



**HAL**  
open science

# Majoration du nombre de zéros des solutions de certaines équations différentielles et applications géométriques

Yves Martinez-Maure

► **To cite this version:**

Yves Martinez-Maure. Majoration du nombre de zéros des solutions de certaines équations différentielles et applications géométriques. 2005. hal-00016074

**HAL Id: hal-00016074**

**<https://hal.science/hal-00016074>**

Preprint submitted on 19 Dec 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MAJORATION DU NOMBRE DE ZÉROS DES SOLUTIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

YVES MARTINEZ-MAURE

ABSTRACT. Sturm theory gives a lower bound on the number of certain special points or special lines, such as the number of vertices or of normals through a point, for different types of closed curves. In the present paper, we apply the geometric theory of hedgehogs and  $N$ -hedgehogs to compare such numbers. The main result gives a sharp upper bound on the number of zeros for every solution of certain forced harmonic oscillator equations. We interpret it in terms of  $N$ -hedgehogs as a comparison between the number of singularities and the maximal number of support lines through a point. As a geometric application, we compare the number of vertices with the maximal number of normals through a point for  $N$ -hedgehogs of class  $C_+^3$  in  $\mathbb{R}^2$  and we treat the particular case of convex curves (resp. of convex curves of constant width). After that, we compare the number of inflection points with the maximal number of intersection points with a great-circle for simple smooth spherical curves that are transverse to the meridians. Finally, we treat the particular case of spherical curves that are invariant under the antipodal map.

## 1. Introduction et présentation des résultats

La théorie de Sturm présente d'importantes connexions avec la géométrie des courbes. Elle permet en particulier de minorer le nombre de certains points spéciaux ou de certaines droites concourantes, comme le nombre de sommets ou de droites normales concourantes, pour différents types de courbes fermées. Un résultat central de cette théorie est le théorème de Sturm-Hurwitz.

*Théorème de Sturm-Hurwitz. Toute fonction réelle continue de la forme  $h(\theta) = \sum_{n \geq N} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$  admet au moins autant de zéros sur le cercle  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  que sa première harmonique non nulle :*

$$\#(\{\theta \pmod{2\pi} \in \mathbb{S}^1 \mid h(\theta) = 0\}) \geq 2N.$$

Le rapport du cas  $N = 2$  avec le théorème des 4 sommets fut tout d'abord découvert par W. Blaschke puis redécouvert assez récemment par S. Tabachnikov [15]. Bien que ce rapport soit désormais bien connu, nous allons en expliciter brièvement un cas particulier pour illustrer notre propos.

---

*Key words and phrases.* Hedgehogs, convex bodies,  $N$ -hedgehogs, support lines, singularities, vertices, normals passing through a point, spherical curves, inflection points.  
*MSC 2000:* 52A30, 53A04.

**Rapport avec le théorème des 4 sommets.**

Considérons dans le plan vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de son orientation usuelle, une courbe convexe  $\mathcal{C}$  de classe  $C^2_+$ , i.e. une courbe orientée fermée simple et régulière de classe  $C^2$  dont la courbure algébrique reste partout strictement positive. Rappelons que :

(i) La courbe  $\mathcal{C}$  est entièrement déterminée par sa fonction support qui est définie sur le cercle unité  $\mathbb{S}^1$  par

$$h(u) = \max_{x \in \mathcal{C}} \langle x, u \rangle,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^2$ . En effet, cette fonction support est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{S}^1$  et la courbe  $\mathcal{C}$  peut être considérée comme l'enveloppe de la famille de droites  $(D_h(u))_{u \in \mathbb{S}^1}$  d'équation

$$\langle x, u \rangle = h(u) ;$$

(ii) La courbe  $\mathcal{C}$  peut être paramétrée par l'application

$$\begin{aligned} x_h : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u(\theta) &\longmapsto x_h(\theta) := h(\theta) u(\theta) + h'(\theta) u'(\theta), \end{aligned}$$

où  $u(\theta)$  est le point de coordonnées  $(\cos \theta, \sin \theta)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et où  $h$  est considérée comme une fonction de  $\theta$ .

(iii) La courbure algébrique  $k(\theta)$  de  $\mathcal{C}$  en  $x_h(\theta)$  est donnée par

$$\frac{1}{k(\theta)} = (h + h'')(\theta).$$

Supposons maintenant  $\mathcal{C}$  de classe  $C^3_+$ , ce qui impose à  $h$  d'être de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{S}^1$ . Les sommets de la courbe  $\mathcal{C}$  sont les points où sa courbure a une valeur stationnaire, i.e. les points  $x_h(\theta)$  pour lesquels  $(h' + h''')(\theta) = 0$ . Dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur  $[0, 2\pi]$ , la fonction  $h' + h''' = (h + h'')'$  est orthogonale à la fonction constante égale à 1 (car c'est une dérivée) et aux fonctions  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  (car l'opérateur  $\partial^2/\partial\theta^2 + 1$  tue les harmoniques du premier ordre dans la série de Fourier). Comme la première harmonique non nulle de la fonction  $h' + h'''$  est donc nécessairement d'ordre  $N \geq 2$ , le théorème de Sturm-Hurwitz nous assure que la courbe  $\mathcal{C}$  présente au moins 4 sommets.

