,H} = Tr_\Gamma \tilde{e}_H$, on voit donc que:

$$\tilde{e}_{i,H} = R_{i,H}Tr_\Gamma \tilde{e}_H$$

d'où le résultat. □

Ce lemme nous permet de conclure, au vu de la relation (4.3), que $e_{\underline{h}}^{k+1}$ ne dépend que de $Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^k$.

On en déduit donc que l'analyse de l'erreur associée à l'itération (3.1)-(3.3) se ramène à l'étude de la suite $(Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sur l'interface. C'est l'objet de la section suivante.

5 Analyse de la vitesse de convergence

5.1 Théorème d'extension

Tenant compte de ce qui précède, on introduit l'opérateur $S_{\underline{h}} : \Phi_{\underline{h}} \mapsto \Phi_{\underline{h}}$ qui à φ associe $S_{\underline{h}}\varphi = Tr_\Gamma w_H$ où w_H est la solution du problème suivant :

Trouver $w_H \in V_H$ tel que

$$a(w_H, v) = a_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, v) \quad \forall v \in V_H. \quad (5.1)$$

D'après (4.2)-(4.3), on voit que:

$$Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^{k+1} = Tr_\Gamma w_H = S_{\underline{h}}Tr_\Gamma e_{\underline{h}}^k.$$

On utilisera dans tout ce qui suit l'hypothèse suivante :

Condition 5.1 (H1). *Les triangulations $\mathcal{T}_{\underline{h}}$ et \mathcal{T}_H font partie d'une famille régulière ([4]).*

Dans l'analyse de la convergence, nous utiliserons le résultat suivant, dit théorème d'extension, démontré, dans le cas symétrique défini positif dans [13], [11], [1] et [9] (avec une démonstration différente de celle de [11]):

Théorème 5.2. *Sous l'hypothèse (H1), il existe deux constantes positives C_1 et C_2 indépendantes des pas h et H telles que pour tout $\varphi \in \Phi_{\underline{h}}$ on a*

$$\|R_{1,h}\varphi\|_1 \leq C_1 \|R_{2,H}\varphi\|_2 \quad , \quad \|R_{2,H}\varphi\|_2 \leq C_2 \|R_{1,h}\varphi\|_1$$

Démonstration. On va montrer uniquement la première inégalité du théorème, l'autre inégalité s'en déduisant par symétrie. Considérons les extensions harmoniques continues $R_i\varphi \in H^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, solutions des problèmes suivants:

$$\begin{aligned} a_i(R_i\varphi, v) &= 0 & \forall v \in H_0^1(\Omega_i) \\ R_i\varphi &= \varphi & \text{sur } \Gamma \\ R_i\varphi &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.2)$$

La démonstration du théorème est basée sur deux hypothèses, en plus de celles concernant l'existence des extensions harmoniques continues et discrètes :

- la régularité du problème (5.2), i.e. il existe une constante $C > 0$ indépendante des pas h et H tel que

$$\|R_i\varphi\|_i \leq C \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \Phi_{\underline{h}}; \quad (5.3)$$

- la deuxième hypothèse concerne les propriétés d'approximation des sous-espaces d'éléments finis utilisés ([4]) .

On a d'abord:

$$\|R_{1,h}\varphi\| \leq \|R_1\varphi - R_{1,h}\varphi\| + \|R_1\varphi\| \quad (5.4)$$

Les propriétés d'approximation des sous-espaces d'éléments finis utilisés donnent l'estimation suivante:

$$\|R_1\varphi - R_{1,h}\varphi\| \leq CH^s \|R_1\varphi\|_{1+s}$$

Par régularité du problème (5.2) on a:

$$\|R_1\varphi\|_{1+s} \leq C \|\varphi\|_{\frac{1+s}{2}, \Gamma} .$$

et en utilisant les hypothèses inverses, on a aussi:

$$\|\varphi\|_{\frac{1+s}{2}, \Gamma} \leq CH^{-s} \|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} .$$

l'inégalité (5.4) permet alors d'avoir finalement:

$$\|R_{1,h}\varphi\| \leq C \|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} .$$

Pour conclure on remarque que, par définition de la norme $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$, on a:

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C \|R_{2,H}\varphi\|$$

□

En appliquant ce résultat à la triangulation grossière \mathcal{T}_H , on obtient des relations analogues en remplaçant $R_{1,h}\varphi$ par $R_{1,H}\varphi$.

Si on introduit les constantes suivantes (utiles dans l'analyse de la convergence):

$$\sigma_{\underline{h}} = \sup \left\{ \frac{\|R_{1,h}\varphi\|_1^2}{\|R_{2,H}\varphi\|_2^2}, \varphi \in \Phi_{\underline{h}} \right\}; \quad \tau_{\underline{h}} = \sup \left\{ \frac{\|R_{2,H}\varphi\|_2^2}{\|R_{1,h}\varphi\|_1^2}, \varphi \in \Phi_{\underline{h}} \right\}; \quad (5.5)$$

$$\sigma_H = \sup \left\{ \frac{\|R_{1,H}\varphi\|_1^2}{\|R_{2,H}\varphi\|_2^2}, \varphi \in \Phi_{\underline{h}} \right\}; \quad \tau_H = \sup \left\{ \frac{\|R_{2,H}\varphi\|_2^2}{\|R_{1,H}\varphi\|_1^2}, \varphi \in \Phi_{\underline{h}} \right\}; \quad (5.6)$$

on a alors, grâce au théorème 5.2, les relations suivantes :

$$\frac{1}{C_2^2} \leq \sigma_{\underline{h}} \leq C_1^2 \quad , \quad \frac{1}{C_1^2} \leq \tau_{\underline{h}} \leq C_2^2 \quad (5.7)$$

et des relations identiques en remplaçant σ_h (resp. τ_h) par σ_H (resp. τ_H).

5.2 Quelques lemmes utiles

5.2.1 Cas d'une approximation EF standard

On considère le cas d'un problème de convection-diffusion stationnaire:
trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (5.8)$$

où:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [\tilde{a} \nabla u \cdot \nabla v + v \tilde{b} \cdot \nabla u + \tilde{c} u v] dx.$$

On considère la décomposition $a(\cdot, \cdot) = a_s(\cdot, \cdot) + b(\cdot, \cdot)$ avec

$$a_s(u, v) = \int_{\Omega} \tilde{a} \nabla u \cdot \nabla v dx ; b(u, v) = \int_{\Omega} [v(\tilde{b} \cdot \nabla u) + \tilde{c} u v] dx$$

On suppose que les coefficients sont suffisamment réguliers et que la frontière du domaine Ω est suffisamment régulière, par exemple lipschitzienne par morceaux.

