



**HAL**  
open science

# Fin de la Preuve de la Conjecture du Jacobien en dimension 2

Joël Briançon

► **To cite this version:**

| Joël Briançon. Fin de la Preuve de la Conjecture du Jacobien en dimension 2. 2005. hal-00015386v1

**HAL Id: hal-00015386**

**<https://hal.science/hal-00015386v1>**

Preprint submitted on 8 Dec 2005 (v1), last revised 15 Dec 2005 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Fin de la Preuve de la Conjecture du Jacobien en dimension 2

*Version préliminaire de l'ultime tentative du 04/12/05*

Joël Briançon<sup>1</sup>

Soit  $f, g \in \mathbf{C}[x, y]$ , deux polynômes de degré  $M$  et  $N$  respectivement avec  $M > N \geq 2$  et dont le Jacobien  $Jac(f, g) = f'_x g'_y - f'_y g'_x$  est égal à 1.

## 1 Le processus de Tzee-Char Kuo, Adam Parusiński et Laurentiu Paunescu

Au Corollaire 7.10 de [2], les auteurs démontrent l'existence d'une suite finie de polynômes :

$$f_0 = f, f_1, f_2, \dots, f_j$$

de degré (total) respectivement  $M_0 = M, M_1, \dots, M_j$ , et de constantes non nulles  $c_0, c_1, \dots, c_{j-1}$  telles que :

$$\text{pour } 0 \leq k \leq j-1 : f_{k+1} = f_k^N - c_k g^{M_k}$$

vérifiant :

$$\text{pour } 0 \leq k \leq j-1 : M_k > (N-1)(M_0 + M_1 + \dots + M_{k-1}) - N + 2$$

et :

$$M_j = (N-1)(M_0 + M_1 + \dots + M_{j-1}) - N + 2.$$

Notons  $F, G, F_1, \dots, F_j$  les formes<sup>2</sup> homogènes de plus haut degré des polynômes  $f, g, f_1, \dots, f_j$ . Pour tout indice  $k \geq 1$ , nous avons :  $Jac(f_k, g) = N f_{k-1}^{N-1} Jac(f_{k-1}, g)$ , et par itération :

$$Jac(f_k, g) = N^k (f_0 f_1 \dots f_{k-1})^{N-1}.$$

---

<sup>1</sup>Laboratoire J.A. Dieudonné, UMR du CNRS 6621, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France. *E-mail*: briancon@math.unice.fr  
 2000 *Mathematics Subject Classification*: 14R15, 13B10.

<sup>2</sup>ou formes initiales pour les poids (1, 1).

En prenant les formes initiales,  $Jac(F_k, G)$  est soit nul, soit de degré  $M_k + N - 2$ , égal alors à la forme initiale de  $Jac(f_k, g)$ . Donc, pour  $0 \leq k \leq j - 1$ ,  $Jac(F_k, G) = 0$ , et  $Jac(F_j, G) = N^j (F_0 F_1 \cdots F_{j-1})^{N-1}$ .

Dans le cas des polynômes homogènes non nuls,  $Jac(F, G) = 0$  équivaut à l'existence d'un polynôme homogène  $\Psi$  de degré  $\delta$ , de constantes non nulles  $a$  et  $b$ , et d'entiers  $m$  et  $n$  tels que :

$$F = a\Psi^m, \quad G = b\Psi^n .$$

Nous obtenons donc :

$$\text{pour } 0 \leq k \leq j - 1 : F_k = a_k \Psi^{m_k} \text{ avec } a_k \neq 0, M_k = \delta m_k$$

et dans le processus on doit prendre  $c_k = a_k/b$ . Nous avons alors :

$$F_0 F_1 \cdots F_{j-1} = (a_0 \cdots a_{j-1}) \Psi^{(m_0 + m_1 + \cdots + m_{j-1})}$$

et :

$$Jac(F_j, G) = C^{te} \cdot \Psi^{(N-1)(m_0 + m_1 + \cdots + m_{j-1})} .$$

Donc finalement :

$$Jac(F_j, \Psi) = C^{te} \cdot \Psi^s$$

avec  $s = (N - 1)(m_0 + m_1 + \cdots + m_{j-1}) - (n - 1)$ , les constantes multiplicatives étant bien sûr non nulles.

Dans le cas homogène comme ici,  $F_j$  est multiple de  $\Psi^{s-1}$  et nous pouvons poser  $F_j = A_j \Psi^{s-1}$  ; en particulier,  $A_j$  est un polynôme homogène de degré 2, et il est **unique dès que  $\delta \geq 3$  et  $\Psi$  non puissance, vérifiant  $Jac(A_j, \Psi) = C^{te} \cdot \Psi$** .