Le lecteur qui est désireux d'en savoir davantage sur les applications géométriques du théorème de Sturm-Hurwitz pourra consulter par exemple [1] et [15].

**Théorèmes de comparaison.**

Les résultats de cet article sont de nature légèrement différente puisqu'ils rentrent dans la catégorie des théorèmes de comparaison. En effet, ces résultats permettent non pas de minorer le nombre de certains points spéciaux ou de certaines droites concourantes pour différents types de courbes fermées mais de comparer entre eux de tels nombres. Le théorème 2 nous permettra, par exemple, de comparer nombre de sommets et nombre maximal de droites normales concourantes pour une courbe convexe de classe  $C^3_+$  de  $\mathbb{R}^2$ .

La preuve de ces résultats repose sur les notions de hérisson et plus généralement de  $N$ -hérisson qui ont déjà permis à l'auteur de donner une preuve géométrique du théorème de Sturm-Hurwitz pour les fonctions de classe  $C^2$  [11]. Rappelons brièvement de quoi il s'agit. Comme nous l'avons rappelé plus haut, la fonction support d'une courbe convexe de classe  $C^2_+$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{S}^1$ . Naturellement, une fonction  $h \in C^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$  n'est pas nécessairement la fonction support d'une courbe convexe de classe  $C^2_+$ . Cependant, il est toujours possible de lui associer l'enveloppe de la famille de droites  $(D_h(u))_{u \in \mathbb{S}^1}$  d'équation

$$\langle x, u \rangle = h(u).$$

Cette enveloppe, notée  $\mathcal{H}_h$  et appelée *hérisson de fonction support  $h$* , peut toujours être paramétrée par l'application  $x_h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto x_h(\theta)$ , où  $x_h(\theta) = (x_h^1(\theta), x_h^2(\theta))$  est l'unique solution du système

$$\begin{cases} x_1 = h(\theta) \cos \theta - h'(\theta) \sin \theta \\ x_2 = h(\theta) \sin \theta + h'(\theta) \cos \theta, \end{cases}$$

à savoir  $x_h(\theta) := h(\theta) u(\theta) + h'(\theta) u'(\theta)$ ,  $h$  étant considérée comme fonction de  $\theta$ . Pour tout  $u \in \mathbb{S}^1$ , nous dirons que la droite  $D_h(u)$ , d'équation  $\langle x, u \rangle = h(u)$ , est la *droite support coorientée par  $u$* . La valeur de  $h$  en  $u$  s'interprète naturellement comme la distance signée de  $D_h(u)$  à l'origine. Notons que l'application  $x_h$  peut être considérée comme la réciproque de l'application de Gauss de  $\mathcal{H}_h$  en ce sens qu'en tout point régulier  $x_h(u)$ ,  $u$  est un vecteur normal à  $\mathcal{H}_h$ . Un calcul immédiat donne

$$x'_h(\theta) = (h + h'')(\theta)u'(\theta)$$

pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, le hérisson  $\mathcal{H}_h$  est régulier en  $x_h(\theta)$  si et seulement si  $(h + h'')(\theta) \neq 0$  et sa courbure algébrique  $k(\theta)$  en ce point est alors donnée par

$$\frac{1}{k(\theta)} = |(h + h'')(\theta)|.$$

La fonction définie par  $R_h(\theta) := (h + h'')(\theta)$  est appelée *fonction de courbure* de  $\mathcal{H}_h$ . Notons qu'elle est partout définie et qu'elle s'annule exactement sur le lieu singulier de  $x_h$ .

Un hérisson régulier  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  est une courbe convexe de classe  $C^2_+$  (fig. 1.a). Nous dirons d'un hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  qu'il n'est pas trop singulier s'il admet une tangente en chaque point. Un hérisson pas trop singulier  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  est une courbe qui admet exactement une tangente coorientée dans chaque direction (fig. 1.b). Pour tout  $u \in \mathbb{S}^1$ , la distance signée  $h(u) + h(-u)$  entre les droites support  $D_h(u)$  et  $D_h(-u)$  est appelée *largeur* de  $\mathcal{H}_h$  dans la direction  $u$ . Un hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  est dit *projectif* si cette largeur est nulle dans toutes les directions, c'est-à-dire si  $h(-u) = -h(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{S}^1$ . Un hérisson projectif pas trop singulier  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  est une courbe qui admet exactement une tangente non-coorientée dans chaque direction (fig. 1.c).