On sait alors que, sous ces hypothèses et si les conditions de compatibilité sur le second membre et les conditions aux limites sont vérifiées, le problème (5.8) admet une solution unique ([7], [5]). Pour les problèmes discrets rencontrés, on sait aussi que, sous ces mêmes hypothèses et pourvu que le pas grossier H soit assez petit, ils admettent une solution unique suffisamment régulière ([15]).

Il en résulte alors que si le pas grossier H est assez petit, le théorème d'extension est valable. Les preuves des hypothèses (5.11) et (5.17) étant analogues, on se limitera à la vérification de (5.11), celle de (5.17) suit les mêmes lignes en remplaçant $\tilde{V}_{1,H}$ par \tilde{V}_H et $H_0^1(\Omega_1)$ par $H_0^1(\Omega)$.

On considère pour cela le problème adjoint:
trouver $v \in H_0^1(\Omega_1)$ tel que

$$a_1(w, v) = (f, w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega_1) \quad (5.9)$$

que l'on suppose assez régulier, plus précisément que ce problème admet une solution unique $v \in H^{1+\alpha}(\Omega_1)$ pour tout $f \in H^{\alpha-1}(\Omega_1)$ pour un $\alpha \in]0, 1]$ fixé et que :

$$\|v\|_{1+\alpha} \leq C \|f\|_{\alpha-1} \quad (5.10)$$

On va d'abord montrer le lemme suivant:

Lemme 5.3. *Pour tout $u \in \tilde{V}_{1,H}$, on a:*

$$\|u\|_{1-\alpha} \leq CH^\alpha \|u\|_1$$

Démonstration. Soit $u \in \tilde{V}_{1,H}$, on a alors par définition:

$$a_1(u, w) = 0 \quad \forall w \in V_{1,H}^0.$$

On va estimer $\|u\|_{1-\alpha}$ par un argument de dualité, appelé aussi argument de Nitsche. Pour cela, soit $f \in H^{\alpha-1}(\Omega_1)$ et v la solution du problème adjoint (5.9) défini sur Ω_1 . On a alors:

$$\begin{aligned} (u, f) &= a_1(u, v) \\ &= a_1(u, v - w) \quad \forall w \in V_{1,H}^0 \quad (\text{car } u \in \tilde{V}_{1,H}) \\ &\leq C \|u\|_1 \inf_{w \in V_{1,H}^0} \|v - w\|_1. \end{aligned}$$

En utilisant alors la propriété d'approximation standard suivante ([4]): pour tout $u \in H_0^1(\Omega_1)$

$$\inf_{w \in V_{1,H}^0} \|v - w\|_1 \leq CH^\alpha \|u\|_{1+\alpha}$$

et l'hypothèse de régularité (5.10), on obtient:

$$\begin{aligned} (u, f) &\leq CH^\alpha \|v\|_{1+\alpha} \|u\|_1 \\ &\leq CH^\alpha \|u\|_1 \|f\|_{\alpha-1} \end{aligned}$$

Or, par définition, on a:

$$\|u\|_{1-\alpha} = \sup \left\{ \frac{(u, f)}{\|f\|_{\alpha-1}}, f \in H^{\alpha-1}(\Omega_1), f \neq 0 \right\}$$

ce qui nous donne finalement

$$\|u\|_{1-\alpha} \leq CH^\alpha \|u\|_1$$

Pour vérifier l'hypothèse (5.11), on considère d'abord le cas où $u \in \tilde{V}_{1,H}$ et $v \in V_{1,h}$. En intégrant par parties, on obtient:

$$\int_{\Omega_1} v(\tilde{b} \cdot \nabla u) dx = - \int_{\Omega_1} u \nabla \cdot (v \tilde{b}) dx + \int_{\partial\Omega_1} (uv \tilde{b}) \cdot \vec{n} ds ;$$

où \vec{n} désigne la normale extérieure à $\partial\Omega_1$. Comme $u \in \tilde{V}_{1,H}$, on a en particulier $u = 0$ sur Γ , d'où :

$$\int_{\Omega_1} v(\tilde{b} \cdot \nabla u) dx = - \int_{\Omega_1} u \nabla \cdot (v \tilde{b}) dx$$

On obtient finalement:

$$b_1(u, v) = - \int_{\Omega_1} u \nabla \cdot (v \tilde{b}) dx + \int_{\Omega_1} cuv dx .$$

On a alors grâce aux hypothèses sur les coefficients \tilde{b} et \tilde{c} et en utilisant l'inégalité de Hölder:

$$|b_1(u, v)| \leq C \|u\|_0 \|v\|_1$$

en utilisant ensuite le lemme 5.3 et le fait que $\|u\|_0 \leq \|u\|_{1-\alpha}$, on obtient:

$$|b_1(u, v)| \leq CH^\alpha \|u\|_1 \|v\|_1$$

Dans le cas où $v \in \tilde{V}_{1,H}$ et $u \in V_{1,h}$, on a alors directement:

$$\begin{aligned} |b_1(u, v)| &\leq C \|v\|_0 \|u\|_1 \\ &\leq CH^\alpha \|u\|_1 \|v\|_1. \end{aligned}$$

□

On a donc, en résumé, montré que si u ou $v \in \tilde{V}_{1,H}$ alors:

$$|b_1(u, v)| \leq CH^\alpha \|u\|_1 \|v\|_1.$$

On voit ainsi que l'hypothèse (5.11) est vérifiée si on choisit le pas H suffisamment petit.

5.2.2 Cas de la méthode SDFEM

Il reste à étudier le terme suivant $\sum_{T \in \mathcal{T}_{1,H}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta u + cu) \vec{b} \cdot \nabla v dx$ dans le cas où u ou $v \in \tilde{V}_{1,H}$. Le terme $\sum_{T \in \mathcal{T}_{1,H}} \int_T cub \cdot \nabla v dx$ peut être traité de la même manière que dans le cas précédent. Il reste à estimer le terme $\sum_{T \in \mathcal{T}_{1,H}} \delta_T \int_T -\varepsilon \Delta u \vec{b} \cdot \nabla v dx$.

