



HAL
open science

Dynamique sur le rayon modulaire et fractions continues en caractéristique p .

Anne Broise, Frédéric Paulin

► **To cite this version:**

Anne Broise, Frédéric Paulin. Dynamique sur le rayon modulaire et fractions continues en caractéristique p . 2005. hal-00014043

HAL Id: hal-00014043

<https://hal.science/hal-00014043>

Preprint submitted on 17 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dynamique sur le rayon modulaire et fractions continues en caractéristique p .

Anne Broise Frédéric Paulin

Abstract

Let \widehat{K} be the field of formal Laurent series in X^{-1} over the finite field k , and let A be the ring of polynomials in X over k . One of the main results of the paper is to give a particularly nice coding of the geodesic flow on the quotient of the Bruhat-Tits tree \mathbb{T} of $\mathrm{PGL}_2(\widehat{K})$ by $\mathrm{PGL}_2(A)$, by using the continued fraction expansion of the endpoints of the geodesic lines in \mathbb{T} (the space of ends of \mathbb{T} identifies with $\mathbb{P}_1(\widehat{K})$). This allows in particular to prove in a dynamical way the invariance of the Haar measure by the Artin map. 1

1 Introduction

Soit $\widehat{K} = \mathbb{F}_q((X^{-1}))$ le corps local des séries formelles de Laurent en X^{-1} à coefficients dans le corps fini \mathbb{F}_q , et $\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[X^{-1}]]$ le sous-anneau de \widehat{K} des séries formelles entières. On considère le groupe localement compact $G = \mathrm{PGL}(2, \widehat{K})$, et son réseau non uniforme $\Gamma = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q[X])$. Le groupe G agit sur son arbre (localement fini) de Bruhat-Tits \mathbb{T}_q . L'espace des bouts de \mathbb{T}_q s'identifie avec la droite projective $\mathbb{P}_1(\widehat{K})$, et on note x_* le point base standard de \mathbb{T}_q (voir par exemple [Ser2] ou la partie 2 pour des rappels).

L'un des buts principaux de cet article, qui fait suite à [Pau], est d'expliciter en termes arithmétiques la structure ergodique des actions commutantes de Γ et du flot géodésique (action de \mathbb{Z} par translation à la source) sur l'espace des géodésiques de \mathbb{T}_q (i.e. des isométries $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}_q$ d'origine $\ell(0)$ un sommet de \mathbb{T}_q).

Nous décrivons (dans la partie 3.3) la structure de l'ensemble des géodésiques de \mathbb{T}_q modulo l'action de Γ . Notons $\pi : \mathbb{T}_q \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{T}_q$ la projection canonique. Alors, l'ensemble $\pi^{-1}(\pi(x_*))$ est une section Γ -équivariante globale pour le flot géodésique (toute orbite la rencontre une infinité de fois). De plus, toute géodésique de \mathbb{T}_q , d'origine dans la section globale $\pi^{-1}(\pi(x_*))$, est équivalente, modulo l'action d'un élé-

¹**AMS codes** : 11 J 70, 20 G 25, 20 E 08, 37 A 45, 11 K 50. **Keywords** : continued fractions, Artin map, Laurent series field, Bruhat-Tits tree, geodesic flow, coding.

ment de Γ , à une unique géodésique ℓ d'origine x_* , d'extrémité négative un point de $J = \bigcup_{a \in \mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q} (a + X^{-1}\mathcal{O})$ et d'extrémité positive un point de $X^{-1}\mathcal{O}$. Une manière de rendre cet élément de Γ unique est d'introduire des "décorations" sur les géodésiques (voir la partie 3).

Notons $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ l'ensemble des telles géodésiques ℓ , identifiées à leurs couples d'extrémités (ξ_-, ξ_+) , avec de plus ξ_+, ξ_- irrationnelles (i.e. dans $\mathbb{P}_1(\widehat{K}) - \mathbb{P}_1(K)$). Soit $\tilde{\Psi} : \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ l'application induite par l'application de premier retour du flot géodésique sur la section globale $\pi^{-1}(\pi(x_*))$ (voir la partie 3.3). Pour ℓ dans $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$, notons $(a_n)_{n \geq 1}$ le développement en fractions continues d'Artin [Art] de ξ_+ , et $(a_{-n})_{n \geq 0}$ celui de $\frac{1}{\xi_-}$ (voir la partie 2.1 pour des rappels).

Nous montrons dans la partie 3 le résultat suivant :

Théorème 1.1 *L'application $\Theta' : \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) \rightarrow (\mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}}$, définie par $\Theta'(\ell) = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, est un homéomorphisme qui rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta'} & (\mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}} \\ \tilde{\Psi} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta'} & (\mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}} \quad , \end{array}$$

où σ est le décalage à gauche des suites bilatères de $(\mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}}$. De plus, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) \\ \text{p}_+ \downarrow & & \downarrow \text{p}_+ \\ X^{-1}\mathcal{O} \cap (\widehat{K} - K) & \xrightarrow{\Psi} & X^{-1}\mathcal{O} \cap (\widehat{K} - K) \quad , \end{array}$$

où $\Psi : \xi \mapsto \frac{1}{\xi} - \left[\frac{1}{\xi} \right]$ est l'application d'Artin (si ζ est dans \widehat{K} , alors $[\zeta]$ désigne sa partie entière), et $\text{p}_+ : (\xi_-, \xi_+) \mapsto \xi_+$ est la projection sur la deuxième coordonnée.

Notons m la mesure de probabilité qui est la restriction à $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ de la mesure naturelle invariante par le flot géodésique. La mesure m coïncide avec la mesure de Haar quotient sur $\Gamma \backslash G/M$ pour M le sous-groupe des matrices diagonales à coefficients dans \mathcal{O}^* , et, de manière classique, avec la mesure de Patterson-Sullivan-Bowen-Margulis de Γ (voir par exemple [Bou, BM] et la partie 4).

Nous montrons dans la partie 4 que l'image de m par Θ' est une mesure de Bernoulli sur $(\mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}}$. Ceci implique en particulier que si S est le sous-groupe diagonal de G , alors l'action à droite de S/M sur $\Gamma \backslash G/M$ est Bernoulli (donc mélangeante, ce qui était déjà connu, voir par exemple [BN]). Dans un article en préparation [BP], nous étudierons le cas général des réseaux des groupes algébriques semi-simples de rang 1 sur un corps local non archimédien. En fait, nous donnerons des codages markoviens de flots géodésiques sur des arbres munis d'actions très générales de groupes. Ces codages permettent de contourner l'abondance de torsion dans les réseaux non-uniformes d'arbres, dont on ne peut se débarrasser par passage à un sous-groupe d'indice fini.

Nous montrons dans la partie 5 que l'image de m par la deuxième projection est la mesure de Haar sur $X^{-1}\mathcal{O}$. Ceci explique de manière dynamique l'invariance de cette mesure de Haar par la transformation d'Artin.

Ces résultats sont analogues aux résultats qui relient le flot géodésique sur la courbe modulaire $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$ avec le développement en fractions continues des nombres réels (et qui expliquent, en particulier, l'invariance de la mesure de Gauss $\frac{1}{\log 2} \frac{dx}{1+x}$ par la transformation de Gauss $x \mapsto \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$) (voir par exemple [Ser1]).

Cet article fait suite à [Pau], où une partie de l'analogie ayant trait aux géodésiques individuelles, est développée. Mais le codage global du flot géodésique n'est pas contenu (même pas entre les lignes) dans [Pau], car une approche globale suivant de trop près [Pau] conduit à des discontinuités. La présence du corps résiduel \mathbb{F}_q , absent dans le cas réel, est une des sources de problèmes. C'est, entre autre, le travail de "naturalité" du présent article, en particulier à partir de la notion de géodésique décorée, qui permet le codage global. Il ne s'agit pas de construire n'importe quel codage, mais un qui soit intimement lié à la structure arithmétique du réseau $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q[X])$ (celui-ci n'est pas de type fini et contient des sous-groupes infini de torsion), et qui permette une correspondance entre propriétés dynamiques et arithmétiques.

2 Notations et rappels

Toute cette partie est composé de rappels, pour lesquels nous renvoyons par exemple à [Ser1, Spr, Sch, Laj, BN, Ser2, Pau]. Elle n'est écrite que pour éviter au lecteur qui ne connaîtrait pas les notations et résultats de [Ser1, Pau] d'avoir à lire le présent article en ayant à côté ces deux références. Les autres lecteurs peuvent se reporter directement au chapitre 3.

2.1 Le corps des séries formelles de Laurent

Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini, d'ordre q (où q est une puissance d'un nombre premier). On note $A = k[X]$ l'anneau des polynômes en une variable X sur k , et $K = k(X)$ le corps des fractions rationnelles en X sur k . Soit $\widehat{K} = k((X^{-1}))$ le complété de K pour la valuation v_∞ définie par

$$v_\infty(P/Q) = (-\deg P) - (-\deg Q) .$$

Le corps \widehat{K} est muni de l'unique valuation qui étend v_∞ (que l'on notera de la même manière), de la valeur absolue

$$|f|_\infty = q^{-v_\infty(f)}$$

et de la distance ultramétrique définie par cette valeur absolue

$$d_\infty(f, g) = |f - g|_\infty .$$

Tout élément de \widehat{K} s'écrit de manière unique comme série convergente

$$f = \sum_{i > -\infty} f_i X^{-i}$$

avec f_i dans k , nul pour i suffisamment petit. On a

$$v_\infty(f) = \sup\{j \in \mathbb{Z} \mid \forall i < j, f_i = 0\}.$$

On note $\mathcal{O} = \{f \in \widehat{K}, v_\infty(f) \geq 0\}$ l'anneau de la valuation v_∞ dans \widehat{K} . C'est le sous-espace compact-ouvert $k[[X^{-1}]]$ des séries entières en X^{-1} sur k , c'est aussi la boule fermée de rayon 1 et de centre 0 dans \widehat{K} .