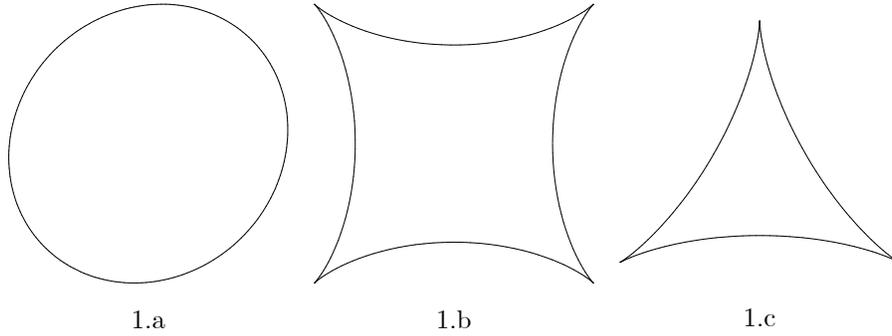


Figure 1

Les  $N$ -hérissons de  $\mathbb{R}^2$ , ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), sont définis comme les hérissons, à ceci près que leurs fonctions support sont  $2N\pi$ -périodiques au lieu d'être  $2\pi$ -périodiques. L'entier  $N$  s'interprète simplement comme le nombre de rotations complètes du vecteur normal  $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  en  $x_h(\theta)$  lorsque  $\theta$  décrit l'intervalle  $[0, 2N\pi[$ . Un  $N$ -hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  admet donc exactement  $N$  droites support de vecteur normal donné (en les comptant avec leur multiplicité). Naturellement, les hérissons de  $\mathbb{R}^2$  sont simplement les 1-hérissons de  $\mathbb{R}^2$ . Voici quelques exemples simples de "multihérissons" de  $\mathbb{R}^2$  : pour tout  $n \geq 2$ , l'hypocycloïde (resp. l'épicycloïde) de fonction support  $h_n(\theta) = \sin(n\theta)$  (resp.  $e_n(\theta) = \sin((n-1)\theta/n\theta)$ ) est un 1-hérisson (resp. un  $n$ -hérisson) à  $2n$  (resp.  $2(n-1)$ ) rebroussements (cf. fig. 2) ; lorsque  $n$  est impair, les rebroussements de l'hypocycloïde sont comptés deux fois car  $x_{h_n}(\theta)$  parcourt deux fois  $\mathcal{H}_{h_n}$  lorsque  $\theta$  décrit le segment  $[0, 2\pi[$ .

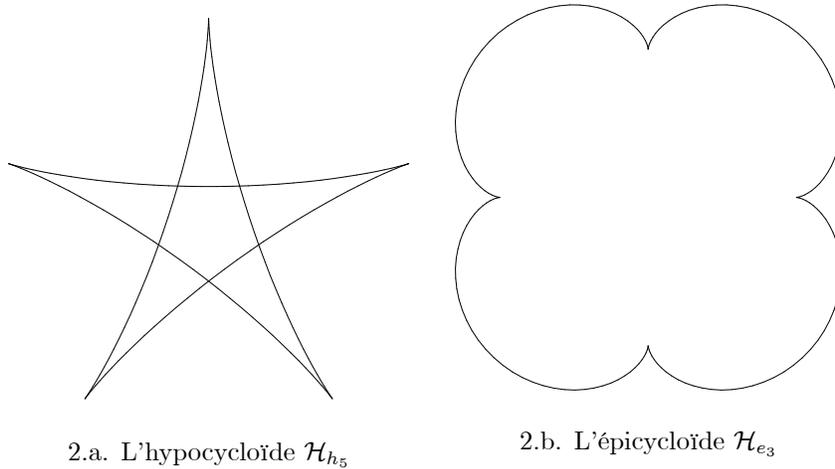
2.a. L'hypocycloïde  $\mathcal{H}_{h_5}$ 2.b. L'épicycloïde  $\mathcal{H}_{e_3}$ 

Figure 2

La notion de hérisson de fonction support  $C^2$  s'étend naturellement à l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) [3]. Tout hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$  de fonction support  $C^2$  peut être envisagé comme une différence de corps convexes de classe  $C_+^2$  (i.e. dont le bord est une surface de classe  $C^2$  à courbure de Gauss partout non nulle). Pour ce faire, il suffit par exemple d'écrire  $h$  sous la forme  $(h+r) - r$ , où  $r$  est une constante réelle  $> 0$  assez grande. Le lecteur aura peut-être observé qu'il est encore possible d'associer un hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  à toute fonction  $h \in C^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ . Mais les hérissons de  $\mathbb{R}^2$  dont la fonction support est seulement de classe  $C^1$  ne s'interprètent généralement pas comme des différences de corps convexes. Un tel hérisson peut même être une courbe fractale [9].

Cette interprétation des hérissons de fonction support  $C^2$  comme des différences de corps convexes de classe  $C_+^2$  conduit à définir une notion plus générale de hérisson en associant une réalisation géométrique appropriée à toute différence formelle de corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$  [12]. La théorie des hérissons consiste alors à : 1. considérer toute différence formelle  $K - L$  de deux corps convexes  $K, L \subset \mathbb{R}^{n+1}$  comme une hypersurface  $\mathcal{H}_h$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui est entièrement déterminée par la différence  $h = h_K - h_L$  des fonctions support des deux convexes ; 2. étendre le volume mixte  $V : (\mathcal{K}^{n+1})^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\mathcal{K}^{n+1}$  désigne l'ensemble des corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , en une forme  $(n+1)$ -linéaire symétrique sur l'espace vectoriel  $\mathcal{H}^{n+1}$  des hérissons (i.e. des différences formelles de corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), symétrisé de  $\mathcal{K}^{n+1}$  pour l'addition de Minkowski ; 3. envisager la théorie de Brunn-Minkowski dans  $\mathcal{H}^{n+1}$ . Pour  $n \leq 2$ , cette idée remonte à un article de H. Geppert paru en 1937 [2] dans lequel les hérissons sont introduits sous leurs noms allemands, "stützbare Bereiche" ( $n=1$ ) et "stützbare Flächen" ( $n=2$ ), dans le but d'étendre certaines parties de la théorie de Brunn-Minkowski. L'intérêt de cette théorie des hérissons peut être illustré par deux principes : 1. l'étude des corps convexes par une décomposition en une somme de hérissons propre à mettre leur structure en évidence ; 2. la géométrisation de problèmes d'analyse consistant à considérer des fonctions réelles sur la sphère unité  $\mathbb{S}^n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  comme des fonctions support de hérissons (ou d'hypersurfaces plus générales de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , les multihérissons [3]). Le premier de ces principes a par exemple permis à l'auteur d'infirmer une caractérisation de la sphère qui avait été conjecturée par A. D. Aleksandrov dans les années 1930 [8] et le second de donner une preuve géométrique du théorème de Sturm-Hurwitz [11]. Ces deux principes seront mis en application l'un après l'autre dans cet article. Le lecteur trouvera une présentation élémentaire de la théorie des hérissons ainsi que d'autres applications dans [7]. Notons que dans les années 1990, la version discrète des hérissons dont il est question dans [12] a été l'objet d'un certain nombre d'études sous le nom de "virtual polytopes". Pour plus de détails et pour des références à ce sujet, le lecteur pourra consulter l'article de G. Panina [13] qui présente de nouveaux contre-exemples à la conjecture de A. D. Aleksandrov. Pour une présentation claire et détaillée de la théorie de Brunn-Minkowski, le lecteur pourra consulter l'excellent ouvrage de R. Schneider [14]. Notre principal résultat peut être énoncé comme suit :

