



**HAL**  
open science

## **Chaos quantique avec des atomes refroidis par laser**

Hans Lignier, Quentin Thommen, Julien Chabé, Dominique Delande, Jean Claude Garreau, Pascal Szriftgiser, Véronique Zehnlé

► **To cite this version:**

Hans Lignier, Quentin Thommen, Julien Chabé, Dominique Delande, Jean Claude Garreau, et al.. Chaos quantique avec des atomes refroidis par laser. 2005. <hal-00016075>

**HAL Id: hal-00016075**

**<https://hal.science/hal-00016075v1>**

Preprint submitted on 17 Dec 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Chaos quantique avec des atomes refroidis par laser

Hans Lignier<sup>1,2</sup>, Quentin Thommen<sup>1,3</sup>, Julien Chabé<sup>1</sup>, Dominique Delande<sup>4</sup>, Jean Claude Garreau<sup>1</sup>, Pascal Szriftgiser<sup>1</sup>, & Véronique Zehnlé<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Université de Lille 1, Villeneuve d'Ascq, France

<sup>2</sup> Adresse actuelle : Quantum Optics and Laser Science, Blackett Laboratory, Imperial College, London, UK

<sup>3</sup> Adresse actuelle : Optique Nonlinéaire Théorique, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique

<sup>4</sup> Laboratoire Kastler-Brossel, Université Paris 6, Paris, France

`jean-claude.garreau@univ-lille1.fr`

## 1 Le chaos quantique

La dynamique des systèmes chaotiques est le sujet de nombreuses études en physique. Après les percées accomplies par Poincaré au début du XX<sup>e</sup> siècle, les idées se sont fixées avec la découverte par Lorenz dans les années 60 de la “sensibilité aux conditions initiales”, qui découle de la non linéarité des équations du mouvement. Plusieurs difficultés se présentent cependant quand l'on tente de généraliser la notion de chaos à un système quantique.

Pour un système quantique, les variables conjuguées ne peuvent pas être mesurées simultanément avec une précision meilleure que  $\hbar$ , et donc l'état du système à un temps donné ne sera pas représenté par un point, dans l'espace de phase. De plus, si les équations du mouvement de Newton (les flots) peuvent être facilement rendues non linéaires, ceci n'est pas vrai pour l'équation de Schrödinger. La position joue un double rôle en mécanique classique, à la fois de variable dynamique et de paramètre du potentiel. La variable dynamique de l'équation de Schrödinger est la fonction d'onde, qui n'intervient pas dans l'expression du potentiel ; changer l'expression du potentiel ne rend pas la dynamique quantique non linéaire. Un système régit par cette équation ne présentera donc pas de sensibilité aux conditions initiales. *On définit le chaos quantique comme l'étude des systèmes quantiques dont la limite classique est chaotique.* On s'attend, d'après ce que nous venons de dire, à ce qu'il y ait une très nette différence entre les dynamiques classique et quantique d'un tel système. Cependant, la dynamique quantique garde en général un “souvenir” du fait que la dynamique classique est chaotique.

## 2 La localisation dynamique

Un exemple très connu d'un tel “souvenir” est la “localisation dynamique”, identifiée pour la première numériquement à la fin des années 1970 [1,2]. Ces auteurs étudiaient alors un système très populaire, de par sa simplicité et la facilité d'en simuler numériquement la dynamique quantique et classique : le *rotateur forcé*, ou *kicked rotor* (KR)<sup>1</sup>. Celui-ci consiste en une particule tournant sur une orbite circulaire fixe, à laquelle on applique une

---

<sup>1</sup> Nous utiliserons ici le terme Anglais consacré.

force instantanée de façon périodique. Avec des normalisations convenables, le hamiltonien d'un tel système s'écrit :

$$H = \frac{P^2}{2} + K \cos x \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n), \quad (1)$$

Pour des forçages tels que  $K \gtrsim 1$ , la dynamique classique du KR est mixte, et pour  $K \gtrsim 5$  la dynamique est pratiquement ergotique, consistant en une diffusion uniforme dans l'ensemble de l'espace de phase.