Pour tout f dans \widehat{K} , il existe un unique couple formé d'un polynôme en X sur k , noté $[f] \in A$, et d'une série entière en X^{-1} sur k , de terme constant nul, notée $\{f\} \in X^{-1}\mathcal{O}$, tels que

$$f = [f] + \{f\}.$$

On appelle $[f]$ la *partie entière* de f et $\{f\} = f - [f]$ la *partie fractionnaire* de f . L'*application d'Artin* est l'application $\Psi : X^{-1}\mathcal{O} - \{0\} \rightarrow X^{-1}\mathcal{O}$ définie par

$$\Psi(f) = \left\{ \frac{1}{f} \right\} = \frac{1}{f} - \left[\frac{1}{f} \right].$$

On note cK l'ensemble $\widehat{K} - K$ des points irrationnels de \widehat{K} . Pour f dans cK , on pose $a_0 = [f]$ et pour $n \geq 1$ entier,

$$a_n = \left[\frac{1}{\Psi^{n-1}(f - a_0)} \right].$$

Alors a_n est dans A . Si $n \geq 1$, le degré de a_n est strictement positif et

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}.$$

Pour f dans $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK$, on a $a_0 = 0$ et on appelle *développement en fractions continues d'Artin* de f la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.

2.2 L'arbre de Bruhat-Tits

Notons G le groupe localement compact $\mathrm{PGL}(2, \widehat{K})$. On appelle *groupe modulaire* le sous-groupe discret $\mathrm{PGL}(2, A)$ de G , et on le note Γ . Dans toute la suite, on note de la même manière une matrice de $\mathrm{GL}(2, \widehat{K})$ et son image dans G .

On rappelle que pour tout corps commutatif κ , l'action par homographies du groupe $\mathrm{PGL}(2, \kappa)$ sur la droite projective $\mathbb{P}_1(\kappa)$ est simplement transitive sur les triplets de points de $\mathbb{P}_1(\kappa)$. Comme l'application naturelle $\mathrm{PGL}(2, A) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, K)$ est une bijection, le groupe Γ agit simplement transitivement sur les triplets de points de $\mathbb{P}_1(K)$.

On note $\mathrm{GL}(2, \widehat{K})_1$ le groupe des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans \widehat{K} , dont la valeur absolue du déterminant est égale à 1, et $G_1 = \mathrm{PGL}(2, \widehat{K})_1$ le quotient par son centre. Comme les éléments inversibles de A sont de valeur absolue égale à 1, le groupe Γ est contenu dans G_1 .

L'arbre de Bruhat-Tits \mathbb{T}_q de (SL_2, \widehat{K}) est le graphe défini par

1. les sommets de \mathbb{T}_q sont les classes d'homothétie (par \widehat{K}^\times) $\Lambda = [L]$ de \mathcal{O} -réseaux (i.e. \mathcal{O} -sous-modules libres de rang deux) L dans $\widehat{K} \times \widehat{K}$;
2. deux sommets Λ, Λ' sont joints par une arête si et seulement s'il existe des représentants L, L' de Λ, Λ' tels que $L' \subset L$ et L/L' est isomorphe à $\mathcal{O}/X^{-1}\mathcal{O} = k$.

On note $V\mathbb{T}_q$ l'ensemble des sommets de \mathbb{T}_q et $E\mathbb{T}_q$ l'ensemble de ses arêtes. On note d la distance dans \mathbb{T}_q et $x_* = [\mathcal{O} \times \mathcal{O}]$ la classe du réseau standard. Le graphe \mathbb{T}_q est un arbre régulier de degré $q + 1$. L'action naturelle de $\mathrm{GL}(2, \widehat{K})$ sur les \mathcal{O} -réseaux induit une action de G sans inversion sur \mathbb{T}_q , transitive sur les arêtes. Le stabilisateur de x_* est le groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O})$.

On identifie dans la suite l'arbre \mathbb{T}_q avec sa réalisation géométrique. On note $\partial\mathbb{T}_q$ l'espace des bouts de l'espace topologique localement compact \mathbb{T}_q . C'est l'espace des classes d'équivalence de rayons géodésiques dans \mathbb{T}_q , où l'on identifie deux rayons géodésiques si leur intersection est encore un rayon géodésique. L'action de G sur \mathbb{T}_q s'étend continuellement en une action par homéomorphismes de G sur $\partial\mathbb{T}_q$.

L'espace $\partial\mathbb{T}_q$ s'identifie, de manière G -équivariante, avec la droite projective $\mathbb{P}(\widehat{K} \times \widehat{K}) = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$, par l'application qui, à l'extrémité d'un rayon géodésique issu de $\Lambda_0 = x_*$, de suite des sommets consécutifs $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, associe l'unique droite de $\widehat{K} \times \widehat{K}$ contenant l'intersection des \mathcal{O} -réseaux L_n , avec $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'unique suite de \mathcal{O} -réseaux dans $\widehat{K} \times \widehat{K}$ telle que $[L_n] = \Lambda_n$ et $L_{n+1} \subset L_n$.

En choisissant la droite $\widehat{K} \times \{0\}$ de $\widehat{K} \times \widehat{K}$ comme point à l'infini de $\mathbb{P}_1(\widehat{K})$, on identifie $\partial\mathbb{T}_q = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$ avec $\widehat{K} \cup \{\infty\}$. L'action de G sur $\partial\mathbb{T}_q = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$ correspond à l'action de G par homographies sur $\widehat{K} \cup \{\infty\}$.

On note $\pi : \mathbb{T}_q \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{T}_q$ la projection canonique et Γ_∞ le fixateur dans Γ du point ∞ de $\partial\mathbb{T}_q$. Le rayon géodésique \mathcal{D}_Γ issu de x_* et d'extrémité ∞ , donc de suite des sommets consécutifs $([\mathcal{O} \times X^{-n}\mathcal{O}])_{n \in \mathbb{N}}$, est un domaine fondamental pour l'action du groupe modulaire Γ sur l'arbre de Bruhat-Tits \mathbb{T}_q , au sens où ses images par Γ recouvrent \mathbb{T}_q . La restriction $\pi|_{\mathcal{D}_\Gamma}$ est un isomorphisme simplicial de \mathcal{D}_Γ sur $\Gamma \backslash \mathbb{T}_q$. Le graphe $\Gamma \backslash \mathbb{T}_q$ hérite par π d'une structure de graphe de groupes, que l'on note $\Gamma \backslash \backslash \mathbb{T}_q$, et que l'on appelle le *rayon modulaire* (voir [Ser2] pour les définitions et la construction).

Voir par exemple [Ser2] pour des justifications et compléments.

2.3 La famille Γ -équivariante maximale d'horoboules d'intérieurs disjoints.

Pour tout ξ de $\partial\mathbb{T}_q$, on appelle *fonction de Buseman* de \mathbb{T}_q l'application $\beta_\xi : \mathbb{T}_q \times \mathbb{T}_q \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(y, c(t)) - d(x, c(t))$$

où $c : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{T}_q$ est un rayon géodésique convergeant vers ξ . La fonction β_ξ ne dépend pas du choix de c , est invariante par isométries :

$$\forall \gamma \in G, \quad \beta_{\gamma\xi}(\gamma x, \gamma y) = \beta_\xi(x, y),$$

et vérifie la relation de cocycle :

$$\beta_\xi(x, y) + \beta_\xi(y, z) = \beta_\xi(x, z).$$

En fait, l'application $t \mapsto d(y, c(t)) - d(x, c(t))$ est constante à partir d'un certain temps. Le rayon géodésique $[x, \xi[$ rencontre le rayon géodésique $[y, \xi[$ en un rayon géodésique $[w, \xi[$ et $\beta_\xi(x, y) = d(y, w) - d(w, x)$.

On appelle *horosphère* centrée en $\xi \in \partial\mathbb{T}_q$ et passant par $x \in \mathbb{T}_q$ l'ensemble des points y de \mathbb{T}_q tels que $\beta_\xi(x, y) = 0$. Son *horoboule* associée est l'ensemble des points y de \mathbb{T}_q tels que $\beta_\xi(x, y) \leq 0$.

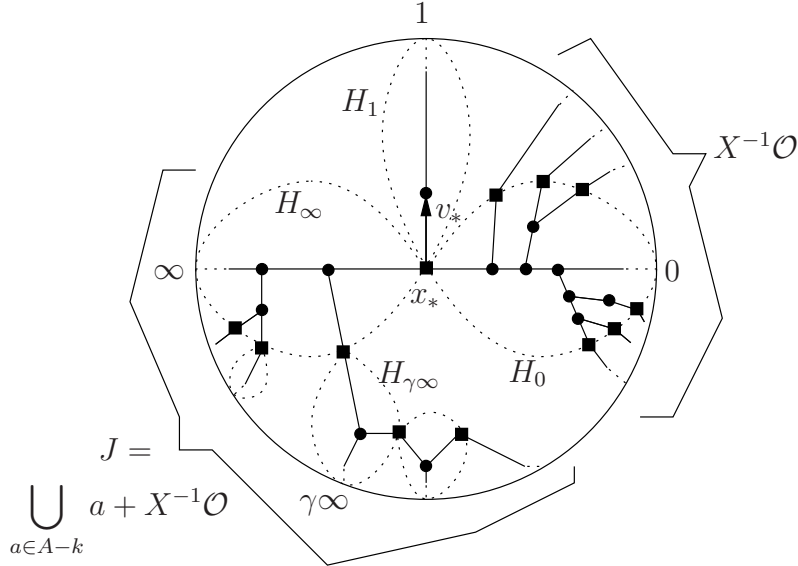


Figure 1 : Trajet des géodésiques dans la famille d'horoboules \mathcal{HB} .