**Théorème 1.** *Soit  $R$  une fonction réelle  $2N\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie*

$$\int_0^{2N\pi} R(\theta) u(\theta) d\theta = 0_{\mathbb{R}^2},$$

où  $N \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $S$  l'élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  qui représente le nombre de zéros de  $R$  dans l'intervalle  $[0, 2N\pi[$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_R$  des solutions de l'équation différentielle

$$h''(\theta) + h(\theta) = R(\theta)$$

vérifie

$$\sup_{h \in \mathcal{S}_R} n(h) \leq S + 4N - 2,$$

où  $n(h) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le nombre de zéros de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[0, 2N\pi[$ .

Sachant que  $\mathcal{S}_R$  est l'ensemble des fonctions de la forme

$$h_x(\theta) = h(\theta) - \langle x, u(\theta) \rangle,$$

où  $h$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(\theta) = \int_0^\theta R(\alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha$$

et  $x$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ , ce théorème admet la reformulation équivalente suivante :

**Théorème 2.** *Soit  $h$  une fonction réelle  $2N\pi$ -périodique et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , où  $N \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $S$  l'élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  qui représente le nombre de zéros de la fonction  $h + h''$  dans l'intervalle  $[0, 2N\pi[$ . Nous avons :*

$$(1) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^2} n_h(x) \leq S + 4N - 2,$$

où  $n_h(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le nombre de zéros de la fonction  $h_x(\theta) = h(\theta) - \langle x, u(\theta) \rangle$  sur l'intervalle  $[0, 2N\pi[$ .

Ce résultat peut naturellement être interprété en termes de  $N$ -hérissons :

**Interprétation géométrique.** *Soit  $\mathcal{H}_h$  un  $N$ -hérisson de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $S$  l'élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  qui représente le nombre de ses singularités comptées sur  $[0, 2N\pi[$ . Nous avons :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} n_h(x) \leq S + 4N - 2,$$

où  $n_h(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le nombre de droites support coorientées de  $\mathcal{H}_h$  passant par  $x$  (comptées avec leur multiplicité).

Rappelons que le nombre  $n_h(x)$  de droites support coorientées de  $\mathcal{H}_h$  passant par  $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$  (comptées avec leur multiplicité) est donné par  $n_h(x) = 2(N - i_h(x))$ , où  $i_h(x)$  désigne l'indice de  $\mathcal{H}_h$  par rapport à  $x$  (i.e. le nombre algébrique d'intersection de presque toute demi-droite orientée d'origine  $x$  avec  $\mathcal{H}_h$ ) :

Théorème 3 [11]. *Soit  $\mathcal{H}_h$  un  $N$ -hérisson  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons :*

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h, i_h(x) = N - \frac{1}{2}n_h(x),$$

où  $n_h(x)$  désigne le nombre de droites support coorientées de  $\mathcal{H}_h$  passant par  $x$  (comptées avec leur multiplicité), c'est-à-dire le nombre de zéros de l'application  $h_x : [0, 2N\pi[ \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto h(\theta) - \langle x, u(\theta) \rangle$ .

**Remarque.** Si les inégalités données par les théorèmes 1 et 2 admettent des raffinements dans certains cas particuliers (voir par exemple ci-dessous), ce sont bien les meilleures possibles sous les hypothèses considérées : pour tout  $(N, S) \in \mathbb{N}^* \times 2\mathbb{N}$ , il existe un  $N$ -hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  qui admet exactement  $S$  points de rebroussement et qui vérifie

$$(3) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^2} n_h(x) = S + 4N - 2.$$

Pour tout  $N = k + 1 \geq 2$ , les  $N$ -hérissons de  $\mathbb{R}^2$  dont la réalisation géométrique est l'hypotrochoïde  $\Gamma_k$  paramétrée par  $\gamma_k : [0, 2(k+1)\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\gamma_k^1(t), \gamma_k^2(t))$ , où

$$\begin{cases} \gamma_k^1(t) = 2k \cos t + (2k+1) \cos \frac{kt}{k+1} \\ \gamma_k^2(t) = 2k \sin t - (2k+1) \sin \frac{kt}{k+1} \end{cases}$$

sont réguliers et vérifient la relation (3). La figure 3 représente  $\Gamma_k$  pour  $k = 1$  et  $k = 2$ .