Si l'on compare l'évolution quantique du système à celle de la distribution classique correspondante, dans le cas où la dynamique classique est chaotique ( $K \sim 10$ ), on constate une nette différence entre ces deux dynamiques. Ceci se manifeste par la saturation de l'énergie cinétique moyenne (avec suppression de la diffusion ergotique) et par le changement de forme de la fonction d'onde, celle-ci prenant, au-delà d'un temps caractéristique  $t_L$ , une forme exponentielle caractéristique des phénomènes de localisation (voir figure 1).

Étant périodique, le hamiltonien (1) peut-être étudié par l'analyse de Floquet quantique. Ceci revient à étudier les valeurs et les états propres de l'opérateur d'évolution sur une période, que l'on nomme quasi-énergies et quasi-états de Floquet. Ces quasi-états s'avèrent être eux-mêmes localisés exponentiellement dans l'espace des impulsions, avec une longueur de localisation caractéristique  $L$ . Un état initial quelconque centré autour de  $P = 0$  et localisé sur une largeur  $\ell \ll L$  se décomposera (avec des coefficients  $c_i$ ) essentiellement sur un "petit" nombre de quasi-états localisés autour de l'origine sur une extension  $\ell$ . L'évolution de l'énergie cinétique moyenne sera donc donnée par

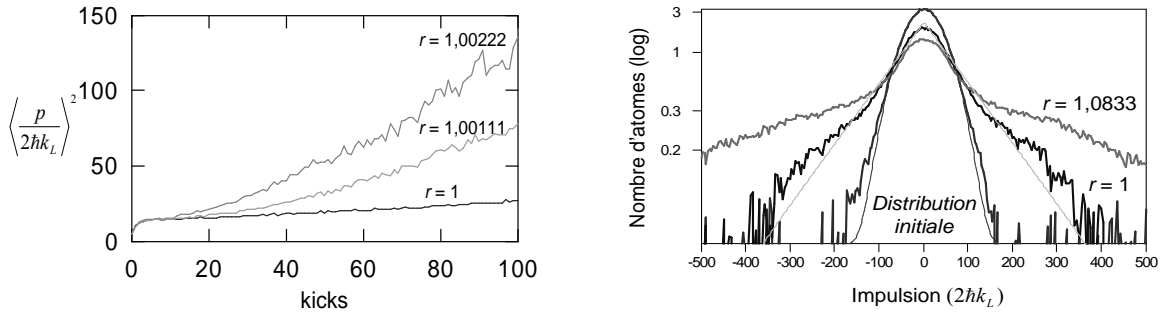
$$\langle P^2 \rangle = \sum_{i,j} c_j^* c_i e^{in(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} \langle \varphi_j | P^2 | \varphi_i \rangle, \quad (2)$$

où  $\varepsilon_i$  et  $\varphi_i$  sont les quasi-énergies et les quasi-états. Dans cette somme, les quasi-énergies sont décorréelées entre elles et les termes croisés tendront donc vers une moyenne nulle. Seuls les termes diagonaux contribueront à l'évolution au-delà du *temps de localisation*  $t_L$ , donnant  $\langle P^2 \rangle \approx \sum_i |c_i|^2 \langle \varphi_i | P^2 | \varphi_i \rangle$ . On en conclut que l'état initial ne pourra s'élargir en impulsion au-delà de  $L$ , la portée en impulsion des quasi-états eux-mêmes. Ceci montre que la LD résulte d'un effet d'*interférence quantique*.

Le *kicked rotor* peut être réalisé expérimentalement en plaçant des atomes refroidis par laser dans une onde lumineuse stationnaire. Dans des conditions très générales [3], les atomes voient le rayonnement comme un potentiel (agissant sur leur centre de masse), appelé *potentiel optique*, proportionnel à l'intensité et inversement proportionnel au désaccord de fréquence laser-atome. Une onde stationnaire forme donc un potentiel sinusoïdal. L'unité d'énergie naturelle pour notre problème est "l'énergie de recul"  $E_r$ .<sup>2</sup> Avec des lasers couramment utilisés, on peut fabriquer des potentiels optiques dont la profondeur est de l'ordre de  $\sim 1000E_r$ , alors que les atomes refroidis ont des énergies cinétiques de