Soit donc $u \in \tilde{V}_{1,H}$ et $v \in V_{1,H}^0$. On a alors

$$\begin{aligned} |\delta_T \int_T \varepsilon \Delta u \vec{b} \cdot \nabla v dx| &\leq C \varepsilon \delta_T \|\Delta u\|_{0,T} |v|_{1,T} \\ &\leq C \varepsilon \delta_T \mu_{inv} h_T^{-2} \|u\|_{0,T} |v|_{1,T} && \text{(d'après (2.7))} \\ &\leq C \|u\|_{0,T} |v|_{1,T} && \text{(d'après (2.9))} \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_{1,H}} \delta_T \int_T \varepsilon \Delta u \vec{b} \cdot \nabla v dx \right| \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_{1,H}} \|u\|_{0,T} |v|_{1,T}$$

ce qui donne enfin en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_{1,H}} \delta_T \int_T \varepsilon \Delta u \vec{b} \cdot \nabla v dx \leq C \|u\|_0 |v|_1$$

Ceci permet de montrer, en utilisant le même raisonnement que dans la section précédente, que si u ou $v \in \tilde{V}_{1,H}$ alors:

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_{1,H}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta u + cu) \vec{b} \cdot \nabla v dx \right| \leq CH^\alpha \|u\|_1 \|v\|_1.$$

5.3 Théorème de convergence : cas 1

Dans ce cas la forme b correspond à la partie antisymétrique de la forme $a(\cdot, \cdot)$. On définit d'abord le sous-espace suivant :

$$\tilde{V}_{1,H} = \{z \in V_{1,h}^0 : a_1(z, v) = 0 \forall v \in V_{1,H}^0\}$$

Pour étudier la vitesse de convergence, on fait l'hypothèse suivante sur la forme $b(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists H_0 > 0 \text{ tel que pour tout } H \in]0, H_0] \text{ on a :} \\ |b_1(u, v)| \leq \varepsilon \|u\|_1 \|v\|_1 \text{ pour tout } (u, v) \text{ ou } (v, u) \in \tilde{V}_{1,H} \times V_{1,h} \end{cases} \quad (5.11)$$

où on désigne par la forme $b_1(\cdot, \cdot)$ la restriction de la forme $b(\cdot, \cdot)$ au domaine Ω_1 .

L'hypothèse (5.11) revient en fait à dire, de façon approchée, que si les pas sont assez petits, la partie non symétrique de la forme $a(\cdot, \cdot)$, appliquée aux éléments de $\tilde{V}_{1,H} \times V_{1,h}$ ou de $V_{1,h} \times \tilde{V}_{1,H}$ n'est pas importante devant la partie symétrique coercive $a_s(\cdot, \cdot)$. On montrera que l'hypothèse (5.11) est vérifiée dans le cas d'un problème de convection-diffusion stationnaire.

On va montrer maintenant le résultat principal suivant:

Théorème 5.4. *Sous les hypothèses (H1) et (5.11), il existe $\delta < 1$ indépendant de h et H (pour H assez petit) tel que :*

$$|||S_{\underline{h}}\varphi||| \leq \delta |||\varphi||| \quad \forall \varphi \in \Phi_{\underline{h}}$$

Démonstration. En prenant $v = w_H$ dans la relation (5.1) et en utilisant le fait que $w_{1,H} = R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi$ (lemme 1), on obtient:

$$a(w_H, w_H) = a_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi) \quad (5.12)$$

On va étudier séparément chaque terme de cette égalité. On a d'abord:

$$\begin{aligned} a(w_H, w_H) &= a_1(R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi, R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi) + a_2(R_{2,H}S_{\underline{h}}\varphi, R_{2,H}S_{\underline{h}}\varphi) \\ &= \|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1^2 + \|R_{2,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_2^2. \end{aligned}$$

Pour minorer le membre de gauche de cette relation, on utilise le théorème 5.2 et les relations (5.5); on obtient alors:

$$a(w_H, w_H) \geq \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H} \|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1^2 \quad (5.13)$$

On va majorer maintenant le terme de droite de (5.12), on a

$$\begin{aligned} a_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi) &= a_{1s}(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi) + b_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi) \\ &\leq \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1 \|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1 + b_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi) \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse (H2), on obtient:

$$a_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi) \leq (1 + \varepsilon) \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1 \|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1 \quad (5.14)$$

En combinant les relations (5.13)-(5.14), on obtient enfin :

$$\|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1 \leq (1 + \varepsilon) \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H} \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1 \quad (5.15)$$

Par ailleurs, on a par définition de $R_{1,H}\varphi$:

$$\begin{aligned} \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2 &= a_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) \\ &= a_1(R_{1,H}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) \\ &= a_{1s}(R_{1,H}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) + b_1(R_{1,H}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) \end{aligned}$$

en utilisant alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse (5.11), on obtient:

$$\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2 \leq (1 + \varepsilon) \|R_{1,H}\varphi\|_1 \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1$$

et donc:

$$\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1 \leq (1 + \varepsilon) \|R_{1,H}\varphi\|_1$$

ce qui nous donne finalement avec (5.15):

$$\|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1 \leq (1 + \varepsilon)^2 \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H} \|R_{1,H}\varphi\|_1 \quad (5.16)$$

Pour achever la preuve du théorème, il reste à montrer qu'il existe une constante $\delta < 1$ tel que:

$$(1 + \varepsilon)^2 \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H} \leq \delta$$

pour H suffisamment petit. Or, d'après la relation (5.7) , on a

$$\frac{1}{C_1^2} \leq \sigma_H \leq C_1^2$$

d'où:

$$\frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H} \leq \frac{C_1^2}{1 + C_1^2}.$$

En prenant alors H suffisamment petit, on peut trouver, d'après (5.11) un réel $\delta > 0$ tel que:

$$(1 + \varepsilon)^2 \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H} \leq \delta < 1$$

ce qui permet de conclure la preuve du théorème • □

Corollaire 5.5. *Si la forme a est symétrique coercive , alors le théorème ci-dessus est valable sans aucune condition sur H , car la forme $b(.,.)$ est nulle; on a alors l'estimation suivante:*

$$\|S_{\underline{h}}\varphi\| \leq \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H} \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \Phi_h$$

En fait dans ce cas, cette estimation peut être améliorée comme suit :

$$\|S_{\underline{h}}\varphi\| \leq \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H} \left(1 - \frac{1}{\sigma_H \tau_h}\right)^{1/2} \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \Phi_h \bullet$$

Démonstration. En effet, en prenant $\varepsilon = 0$ dans la relation (5.15), on obtient:

$$\|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1 \leq \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H} \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1$$

Pour estimer $\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1$, on va utiliser la symétrie de la forme $a(.,.)$ comme suit:

$$\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2 = \|R_{1,H}\varphi\|_1^2 + \|R_{1,h}\varphi\|_1^2 - 2a_1(R_{1,H}\varphi, R_{1,h}\varphi)$$

or, par définition de $R_{1,H}\varphi$ on a:

$$a_1(R_{1,h}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) = 0;$$

d'où:

$$a_1(R_{1,H}\varphi, R_{1,h}\varphi) = \|R_{1,h}\varphi\|_1^2$$

et alors:

$$\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2 = \|R_{1,H}\varphi\|_1^2 - \|R_{1,h}\varphi\|_1^2$$

