Dualité de Cartier et modules de Breuil

Xavier Caruso

▶ **To cite this version:**

Xavier Caruso. Dualité de Cartier et modules de Breuil. 2005. hal-00014017

HAL Id: hal-00014017
https://hal.science/hal-00014017

Preprint submitted on 16 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00014017, version 1 - 16 Nov 2005

Dualité de Cartier et modules de Breuil

Xavier Caruso

Septembre 2005

Abstract

Let $\mathcal{O}_K$ be a complete discrete valuation ring. Denote by K its fractions field et by k its residue field. Assume that k is of characteristic $p > 0$ and perfect. In [Bre00], Breuil gives an anti-equivalence between the category of finite flat $\mathcal{O}_K$-group schemes killed by a power of p and a category of linear algebra objects which is called (Mod/S). The aim of this article is to make explicit the Cartier duality on the category (Mod/S).

Résumé

Soit K un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique nulle, et dont le corps résiduel est supposé parfait de caractéristique $p > 0$. On appelle $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Dans [Bre00], Breuil exhibe une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{O}_K$-schémas en groupes commutatifs finis, plats et tués par une puissance de p et une certaine catégorie d'objets d'algèbre linéaire qu'il note (Mod/S). Le but de cet article est d'expliciter la dualité de Cartier sur la catégorie (Mod/S) *via* l'équivalence précédente.

Table des matières

1 Rappel sur la classification de Breuil **2**
1.1 Les catégories d'objets d'algèbre linéaire . . . 2
1.2 L'anti-équivalence de catégories . . . 3
1.2.1 Sites cristallin et syntomique . . . 3
1.2.2 Les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$ et $\mathcal{J}_n^{\text{cris}}$ . . . 5
1.2.3 Le foncteur Mod . . . 6

2 Dualité sur les catégories de modules **7**
2.1 Sur les modules fortement divisibles . . . 7
2.2 Sur la catégorie (Mod/S) . . . 9
2.2.1 Définition de l'objet dual . . . 9
2.2.2 Existence du morphisme $\phi_1^\vee(f)$ . . . 10
2.2.3 Propriétés du foncteur de dualité . . . 11

3 Dualité de Cartier **13**
3.1 Rappels de théorie de Dieudonné cristalline . . . 13
3.2 Construction du morphisme de comparaison . . . 14
3.3 Cas des groupes de la forme $\mathcal{H}(n)$ . . . 15
3.3.1 Les morphismes β_{CRIS} et β_{syn} . . . 16
3.3.2 Compatibilité à Fil^1 . . . 18
3.3.3 Compatibilité à ϕ_1 . . . 19

3.4 Cas général 22

Tout au long de cet article, on considère k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On note W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, $\sigma : W \to W$ l'opérateur de Frobenius sur W et $K_0 = \operatorname{Frac} W$. Soient K une extension finie totalement ramifiée de K_0 et $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. On fixe π une uniformisante de K et on note $E(u)$ le polynôme minimal de π sur K_0.

Dans tout ce qui suit, on appelle *$\mathcal{O}_K$-groupe* un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes commutatifs fini, plat et annulé par une puissance de p. Dans [Bre00], Breuil construit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{O}_K$-groupes (resp. la catégorie des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_K$) et une catégorie d'objets d'algèbre linéaire qu'il note (Mod/S) (resp. une catégorie d'objets appelés *modules fortement divisibles*) dont la définition est rappelée en 1.1.

Le but de cet article est d'expliciter purement en terme d'algèbre linéaire le foncteur déduit de la dualité de Cartier sur la catégorie (Mod/S) et sur la catégorie des modules fortement divisibles.

La première section est destinée au rappel des constructions et des résultats de [Bre00]. En particulier, on définit les catégories sus-mentionnées ainsi que le foncteur qui réalise l'anti-équivalence précédente. Dans la deuxième section, nous construisons une dualité sur les catégories d'objets d'algèbre linéaire et finalement nous prouvons dans la troisième section que cette dualité correspond *via* le foncteur de Breuil à la dualité de Cartier sur les schémas en groupes.