<sup>2</sup> C'est l'énergie cinétique acquise par un atome en émettant un photon :  $E_r = \hbar^2 k_L^2 / (2M)$  (où  $k_L = 2\pi/\lambda_L$  est le nombre d'onde du photon et  $M$  la masse de l'atome), à laquelle on peut associer une *vitesse de recul*  $v_r = \hbar k_L / M$ , une *température de recul*  $T_r = E_r / k_B$ , etc.

l'ordre de  $\sim 10E_r$ . Le potentiel optique peut donc facilement piéger les atomes. De plus, la longueur d'onde de de Broglie de ces atomes s'avère être de l'ordre de  $\lambda_L/3$ , à comparer à la taille des puits du potentiel optique,  $\lambda_L/2$ . Ce sont là les conditions pour observer un comportement quantique. De plus, *le temps de décohérence* du système – le temps nécessaire pour que les perturbations extérieures brouillent les interférences quantiques – est grand devant les temps caractéristiques de la dynamique que l'on cherche à observer. En effet, dans le système considéré, la seule source importante de décohérence est l'émission spontanée de photons, que l'on peut réduire en augmentant le désaccord laser-atome.<sup>3</sup> Si l'on module temporellement l'intensité des faisceaux composant l'onde stationnaire (on les allume pendant un court instant, on les éteint, puis on les rallume au bout d'un temps donné, et ceci est répété de façon périodique) on obtient, très exactement, un KR [4]!

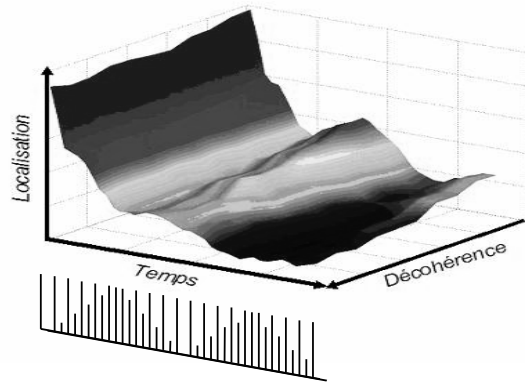


**Fig.1.** La localisation dynamique avec des atomes refroidis par laser. *Gauche* : Évolution quantique de  $\langle P^2 \rangle$  : dans le cas périodique ( $r = f_2/f_1 = 1$ ),  $\langle P^2 \rangle$  sature au bout d'un temps caractéristique, le temps de localisation  $t_L$ . Dans les cas quasi-périodiques ( $r = 1,00111$  et  $r = 1,00222$ ), après un ralentissement autour du temps de localisation, la dynamique diffusiv se poursuit [5]. *Droite* : La LD peut être observée aussi sur le changement de forme des distribution d'impulsion : dans le cas quasi-périodique, la distribution après 50 *kicks* est plus large et a une forme gaussienne, alors que cette forme devient exponentielle dans le cas périodique [6].

### 3 Réversibilité et décohérence

Nous avons déjà remarqué dans la section 2 ci-dessus que la localisation dynamique résulte de l'interférence quantique entre états de Floquet localisés en impulsion. Elle est donc intrinsèquement liée au caractère périodique du hamiltonien. Briser cette périodicité mène à une redistribution des phases quantiques qui doit modifier l'interférence et donc, vraisemblablement, détruire la LD. Ceci est très facile à tester expérimentalement. On peut briser la périodicité, par exemple en ajoutant à la série périodique d'impulsions de fréquence  $f_1$  une autre série de fréquence  $f_2$  ; si le rapport  $r = f_2/f_1$  des deux fréquences est irrationnel, la série complète sera quasi-périodique. De plus, il est facile de mesurer la "localisation" du système : il suffit de mesurer le maximum de la distribution d'impulsion à  $P = 0$  ; celle-ci étant normalisée, plus elle sera large (et donc moins le système sera localisé) plus son maximum sera petit.

<sup>3</sup> Le potentiel optique varie comme  $I/\Delta$  où  $I$  est l'intensité et  $\Delta$  le désaccord, tandis que le taux d'émission spontanée varie comme  $I/\Delta^2$  dans les conditions qui nous intéressent.