Par ailleurs en utilisant le théorème d'extension, on obtient successivement:

$$\begin{aligned} \|R_{1,h}\varphi\|_1 &\geq \frac{1}{\tau_{\underline{h}}}\|R_{2,H}\varphi\|_2 \\ &\geq \frac{1}{\sigma_H\tau_{\underline{h}}}\|R_{1,H}\varphi\|_1 \end{aligned}$$

On a alors:

$$\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2 \leq \left(1 - \frac{1}{\sigma_H\tau_{\underline{h}}}\right) \|R_{1,H}\varphi\|_1^2$$

ce qui permet de conclure. \square

5.4 Théorème de convergence : cas 2

On considère ici le cas où la forme $a(.,.)$ n'est pas coercive et la forme $b(.,.)$ non égale à sa partie antisymétrique. Pour énoncer l'hypothèse supplémentaire à faire sur la forme b , on introduit le sous-espace orthogonal de V_H par rapport à la forme a :

$$\tilde{V}_H = \{z \in V_h : a(z, v) = 0 \forall v \in V_H\}$$

et on suppose alors que l'on a la propriété suivante:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists H_0 > 0 \text{ tel que pour tout } H \in]0, H_0] \text{ on a :} \\ |b(u, v)| \leq \varepsilon \|u\| \|v\| \text{ pour tout } (u, v) \in \tilde{V}_H \times V_h \end{cases} \quad (5.17)$$

On a alors le résultat suivant:

Théorème 5.6. *Sous les hypothèses (H1), (5.11), et (5.17), il existe un réel $\delta < 1$ indépendant de h et H (pour H assez petit) tel que*

$$\|S_{\underline{h}}\varphi\| \leq \delta \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \Phi_{\underline{h}}$$

Démonstration. La preuve suit les mêmes lignes que celle du théorème 5.4, à l'exception de la minoration du terme $a(w_H, w_H)$, en effet dans le cas présent on a:

$$\begin{aligned} a(w_H, w_H) &= \|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1^2 + \|R_{2,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1^2 + b(w_H, w_H) \\ &= \|w_H\|^2 + b(w_H, w_H) \end{aligned}$$

où on a le terme $b(w_H, w_H)$ en plus. Mais $w_H \notin \tilde{V}_H$ et on ne peut donc utiliser l'hypothèse (5.17) pour estimer ce terme, on va établir cependant le résultat suivant :

$$|b(w_H, w_H)| \leq 6\varepsilon (\|w_H\|^2 + \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2) \quad (5.18)$$

En effet si on pose: $w_{\underline{h}} = w_H - R_{1,H}\varphi + R_{1,h}\varphi$, alors d'après (5.1) on a:

$$a(w_{\underline{h}}, v) = 0 \quad \forall v \in V_H$$

ce qui entraîne que $w_{\underline{h}} \in \tilde{V}_H$. On a alors:

$$\begin{aligned} b(w_H, w_H) &= b(w_{\underline{h}}, w_{\underline{h}}) + b(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) + b(w_{\underline{h}}, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) + \\ &\quad + b(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, w_{\underline{h}}) \end{aligned}$$

Comme $w_h \in \tilde{V}_H$ et $R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi \in \tilde{V}_{1,H}$, on peut utiliser les hypothèses (5.11) et (5.17), ce qui donne:

$$\begin{aligned} |b(w_H, w_H)| &\leq \varepsilon (\|w_h\|^2 + \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2) + 2\|w_h\| \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\| \\ &\leq 2\varepsilon (\|w_h\|^2 + \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2) \end{aligned}$$

et comme $\|w_h\| \leq \|w_H\| + \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2$, on obtient:

$$|b(w_H, w_H)| \leq 2\varepsilon (2\|w_H\|^2 + 3\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2)$$

ce qui permet d'obtenir l'inégalité (5.18). On a alors:

$$\begin{aligned} a(w_H, w_H) &= \|w_H\|_2 + b(w_H, w_H) \\ &\geq (1 - 6\varepsilon)\|w_H\|^2 - 6\varepsilon\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2. \end{aligned}$$

En notant que:

$$\|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1^2 + \|R_{2,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1^2 = \|w_H\|^2;$$

et en utilisant le théorème d'extension, on obtient:

$$\|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1 \leq \sqrt{\delta_H}\|w_H\| \quad (5.19)$$

où on a posé:

$$\delta_H = \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H}.$$

En utilisant alors les relations (5.13) et (5.18), on obtient:

$$(1 - 6\varepsilon)\|w_H\|^2 \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{\delta_H}\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1\|w_H\| + 6\varepsilon\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2.$$

Soit $t > 0$ un réel quelconque, en utilisant l'inégalité: $xy \leq \frac{1}{2t}x^2 + \frac{t}{2}y^2$ dans la relation ci-dessus, on obtient:

$$\left[(1 - 6\varepsilon) - \frac{\sqrt{\delta_H}(1 + \varepsilon)}{2}t \right] \|w_H\|_2 \leq \left[\frac{\sqrt{\delta_H}(1 + \varepsilon)}{2t} + 6\varepsilon \right] \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2$$

d'où:

$$\|w_H\|_2 \leq f(t)\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2 \quad \text{pour tout } t > 0 \quad (5.20)$$

avec:

$$f(t) = \frac{\frac{s}{t} + 6\varepsilon}{(1 - 6\varepsilon) - st} \quad \text{et} \quad s = \frac{\sqrt{\delta_H}(1 + \varepsilon)}{2}.$$

L'étude de la fonction $f(t)$ montre qu'elle atteint son minimum près de la valeur $t_0 = \frac{1 - 6\varepsilon}{2s}$, et pour cette valeur on a :

$$f(t_0) = 4s^2 \left[\frac{2s^2 + 6\varepsilon(1 - 6\varepsilon)}{2s\varepsilon^2 + (1 - 6\varepsilon)^2} \right]$$

que l'on peut écrire sous la forme:

$$f(t_0) = \delta_H \tilde{g}(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{g}(\varepsilon) = 1.$$

On a donc

$$\|w_H\|_2 \leq \delta_H \tilde{g}(\varepsilon) \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2.$$

En revenant à (5.20), on obtient alors:

$$\|R_{1,H}S_{\underline{h}}\varphi\|_1 \leq \delta_H \sqrt{\tilde{g}(\varepsilon)} \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1 \quad (5.21)$$