Cet article est une version courte du chapitre V de la thèse de l'auteur ([Car05]). Dans *loc. cit.*, la construction de la dualité est étendue aux catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ plus générales introduites par Breuil dans [Bre99]. Ces dernières sont munies de foncteurs vers la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes, et on prouve (encore dans [Car05]) certaines compatibilités entre la dualité et ces foncteurs.

Nous invitons le lecteur désireux d'avoir de nombreux compléments à se reporter à cette référence.

1 Rappel sur la classification de Breuil

Dans cette section, on se contente de rappeler les résultats principaux de [Bre00].

1.1 Les catégories d'objets d'algèbre linéaire

Définissons l'anneau S comme le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$. On note $\mathrm{Fil}^1 S \subset S$ le complété p-adique de l'idéal engendré par les $\frac{E(u)^i}{i!}$ pour $i \geqslant 1$. On munit en outre S d'un opérateur de Frobenius ϕ défini comme l'unique application $\phi : S \to S$ continue, σ-semi-linéaire et vérifiant $\phi(u) = u^p$. On vérifie que $\phi(\mathrm{Fil}^1 S) \subset pS$, ce qui permet de définir $\phi_1 = \frac{\phi}{p}_{|\mathrm{Fil}^1 S}$. Finalement, on pose $c = \phi_1(E(u))$, c'est une unité de S.

On définit à présent la catégorie $'(\mathrm{Mod}/S)$. Ses objets sont la donnée d'un S-module $\mathcal{M}$, d'un sous-module $\mathrm{Fil}^1 \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ tel que $\mathrm{Fil}^1 S\, \mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^1 \mathcal{M}$ et d'une application ϕ-linéaire $\phi_1 :$

$\mathrm{Fil}^1\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant la condition :

$$\phi_1(sx) = \frac{1}{c}\phi_1(s)\phi_1(E(u)x)$$

pour tout $s \in \mathrm{Fil}^1 S$ et tout $x \in \mathcal{M}$. Les morphismes de $'(\mathrm{Mod}/S)$ sont les applications S-linéaires respectant toutes les structures additionnelles. On a une notion de suite exacte dans cette catégorie : une suite est dite exacte si elle l'est en tant que suite de S-modules et si, en outre, la suite déduite sur les Fil^1 est aussi exacte (comme suite de S-modules).

La catégorie (Mod/S_1) est la sous-catégorie pleine de $'(\mathrm{Mod}/S)$ formée des objets annulés par p et tels que $\phi_1(\mathrm{Fil}^1\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module. Finalement, la catégorie (Mod/S) est la plus petite sous-catégorie (pleine) de $'(\mathrm{Mod}/S)$ contenant les objets de (Mod/S_1) et stable par extension.

Un *module fortement divisible* est par définition un objet de $'(\mathrm{Mod}/S)$ pour lequel les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- ☞ $\mathcal{M}$ est libre de rang fini sur S,
- ☞ $\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$ est sans p-torsion,
- ☞ $\phi_1(\mathrm{Fil}^1\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module.

Un résultat important (et que l'on aura à manipuler par la suite) concernant les modules fortement divisibles est donné par le lemme qui suit :

Lemme 1.1.1. *Soit $\mathcal{M}$ un module fortement divisible. Il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $\mathcal{M}$ et des entiers $n_1, \ldots, n_d$ égaux à 0 ou 1 tels que :*

$$Fil^1\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{d} Fil^{n_i} S\, e_i.$$

Démonstration. C'est exactement le lemme 2.1.1.9 de [Bre00]. □

Une base vérifiant la condition de lemme précédent est appelée *base adaptée (à la filtration)* de $\mathcal{M}$. Ainsi le lemme affirme que tout module fortement divisible admet une base adaptée.

1.2 L'anti-équivalence de catégories

Dans cette partie, on donne la construction du foncteur Mod qui s'avère être celui qui réalise l'anti-équivalence de catégories entre la catégorie (Mod/S) et la catégorie des $\mathcal{O}_K$-groupes. On commence par plusieurs rappels sur les topologies critalline et syntomique et sur les principaux faisceaux pour ces topologies.