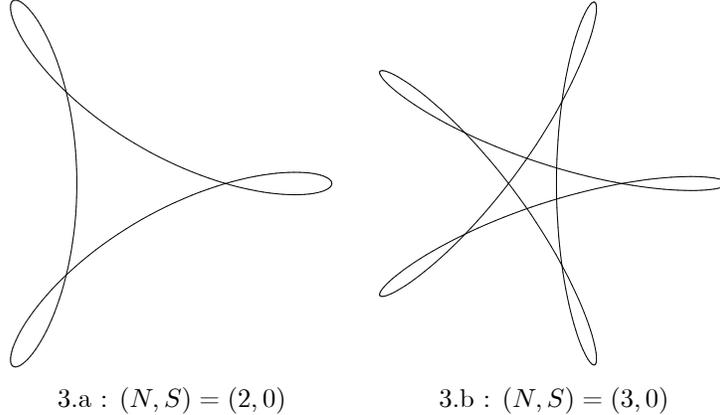


Figure 3

Pour tout  $S \in 2\mathbb{N}$ , nous pouvons ensuite faire apparaître successivement des paires de rebroussements (comme indiqué à la figure 4) dans la région du plan où l'indice est minimal pour obtenir un  $N$ -hérisson qui admet exactement  $S$  points de rebroussement et qui vérifie encore (3).

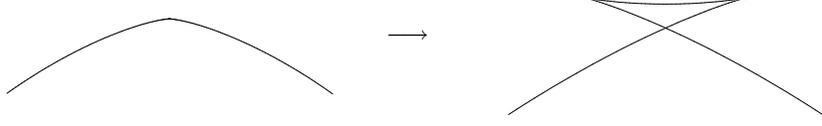


Figure 4

Pour  $N = 1$ , tout  $N$ -hérisson régulier  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  vérifie (3) et, pour tout  $S \in 2\mathbb{N}$ , nous pouvons faire apparaître successivement des paires de rebroussements dans la région du plan où l'indice est minimal pour obtenir un hérisson ayant exactement  $S$  points de rebroussement et vérifiant encore (3). Pour  $S = 2$ , cela donne un hérisson tel que le hérisson de fonction support  $h(\theta) = -7 - 4 \cos(2\theta) - \cos(3\theta)$  représenté à la figure 5.

Le théorème 2 admet le raffinement suivant lorsque  $h$  est une fonction de Möbius, i.e. une fonction  $2\pi$ -périodique vérifiant  $h(\theta + \pi) = -h(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :

**Théorème 4.** *Soit  $h$  une fonction réelle  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $h(\theta + \pi) = -h(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Notons  $S$  l'élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  qui représente le nombre de zéros de la fonction  $h + h''$  sur  $[0, 2\pi[$ . Nous avons :*

$$(4) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^2} n_h(x) \leq S,$$

où  $n_h(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le nombre de zéros de la fonction  $h_x(\theta) = h(\theta) - \langle x, u(\theta) \rangle$  sur  $[0, 2\pi[$ .

Ce résultat peut naturellement être interprété en termes de hérissons projectifs :

**Interprétation géométrique.** *Soit  $\mathcal{H}_h$  un hérisson projectif de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $S$  l'élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  qui représente le nombre de ses singularités comptées sur  $\mathbb{S}^1$ . Nous avons :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} n_h(x) \leq S,$$

où  $n_h(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le nombre de droites support coorientées de  $\mathcal{H}_h$  passant par  $x$ , c'est-à-dire le nombre de zéros de l'application  $h_x(\theta) = h(\theta) - \langle x, u(\theta) \rangle$  sur  $[0, 2\pi[$ .

**Remarque.** L'égalité

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} n_h(x) = S$$

est vérifiée pour tout hérisson dont la réalisation géométrique est une hycycloïde qui comporte un nombre impair de rebroussements, i.e. pour tout hérisson projectif dont la fonction support est de la forme

$$h(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta + c \cos [(2n + 1)\theta] + d \sin [(2n + 1)\theta],$$

où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(c, d) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### Autres applications géométriques.

Comme nous l'avions annoncé, ces résultats permettent de comparer le nombre de sommets et le nombre maximal de droites normales concourantes pour une courbe convexe de classe  $C_+^3$  de  $\mathbb{R}^2$  :

**Corollaire 1.** *Soit  $\mathcal{H}_h$  un  $N$ -hérisson de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C_+^3$ . Notons  $S'$  l'élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  qui représente le nombre de ses sommets. Nous avons :*

$$(5) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^2} n'_h(x) \leq S' + 4N - 2,$$

où  $n'_h(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le nombre de droites normales orientées de  $\mathcal{H}_h$  passant par  $x$  (comptées avec leur multiplicité), c'est-à-dire le nombre de zéros de la dérivée de  $h_x(\theta) = h(\theta) - \langle x, u(\theta) \rangle$  sur  $[0, 2N\pi[$ .