EXEMPLE 1 : Soit  $p$  et  $q$  deux entiers premiers entre eux avec  $1 \leq p < q$ , et  $\Psi = x^p y^q$ . La solution unique est  $A_j = xy$  (à une constante multiplicative près).

REMARQUE 2 : De mon manuscrit de 1985 ([1]), nous pouvons tirer une autre preuve de la finitude du processus. Précisément, à partir de la Proposition I.3.1 qui permet d'écrire  $f$  en fonction de puissances fractionnaires de  $g$  dans l'anneau filtré  $\mathbf{C}[x, y][[1/\Psi]] \dots$ . Cette démonstration me paraît plus simple que celle de T.-C. Kuo, A. Parusiński, et L. Paunescu car elle n'utilise ni le polygone de Newton le long d'un arc à l'infini, ni l'existence d'un arc 'non-éclipse'.

## 2 Le polygone compliqué

Reprenons rapidement ici quelques notations et quelques résultats élémentaires de [1]. On peut également consulter l'article de Mutsuo Oka [3].

Un polygone de Newton  $\Gamma \subset (\mathbf{R}^+)^2$  est donné par la suite de ses sommets  $\{(i_0, 0), (i_1, j_1), \dots, (0, j_\nu)\}$  de  $\mathbf{N}^2$ , numérotés de l'axe des  $i$  à l'axe des  $j$ . Il est *commode* lorsque  $i_0 > 0$  et  $j_\nu > 0$ . Chaque arête de  $\Gamma$ , joignant deux sommets consécutifs, est définie par un unique système de poids  $(\alpha, \beta)$  de  $\mathbf{Z}^2 - \{(0, 0)\}$ , premiers entre eux, et d'un unique entier  $p_{\alpha, \beta} > 0$  : l'arête est supportée par la droite d'équation  $\alpha \cdot i + \beta \cdot j = p_{\alpha, \beta}$ .

Nous supposons les polygones de Newton  $\Gamma(f)$  et  $\Gamma(g)$  commodes ; il existe alors un polynôme  $h$  de polygone de Newton  $\Gamma$ , tel que  $\Gamma(f) = m'\Gamma$ ,  $\Gamma(g) = n'\Gamma$  (avec  $m'$  et  $n'$  entiers) ; pour chaque arête de  $\Gamma$  de poids  $(\alpha, \beta)$ , il existe un polynôme quasi-homogène pour les poids  $(\alpha, \beta)$ , non puissance, et un entier  $\sigma_{\alpha, \beta}$  tels que les restrictions<sup>3</sup> des polynômes à l'arête correspondante vérifient :  $h_{\alpha, \beta} = \Psi_{\alpha, \beta}^{\sigma_{\alpha, \beta}}$ ,  $f_{\alpha, \beta} = h_{\alpha, \beta}^{m'}$ ,  $g_{\alpha, \beta} = h_{\alpha, \beta}^{n'}$ .

Dans ce paragraphe, nous supposons que  $\Gamma$  est commode et satisfait la condition :

- ( $\star$ )  $\Gamma$  ne possède pas d'arête de poids strictement positifs, et le degré de  $\Gamma$  est atteint en l'unique sommet  $(i_\ell, j_\ell)$  avec  $j_\ell > i_\ell$ .

En prenant  $(i_\ell, j_\ell) = r(p, q)$ , l'exemple 1 montre que  $f_j$  de degré  $M_j$  a pour forme homogène de plus haut degré :

$$F_j = x^{ti_\ell+1}y^{tj_\ell+1}$$

où  $t$  est défini par  $M_j = t(i_\ell + j_\ell) + 2$ .

## 2.1 Suppression du côté vertical

Nous supposons l'arête  $[(i_{\ell-1}, j_{\ell-1}), (i_\ell, j_\ell)]$  de  $\Gamma$  verticale, c'est-à-dire définie par les poids  $(1, 0)$ . **Nous prenons les formes initiales pour ce nouveau système de poids, mais nous les notons comme précédemment** : il existe  $\Psi$  non puissance et des entiers  $m$  et  $n$  tels que :

$$F = a\Psi^m, \quad G = b\Psi^n.$$

Si  $F_j$  était de poids strictement supérieur à  $ti_\ell + 1$ , on aurait  $Jac(F_j, G) = 0$ , et  $F_j$  serait une puissance de  $\Psi$  de degré total strictement supérieur à  $t(i_\ell + j_\ell) + 2$ . Donc :  $F_j = x^{ti_\ell+1}\Phi(y)$ , avec  $\Phi$  de degré  $tj_\ell + 1$ . Posons  $\Psi = x^u\varphi(y)$ , où  $\varphi$  est de degré  $d$  avec  $\sigma(u, d) = (i_\ell, j_\ell)$ .