On va maintenant estimer $\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1$ en fonction de $\|R_{1,H}\varphi\|_1$. On a d'abord:

$$\begin{aligned} \|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2 &= a_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) + b_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) \\ &= a_1(R_{1,H}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) + b_1(R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) \end{aligned}$$

et en utilisant (H2), on obtient:

$$\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2 \leq a_1(R_{1,H}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) + \varepsilon\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1^2 \quad (5.22)$$

D'autre part, on a

$$a_1(R_{1,H}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) = a_{1s}(R_{1,H}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) + b_1(R_{1,H}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi)$$

d'où l'on déduit, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse (H2):

$$a_1(R_{1,H}\varphi, R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi) \leq (1 + \varepsilon)\|R_{1,H}\varphi\|_1\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1 \quad (5.23)$$

En combinant (5.22) et (5.23), on obtient:

$$\|R_{1,H}\varphi - R_{1,h}\varphi\|_1 \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\|R_{1,H}\varphi\|_1 \quad ;$$

ce qui nous permet d'écrire finalement:

$$\|R_{1,H}S_h\varphi\|_1 \leq \delta_{Hg}(\varepsilon)\|R_{1,H}\varphi\|_1 \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{g}(\varepsilon) = 1 .$$

d'où la conclusion du théorème 5.6. □

Ceci nous permet de conclure que la méthode F.A.C appliquée à la méthode SDFEM converge vers la solution du problème avec un facteur de convergence indépendant des pas h, H dès que H est assez petit.

6 Résultats numériques

Les performances de la méthode F.A.C appliquées au problème de convection-diffusion stationnaire discrétisé par la méthode SDFEM seront analysées dans plusieurs cas, et en faisant varier les différents paramètres: que ce soit ceux de la méthode SDFEM, ou ceux de l'algorithme de résolution (solveurs approchés, méthode multiplicative ou comme préconditionneur, méthodes itératives pour systèmes non symétriques,...). Ces performances seront comparées à ceux d'une méthode multigrille classique appliquée au même problème.

La mise en oeuvre numérique pour les cas tests étudiés ici a été réalisée à l'aide de la librairie Diffpack ([8], [3]).

Pour une étude théorique de la convergence de la méthode SDFEM pour les problèmes de convection-diffusion avec couches limites, on pourra consulter [16].

6.1 Cas d'un problème avec "couches limites"

Dans ce cas, la solution présente une forte variation sur une région de très faible diamètre ([16]). L'utilisation d'un maillage adaptatif est donc spécialement recommandée dans ce cas. Afin de faire ce test on a choisi comme solution exacte du problème aux limites posé sur $\Omega =]0, 1[^2$ la fonction suivante:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}e^{-100(x^2+(y-1)^2)} + \frac{e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} - e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{1 - e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}$$

qui présente aussi une autre zone de forte variation mais loin de la zone "couche limite".

La figure 2 illustre la mauvaise qualité de la solution obtenue avec un facteur δ_T non approprié. Quand ce facteur est calculé à partir de la formule (2.10), la figure 3 montre que la solution obtenue est bien meilleure.

La figure 4 illustre que l'on peut atteindre la même qualité de la solution approchée en utilisant beaucoup moins d'éléments grâce à un maillage adaptatif utilisant 3 niveaux de raffinement.

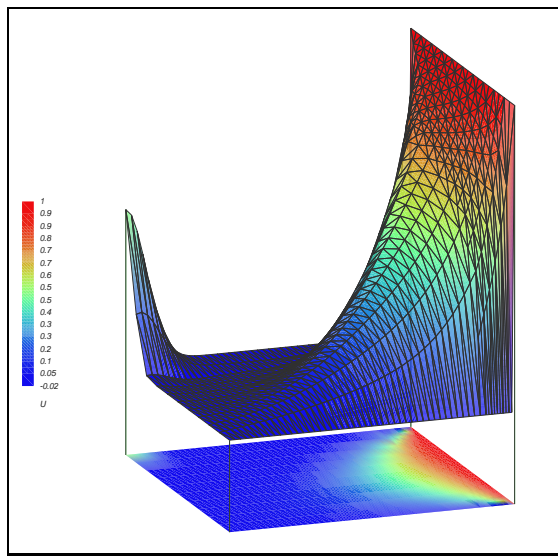


FIG. 2 – $h = 1/50$, $\epsilon = 0.001$, $\delta_T = 0.5$ avec un niveau de raffinement

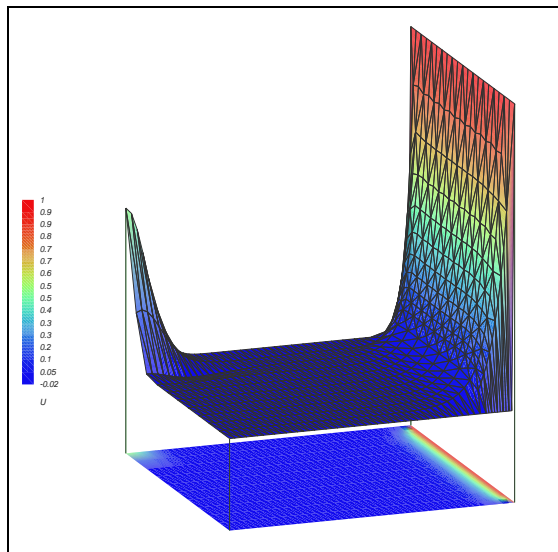


FIG. 3 – $h = 1/50$, $\epsilon = 0.001$, $\delta_T = 0.05$ avec un niveau de raffinement

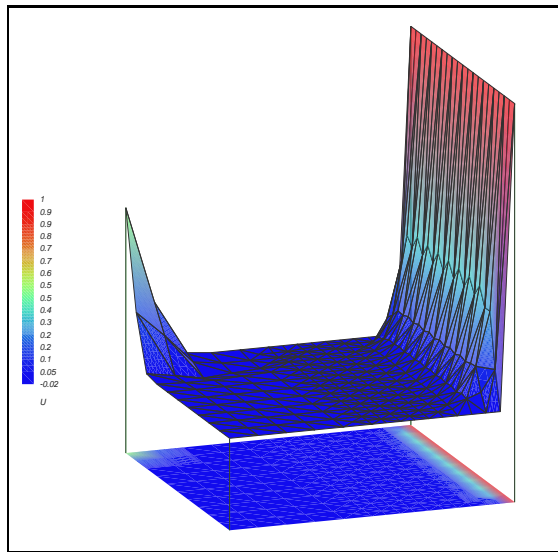


FIG. 4 – $h = 1/10$, $\epsilon = 0.001$, $\delta_T = 0.05$ avec 3 niveaux de raffinement

6.2 Comparaison entre FAC et multigrille

On compare maintenant les performances de la méthode FAC et d'une méthode multigrille pour le même problème précédent. On fera varier le pas h de la discrétisation, le coefficient ϵ , le paramètre δ_T de la SDFEM et enfin le nombre de niveaux du maillage adaptatif utilisé.