**Fig.2.** Réversibilité et décohérence. La deuxième série de kicks est symétrique de façon à brouiller et puis rétablir les phases quantiques (deux fois), on observe deux reconstructions partielles de la localisation [7]. Cependant, si on introduit de la décohérence dans le système (troisième axe) les phases sont mélangées de façon aléatoire, et aucune reconstruction n'est possible.

L'image de gauche de la figure 1 montre l'effet de la brisure de la périodicité sur l'évolution de l'énergie cinétique moyenne du système. Dans le cas où le rapport de fréquences est rationnel (excitation périodique), cette énergie sature au bout d'un certain temps : c'est la localisation dynamique. Dans le cas où l'excitation est quasi-périodique, après un ralentissement autour du temps de localisation, la diffusion reprend de plus belle. Le cadre de droite montre la manifestation de la LD sur les distributions d'impulsion : celles-ci sont étroites (localisées) et de forme exponentielle dans le cas périodique, et larges et gaussiennes dans le cas quasi-périodique.

La brisure de la périodicité provoque donc la suppression de la localisation dynamique, parce que les phases relatives des états de Floquet sont "remélangées" de telle façon que le phénomène d'interférence destructive responsable du gel de la diffusion ne peut pas se produire. Cependant, ces phases sont toujours bien définies. Cette destruction doit donc être réversible. Pour tester ceci, nous avons excité le système avec une double série de kicks de même fréquence, mais l'amplitude de la deuxième série augmente, puis diminue, de telle façon à mélanger puis rétablir les phases quantiques. La figure 2 montre que la localisation dynamique est bien d'abord détruite, puis partiellement reconstruite [7]. Plus encore, nous avons envoyé sur les atomes, au moment où la deuxième série atteint son maximum, un faisceau de lumière cohérente, dont nous avons fait varier l'intensité (troisième axe de la figure 2, pour produire de l'émission spontanée : ceci détruit de façon clairement irréversible la localisation dynamique (fig. 2). L'émission spontanée produit un mélange *aléatoire* des phases quantiques, qui est donc, par nature, irréversible ; c'est ce que l'on appelle la *décohérence*, ou destruction de la cohérence quantique.

Nous avons ainsi pu utiliser ce système relativement simple pour l'étude de quelques phénomènes à la base de notre compréhension du *chaos quantique*.

## 4 Quantique *et* chaotique

Comme nous l'avions signalé dans la section 1, le chaos quantique a peu de rapports avec le comportement chaotique au sens classique. Est-ce donc sans espoir d'observer un jour un comportement chaotique *et* quantique? La réponse est *non*. Si l'équation de Schrödinger ne peut pas être remise en question, elle reste une *équation à un corps*. Des systèmes quantiques en interaction peuvent être régis par des équations non linéaires. Un exemple bien connu est celui des électrons dans un atome multi-électrons dans l'approximation de Hartree-Fock. Dans notre contexte, la réponse à ce problème est un *condensat de Bose-Einstein*.

Un condensat de Bose-Einstein (ou BEC) s'obtient en refroidissant un ensemble de bosons identiques à des températures suffisamment faibles pour que la distance interatomique (déterminée par la densité de l'échantillon) devienne de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie des atomes : on atteint ainsi le régime dit de *dégénérescence quantique*. Le BEC se comporte comme un "tout" où on ne peut pas individualiser un atome ; il est caractérisé par une fonction d'onde globale. Ceci est mathématisé par une théorie de champ moyen [8], et l'équation qui en résulte est l'*équation de Gross-Pitaevskii* :

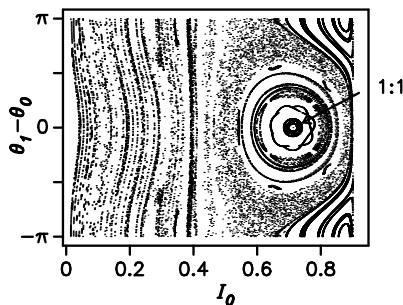
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + g|\psi|^2) \psi \quad (3)$$

où  $H_0$  est le hamiltonien à *une particule* et le terme supplémentaire décrit l'effet "moyen" de l'interaction entre particules. Ce terme présente une non linéarité *en la fonction d'onde du condensat*,  $\psi$  ; une *vraie non linéarité quantique* !