À partir de  $Jac(F_1, \Psi) = C^{te} \cdot \Psi^s$ ,  $su = ti_\ell = (t\sigma + 1)u$ , nous obtenons de nouveau  $F_j = A\Psi^{s-1}$ , avec  $A = xB(y)$  où le degré de  $B$  est égal à 1, et  $Jac(A, \Psi) = C^{te} \cdot \Psi$ . Finalement :  $B\varphi' - uB'\varphi = C^{te} \cdot \varphi$ . Nous en déduisons qu'à des constantes multiplicatives près,  $B = (y - y_0)$  et  $\varphi = (y - y_0)^d$ . Ainsi, par translation, nous supprimons le côté vertical.

<sup>3</sup>ou les formes initiales pour les poids  $(\alpha, \beta)$ .

## 2.2 Mission impossible

Nous supposons donc que  $\Gamma$  n'a plus d'arête verticale, et nous considérons de nouveau l'arête  $[(i_{\ell-1}, j_{\ell-1}), (i_{\ell}, j_{\ell})]$ , définie par les poids  $(\alpha, \beta)$  vérifiant :

$$\alpha > 0 > \beta, \quad \alpha + \beta > 0.$$

Nous conservons encore les mêmes notations pour les formes initiales. Le même argument de degré montre que  $F_j$  est de poids  $\alpha(ti_{\ell} + 1) + \beta(tj_{\ell} + 1)$  ; donc à des constantes multiplicatives près on a, en posant  $z = x^{-\beta}y^{\alpha}$  :  $F = a\Psi^m$ ,  $G = b\Psi^n$  avec  $\Psi = x^u y^v \varphi(z)$ ,  $\varphi(0) \neq 0$ . Nous avons  $Jac(F_j, \Psi) = \Psi^s$  ; la mise en facteur de  $\Psi^{s-1}$  dans  $F_j$  est de nouveau licite car  $\alpha + \beta > 0$ , et nous obtenons maintenant  $F_j = xy\Psi^{s-1}$ . L'identité  $Jac(xy, \Psi) = C^{te} \cdot \Psi$  conduit à :  $(v-u)\varphi + (\alpha+\beta)z\varphi' = C^{te} \cdot \varphi$ . Par suite, le polynôme  $\varphi$  est une puissance de  $z$ , et il est donc constant (car  $\varphi(0) \neq 0$ ). Ainsi  $\Psi$  est un monôme et **l'arête n'existe pas**.

## 3 Conclusion

Les spécialistes savent bien qu'il suffisait d'éliminer le cas où  $f$  et  $g$  avaient deux points (communs) distincts à l'infini pour aboutir à la preuve de la conjecture du Jacobien.

Précisons cela, en énonçant la Proposition I.5.1 de [1] (voir également [3]).

**PROPOSITION 3** : *Soit  $f$  et  $g$  deux polynômes vérifiant  $Jac(f, g) = 1$ , ayant des polygones de Newton commodes. Alors on est dans l'un des deux cas suivants :*

1.  *$f = 0$  et  $g = 0$  ont un seul point commun à l'infini, et il existe alors  $h$ , composé d'automorphismes élémentaires, tel que  $\deg(f \circ h) < \deg(f)$  et  $\deg(g \circ h) < \deg(g)$ .*
2.  *$f = 0$  et  $g = 0$  ont deux points communs à l'infini, et il existe alors  $h$ , composé d'automorphismes élémentaires, tel que les polygones de Newton de  $f \circ h$  et  $g \circ h$  soient commodes et 'COMPLIQUÉS'.*

Pour conclure, il suffit de savoir qu'un polygone commode 'COMPLIQUÉ' satisfait à la condition  $(\star)$  utilisée au paragraphe 2 ci-dessus. Jacobien avait bien conjecturé !

NOTA BENE. Dans la proposition, on suppose toujours  $M > N \geq 2$  pour éviter le cas de l'automorphisme linéaire. Le cas où l'un des polygones de Newton n'est pas commode se traite sans difficulté.

## References

- [1] BRIANÇON J., *Tentative ratée au Jacobien par la voie du polygone de Newton*, prépublication no. 80 du Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Nice - Sophia Antipolis, juin 1985.
- [2] KUO T.-C., PARUSIŃSKI A., PAUNESCU L., *A proof of the Plane Jacobian Conjecture*, arXiv.org math.AG/0509431.
- [3] OKA M., *On the boundary obstructions to the Jacobian problem*, Kodai Math. J. 6 (1983), no. 3, 419–433.