6.2.1 Etude en fonction de h

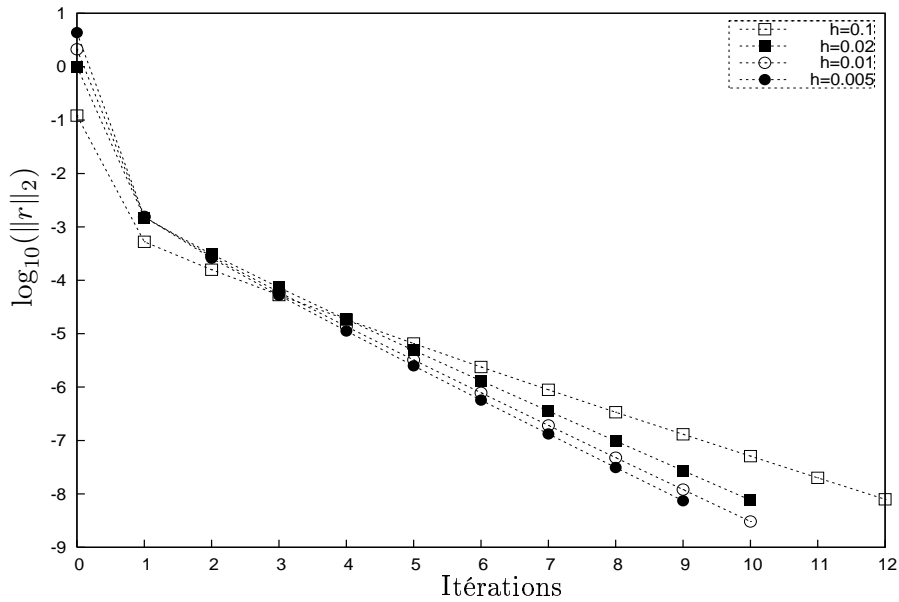


FIG. 5 – Convergence de FAC en fonction du pas h

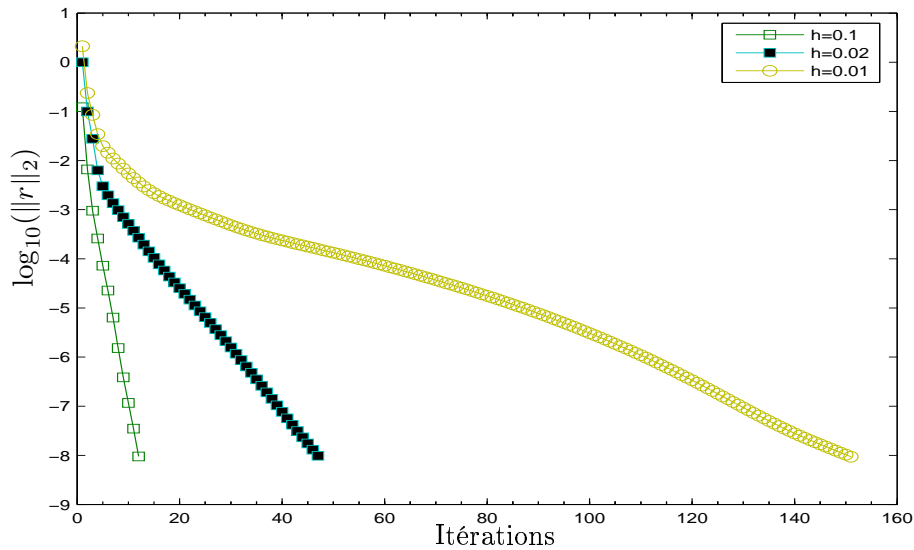


FIG. 6 – Convergence de MG en fonction du pas h

On présente dans cette partie les performances des méthodes étudiées lorsque le pas h varie. Ceci pose problème car le facteur δ_T dépend, normalement, de h . Cela se voit facilement sur la figure 6 où les performances de la méthode multigrille se dégradent très rapidement, alors que la méthode FAC reste stable dans ses performances comme le montre la figure 5. Ces mauvaises performances de la méthode multigrille sont dues au fait que le problème traité ici est non symétrique et sa stabilité dépend beaucoup du choix du paramètre δ_T .