On note H_∞ l'horosphère centrée en ∞ de $\partial\mathbb{T}_q$ et passant par x_* , et HB_∞ son horoboule associée. C'est l'orbite du rayon fondamental \mathcal{D}_Γ par le fixateur Γ_∞ du point ∞ (de $\partial\mathbb{T}_q$) dans le groupe modulaire Γ . Pour tout γ dans Γ , on note $H_{\gamma\infty} = \gamma H_\infty$, c'est l'horosphère centrée en $\gamma\infty$ et passant par γx_* , et on note $HB_{\gamma\infty} = \gamma HB_\infty$ son horoboule associée. Il est facile de voir que la famille $\mathcal{HB} = (HB_{\gamma\infty})_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\infty}$ est

la famille des adhérences des composantes connexes de la préimage par π du rayon $\Gamma \backslash \mathbb{T}_q$ privé de son origine. Les horoboules de cette famille se rencontrent deux à deux en au plus un point (sur l'intersection des horosphères associées), et leur réunion est égale à \mathbb{T}_q .

Notons \mathcal{H} la famille d'horosphères $(H_{\gamma\infty})_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\infty}$. (Voir par exemple [Pau, Pau2] pour des justifications et compléments.)

3 Codage du flot géodésique sur le rayon modulaire

3.1 L'espace des géodésiques décorées sur le rayon modulaire

Appelons *géodésique décorée de \mathbb{T}_q* une géodésique ℓ de \mathbb{T}_q (i.e. une isométrie $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}_q$), dont l'origine $x_0 = x_0(\ell) = \ell(0)$ est sur l'une des horosphères de la famille \mathcal{H} (i.e. est un point de $\pi^{-1}(\pi(x_*))$), et qui est munie d'une arête $v_0 = v_0(\ell)$ issue de x_0 non contenue dans ℓ , appelée *décoration*. Remarquons que pour $q = 2$, la décoration est unique.

La *géodésique décorée standard* ℓ_* est la géodésique d'extrémités ∞ et 0 , orientée de ∞ vers 0 , d'origine x_* et décorée par l'arête v_* qui pointe vers 1 .

Notons $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ l'ensemble des géodésiques décorées *totalemtent irrationnelles* de \mathbb{T}_q , c'est-à-dire celles qui ont leurs deux extrémités dans $\partial\mathbb{T}_q - \mathbb{P}_1(K) = {}^cK$. Attention, ℓ_* est une géodésique décorée qui n'est pas dans $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$.

L'ensemble $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ est muni de la topologie définie par le système fondamental d'entourages $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, où V_n est l'ensemble des couples de géodésiques décorées qui coïncident entre les instants $-n$ et n et qui ont même décoration.

Lemme 3.1 *Le groupe Γ agit librement et proprement sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$.*

Preuve. Le groupe Γ préserve la famille \mathcal{H} et $\mathbb{P}_1(K)$ donc il préserve cK . Il agit sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$: l'image par un élément γ de Γ d'une géodésique ℓ de décoration v_0 est la géodésique $\gamma\ell$ de décoration γv_0 . Comme Γ agit proprement sur \mathbb{T}_q , l'action de Γ sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ est propre. Cette action est aussi libre, car G agit simplement transitivement sur les triplets de points de $\partial\mathbb{T}_q$, et si un élément γ de Γ fixe une géodésique décorée, d'extrémités (distinctes) ξ_-, ξ_+ et de décoration v_0 , alors elle fixe aussi le point à l'infini ξ_0 de l'horoboule de la famille \mathcal{HB} qui contient v_0 , et ξ_0 est distinct de ξ_- et de ξ_+ . \square

Notons $\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$ le quotient $\Gamma \backslash \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$.

Pour ℓ une géodésique de \mathbb{T}_q , on note $\xi_- = \xi_-(\ell)$ et $\xi_+ = \xi_+(\ell)$ ses extrémités négative et positive. On munit $\partial\mathbb{T}_q$ de la topologie définie par d_∞ , $V\mathbb{T}_q$ et $E\mathbb{T}_q$ de la topologie discrète et $\partial\mathbb{T}_q \times \partial\mathbb{T}_q \times V\mathbb{T}_q \times E\mathbb{T}_q$ de la topologie produit. L'application qui à un élément ℓ de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ associe le quadruplet (ξ_-, ξ_+, x_0, v_0) de $\partial\mathbb{T}_q \times \partial\mathbb{T}_q \times V\mathbb{T}_q \times E\mathbb{T}_q$ est alors un homéomorphisme de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ sur son image, qui est un borélien B . Nous appellerons cette application le *paramétrage* de l'espace des géodésiques décorées totalement irrationnelles de \mathbb{T}_q . Par la suite, nous identifierons une géodésique décorée ℓ et son quadruplet (ξ_-, ξ_+, x_0, v_0) . L'action de Γ sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$

s'identifie alors avec la restriction à B de l'action diagonale de Γ sur l'espace produit $\partial\mathbb{T}_q \times \partial\mathbb{T}_q \times V\mathbb{T}_q \times E\mathbb{T}_q$.

3.2 Codage du flot géodésique sur le rayon modulaire

Appelons *renversement du temps sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$* l'application $\tilde{\tau} : \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ définie par $\tilde{\tau}(\xi_-, \xi_+, x_0, v_0) = (\xi_+, \xi_-, x_0, v_0)$. Il est clair que $\tilde{\tau}$ est équivariante sous l'action de Γ , elle induit donc par passage au quotient une application $\tau : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$, que nous appellerons *renversement du temps sur $\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$* .

Nous allons maintenant définir une application $T : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$, que l'on peut voir comme l'application de premier retour en l'origine du flot géodésique sur le rayon modulaire.

Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+, x_0, v_0)$ dans $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$. Notons $\xi_n = \xi_n(\ell)$ les points de $\mathbb{P}_1(K)$ tels que $(HB_{\xi_n})_{n \in \mathbb{Z}}$ soit la suite des horoboules de \mathcal{HB} traversées consécutivement par ℓ , avec $HB_{\xi_0} \cap HB_{\xi_1} = \{x_0\}$. Soit $x_n = x_n(\ell)$ le point de $V\mathbb{T}_q$ tel que $HB_{\xi_n} \cap HB_{\xi_{n+1}} = \{x_n\}$.

Il faut remarquer que les suites (ξ_n) et (x_n) sont bien indexées par \mathbb{Z} . En effet, par définition, une géodésique décorée de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ a ses deux extrémités irrationnelles. Or toute géodésique qui rentre dans une horoboule de la famille \mathcal{HB} ou bien en ressort, ou bien converge vers le point à l'infini de cette horoboule, qui est rationnel.

Notons $\eta_0 = \eta_0(\ell)$ le point de $\mathbb{P}_1(K)$ tel que l'horoboule HB_{η_0} contienne l'arête v_0 . Soit $s_0 = s_0(\ell)$ l'unique élément (d'ordre 2) de Γ qui fixe η_0 et échange ξ_0 et ξ_1 . Soit $s_{\frac{1}{2}} = s_{\frac{1}{2}}(\ell)$ l'unique élément (d'ordre 2) de Γ qui fixe ξ_1 et échange ξ_0 et ξ_2 .

Notons $v_1 = s_{\frac{1}{2}} s_0 v_0 = s_{\frac{1}{2}} v_0$. Comme $s_{\frac{1}{2}}$ envoie la géodésique entre ξ_1 et ξ_0 sur la géodésique entre ξ_1 et ξ_2 , l'élément $s_{\frac{1}{2}} s_0$ de Γ envoie x_0 sur x_1 et v_0 sur v_1 , qui est une arête issue de x_1 qui ne rentre ni dans HB_{ξ_1} ni dans HB_{ξ_2} .

De même, notons $s_{-\frac{1}{2}} = s_{-\frac{1}{2}}(\ell)$ l'unique élément (d'ordre 2) de Γ qui fixe ξ_0 et échange ξ_1 et ξ_{-1} . Posons $v_{-1} = s_{-\frac{1}{2}} s_0 v_0$, c'est une arête issue de x_{-1} qui ne rentre ni dans HB_{ξ_0} , ni dans $HB_{\xi_{-1}}$.

Posons $\tilde{T}(\ell) = (\xi_-, \xi_+, x_1, v_1)$. L'application $\tilde{T} : \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ est un homéomorphisme (dont l'inverse est $\ell \mapsto (\xi_-, \xi_+, x_{-1}, v_{-1})$), appelé *application de premier retour du flot géodésique sur \mathbb{T}_q* . Clairement, l'application \tilde{T} anti-commute avec l'application de renversement du temps $\tilde{\tau}$:

$$\tilde{\tau} \circ \tilde{T} \circ \tilde{\tau} = \tilde{T}^{-1} .$$

Pour tout γ dans Γ , on a $s_0(\gamma\ell) = \gamma s_0(\ell) \gamma^{-1}$ et $s_{\frac{1}{2}}(\gamma\ell) = \gamma s_{\frac{1}{2}}(\ell) \gamma^{-1}$. Donc \tilde{T} est équivariante, et induit par passage au quotient un homéomorphisme

$$T : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q),$$

qui anti-commute avec l'application de renversement du temps τ , et qui est appelé *application de premier retour du flot géodésique sur $\Gamma \backslash \mathbb{T}_q$* .

Notons Γ'_∞ l'ensemble des éléments de Γ_∞ qui ne fixent pas x_* . Donc $\Gamma'_\infty = \Gamma_\infty - (\text{PGL}(2, k) \cap \Gamma_\infty)$. On munit Γ'_∞ de la topologie discrète et $(\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z}$ de la topologie produit.