Ce corollaire admet le raffinement suivant dans le cas particulier d'une courbe convexe de largeur constante :

**Corollaire 2.** *Soit  $\mathcal{H}_h$  une courbe convexe de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C_+^3$ . Notons  $S'$  l'élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  qui représente le nombre de ses sommets. Si  $\mathcal{H}_h$  est de largeur constante (i.e. s'il existe  $L \in \mathbb{R}$  tel que  $h(\theta + \pi) + h(\theta) = L$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ), alors*

$$(6) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^2} n'_h(x) \leq S',$$

où  $n'_h(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le nombre de droites normales orientées de  $\mathcal{H}_h$  passant par  $x$ , c'est-à-dire le nombre de zéros de la dérivée de  $h_x(\theta) = h(\theta) - \langle x, u(\theta) \rangle$  sur  $[0, 2\pi[$ .

Comme la première harmonique non nulle de la fonction  $h' + h'''$  est alors nécessairement d'ordre  $N \geq 3$ , le théorème de Sturm-Hurwitz nous assure que la courbe  $\mathcal{H}_h$  présente au moins 6 sommets. Rappelons que pour toute courbe convexe de  $\mathbb{R}^2$  de largeur constante et de classe  $C_+^2$ , il existe un point de  $\mathbb{R}^2$  par lequel passent une infinité de normales ou un ouvert formé de points par lesquels passent au moins 6 normales [7, Théorème 6]. L'auteur a déjà étudié à quelle(s) condition(s) nécessaires et suffisante(s) sur  $\mathcal{H}_h$ , nous avons  $S' = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} n'_h(x) = 6$  [10].

Par dualité projective, les théorèmes 2 et 4 permettent également de comparer nombre de points d'inflexion et nombre maximal d'intersections avec un grand-cercle des courbes sphériques transverses aux méridiens. Le théorème de la balle de tennis de V. I. Arnold nous assure que “*Toute courbe fermée simple et lisse qui divise la sphère  $\mathbb{S}^2$  en deux régions de même aire a au moins 4 points d'inflexion*” ([1]). L'auteur a donné dans [6] une preuve directe du cas particulier suivant :

Cas particulier du théorème de la balle de tennis de V. I. Arnold [1]. *Considérons sur la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  de  $\mathbb{R}^3$ , une courbe fermée, simple et lisse  $\mathcal{C}$  qui est partout transverse aux méridiens. Si la courbe  $\mathcal{C}$  admet au plus 3 points d'inflexion, alors elle est incluse dans un hémisphère ouvert de  $\mathbb{S}^2$ . En particulier, si la courbe  $\mathcal{C}$  divise la sphère  $\mathbb{S}^2$  en deux régions de même aire, alors elle admet au moins 4 points d'inflexion. Dans cet énoncé, un point d'inflexion de  $\mathcal{C}$  désigne un zéro de sa courbure géodésique.*

Par dualité projective, les théorèmes 2 et 4 nous donnent le résultat suivant :

**Corollaire 3.** *Considérons sur la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  de  $\mathbb{R}^3$ , une courbe fermée, simple et lisse  $\mathcal{C}$  qui est partout transverse aux méridiens. Notons  $I$  l'élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  qui représente le nombre de ses points d'inflexion, i.e. le nombre de zéros de sa courbure géodésique. Nous avons :*

$$(7) \quad \sup_{v \in \mathbb{S}^2} I(v) \leq I + 2,$$

où  $I(v) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec le grand-cercle de  $\mathbb{S}^2 \cap v^\perp$ ,  $v^\perp$  désignant le plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  orthogonal à  $v$ .

Si la courbe  $\mathcal{C}$  est de plus invariante par antipodie, alors son nombre de points d'inflexion  $I$  vérifie

$$(8) \quad \sup_{v \in \mathbb{S}^2} I(v) \leq I.$$

## 2. PREUVE DES RÉSULTATS ET REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

**Preuve des théorèmes 1 et 2.** Comme ces deux théorèmes sont équivalents, il nous suffit de démontrer le théorème 2. Démontrons donc, sous les hypothèses du théorème 2, que l'inégalité

$$(9) \quad n_h(x) \leq S + 4N - 2$$

est satisfaite pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ . Comme cette inégalité est évidente lorsque  $S = +\infty$ , nous supposons que  $S$  est fini. Nous nous appuyerons sur l'observation suivante.

**Lemme.** *Pour toute droite  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , nous avons :*

$$\#(\{\theta \in [0, 2N\pi[ \mid x_h(\theta) \in D\}) \leq S + 2N.$$

Pour vérifier ce lemme, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $D$  est l'axe  $Ox_1$ , où  $(x_1, x_2)$  sont les coordonnées de  $x$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Dans ce cas, nous avons  $x_h(\theta) = (x_h^1(\theta), x_h^2(\theta)) \in D$  si et seulement si  $x_h^2(\theta) = 0$ .

Comme le théorème de Rolle nous assure que les zéros de  $(x_h^2)'(\theta) = R_h(\theta) \cos \theta$  séparent ceux de  $x_h^2$ , il s'ensuit que nous avons bien

$$S \geq \#(\{\theta \in [0, 2N\pi[ \mid x_h(\theta) \in D\}) - 2N,$$

puisque l'équation  $\cos \theta = 0$  a exactement  $2N$  solutions sur l'intervalle  $[0, 2N\pi[$ .

Distinguons deux cas.