6.2.2 Etude en fonction de ϵ

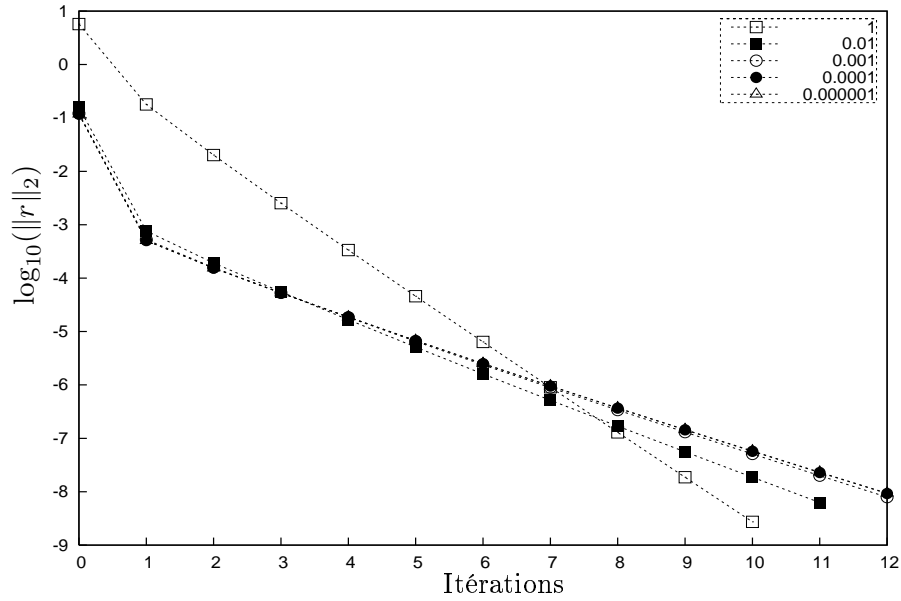


FIG. 7 – Convergence de FAC en fonction de ϵ

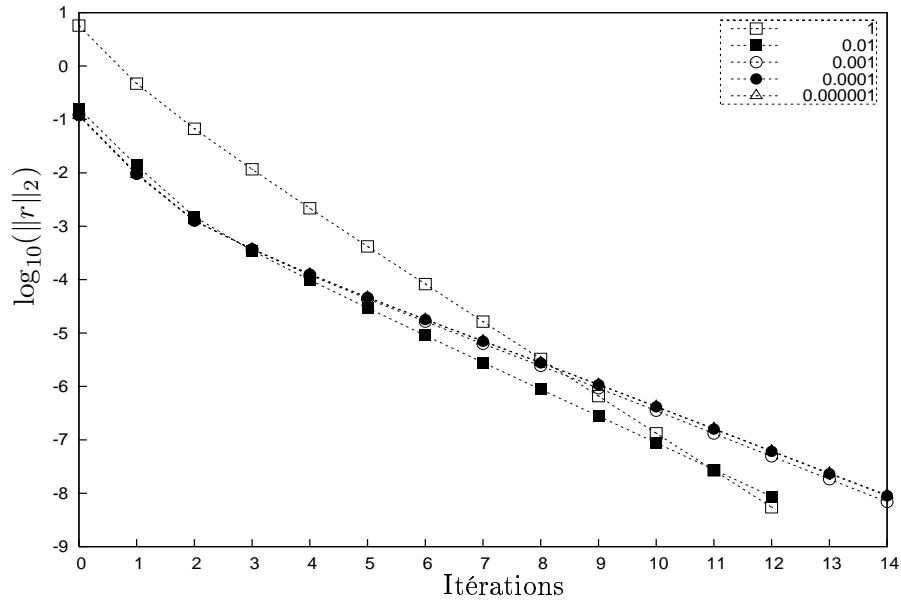


FIG. 8 – Convergence de MG en fonction de ϵ

Dans ce cas, le nombre de Pecllet augmente lorsque ϵ diminue, les 2 méthodes se comportent de manière similaire avec un avantage pour la méthode FAC comme l'illustrent les figures 7 et 8.

6.2.3 Etude en fonction de δ_T

Dans ce cas, les 2 méthodes se comportent aussi de manière similaire avec toujours un avantage pour la méthode FAC comme l'illustrent les figures 9 et 10.

6.2.4 Etude en fonction du nombre de niveaux

Les performances de la méthode FAC sont ici bien meilleures que ceux de la méthode multigrille lorsque le nombre de niveaux augmente. Malgré une augmentation du nombre d'itérations des 2 mé-