Le résultat suivant est un premier théorème de codage du flot géodésique sur le quotient de l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}(2, k)$ par le sous-groupe arithmétique $\mathrm{PGL}(2, A)$. Même si ce n'est pas la version utilisée pour les applications arithmétiques, nous le donnons sous cette forme, qui doit être généralisable en remplaçant PGL_2 par n'importe quel groupe algébrique \underline{G} connexe semi-simple sur \widehat{K} , de \widehat{K} -rang 1, et $\mathrm{PGL}(2, A)$ par n'importe quel sous-groupe arithmétique Γ' de $\underline{G}(\widehat{K})$, en utilisant le théorème de structure du graphe de groupes $\Gamma' \backslash T'$, quotient de T' par Γ' , avec T' l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$. En effet, le graphe de groupes $\Gamma' \backslash T'$ est obtenu à partir d'un graphe fini de groupes finis, en rajoutant un nombre fini de rayons de groupes finis, analogues au rayon modulaire $\Gamma \backslash \mathbb{T}_q$ (voir par exemple [Ser2]).

Théorème 3.2 *Il existe un homéomorphisme $\Theta : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow (\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z}$ tel que les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta} & (\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z} \\ \downarrow T & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta} & (\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta} & (\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z} \\ \downarrow \tau & & \downarrow \kappa \circ \sigma \\ \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta} & (\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z} \end{array}$$

avec σ le décalage à gauche et κ la transformation de $(\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z}$ définie par $\kappa((\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (\beta'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $\beta'_n = \beta_{-n}^{-1}$.

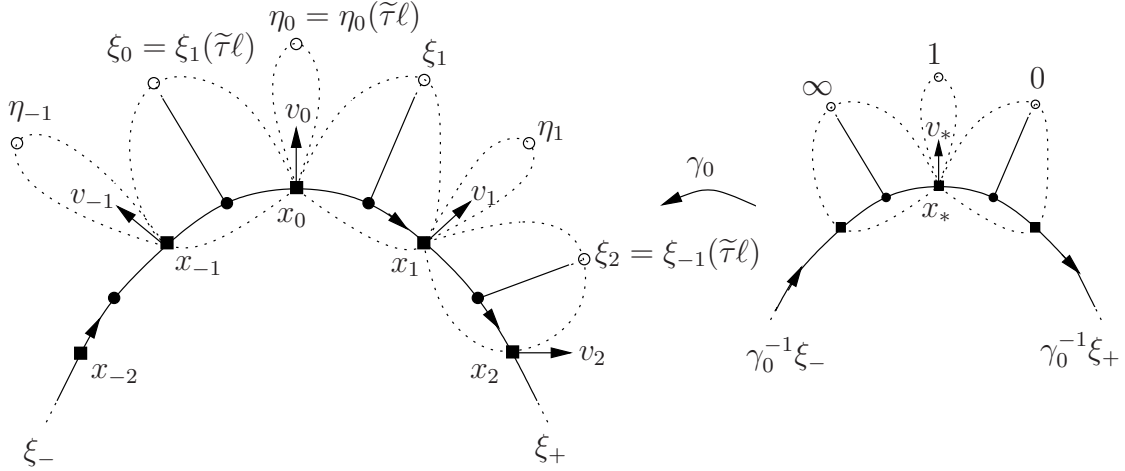


Figure 2 : Codage des géodésiques.

Preuve. Pour tout n dans \mathbb{Z} et pour toute géodésique ℓ de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, notons $\eta_n = \eta_n(\ell) = \eta_0(\tilde{T}^n \ell)$ et $v_n = v_n(\ell) = v_0(\tilde{T}^n \ell)$. Par définition de \tilde{T} , les notations v_1 et v_{-1} coïncident avec celles déjà introduites. Soit $\gamma_n = \gamma_n(\ell)$ l'unique élément de Γ envoyant $\infty, 1, 0$ sur respectivement ξ_n, η_n, ξ_{n+1} . Notons i l'unique élément (d'ordre 2) de Γ fixant 1 et échangeant 0 et ∞ . Posons

$$\beta_n = \beta_n(\ell) = i\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n \quad \text{et} \quad \tilde{\Theta}(\ell) = (\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Comme $i\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n \infty = i\gamma_{n-1}^{-1}\xi_n = i0 = \infty$, l'élément β_n de Γ appartient à Γ_∞ . De plus, $\beta_n(x_*) = i\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n(x_*) = i\gamma_{n-1}^{-1}(x_n)$, donc $\beta_n(x_*)$ ne peut pas valoir x_* , car x_{n-1} est différent de x_n et $i\gamma_{n-1}^{-1}(x_{n-1}) = x_*$. Ainsi β_n est dans Γ'_∞ .

Pour tout γ de Γ , on a la relation de naturalité $\gamma_n(\gamma\ell) = \gamma\gamma_n(\ell)$. L'application $\tilde{\Theta} : \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \rightarrow (\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z}$ est constante sur chaque orbite de Γ dans $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$. Elle induit donc par passage au quotient une application $\Theta : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow (\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z}$.

Commutativité des diagrammes. Par construction de \tilde{T} et par définition des η_n , pour tout n dans \mathbb{Z} , on a $\xi_n(\ell) = \xi_0(\tilde{T}^n\ell)$ et $\eta_n(\ell) = \eta_0(\tilde{T}^n\ell)$. Donc

$$\xi_n(\tilde{T}\ell) = \xi_{n+1}(\ell) \quad \text{et} \quad \eta_n(\tilde{T}\ell) = \eta_{n+1}(\ell).$$

Par conséquent, $\gamma_n(\tilde{T}\ell) = \gamma_{n+1}(\ell)$, d'où $\beta_n(\tilde{T}\ell) = \beta_{n+1}(\ell)$. Donc $\Theta \circ T = \sigma \circ \Theta$, ce qui montre la commutativité du diagramme de gauche du théorème 3.2.

Par définition des ξ_n , on a $\xi_n(\tilde{\tau}\ell) = \xi_{-(n-1)}(\ell)$. Comme $\eta_0(\tilde{\tau}\ell) = \eta_0(\ell)$, et comme \tilde{T} et $\tilde{\tau}$ anti-commutent, par définition des η_n , on a $\eta_n(\tilde{\tau}\ell) = \eta_{-n}(\ell)$. La définition des γ_n montre que $\gamma_n(\tilde{\tau}\ell)$ et $\gamma_{-n}(\ell)i$ coïncident en $\infty, 1, 0$. Donc $\gamma_n(\tilde{\tau}\ell) = \gamma_{-n}(\ell)i$. D'où

$$\beta_n(\tilde{\tau}\ell) = i\gamma_{n-1}^{-1}(\tilde{\tau}\ell)\gamma_n(\tilde{\tau}\ell) = \gamma_{-(n-1)}^{-1}(\ell)\gamma_{-n}(\ell)i = \beta_{-(n-1)}^{-1}(\ell).$$

Ceci montre la commutativité du diagramme de droite du théorème 3.2.

Continuité de Θ . Montrons que l'application $\ell \mapsto \beta_1(\ell)$ est localement constante. Soit ℓ un élément de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$. Si ℓ' est une géodésique décorée, ayant mêmes origine et décoration que ℓ , et coïncidant avec ℓ sur le 1-voisinage du segment $[x_0(\ell), x_1(\ell)]$, alors $\eta_0(\ell) = \eta_0(\ell')$ et $\xi_k(\ell) = \xi_k(\ell')$ pour $k = 0, 1, 2$. Donc $\eta_1(\ell) = \eta_1(\ell')$ par définition de η_1 . Par définition des γ_n , on a alors $\gamma_k(\ell) = \gamma_k(\ell')$ pour $k = 0, 1$. Par conséquent $\beta_1(\ell) = \beta_1(\ell')$. Donc $\ell \mapsto \beta_1(\ell)$ est continue. Comme $\beta_n(\ell) = \beta_1(\tilde{T}^{n-1}\ell)$ et puisque \tilde{T} est un homéomorphisme, l'application $\ell \mapsto \beta_n(\ell)$ est continue sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ pour tout n dans \mathbb{Z} . Donc $\tilde{\Theta}$ est continue sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, et par passage au quotient, Θ est continue sur $\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$.

Injectivité de Θ . Soient ℓ et ℓ' deux éléments de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ tels que $\tilde{\Theta}(\ell) = \tilde{\Theta}(\ell')$. Montrons que ℓ et ℓ' sont dans la même orbite sous Γ . Ceci montrera l'injectivité de Θ . Quitte à remplacer ℓ par $\gamma_0(\ell)^{-1}\ell$ et ℓ' par $\gamma_0(\ell')^{-1}\ell'$, on peut supposer que $\xi_0(\ell) = \xi_0(\ell') = \infty$, $\eta_0(\ell) = \eta_0(\ell') = 1$ et $\xi_1(\ell) = \xi_1(\ell') = 0$. En particulier, ℓ et ℓ' ont mêmes origine et décoration. De plus, $\gamma_0(\ell) = \gamma_0(\ell') = \text{id}$. Pour $n \geq 0$, on a

$$\gamma_n = \gamma_0(\gamma_0^{-1}\gamma_1) \cdots (\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n) = \gamma_0 i \beta_1 i \beta_2 \cdots i \beta_n$$

et

$$\gamma_{-n} = \gamma_0(\gamma_{-1}^{-1}\gamma_0)^{-1}(\gamma_{-2}^{-1}\gamma_{-1})^{-1} \cdots (\gamma_{-n}^{-1}\gamma_{-(n-1)})^{-1} = \gamma_0 \beta_0^{-1} i \beta_{-1}^{-1} i \cdots \beta_{-(n-1)}^{-1} i.$$

Donc pour tout n dans \mathbb{Z} , on a $\gamma_n(\ell) = \gamma_n(\ell')$. Comme $\gamma_n \infty = \xi_n$, les points $\xi_n(\ell)$ et $\xi_n(\ell')$ coïncident. Or deux géodésiques décorées ayant mêmes origine et décoration et traversant les mêmes horoboules de \mathcal{HB} sont égales. Donc $\ell = \ell'$.