1.2.1 Sites cristallin et syntomique

On rappelle qu'un morphisme de schéma $X \to Y$ est dit *syntomique* s'il est plat, localement de présentation finie et s'il se factorise localement en une immersion fermée régulière dans un X-schéma lisse. Les morphismes syntomiques sont stables par composition et changement de base. Si X est un schéma, on définit le gros (resp. le petit) site syntomique X_{SYN} (resp. X_{syn}) comme la catégorie des X-schémas (resp. des X-schémas syntomiques) munie de la topologie syntomique : une famille de morphismes $f_i : U_i \to U$ est un recouvrement si chacun des f_i est syntomique et si topologiquement $\dot{U} = \bigcup f_i(\dot{U}_i)$.

Soit Υ un schéma muni de puissances divisées et sur lequel p est localement nilpotent. Si $X \to \Upsilon$ est tel que les puissances divisées sur Υ s'étendent à X, on définit le site syntomique-cristallin (ou simplement cristallin) associé au morphisme $X \to \Upsilon$ de la façon suivante. La catégorie sous-jacente au site est l'ensemble des quadruplets (U, T, i, δ) tels que :

- ☞ U est un schéma défini sur X,
- ☞ T est un schéma défini sur Υ sur lequel p est localement nilpotent,
- ☞ $i : U \hookrightarrow T$ est une immersion fermée définie sur Υ,
- ☞ δ est une structure d'idéal à puissances divisées sur l'idéal de $\mathcal{O}_T$ définissant l'immersion i, compatible aux puissances divisées sur Υ.

Par la suite, on écrira abusivement (U, T) à la place de (U, T, i, δ). Un morphisme entre (U, T) et (U', T') est la donnée de deux applications $U \to U'$ définie sur X et $T \to T'$ définie sur Υ qui commutent aux i. Une famille $(U_i, T_i) \to (U, T)$ est un recouvrement si chacun des morphismes $U_i \to U$ est syntomique, si tous les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} U_i & \hookrightarrow & T_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & T \end{array}$$

sont cartésiens et finalement si topologiquement $\dot{T} = \bigcup_i f_i(\dot{T}_i)$ (où f_i désigne le morphisme induit $T_i \to T$).

Si on note $\widetilde{X_{\text{SYN}}}$ et $\widetilde{(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}}$ les catégories de faisceaux abéliens sur les deux sites précédents, on a un morphisme de topoï :

$$w : \widetilde{(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}} \to \widetilde{X_{\text{SYN}}}$$

donné par le couple de foncteurs adjoints $(w^\star, w_\star)$ définis par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} w^\star \mathcal{F}(U, T) &= \mathcal{F}(U) \\ w_\star \mathcal{F}(U) &= H^0((U/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}, \mathcal{F}_{|(U/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}}). \end{aligned}$$

On vérifie directement que $w_\star \circ w^\star = \text{id}$, d'où on déduit que $w^\star$ est pleinement fidèle.

On dispose en outre de faisceaux importants sur les sites précédents. Sur le site syntomique, on montre que le préfaisceau $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ est un faisceau que l'on appelle le *faisceau structural*. Sur le site cristallin, on définit les faisceaux $\mathcal{O}_{X/\Upsilon}$ et $\mathbb{G}_{\text{a}}$ par les formules :

$$\mathcal{O}_{X/\Upsilon}(U, T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{G}_{\text{a}}(U, T) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U).$$

On a un morphisme naturel et surjectif $\mathcal{O}_{X/\Upsilon} \to \mathbb{G}_{\text{a}}$. On note $\mathcal{J}_{X/\Upsilon}$ son noyau, ce qui donne naissance tautologiquement à une suite exacte dans $\widetilde{(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{X/\Upsilon} \longrightarrow \mathcal{O}_{X/\Upsilon} \longrightarrow \mathbb{G}_{\text{a}} \longrightarrow 0\,. \tag{1}$$