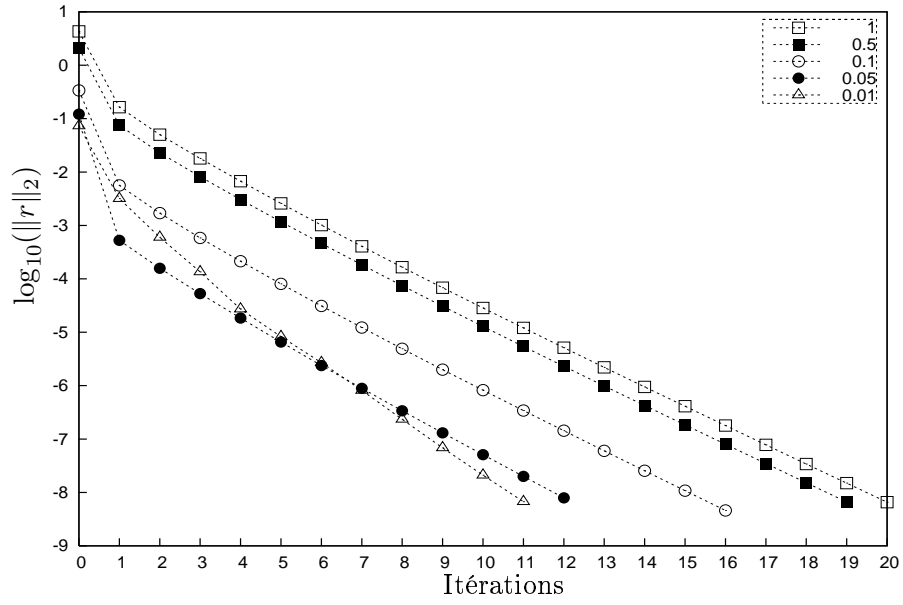


FIG. 9 – Convergence de FAC en fonction de δ_T

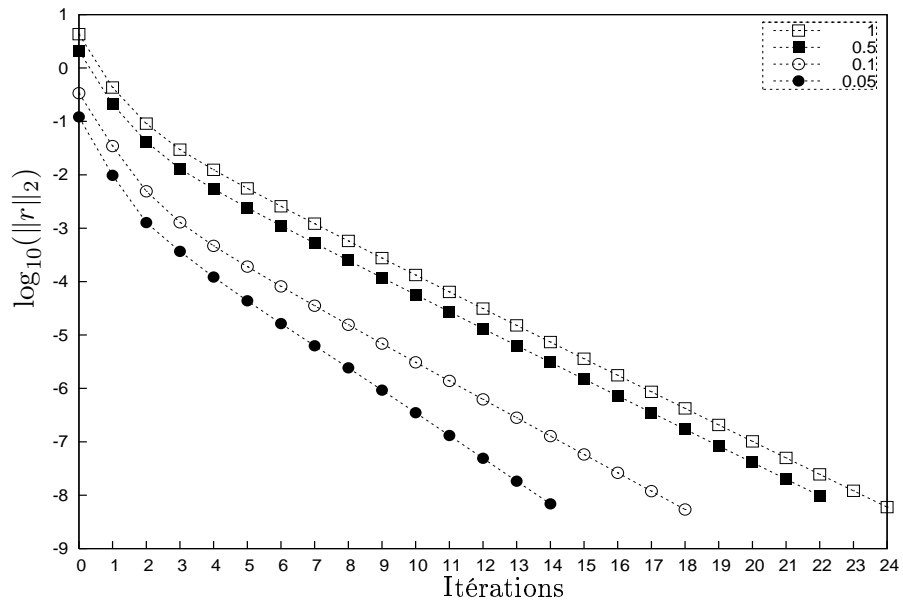


FIG. 10 – Convergence de MG en fonction de δ_T

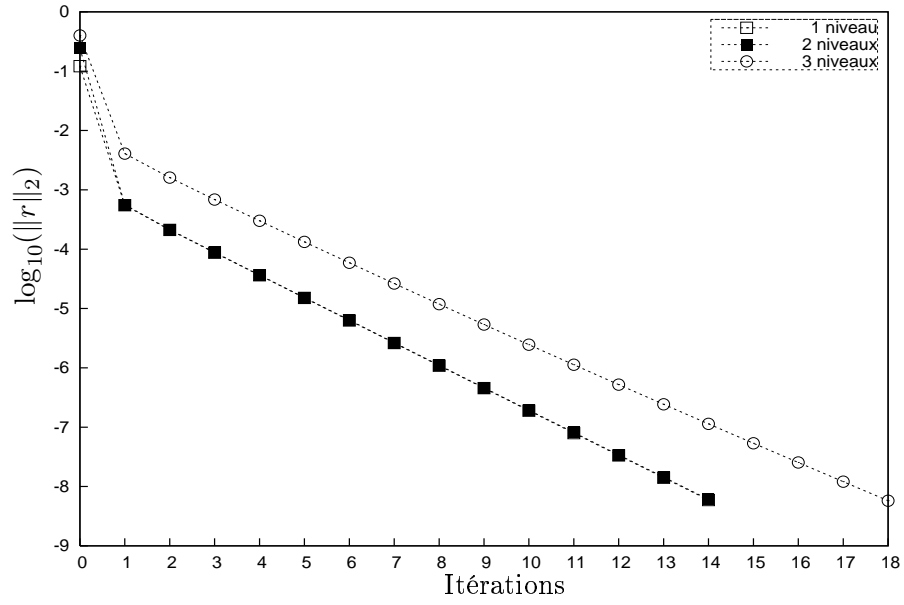


FIG. 11 – Convergence de FAC en fonction du nombre de niveaux

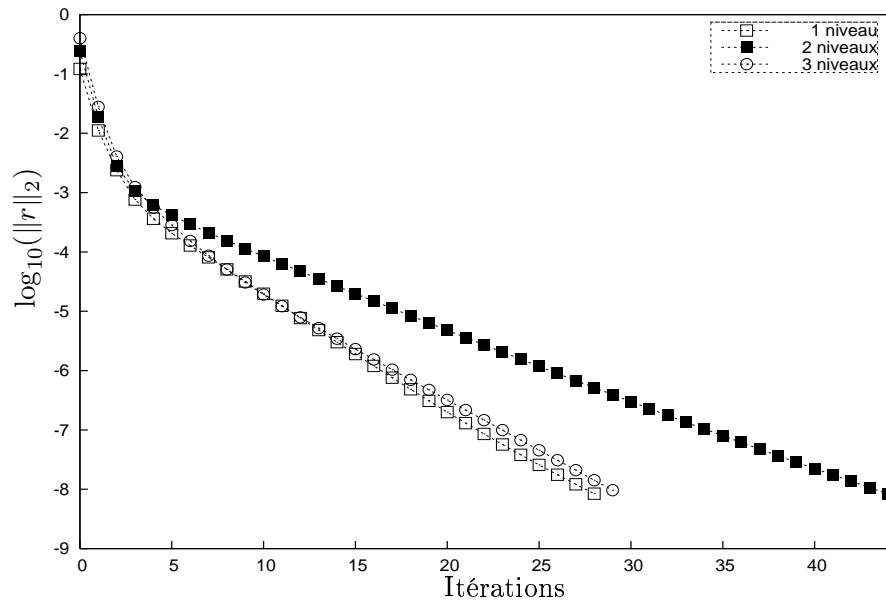


FIG. 12 – Convergence de MG en fonction du nombre de niveaux

thodes lorsque le nombre de niveaux augmente, cette augmentation est moins rapide pour FAC que pour la méthode multigrille.

6.3 Conclusions

L'analyse de la convergence de la méthode FAC appliquée au problème de convection-diffusion, discrétisé par la méthode SDFEM, montre qu'elle a un facteur de convergence indépendant du pas h lorsque celui-ci est assez petit.

Ceci est vrai en général pour toute méthode de type "multigrille"; mais les résultats numériques montrent que lorsque le problème traité n'est plus symétrique, les performances des méthodes multigrilles se dégradent très rapidement en fonction des différents paramètres de la méthode SDFEM. La méthode multigrille doit être affinée en utilisant des lisseurs adaptés à chaque cas (choix du lisseur, nombre de pré et post-lissage, choix des opérateurs de transfert inter-grilles,...).

Les résultats numériques obtenus pour la méthode FAC montrent qu'on pas besoin de "tuning" particulier pour qu'elle garde les mêmes performances lorsque l'on fait varier les différents paramètres de la méthode SDFEM. Ce qui montre qu'elle est bien adaptée pour la résolution efficace des problèmes discrétisé sur des maillages adaptatifs, que le problème soit symétrique ou non. Une étude qualitative est cependant nécessaire afin d'étudier plus en détail l'évolution des performances de la méthode FAC en fonction du paramètre δ_T de la méthode SDFEM lorsque la convection devient de plus en plus dominante.

Références

- [1] P. Bjorstadt and O. Widlund. Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures. *SIAM.J.Num.Analysis*, 23(6):1097–1121, 1989.
- [2] S.C. Brenner and L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 1994.
- [3] A.M. Bruaset, H.P. Langtangen, and G.W. Zumbusch. Domain decomposition and multilevel methods in diffpack. In M. Espedal P. Bjöestad and D. Keys, editors, *Proceedings of the 9th Conference on Domain Decomposition*. Wiley, 1997.
- [4] P.G. Ciarlet. *Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland, 1978.
- [5] P. Grisvard. *Elliptic problems on non smooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman, 1985.
- [6] Hugues and Barbolosa. A stabilized finite element method for convection-diffusion problems. *SIAM J.Numer.Anal.*, 1979.
- [7] O.A. Ladyzhenskaya and N.N. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, volume 46 of *Mathematics, Science and Engineering*. Academic Press, New York and London, 1968.
- [8] H.P. Langtangen. *Computational Partial Differential Equations. Numerical Methods and Diffpack Programming*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer-Verlag, 1999.
- [9] P.L. Lions. Alternating schwarz method I. In R. GLOWINSKI and J. PERIAUX, editors, *Domain Decomposition Methods*. SIAM, 1988.
- [10] J. Mandel and S.F. McCormick. Iterative refinement techniques : The two-level case. In T. CHAN, R. GLOWINSKI, J. PERIAUX, and O.WIDLUND, editors, *Domain Decomposition Methods*, pages 81–92. SIAM, 1989.
- [11] L.D. Marini and A. Quarteroni. A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. *Numer.Math.*, 55:575–598, 1989.
- [12] S.F. McCormick. *Multilevel techniques for partial differential equations*. SIAM, 1989.
- [13] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computing. Oxford Science Publications, 1999.
- [14] H.G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*. Springer-Verlag, 1996.
- [15] A.H. Schatz. An observation concerning ritz-galerkin methods with indefinite bilinear forms. *Math.Comput.*, 28:959–962, 1974.
- [16] M. Stynes and L. Tobiska. The SDFEM for a convection-diffusion problem with a boundary layer: optimal error analysis and enhancement of accuracy. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 41(5):1620–1642, 2003.