Surjectivité de Θ . Soit $(\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $(\Gamma'_\infty)^\mathbb{Z}$. Posons $\gamma_0 = \text{id}$. Par récurrence pour tout n dans \mathbb{Z} , posons $\gamma_n = \gamma_{n-1} i \beta_n$. Notons $x_n = \gamma_n x_*$. Comme les β_n sont dans

Γ'_∞ , les points x_n et x_{n+1} sont différents. Considérons la courbe ℓ , géodésique par morceaux, obtenue en recollant consécutivement les segments $[x_n, x_{n+1}]$ (qui ne sont pas réduits à des points). Posons

$$\xi_n = \gamma_n \infty \quad \text{et} \quad \eta_n = \gamma_n 1,$$

qui sont des points de $\mathbb{P}_1(K)$. Alors $\xi_{n+1} = \gamma_{n+1} \infty = \gamma_n i \beta_n \infty = \gamma_n 0$. Comme $\{x_*\} = HB_\infty \cap HB_1 \cap HB_0$, on a $\{x_n\} = HB_{\xi_n} \cap HB_{\eta_n} \cap HB_{\xi_{n+1}}$. Par convexité, le segment $[x_n, x_{n+1}]$ est contenu dans l'horoboule $HB_{\xi_{n+1}}$. Comme deux horoboules distinctes de \mathcal{HB} sont d'intérieurs disjoints, il vient donc $[x_n, x_{n+1}] \cap [x_{n+1}, x_{n+2}] = \{x_{n+1}\}$. Par conséquent ℓ est une géodésique. Il est alors immédiat que, munie de la décoration v_* , la géodésique ℓ a pour image $(\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par $\tilde{\Theta}$. Donc $\tilde{\Theta}$ est surjective, et, par passage au quotient, Θ aussi. \square

3.3 Lien avec la transformation d'Artin

Notons $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ l'ensemble des géodésiques décorées de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ qui ont pour origine x_* et pour décoration v_* .

Lemme 3.3 *Soit ℓ un élément de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, alors ℓ appartient à $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ si et seulement si $\gamma_0(\ell) = \text{id}$.*

Preuve. Si ℓ est dans $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$, alors par définition de γ_0 , on a $\gamma_0(\ell) = \text{id}$. Réciproquement, si $\gamma_0(\ell) = \text{id}$, alors $\xi_0(\ell) = \infty$, $\xi_1(\ell) = 0$ et $\eta_0(\ell) = 1$. Comme $x_0(\ell)$ est le point d'intersection des horosphères H_∞ et H_0 , il n'est autre que x_* . De même, $v_0(\ell)$ est l'arête issue de x_* qui rentre dans HB_1 , donc c'est v_* . Donc ℓ appartient à $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$. \square

Lemme 3.4 *L'application φ de $\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$ dans $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$, définie par $\varphi(\bar{\ell}) = \gamma_0(\ell)^{-1} \ell$ où ℓ est un représentant de l'élément $\bar{\ell}$ de $\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$, est un homéomorphisme, qui est une section de la projection canonique $\pi_0 : \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$, que nous appellerons la section canonique.*

Preuve. Si ℓ est une géodésique décorée de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, alors $\ell' = \gamma_0(\ell)^{-1} \ell$ est dans $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$, car $\gamma_0(\ell') = \text{id}$. Comme deux géodésiques décorées qui ont même décoration et qui coïncident entre -1 et 1 ont même γ_0 , l'application $\tilde{\varphi}$ de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ dans $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ définie par $\ell \mapsto \gamma_0(\ell)^{-1} \ell$ est continue. Elle est surjective car $\gamma_0(\ell) = \text{id}$ si ℓ est dans $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$. Comme $\gamma_0(\gamma \ell) = \gamma \gamma_0(\ell)$ pour tout γ dans Γ , deux éléments ℓ, ℓ' de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ sont dans la même Γ -orbite si et seulement si $\gamma_0(\ell)^{-1} \ell = \gamma_0(\ell')^{-1} \ell'$. L'application $\tilde{\varphi}$ induit donc par passage au quotient une application continue bijective $\varphi : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$. Comme $\gamma_0(\ell)^{-1} \ell$ est dans la même Γ -orbite que ℓ , on a $\pi_0 \circ \varphi = \text{id}$. Si $j : \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ est l'inclusion, alors $\varphi^{-1} = \pi_0 \circ j$, donc φ^{-1} est continue. \square

Posons

$$J = \bigcup_{a \in A-k} (a + X^{-1} \mathcal{O}).$$

Si ℓ est dans $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$, alors ses extrémités $\xi_- = \xi_-(\ell)$ et $\xi_+ = \xi_+(\ell)$ appartiennent respectivement à $J \cap {}^cK$ et $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK$ (voir par exemple [Pau] et la figure 1). L'application de $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ dans $(J \cap {}^cK) \times (X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK)$ définie par $\ell \mapsto (\xi_-, \xi_+)$ est un homéomorphisme. Nous identifierons dans la suite une géodésique ℓ de $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ avec son couple d'extrémités irrationnelles (ξ_-, ξ_+) dans $(J \cap {}^cK) \times (X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK)$.

Nous allons modifier le codage obtenu dans le théorème 3.2 pour obtenir un nouveau codage, relié cette fois-ci à la transformation d'Artin Ψ . Pour cela nous allons préciser les homographies γ_n qui sont apparues au cours de la démonstration précédente. On introduit les notations suivantes : on appelle i (inversion de centre 0), t_a (translation de a) et λ_α (homothétie de rapport α^2) les homographies associées aux matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$ avec a dans A et α dans k^\times .

Tout élément β de Γ_∞ s'écrit alors de manière unique sous la forme $\beta = t_a \lambda_\alpha$ avec a dans A et α dans k^\times . Si β est de plus dans Γ'_∞ alors a ne peut pas être dans k sinon β serait un élément de $\text{PGL}(2, k)$. Donc tout élément β de Γ'_∞ peut s'écrire de façon unique sous la forme $\beta = t_a \lambda_\alpha$ avec a dans $A - k$ et α dans k^\times .

On remarque qu'on a les relations élémentaires suivantes : $t_a^{-1} = t_{-a}$, $\lambda_\alpha^{-1} = \lambda_{1/\alpha}$, $t_a \lambda_\alpha = \lambda_\alpha t_{a/\alpha^2}$ et $i \lambda_\alpha = \lambda_{1/\alpha} i$.

Montrons maintenant le résultat suivant :

Proposition 3.5 *Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+)$ une géodésique de $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$. On note $(a_n)_{n \geq 1}$ le développement en fractions continues d'Artin de ξ_+ et $(a_{-n})_{n \geq 0}$ celui de $\frac{-1}{\xi_-}$. Alors pour tout entier $n > 0$:*

il existe α_n dans k^\times tel que $\gamma_n(\ell) = it_{a_1} it_{a_2} \dots it_{a_n} \lambda_{\alpha_n}$,

il existe α_{-n} dans k^\times tel que $\gamma_{-n}(\ell) = t_{-a_0} it_{-a_{-1}} \dots it_{-a_{-(n-1)}} i \lambda_{\alpha_{-(n-1)}}$.

Preuve. Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+)$ une géodésique de $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$. Procédons par récurrence sur n . Comme $\gamma_0 = \text{id}$, la démonstration du théorème 3.2 montre qu'il existe une suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de Γ'_∞ telle que pour tout $n > 0$, on a :

$$\gamma_n = i\beta_1 i\beta_2 \dots i\beta_n \quad \text{et} \quad \gamma_{-n} = \beta_0^{-1} i\beta_{-1}^{-1} i \dots \beta_{-(n-1)}^{-1} i.$$

La transformation β_1 est dans Γ'_∞ . Elle s'écrit donc de manière unique sous la forme $t_{a_1} \lambda_{\alpha_1}$ avec a_1 dans $A - k$ et α_1 dans k^\times . Nous avons donc bien $\gamma_1 = it_{a_1} \lambda_{\alpha_1}$. Supposons que γ_n s'écrive $it_{a_1} it_{a_2} \dots it_{a_n} \lambda_{\alpha_n}$. Alors

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n i\beta_{n+1} = it_{a_1} it_{a_2} \dots it_{a_n} \lambda_{\alpha_n} i\beta_{n+1} = it_{a_1} it_{a_2} \dots it_{a_n} i\lambda_{1/\alpha_n} \beta_{n+1}.$$

La transformation $\lambda_{1/\alpha_n} \beta_{n+1}$ est dans Γ'_∞ , elle s'écrit donc sous la forme $t_{a_{n+1}} \lambda_{\alpha_{n+1}}$ avec a_{n+1} dans $A - k$ et α_{n+1} dans k^\times . Ainsi $\gamma_{n+1} = it_{a_1} it_{a_2} \dots it_{a_n} it_{a_{n+1}} \lambda_{\alpha_{n+1}}$.