1.2.2 Les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\mathbf{cris}}$ et $\mathcal{J}_n^{\mathbf{cris}}$

À partir de maintenant, on fixe un entier n, on note S_n la réduction modulo p^n de l'anneau S introduit en 1.1 et E_n le schéma $\mathrm{Spec}\,(S_n)$. On pose également $T_n = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_K/p^n)$. Les deux schémas précédents sont munis de puissances divisées (définies respectivement sur les idéaux $(E(u))$ et (p)) et on dispose d'un épaississement $T_n \hookrightarrow E_n$. On s'intéresse désormais plus particulièrement au cas $X = T_n$ et $\Upsilon = E_n$.

On note $\mathcal{O}_n$ le faisceau structural sur $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$ défini par $\mathcal{O}_n = w_\star \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$. On définit pareillement $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}} = w_\star \mathcal{O}_{T_n/E_n}$ et $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}} = w_\star \mathcal{J}_{T_n/E_n}$. Il s'agit de faisceaux sur le gros site syntomique que l'on sait décrire localement sur la restriction au petit site syntomique.

Soit U un schéma syntomique sur T_n. Étale-localement, c'est le morphisme de schémas associé au morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_K/p^n \to A$ avec :

$$A = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[X_1, \ldots, X_s]}{(f_1, \ldots, f_t)}$$

où $X_1, \ldots, X_s$ sont des indéterminées et $(f_1, \ldots, f_t)$ une suite transversalement régulière relativement à $\mathcal{O}_K/p^n$. Posons pour tout entier i :

$$A^i = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[X_0^{1/p^i}, X_1^{1/p^i}, \ldots, X_s^{1/p^i}]}{(X_0 - \pi, f_1, \ldots, f_t)}$$

et $A^\infty = \varinjlim A_i$ (pour les morphismes de transition évidents). Notons W_n l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n à coefficients dans k et ϕ le Frobenius sur cet anneau. Posons :

$$W_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) = W_n(A^\infty/pA^\infty) \otimes_{W_n, (\phi^n)} W_n[u].$$

On dispose d'une surjection $s : W_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \to A^\infty$ qui envoie u sur X_0 et $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in W_n(A^\infty/pA^\infty)$ sur $\hat{a}_0^{p^n} + p\hat{a}_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^{n-1}\hat{a}_{n-1}^p$ où $\hat{a}_i \in A^\infty$ désigne un relevé de a_i. On note $W_n^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty)$ l'enveloppe à puissances divisées de $W_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$ par rapport au noyau de s (et compatibles avec les puissances divisées sur l'idéal (p)). La surjection s se prolonge en une application $W_n^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty) \to A^\infty$ que l'on note encore s.

Lemme 1.2.1. *Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme canonique :*

$$\varinjlim_i \mathcal{O}_n^{cris}(A^i) \to W_n^{cris,DP}(A^\infty)$$

faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_i \mathcal{O}_n^{cris}(A^i) & \longrightarrow & \varinjlim_i \mathcal{O}_n(A^i) \\ \downarrow \sim & & \| \\ W_n^{cris,DP}(A^\infty) & \xrightarrow{\quad s \quad} & A^\infty \end{array}$$

où la flèche du haut est obtenue en appliquant $w_\star$ au morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{T_n/E_n} \to \mathbb{G}_a$.

Démonstration. Voir preuve du lemme 2.3.2 de [Bre00]. □

On déduit directement du lemme précédent l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathcal{O}_n \longrightarrow 0 \tag{2}$$