Premier cas :  $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$ . Nous avons alors  $n_h(x) = 2(N - i_h(x))$  en vertu du théorème 3 de sorte que l'inégalité (9) est évidente si  $i_h(x) \geq 0$ . Nous supposons donc  $i_h(x) < 0$ . Comme nous avons alors

$$2(1 + |i_h(x)|) = 2(1 - i_h(x)) = n_h(x) - 2(N - 1),$$

le lemme nous assure qu'il suffit de prouver l'existence d'une droite  $D \subset \mathbb{R}^2$  vérifiant

$$\#(\{\theta \in [0, 2N\pi[ \mid x_h(\theta) \in D\}) \geq 2(1 + |i_h(x)|).$$

Pour ce faire, nous pouvons supposer que  $h_x R_{h_x}$  change de signe sur  $\mathbb{R}$ . En effet, comme  $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$ ,  $h_x$  change de signe en chacun de ses zéros de sorte que  $h_x R_{h_x}$  ne peut garder un signe constant que si  $R_{h_x}$  (c'est-à-dire  $R_h$ ) change de signe en chaque zéro de  $h_x$ , mais alors  $n_h(x) \leq S$  et (9) est donc bien vérifié.

Or, le signe de  $h_x R_{h_x}$  indique le sens de la concavité de  $\mathcal{H}_h$  par rapport à  $x$ , c'est-à-dire en l'occurrence le sens dans lequel

$$\gamma(\theta) = \frac{x_h(\theta) - x}{\|x_h(\theta) - x\|}$$

se déplace sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ . Par conséquent, si  $h_x R_{h_x}$  change de signe sur  $\mathbb{R}$ , il existe une droite  $D$  passant par  $x$  pour laquelle

$$\#(\{\theta \in [0, 2N\pi[ \mid x_h(\theta) \in D\}) \geq 2(1 + |i_h(x)|).$$

Deuxième cas :  $x \in \mathcal{H}_h$ . En vertu du premier cas, il suffit de prouver l'existence d'un  $y \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$  tel que  $n_h(x) \leq n_h(y)$ . Pour ce faire, nous allons étudier les variations de  $n_h$  sur une droite  $D$  passant par  $x$  et distincte des droites support de  $\mathcal{H}_h$ . Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $D$  est l'axe  $Ox_1$  et que  $x$  est l'origine  $0_{\mathbb{R}^2}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Le lemme nous assure que l'ensemble

$$\{\theta \in [0, 2N\pi[ \mid x_h(\theta) \in D \text{ i.e. } x_h^2(\theta) = 0\}$$

est fini et par conséquent qu'il existe un  $\varepsilon > 0$ , tel que  $(]-\varepsilon, \varepsilon[ \times \{0\}) \cap \mathcal{H}_h = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ . Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\cos \theta \neq 0$ , la droite support d'équation  $\langle x, u(\theta) \rangle = h(\theta)$  coupe  $Ox_1$  en un point  $(x_1(\theta), 0)$ . L'application  $x_1 : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$$x_1(\theta) = \frac{h(\theta)}{\cos \theta},$$

de sorte que

$$x_1'(\theta) = \frac{h'(\theta) \cos \theta + h(\theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{x_h^2(\theta)}{\cos^2 \theta}.$$

Par conséquent, sur toute composante connexe  $C$  de  $x_1^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ , l'application  $x_1 : C \rightarrow \mathbb{R}$  n'est constante sur aucun sous-intervalle de longueur non nulle et son sens de variation ne change qu'aux points isolés où  $x_h^2$  s'annule en changeant de signe (points pour lesquels  $\mathcal{H}_h$  traverse l'axe  $Ox_1$  en  $0_{\mathbb{R}^2}$ ). L'application  $n_h$  est donc de la forme suivante sur  $]-\varepsilon, \varepsilon[ \times \{0\}$  :

$$n_h(x_1, 0) = \begin{cases} 2(p+r) & \text{si } -\varepsilon < x_1 < 0 \\ p+q+2r & \text{si } x_1 = 0 \\ 2(q+r) & \text{si } 0 < x_1 < \varepsilon, \end{cases}$$

où  $r \in \mathbb{N}$  et où

$$p = \#(\{\theta \in [0, 2N\pi[ \mid x_1 \text{ présente un maximum égal à } 0 \text{ en } \theta\})$$

et

$$q = \#(\{\theta \in [0, 2N\pi[ \mid x_1 \text{ présente un minimum égal à } 0 \text{ en } \theta\}).$$

Comme  $p+q \leq 2 \max(p, q)$ , on en déduit que l'on a bien :

$$\exists y \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h, n_h(y) \geq n_h(x).$$

□

**Preuve du théorème 4.** Nous sommes ici dans le cas particulier où  $\mathcal{H}_h$  est un hériçon dont la fonction de support  $h$  est une fonction de Möbius, i.e. telle que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, h(\theta + \pi) = -h(\theta)$ . La paramétrisation  $x_h$  est alors  $\pi$ -périodique si bien que  $x_h(\theta)$  parcourt deux fois  $\mathcal{H}_h$  lorsque  $\theta$  décrit l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Par conséquent, pour tout  $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$  tel que  $h_x R_{h_x}$  change de signe sur  $\mathbb{R}$ , il existe une droite  $D$  passant par  $x$  pour laquelle nous avons

$$\#(\{\theta \in [0, 2N\pi[ \mid x_h(\theta) \in D\}) \geq 2(2 + |i_h(x)|).$$

En reprenant pas à pas la démonstration du théorème 2, il s'ensuit que l'inégalité (4) est bien satisfaite. □