De façon analogue, traitons les γ_{-n} . On a $\gamma_{-1} = \beta_0^{-1} i$. La transformation β_0 est dans Γ'_∞ , elle s'écrit donc de manière unique sous la forme $\lambda_{\alpha_0} t_{a_0}$ et donc $\gamma_{-1} = (\lambda_{\alpha_0} t_{a_0})^{-1} i = t_{-a_0} \lambda_{1/\alpha_0} i = t_{-a_0} i \lambda_{\alpha_0}$. Supposons que

$$\gamma_{-n} = t_{-a_0} it_{-a_{-1}} \dots it_{-a_{-(n-1)}} i \lambda_{\alpha_{-(n-1)}}.$$

Alors,

$$\gamma_{-(n+1)} = \gamma_{-n} \beta_{-n}^{-1} i = t_{-a_0} i t_{-a_1} \dots i t_{-a_{-(n-1)}} i \lambda_{\alpha_{-(n-1)}} \beta_{-n}^{-1} i .$$

La transformation $(\lambda_{\alpha_{-(n-1)}} \beta_{-n}^{-1})^{-1} = \beta_{-n} \lambda_{1/\alpha_{-(n-1)}}$ est dans Γ'_∞ . Elle s'écrit donc de manière unique sous la forme $\lambda_{\alpha_{-n}} t_{a_{-n}}$. Alors

$$\begin{aligned} \gamma_{-(n+1)} &= t_{-a_0} i t_{-a_1} \dots i t_{-a_{-(n-1)}} i (\lambda_{\alpha_{-n}} t_{a_{-n}})^{-1} i \\ &= t_{-a_0} i t_{-a_1} \dots i t_{-a_{-(n-1)}} i t_{-a_{-n}} \lambda_{1/\alpha_{-n}} i \\ &= t_{-a_0} i t_{-a_1} \dots i t_{-a_{-(n-1)}} i t_{-a_{-n}} i \lambda_{\alpha_{-n}} . \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout entier $n > 0$,

$$\xi_n = \gamma_n \infty = i t_{a_1} i t_{a_2} \dots i t_{a_n} \lambda_{\alpha_n} \infty = i t_{a_1} i t_{a_2} \dots i t_{a_{n-1}} 0$$

et

$$\xi_{-n} = \gamma_{-n} \infty = t_{-a_0} i t_{-a_1} \dots i t_{-a_{-(n-1)}} i \lambda_{\alpha_{-(n-1)}} \infty = -t_{a_0} i t_{a_1} \dots i t_{a_{-(n-1)}} 0 .$$

Comme ξ_+ est la limite quand n tend vers l'infini de la suite ξ_n , le développement en fractions continues d'Artin de ξ_+ est $(a_n)_{n \geq 1}$.

De même ξ_- est la limite de la suite ξ_{-n} , donc $\frac{-1}{\xi_-} = -i \xi_-$ est la limite de la suite $-i \xi_n = i t_{a_0} i t_{a_1} \dots i t_{a_{-(n-1)}} 0$. Le développement en fractions continues d'Artin de $\frac{-1}{\xi_-}$ est donc $(a_{-n})_{n \geq 0}$. \square

Définissons la transformation $\tilde{\Psi} : \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ par $\tilde{\Psi}(\ell) = \gamma_1^{-1}(\ell) \tilde{T}(\ell)$. Il est immédiat que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) & \xrightarrow{T} & \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) \quad . \end{array}$$

Ceci revient à dire que $\tilde{\Psi}$ est conjuguée par la section canonique φ à l'application T de premier retour du flot géodésique sur $\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$.

Montrons maintenant le résultat suivant, qui implique le théorème 1.1 de l'introduction :

Théorème 3.6 *Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+)$ un élément de $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$, soit $(a_n)_{n \geq 1}$ le développement en fractions continues d'Artin de ξ_+ et $(a_{-n})_{n \geq 0}$ celui de $\frac{-1}{\xi_-}$. Notons Θ' l'application de $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ dans $(A - k)^\mathbb{Z}$ définie par $\Theta'(\ell) = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Alors Θ' est un homéomorphisme qui rend le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta'} & (A - k)^\mathbb{Z} \\ \tilde{\Psi} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta'} & (A - k)^\mathbb{Z} \quad , \end{array}$$

où σ est le décalage à gauche des suites bilatères de $(A - k)^{\mathbb{Z}}$. De plus :

$$\tilde{\Psi}(\xi_-, \xi_+) = \left(\frac{1}{\xi_-} - \left[\frac{1}{\xi_+} \right], \Psi(\xi_+) \right),$$

où Ψ est la transformation d'Artin.

Preuve. Comme un élément de $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK$ est uniquement déterminé par son développement (infini) en fractions continues, et comme (ξ_-, ξ_+) est dans $(J \cap {}^cK) \times (X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK)$, alors $\frac{1}{\xi_-}$ est dans $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK$ et donc l'application Θ' est une bijection. Comme l'application d'Artin est continue (car localement constante) sur $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK$, et par définition des a_n , l'application Θ' est continue. D'après la démonstration de la proposition 3.5, si ℓ et ℓ' sont deux éléments de $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$ qui ont mêmes a_n pour $-N \leq n \leq N$, alors ℓ et ℓ' ont mêmes ξ_n pour $-(N-1) \leq n \leq N-1$, donc coïncident au moins sur $-(N-1) \leq n \leq N-1$. Donc Θ'^{-1} est continue. Par la proposition précédente, si $\ell = (\xi_-, \xi_+)$ est dans $\mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$, alors $\gamma_1 = it_{a_1}$ où a_1 est le premier terme du développement en fractions continues de ξ_+ , c'est-à-dire la partie entière de $\frac{1}{\xi_+}$. En particulier, le diagramme de l'énoncé est évidemment commutatif.

Enfin,

$$\tilde{\Psi}(\xi_-, \xi_+) = \gamma_1^{-1}(\xi_-, \xi_+) = ((it_{a_1})^{-1}\xi_-, (it_{a_1})^{-1}\xi_+) = \left(\frac{1}{\xi_-} - a_1, \frac{1}{\xi_+} - a_1 \right).$$

Comme $\Psi(\xi_+) = \frac{1}{\xi_+} - a_1$, ceci montre le résultat. \square

4 Mesure invariante par le flot géodésique sur le rayon modulaire

Notons $\mu = \mu_{\text{Haar}}$ la mesure de Haar sur le groupe topologique additif \widehat{K} (identifié avec $\partial\mathbb{T}_q - \{\infty\}$), normalisée pour que $\mu(\mathcal{O}) = 1$. Notons dx_0 et dv_0 les mesures de comptages sur les espaces discrets $V\mathbb{T}_q$ et $E\mathbb{T}_q$.

Considérons la mesure \tilde{m} sur l'espace $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ définie, en utilisant le paramétrage de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, par

$$d\tilde{m}(\xi_-, \xi_+, x_0, v_0) = \frac{d\mu(\xi_-)d\mu(\xi_+)dx_0dv_0}{|\xi_+ - \xi_-|_{\infty}^2}.$$

Cette partie est consacré à la démonstration du résultat suivant :

Théorème 4.1 *La mesure \tilde{m} est une mesure borélienne positive, invariante par Γ , par \tilde{T} et par renversement du temps $\tilde{\tau}$. La mesure $q^2\tilde{m}$ induit par passage au quotient par Γ une mesure de probabilité m sur $\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$, invariante par T et par renversement du temps τ .*

Outre une preuve directe, la partie nouvelle de ce théorème est le calcul de la masse totale de m . Mais une fois rappelé les propositions 4.2 et 4.3, l'existence de m découle essentiellement de la construction classique de la mesure de Bowen-Margulis

sur l'espace des géodésiques de \mathbb{T}_q (voir par exemple [Coo]), et de [BM] par exemple, qui montre que les mesures de Patterson-Sullivan et de Hausdorff sur $\partial\mathbb{T}_q$ coïncident, même pour les réseaux non uniformes dans $Aut(\mathbb{T}_q)$.

Dans ce qui suit, l'espace \widehat{K} est muni de la distance d_∞ . Notons δ la dimension de Hausdorff de \widehat{K} , et μ_{Haus} la mesure de Hausdorff (de dimension δ) sur \widehat{K} . Rappelons que pour tout borélien E de \widehat{K} , si $0 < \delta < \infty$, nous avons

$$\mu_{\text{Haus}}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\delta \right\}$$

où la borne inférieure est prise sur tous les recouvrements de E par des boules de rayon $r_i \leq \varepsilon$ pour la distance d_∞ .

Comme d_∞ est invariante par Γ_∞ , il en est de même pour μ_{Haus} .

Les deux propositions 4.2 et 4.3 suivantes sont bien connues, voir par exemple [Spr, page 69] pour une démonstration de la seconde.

Proposition 4.2 *La dimension de Hausdorff de (\widehat{K}, d_∞) est $\delta = 1$. La mesure de Hausdorff de \mathcal{O} est 1.*

Preuve. Par invariance par translation de d_∞ , il suffit de montrer que la dimension de Hausdorff de \mathcal{O} est 1, et que sa mesure de Hausdorff (en dimension 1) vaut 1. L'espace de Cantor \mathcal{O} est la boule de rayon 1 et de centre n'importe quel point de \mathcal{O} . Il s'écrit comme l'union disjointe des q parties $\mathcal{O}_\alpha = \alpha + X^{-1}\mathcal{O}$ pour α dans k . Les parties \mathcal{O}_α sont d'ailleurs les boules de rayon $\frac{1}{q}$ et de centre n'importe quel point de \mathcal{O}_α . Pour tout α de k , l'homographie de matrice $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ envoie \mathcal{O} sur \mathcal{O}_α , c'est de plus une homothétie de rapport $\frac{1}{q}$ pour la distance d_∞ .

D'après [Mat, Theo. 4.14], la dimension de Hausdorff δ de (\mathcal{O}, d_∞) vérifie l'équation $\sum_{\alpha \in k} \frac{1}{q}^\delta = 1$. Donc $\delta = 1$.