obtenue en appliquant le foncteur $w_\star$ à la suite exacte (1). Ce même lemme assure également que le faisceau $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$ est plat sur S_n tandis que $\mathcal{J}_n^{\text{cris}}$ l'est sur W_n (voir[1] à nouveau le lemme 2.3.2 de [Bre00]). Ceci permet de vérifier que le Frobenius induit un morphisme $\phi : \mathcal{J}_{n+1}^{\text{cris}} \to p\mathcal{O}_{n+1}^{\text{cris}}$ qui s'annule sur $p^n\mathcal{J}_{n+1}^{\text{cris}}$ et donc conduit à une flèche $\mathcal{J}_{n+1}^{\text{cris}}/p^n \to p\mathcal{O}_{n+1}^{\text{cris}}$. D'autre part, si $i : T_n \hookrightarrow T_{n+1}$ désigne l'épaississement évident, la même platitude fournit l'identification $\mathcal{J}_{n+1}^{\text{cris}}/p^n \simeq i_\star\mathcal{J}_n^{\text{cris}}$ et montre que la multiplication par p induit un isomorphisme $i_\star\mathcal{O}_n^{\text{cris}} \simeq p\mathcal{O}_{n+1}^{\text{cris}}$. Il existe par suite un unique morphisme ϕ_1 qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{n+1}^{\text{cris}} & \xrightarrow{\phi} & p\mathcal{O}_{n+1}^{\text{cris}} \\ \sim\downarrow & & \sim\uparrow p \\ i_\star\mathcal{J}_n^{\text{cris}} & \xrightarrow{\phi_1} & i_\star\mathcal{O}_n^{\text{cris}} \end{array}$$

Intuitivement, il faut penser à ϕ_1 comme au quotient $\frac{\phi}{p}$, ou encore comme à un inverse du Verschiebung.

1.2.3 Le foncteur Mod

Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_K$-groupe. Pour $m = n$ et $m = n+1$, on note $\mathcal{G}_m = \mathcal{G} \times_{\text{Spec}\,(\mathcal{O}_K)} T_m$. Ces schémas définissent des faisceaux sur les sites $(T_n)_{\text{syn}}$ (resp. $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$) et $(T_{n+1})_{\text{syn}}$ que l'on note encore $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{G}_{n+1}$. On appelle encore i l'épaississement $T_n \hookrightarrow T_{n+1}$. L'objet $\text{Mod}(\mathcal{G})$ est défini par (voir paragraphe 4.2.1 de [Bre00]) :

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\mathcal{G}) &= \text{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) = \text{Hom}(\mathcal{G}_{n+1}, i_\star\mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \\ \text{Fil}^1\text{Mod}(\mathcal{G}) &= \text{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\text{cris}}) = \text{Hom}(\mathcal{G}_{n+1}, i_\star\mathcal{J}_n^{\text{cris}}) \end{aligned}$$

et $\phi_1 : \text{Fil}^1\text{Mod}(\mathcal{G}) \to \text{Mod}(\mathcal{G})$ est la flèche induite par $\phi_1 : i_\star\mathcal{J}_n^{\text{cris}} \to i_\star\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$. Notons que les Hom précédents sont tous calculés dans la catégorie des *faisceaux abéliens*. Dans la suite, il en sera toujours ainsi.

Remarques. L'égalité $\text{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) = \text{Hom}(\mathcal{G}_{n+1}, i_\star\mathcal{O}_n^{\text{cris}})$ résulte du fait que ces deux termes s'identifient au même sous-ensemble de $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\mathcal{G}_n)$ puisque $\mathcal{G}_n$ (resp. $\mathcal{G}_{n+1}$) est syntomique sur T_n (resp. T_{n+1}) (voir proposition 2.2.2 de [Bre00]).

La définition de [Bre00] n'est pas exactement la même que celle que l'on vient de donner. En effet, dans *loc. cit.*, il est question des faisceaux $\mathcal{O}_\infty^{\text{cris}}$ et $\mathcal{J}_\infty^{\text{cris}}$ et de schémas formels. Toutefois, on montre sans mal (en utilisant le même argument que dans la première partie de cette remarque) que les deux définitions coïncident.

Le résultat principal de [Bre00] est le suivant :

Théorème 1.2.2. *Le foncteur Mod réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{O}_K$-groupes et la catégorie (Mod/S). De plus, cette anti-équivalence préserve les suites exactes courtes.*

Remarque. Dans *loc. cit.* Breuil donne une description totalement explicite du quasi-inverse Gr du foncteur Mod. Nous n'aurons pas besoin de cette description pour cet article et donc nous ne la détaillons pas ici.