Considérons un cas particulièrement simple, celui d'un condensat dans un potentiel "en escalier"  $V(x) = V_0 \cos x + Fx$ .<sup>4</sup> On place le BEC dans ce potentiel et l'on simplifie au maximum le problème en concentrant la fonction d'onde uniquement sur *trois* puits contigus, numérotés -1, 0, 1. Ce potentiel admet comme états propres des états localisés dans chaque puits, nommés états de Wannier-Stark. A chaque état  $i$  on peut associer donc une population  $I_i$  et une phase  $\theta_i$ . Toutes les amplitudes et toutes les phases ne sont pas indépendantes : en effet, l'invariance de la mécanique quantique vis à vis d'une phase globale permet d'imposer  $\theta_{-1} = 0$ , et la condition de normalisation de déduire que  $I_{-1} = 1 - I_0 - I_1$ . L'"espace de phase" est donc défini par les variables  $I_0, I_1$  et  $\theta_0, \theta_1$  ; à un instant donné, l'état du système y est caractérisé par un point. On peut alors choisir un plan de coupe et tracer une section de Poincaré dans cet espace. C'est ce qui est montré sur la fig. 3.

On y observe une structure caractéristique du "chaos faible" décrit par le théorème Kolmogorov-Arnol'd-Moser : autour des îlots correspondant à des rapports rationnels des fréquences de mouvement (résonances), des zones de chaos se développent. On peut montrer que cette organisation découle de la structure du hamiltonien du système [9]. L'existence de "séparatrices" entre les différentes régions indique que ce comportement chaotique a bien pour origine une sensibilité aux conditions initiales.

<sup>4</sup> Ce qui peut être réalisé expérimentalement en utilisant une onde stationnaire verticale : celle-ci est responsable du terme sinusoïdal et la force de gravité  $F = Mg$  du terme linéaire.



**Fig.3.** Section de Poincaré pour un BEC dans un potentiel “en escalier”. L’espace de phase montre une structure caractéristique du “chaos faible”, prédite par le théorème KAM.

## 5 Conclusion

Le système modèle que nous avons décrit a fait preuve de simplicité et de flexibilité tant du point de vue théorique qu’expérimental. Il nous a permis d’étudier des aspects fondamentaux du “chaos quantique”, comme l’importance des interférences dans l’émergence du comportement quantique et tester de façon maîtrisée les effets de décohérence sûr la réversibilité temporelle du système. L’utilisation des gaz dégénérés ouvre, quant à elle, de nouvelles perspectives permettant de se placer à l’interface entre le chaos quantique et les systèmes quantiques à comportement “quasi-classique”. Nous ne doutons pas que d’importants progrès, aussi bien théoriques qu’expérimentaux, verront le jour dans ce domaine dans les prochaines années.

## Références

1. G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and J. Ford. *Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation* vol. 93 of *Lecture Notes in Physics* page 334. Springer-Verlag Berlin, Germany (1979).
2. F. M. Izrailev. *Simple models of quantum chaos : spectrum and eigenfunctions*. Phys. Rep. **196**, 299–392 (1990).
3. H. J. Metcalf and P. van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1999.
4. F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaram, and M. G. Raizen. *Atom optics realization of the quantum delta-kicked rotator*. Phys. Rev. Lett. **75**(25), 4598–4601 (1995).
5. H. Lignier, J. C. Garreau, P. Szriftgiser, and D. Delande. *Quantum diffusion in the quasiperiodic kicked rotor*. Europhys. Lett. **69**(3), 327–333 (2005).
6. J. Ringot, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, and D. Delande. *Experimental evidence of dynamical localization and delocalization in a quasiperiodic driven system*. Phys. Rev. Lett. **85**(13), 2741–2744 (2000).
7. H. Lignier and J. Chabé and D. Delande and J. C. Garreau and P. Szriftgiser, Reversible Destruction of Dynamical Localization, Arxiv physics/0507209 (2005).
8. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari. *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. Rev. Mod. Phys. **71**, 463–512 (1999).
9. Q. Thommen, J. C. Garreau, and V. Zehnlé. *Classical Chaos with Bose-Einstein Condensates in Tilted Optical Lattices*. Phys. Rev. Lett. **91**(21), 210405–4 (2003).