**Preuve des corollaires 1 et 2.** Les deux observations suivantes permettent de déduire ces corollaires des théorèmes 2 et 4 :

(i) Les sommets de  $\mathcal{H}_h$  correspondent exactement aux points singuliers de sa développée. Or, nous savons (cf. [11]) que la développée de  $\mathcal{H}_h$  est le  $N$ -hériçon de fonction support

$$\partial h(\theta) = h' \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

Le nombre de sommets de  $\mathcal{H}_h$  est donc égal au nombre de zéros de  $R_{\partial h}$  sur  $[0, 2N\pi[$ .

(ii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , nous avons :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, (\partial h)_x \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) = (h_x)'(\theta),$$

où  $(\partial h)_x$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $(\partial h)_x(\theta) = \partial h(\theta) - \langle x, u(\theta) \rangle$ .

Par conséquent, les corollaires 1 et 2 sont une simple application des théorèmes 2 et 4 au  $N$ -hériçon  $\mathcal{H}_{\partial h}$ . □

**Preuve du Corollaire 3.** Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Notons que les bornes supérieures des ensembles  $\{I(v) \mid v \in \mathbb{S}^2\}$  et  $\{I(v) \mid v \in \mathbb{R}^2 \times \{-1\}\}$  sont

égales du fait que la courbe  $\mathcal{C}$  est transverse aux méridiens, i.e. aux grands-cercles passant par  $e_3$ .

En vertu des hypothèses, la courbe  $\mathcal{C}$  admet une paramétrisation de la forme

$$\begin{aligned} \gamma_h : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+h(u)^2}}(u, h(u)), \end{aligned}$$

où  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction support d'un hérisson de  $\mathbb{R}^2$ . Les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{H}_h$  peuvent être vues comme deux courbes projectivement duales : la section de  $\mathbb{S}^2$  (resp. de  $\mathbb{R}^2 \times \{-1\}$ ) par le plan vectoriel orthogonal à  $(x_h(u), -1)$  (resp.  $\gamma_h(u)$ ) est le grand cercle de  $\mathbb{S}^2$  tangent à  $\mathcal{C}$  en  $\gamma_h(u)$  (resp. la droite support du hérisson  $\mathcal{H}_h \times \{-1\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{-1\}$  de vecteur normal  $(u, -1)$ ). Les points d'inflexion de  $\mathcal{C}$  correspondent donc exactement aux points singuliers du hérisson  $x_h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Par ailleurs, il est immédiat que pour tout  $v = (x, -1) \in \mathbb{R}^2 \times \{-1\}$ , les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec le grand-cercle  $\mathbb{S}^2 \cap v^\perp$  correspondent exactement aux droites support coorientées de  $\mathcal{H}_h$  passant par  $x \in \mathbb{R}^2$ , i.e. aux zéros de la fonction  $h_x(u) = h(u) - \langle x, u \rangle$  sur  $\mathbb{S}^1$ . Les inégalités annoncées sont donc une conséquence directe de celles des théorèmes 2 et 4.  $\square$

#### REFERENCES

- [1] V. I. Arnold, Topological invariants of plane curves and caustics, University Lecture Series 5, AMS, Providence, 1994.
- [2] H. Geppert, Über den Brunn-Minkowskischen Satz, Math. Z. 42 (1937), 238-254.
- [3] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss). Singularities, Banach Center Publ. 20 (1988), 245-253.
- [4] Y. Martinez-Maure, A note on the tennis ball theorem, Am. Math. Mon. 103, 338-340 (1996).
- [5] Y. Martinez-Maure, De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons, Arch. Math. 72 (1999), 444-453.
- [6] Y. Martinez-Maure, Indice d'un hérisson : étude et applications, Publ. Mat. 44 (2000), 237-255.
- [7] Y. Martinez-Maure, Voyage dans l'univers des hérissons, in: Ateliers Mathematica, Paris, Vuibert (2003).
- [8] Y. Martinez-Maure, Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 332 (2001), 41-44.
- [9] Y. Martinez-Maure, A fractal projective hedgehog, Demonstratio Math. 34 (2001), 59-63.
- [10] Y. Martinez-Maure, Sommets et normales concourantes des courbes convexes de largeur constante et singularités des hérissons, Arch. Math. 79 (2002) 489-498.
- [11] Y. Martinez-Maure, Les multihérissons et le théorème de Sturm-Hurwitz, Arch. Math. 80 (2003), 79-86.
- [12] Y. Martinez-Maure, Théorie des hérissons et polytopes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 336 (2003), 241-244.
- [13] G. Panina, New counterexamples to A. D. Alexandrov's hypothesis, Adv. Geom. 5 (2005), 301-317.
- [14] R. Schneider, Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge: Cambridge University Press 1993.
- [15] S. Tabachnikov, Around four vertices, Russian Math. Surveys 45 (1990), 229-230.

Y. MARTINEZ-MAURE, 1, RUE AUGUSTE PERRET, F-92500 RUEIL-MALMAISON, FRANCE,  
 E-mail address: martinez@math.jussieu.fr