[1] Dans ce lemme, seule la platitude sur W_n est annoncée mais la platitude du S_n est également vraie en reprenant les arguments de la proposition 2.1.2.1 de [Bre98].

2 Dualité sur les catégories de modules

Cette section est consacrée à la définition de dualités (dans le sens « anti-équivalence de catégories sur elle-même ») d'une part sur la catégorie (Mod/S) et d'autre part sur la catégorie des modules fortement divisibles. On commence par traiter le cas des modules fortement divisibles pour lesquels la construction est simplifiée par l'existence de bases adaptées. On déduira ensuite la dualité sur la catégorie (Mod/S) de celle que l'on aura définie sur les modules fortement divisibles.

2.1 Sur les modules fortement divisibles

Soit $\mathcal{M}$ un module fortement divisible. Le dual de $\mathcal{M}$ est l'objet $(\mathcal{M}^\vee, \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee, \phi_1^\vee)$ défini de la façon suivante :

- ☞ $\mathcal{M}^\vee = \mathrm{Hom}_S(\mathcal{M}, S)$ (où Hom_S signifie que l'on considère *tous* les morphismes S-linéaires) ;
- ☞ $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}^\vee$ formé des $f : \mathcal{M} \to S$ qui envoient $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$ dans $\mathrm{Fil}^1 S$;
- ☞ pour tout $f \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$, l'application $\phi_1^\vee(f)$ est l'unique morphisme S-linéaire faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fil}^1\mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1^\vee(f)} \\ \mathrm{Fil}^1 S & \xrightarrow{\phi_1} & S \end{array}$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut montrer l'existence et l'unicité du morphisme $\phi_1^\vee(f)$. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soient $\mathcal{M}$ un module fortement divisible et $f : Fil^1\mathcal{M} \to Fil^1 S$ une application S-linéaire. Alors il existe une* unique *application $g : \mathcal{M} \to S$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} Fil^1\mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Fil^1 S & \xrightarrow{\phi_1} & S \end{array}$$

Démonstration. L'unicité résulte simplement du fait que $\mathrm{im}\phi_1$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module.

Pour l'existence, on considère $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$ (voir lemme 1.1.1). On pose $x_i = \phi_1(E(u)^{n_i} e_i) \in \mathcal{M}$. Du fait que S est un anneau local, on vérifie que le lemme de Nakayama s'applique et implique que la famille des x_i est génératrice. Comme en outre, elle a le bon cardinal, on en déduit qu'elle forme une S-base de $\mathcal{M}$. Cette constatation permet de définir g comme l'unique application S-linéaire vérifiant $g(x_i) = \phi_1 \circ f(E(u)^{n_i} e_i)$ pour tout i. On vérifie alors facilement qu'elle convient. □

Nous voulons à présent montrer que le triplet $(\mathcal{M}^\vee, \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee, \phi_1^\vee)$ définit un module fortement divisible. Il n'y a aucune difficulté à la vérification de la relation de compatibilité :

$$\phi_1^\vee(sx) = \frac{1}{c^r}\phi_1^\vee(s)\,\phi_1^\vee(E(u)\,x)$$

pour tout $s \in \mathrm{Fil}^1 S$ et tout $x \in \mathcal{M}^\vee$. Par ailleurs le fait que $\mathcal{M}$ soit libre sur S est évident. Les deux dernières propriétés « $\mathcal{M}^\vee/\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$ sans p-torsion » et « $\phi_1(\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee)$ engendre $\mathcal{M}^\vee$ » résultent l'une comme l'autre du lemme suivant :

Lemme 2.1.2. *Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$. Alors la base duale $(e_1^\vee, \ldots, e_d^\vee)$ de $\mathcal{M}^\vee$ est également adaptée pour les entiers $n_1^\vee, \ldots, n_d^\vee$ avec $n_i^\vee = 1 - n_i$.*

De plus si l'on pose $x_i = \phi_1\left(E\left(u\right)^{n_i} e_i\right)$ et $x_i^\vee = \phi_1^\vee(E\left(u\right)^{n_i^\vee} e_i^\vee)$, les familles $(x_1, \ldots, x_d)$ et $(x_1^\vee, \ldots, x_d^\vee)$ sont des bases duales l'une de l'autre.