Comme par récurrence, \mathcal{O} est réunion de q^n boules (disjointes) de rayon $\frac{1}{q^n}$, la mesure de Hausdorff de \mathcal{O} est au plus 1. Rappelons que si deux boules pour d_∞ se rencontrent, alors l'une est contenue dans l'autre, et que toute boule contenue dans \mathcal{O} est une boule de rayon une puissance de $\frac{1}{q}$. Donc la mesure de Hausdorff de \mathcal{O} vaut au moins 1. \square

Proposition 4.3 *Les mesures de Haar μ_{Haar} et de Hausdorff μ_{Haus} sur \widehat{K} coïncident.*

Preuve. Comme δ est finie non nulle, et \mathcal{O} est un espace de Cantor de mesure de Hausdorff finie, la mesure de Hausdorff μ_{Haus} est une mesure de Radon (voir par exemple [Mat, page 57]).

Comme vu ci-dessus, la mesure μ_{Haus} est invariante par translation, donc par unicité de la mesure de Haar, il existe $c \geq 0$ tel que $\mu_{\text{Haus}} = c\mu_{\text{Haar}}$. Comme $\mu_{\text{Haar}}(\mathcal{O}) = 1$ et $\mu_{\text{Haus}}(\mathcal{O}) = 1$, les mesures coïncident. \square

Pour tous γ dans G et f dans \widehat{K} , vérifiant $f \neq \gamma^{-1}\infty$, notons

$$j_\infty(\gamma, f) = |\gamma'(f)|_\infty$$

la valeur absolue de la dérivée en f de l'application holomorphe $\gamma : \widehat{K} \rightarrow \widehat{K}$. Par la formule de dérivation des compositions, elle vérifie la formule de cocycle suivante : pour γ_1, γ_2 dans G et f dans \widehat{K} tels que $\gamma_2 f, \gamma_1 \gamma_2 f \neq \infty$,

$$j_\infty(\gamma_1 \gamma_2, f) = j_\infty(\gamma_1, \gamma_2 f) j_\infty(\gamma_2, f).$$

Si $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec $|ad - bc|_\infty = 1$, alors $j_\infty(\gamma, f) = \frac{1}{|cf + d|_\infty^2}$. Comme la valeur absolue prend des valeurs discrètes, pour tout élément γ de G , l'application continue $f \mapsto j_\infty(\gamma, f)$ est localement constante sur $\widehat{K} - \{\gamma^{-1}\infty\}$.

Proposition 4.4 *Pour tout γ de G_1 , pour tous f, g dans \widehat{K} tels que $f, g \neq \gamma^{-1}\infty$,*

$$|\gamma f - \gamma g|_\infty^2 = j_\infty(\gamma, f) j_\infty(\gamma, g) |f - g|_\infty^2.$$

Preuve. Les translations $t_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec a dans \widehat{K} , les applications $\lambda_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ avec α, β dans \widehat{K}^\times tels que $|\beta|_\infty = |\alpha|_\infty^{-1}$, et l'inversion $i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ engendrent G_1 . Par la formule de cocycle pour j_∞ et par un argument de continuité sur les f, g , il suffit donc de vérifier la proposition 4.4 pour ces trois types de transformations.

Pour a dans \widehat{K} , la translation t_a préserve la distance d_∞ , et $j_\infty(t_a, f) = 1$. Pour α, β dans \widehat{K}^\times avec $|\beta|_\infty = |\alpha|_\infty^{-1}$, l'application $\lambda_{\alpha, \beta}$ est une homothétie de rapport $|\alpha|_\infty^2$ pour la distance d_∞ et $j_\infty(\lambda_{\alpha, \beta}, f) = |\alpha|_\infty^2$. Comme $j_\infty(i, f) = \frac{1}{|f|_\infty^2}$ et $|\frac{1}{f} - \frac{1}{g}|_\infty = \frac{|f-g|_\infty}{|f|_\infty |g|_\infty}$, le résultat en découle. \square

Proposition 4.5 *Pour tout γ de G_1 , l'image de la mesure μ_{Haus} par γ est absolument continue par rapport à μ_{Haus} . Sa dérivée de Radon-Nikodym vérifie (pour μ_{Haus} -presque tout ξ de \widehat{K}) :*

$$\frac{d\gamma_* \mu_{\text{Haus}}}{d\mu_{\text{Haus}}}(\xi) = j_\infty(\gamma^{-1}, \xi).$$

Preuve. Soit γ dans G . Comme $f \mapsto j_\infty(\gamma, f)$ est localement constante, pour tout f_0 de $\widehat{K} - \{\gamma^{-1}\infty\}$, il existe un voisinage U de f_0 dans $\widehat{K} - \{\gamma^{-1}\infty\}$ tel que pour tout f dans U , on a $j_\infty(\gamma, f_0) = j_\infty(\gamma, f)$. En particulier, la proposition 4.4 montre que pour tous f, g dans U , on a $|\gamma f - \gamma g|_\infty = j_\infty(\gamma, f_0) |f - g|_\infty$. Donc la restriction de γ à U est une homothétie de rapport $j_\infty(\gamma, f_0)$ pour la distance d_∞ . Soit V un voisinage de f_0 d'adhérence contenue dans U . Par construction de la mesure de Hausdorff, pour tout borélien E de V , on a $\mu_{\text{Haus}}(\gamma E) = j_\infty(\gamma, f_0)^\delta \mu_{\text{Haus}}(E)$. Ceci montre le résultat car $\delta = 1$. \square

Nous aurons besoin du calcul élémentaire d'intégrale suivant.

Lemme 4.6 *Si $\mu = \mu_{\text{Haar}}$, alors*

$$\int_J \frac{d\mu(g)}{|g|_\infty^2} = \frac{1}{q}.$$

Preuve. Notons S cette intégrale. Comme J est la réunion disjointe des ensembles $(a + X^{-1}\mathcal{O})$, quand a varie dans $A - k$, et comme la mesure de Haar est invariante par translation,

$$S = \sum_{a \in A-k} \int_{X^{-1}\mathcal{O}} \frac{d\mu(g)}{|a + g|_\infty^2} = \sum_{a \in A-k} \frac{1}{|a|_\infty^2} \mu(X^{-1}\mathcal{O}).$$

Comme le nombre de polynômes de degré n à coefficients dans k est $(q-1)q^n$,

$$S = \sum_{n \in \mathbb{N}-\{0\}} \frac{(q-1)q^n}{q^{2n}} \frac{1}{q} = \frac{1}{q} \sum_{n \in \mathbb{N}-\{0\}} \frac{(q-1)}{q^n} = \frac{1}{q}.$$

□

Démonstration du théorème 4.1. Rappelons que

$$d\tilde{m}(\xi_-, \xi_+, x_0, v_0) = \frac{d\mu(\xi_-)d\mu(\xi_+)dx_0dv_0}{|\xi_+ - \xi_-|_\infty^2}$$

et que les mesures de comptage sont invariantes par permutation. Il est donc immédiat que \tilde{m} est une mesure borélienne positive, invariante par renversement du temps $\tilde{\tau} : (\xi_-, \xi_+, x_0, v_0) \mapsto (\xi_+, \xi_-, x_0, v_0)$ et par $\tilde{T} : (\xi_-, \xi_+, x_0, v_0) \mapsto (\xi_-, \xi_+, x_1, v_1)$.

Montrons que \tilde{m} est invariante par Γ . Toute action d'un groupe sur un ensemble préserve la mesure de comptage. Pour tout γ de Γ , pour \tilde{m} -presque tout (ξ_-, ξ_+, x_0, v_0) ,

$$\begin{aligned} d(\gamma_*\tilde{m})(\xi_-, \xi_+, x_0, v_0) &= \frac{d(\gamma_*\mu)(\xi_-)d(\gamma_*\mu)(\xi_+)dx_0dv_0}{|\gamma^{-1}\xi_+ - \gamma^{-1}\xi_-|_\infty^2} \\ &= \frac{j_\infty(\gamma^{-1}, \xi_-)d\mu(\xi_-)j_\infty(\gamma^{-1}, \xi_+)d\mu(\xi_+)dx_0dv_0}{j_\infty(\gamma^{-1}, \xi_-)j_\infty(\gamma^{-1}, \xi_+)|\xi_+ - \xi_-|_\infty^2} \end{aligned}$$

d'après les propositions 4.5 et 4.4, et car Γ est contenu dans G_1 . Donc $\gamma_*\tilde{m} = \tilde{m}$.

Par conséquent, $q^2\tilde{m}$ induit par passage au quotient par Γ une mesure borélienne positive m sur $\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$, invariante par T et par renversement du temps τ . Il ne reste plus qu'à montrer que m est une mesure de probabilité.

Comme la mesure de Haar sur \hat{K} est sans atome et comme K est dénombrable, le paramétrage de $\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$ permet d'écrire :

$$m(\mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)) = q^2 \int_{\xi_- \in J} \int_{\xi_+ \in X^{-1}\mathcal{O}} \frac{d\mu(\xi_-)d\mu(\xi_+)}{|\xi_+ - \xi_-|_\infty^2} = q^2 \mu(X^{-1}\mathcal{O}) \int_J \frac{d\mu(\xi_-)}{|\xi_-|_\infty^2}.$$

Le lemme 4.6 montre alors que la masse totale de m est bien 1.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.1. □

5 Applications

Nous résumons dans l'énoncé suivant les résultats de la partie 3. Toutes les applications en découleront.

Proposition 5.1 *Il existe un homéomorphisme $\Theta'' : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow (A - k)^{\mathbb{Z}}$ et une application continue surjective $p_2 : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK$ tels que les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta''} & (A - k)^{\mathbb{Z}} & & \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) & \xrightarrow{T} & \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \\ T \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow p_2 & & \downarrow p_2 \\ \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta''} & (A - k)^{\mathbb{Z}} & & X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK & \xrightarrow{\Psi} & X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK \end{array} .$$

où σ est le décalage à gauche des suites bilatères de $(A - k)^{\mathbb{Z}}$.

Preuve. Notons $p_+ : J \times X^{-1}\mathcal{O} \rightarrow X^{-1}\mathcal{O}$ la seconde projection. Avec les notations de la partie 3, posons

$$\Theta'' = \Theta' \circ \varphi \text{ et } p_2 = p_+ \circ \varphi .$$

Le résultat découle alors de la partie 3.3. \square

Le résultat précédent dit en particulier que l'application d'Artin est semi-conjugée à l'application de premier retour du flot géodésique sur le rayon modulaire. C'est l'analogie dans le corps des séries de Laurent sur \mathbb{F}_q du résultat bien connu qui dit que l'application de Gauss $x \mapsto \{\frac{1}{x}\}$ sur $[0, 1] \cap {}^c\mathbb{Q}$ est semi-conjugée à une application de premier retour du flot géodésique sur la courbe modulaire $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$ (voir par exemple [Ser]).

5.1 Application au mélange du flot géodésique sur le rayon modulaire

Considérons la mesure ν sur l'espace discret $A - k$ définie par $\nu(a) = \frac{1}{|a|_{\infty}^2}$. La mesure ν est une mesure de probabilité car le nombre de polynômes de degré n à coefficients dans k est $(q - 1)q^n$. Notons $\nu^{\mathbb{Z}}$ la mesure produit sur $(A - k)^{\mathbb{Z}}$.

Proposition 5.2 *L'homéomorphisme $\Theta'' : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow (A - k)^{\mathbb{Z}}$ envoie la mesure m sur la mesure $\nu^{\mathbb{Z}}$.*

Preuve. Notons P la mesure de probabilité image de m par Θ'' . Comme Θ'' conjugue T et σ , et comme m est invariante par T , la mesure P est donc invariante par le décalage σ .

Pour a dans $A - k$ fixé, calculons $P[a_{-1} = a]$. Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+) \in \mathcal{G}'_0(\mathbb{T}_q)$. Alors $a_{-1}(\ell) = a$ si et seulement si ξ_- appartient $(a + X^{-1}\mathcal{O})$ et ξ_+ appartient à $X^{-1}\mathcal{O}$. On a donc :

$$P[a_{-1} = a] = m((a + X^{-1}\mathcal{O}) \times X^{-1}\mathcal{O}) = q^2 \frac{1}{|a|_{\infty}^2} \mu(X^{-1}\mathcal{O})^2 = \nu(a) .$$

Soient $a'_{-k}, \dots, a'_{-1}, a'_{-0}$ fixés dans $A - k$. Par séparation des variables, les deux évènements $\{a_{-k} = a'_{-k}, \dots, a_{-1} = a'_{-1}\}$ et $\{a_0 = a'_0\}$ (qui portent respectivement sur les coordonnées ξ_- et ξ_+) sont indépendants.

L'invariance de P par le décalage σ , et un raisonnement par récurrence montrent que les mesures P et $\nu^{\mathbb{Z}}$ coïncident sur tous les cylindres du produit $(A - k)^{\mathbb{Z}}$, donc sont égales. \square

Corollaire 5.3 *L'application $T : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q)$ de premier retour du flot géodésique sur le rayon modulaire est Bernoulli (i.e. (métriquement) conjuguée à un décalage de Bernoulli sur un alphabet fini), donc mélangeante, donc ergodique, pour la mesure m .*

Preuve. L'application $\Theta'' : \mathcal{G}_0(\Gamma \backslash \mathbb{T}_q) \rightarrow (A - k)^{\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme mesuré, conjuguant T au décalage σ . Le décalage (de Bernoulli) σ est d'entropie $h_{\nu^{\mathbb{Z}}}(\sigma)$ finie, car

$$\begin{aligned} h_{\nu^{\mathbb{Z}}}(\sigma) &= - \sum_{a \in A-k} \nu(a) \log \nu(a) = -2 \log q \sum_{a \in A-k} \frac{v_{\infty}(a)}{|a|_{\infty}^2} = 2 \log q \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n(q-1)q^n}{q^{2n}} \\ &= 2 \log q (q-1) \frac{1}{q} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q}} \right)^2 = \frac{2q \log q}{q-1}. \end{aligned}$$

D'après [Orn, Theo. 5, p. 53], un décalage (de Bernoulli) sur un alphabet dénombrable, d'entropie finie, est (métriquement) conjugué à un décalage (de Bernoulli) sur un alphabet fini. Le résultat en découle. \square

Corollaire 5.4 *Le temps moyen du n -ème parcours dans une horoboule de la famille \mathcal{HB} d'une géodésique décorée de $\Gamma \backslash \mathbb{T}_q$ est $T_n = \frac{2q}{q-1}$.*

Preuve. Dans [Pau], il est montré qu'une géodésique décorée rencontre sa n -ème horoboule de la famille \mathcal{HB} sur un segment de longueur $-2v_{\infty}(a_n)$. L'invariance par le décalage montre que

$$T_n = T_0 = E[-2v_{\infty}(a_0)] = -2 \sum_{a \in A-k} v_{\infty}(a) P[a_0 = a] = -2 \sum_{a \in A-k} \frac{v_{\infty}(a)}{|a|_{\infty}^2} = \frac{2q}{q-1}.$$

\square

5.2 Applications arithmétiques

Le résultat suivant est l'analogie dans le corps des séries formelles de Laurent du résultat bien connu qui dit que la mesure de Gauss $\frac{1}{\log 2} \left(\frac{dt}{1+t} \right)$ sur $[0, 1]$ est la projection de la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent à la courbe modulaire $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$ (voir par exemple [Seri]).

Proposition 5.5 *L'image de m par p_2 est la restriction de la mesure $q\mu_{\mathrm{Haar}}$ à $X^{-1}\mathcal{O}$:*

$$(p_2)_* m = q \mu_{\mathrm{Haar}} |_{X^{-1}\mathcal{O} \cap \mathcal{K}}.$$

Preuve. Par définition de m , pour tout ξ_+ dans $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK$, nous avons

$$d(p_2)_*m(\xi_+) = q^2 \int_{\xi_- \in J} \frac{d\mu(\xi_-)}{|\xi_+ - \xi_-|_\infty^2} d\mu(\xi_+) = q d\mu(\xi_+)$$

d'après le lemme 4.6. D'où le résultat. \square

Nous retrouvons ainsi l'invariance bien connue de la mesure de Haar par l'application d'Artin, voir par exemple [BN] pour des références.

Corollaire 5.6 *La mesure de Haar sur $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK$ est invariante par l'application d'Artin.*

Preuve. Les propositions 5.1 et 5.5, et l'invariance de m par l'application de premier retour T montrent que :

$$\Psi_*\mu_{\text{Haar}} = \frac{1}{q}(\Psi \circ p_2)_*m = \frac{1}{q}(p_2 \circ T)_*m = \frac{1}{q}(p_2)_*m = \mu_{\text{Haar}} .$$

Le résultat en découle. \square

Nous renvoyons par exemple à [BN] pour d'autres propriétés dynamiques du développement en fractions continues dans le corps des séries de Laurent sur \mathbb{F}_q .

Références

- [Art] E. Artin, *Quadratische Körper in Gebiete der höheren Kongruenzen I-II*, Math. Z. **19** (1924) 153-246.
- [BN] V. Berthé, H. Nakada, *On continued fraction expansions in positive characteristic : equivalence relations and some metric properties*, Expo. Math. **18** (2000) 257-284.
- [Bou] M. Bourdon, *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un $CAT(-1)$ espace*, L'Ens. Math. **41** (1995) 63-102.
- [BP] A. Broise, F. Paulin, *Sur le codage du flot géodésique dans un arbre*, prépublication Univ. Orsay, 2004.
- [BM] M. Burger, S. Mozes, *$CAT(-1)$ spaces, divergence groups and their commensurators*, J. Amer. Math. Soc **9** (1996) 57-94.
- [Coo] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*. Pacific J. Math. **159** (1993) 241-270.
- [Laj] A. Lasjaunias, *A survey of diophantine approximation in fields of power series*, Monat. Math. **130** (2000) 211-229.
- [Mat] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Camb. Stud. Adv. Math. **44**, Camb. Univ. Press, 1995.
- [Orn] D. Ornstein, *Ergodic theory, randomness and dynamical systems*, Yale Univ. Press, 1974.
- [Pau] F. Paulin, *Groupe modulaire, fractions continues et approximation diophantienne en caractéristique p* , Geom. Dedi. **95** (2002) 65-85.

- [Pau2] F. Paulin, *Groupes géométriquement finis d'automorphismes d'arbres et approximation diophantienne dans les arbres*, Manuscripta Math. **113** (2004) 1-23.
- [Sch] W. Schmidt, *On continued fractions and diophantine approximation in power series fields*, Acta Arith. **XCIV** (2000) 139-166.
- [Ser1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.
- [Ser2] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque **46**, Soc. Math. France (1983).
- [Seri] C. Series, *The modular surface and continued fractions*, J. Lond. Math. Soc. **31** (1985) 69-80.
- [Spr] V. Sprindzuk, *Mahler's problem in metric number theory*, Trans. Math. Mono. **25**, Amer. Math. Soc (1969).

Laboratoire de Mathématique UMR 8628 CNRS
 Equipe de Topologie et Dynamique (Bât. 425)
 Université Paris-Sud
 91405 ORSAY Cedex, FRANCE.
e-mail : Anne.Broise@math.u-psud.fr

Département de Mathématique et Applications, UMR 8553 CNRS
 Ecole Normale Supérieure
 45 rue d'Ulm
 75230 PARIS Cedex 05, FRANCE
e-mail : Frederic.Paulin@ens.fr