Démonstration. La famille des $e_j^\vee$ est définie par les égalités $e_j^\vee\left(e_i\right) = \delta_{ij}$ où δ désigne le symbole de Kronecker. Soit $f \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$. On peut décomposer f sur la base des $e_j^\vee$ et donc écrire :

$$f = s_1 e_1^\vee + \ldots + s_d e_d^\vee$$

pour certains éléments $s_i \in S$. Comme $f \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$, il vient $f\left(E\left(u\right)^{n_i} e_i\right) \in \mathrm{Fil}^1 S$. Or $f\left(E\left(u\right)^{n_i} e_i\right) = E\left(u\right)^{n_i} s_i$. Cela prouve que s_i est un élément de $\mathrm{Fil}^{n_i^\vee} S$ et donc que la base $(e_1^\vee, \ldots, e_d^\vee)$ est adaptée pour les entiers $n_1^\vee, \ldots, n_d^\vee$.

Passons à la seconde partie du lemme. On a déjà vu (dans la preuve du lemme 2.1.1) que $(x_1, \ldots, x_d)$ est une base de $\mathcal{M}$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fil}^1\mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_r^\vee(f)} \\ \mathrm{Fil}^1 S & \xrightarrow{\phi_1} & S \end{array}$$

En prenant $f = E\left(u\right)^{n_j^\vee} e_j^\vee$ et en regardant quelle est l'image de $E\left(u\right)^{n_i} e_i$ par chacun des deux chemins, on obtient $x_j^\vee\left(x_i\right) = \delta_{ij}$, ce qui conclut. □

On déduit de ce qui précède la proposition suivante :

Proposition 2.1.3. *Le triplet $(\mathcal{M}^\vee, Fil^1\mathcal{M}^\vee, \phi_1^\vee)$ défini précédemment est un module fortement divisible.*

Si f est un morphisme entre modules fortement divisibles, on vérifie sans peine que sa transposée (au sens classique) est compatible à toutes les structures et donc aussi un morphisme entre modules fortement divisibles. On a ainsi défini un foncteur $^\vee$ contravariant de la catégorie des modules fortement divisibles sur elle-même.

Proposition 2.1.4. *Le foncteur $^\vee$ est une anti-équivalence de catégories (*i.e. *une dualité). De plus, il transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes.*

Démonstration. Le foncteur $^\vee$ est son propre quasi-inverse. En effet, on a un morphisme canonique de S-modules de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}^{\vee\vee}$ donné par $x \mapsto (f \mapsto f\left(x\right))$. C'est un isomorphisme puisque $\mathcal{M}$ est libre sur S. Il est facile de vérifier que cet isomorphisme respecte Fil^1 et ϕ_1. Le seul point délicat est de montrer la surjectivité de $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^{\vee\vee}$. Cela revient à montrer que si $x \notin \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$, alors il existe $f \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$ tel que $f(x) \notin \mathrm{Fil}^1 S$. On considère pour cela $(e_1, \ldots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$. On a alors une écriture :

$$x = s_1 e_1 + \cdots + s_d e_d$$

avec $s_i \in S$ et comme $x \notin \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$, il existe un indice i tel que $s_i \notin \mathrm{Fil}^{n_i} S$. On vérifie alors aisément que l'application S-linéaire $f : \mathcal{M} \to S$ définie par $f(e_i) = E(u)^{1-n_i}$ et $f(e_j) = 0$ pour $j \neq i$ convient.

Montrons à présent le second point. Considérons $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ une suite exacte de modules fortement divisibles. Puisque $\mathcal{M}''$ est un S-module libre, la suite $0 \to \mathcal{M}''^\vee \to \mathcal{M}^\vee \to \mathcal{M}'^\vee \to 0$ est exacte comme suite de S-modules. Par ailleurs, la suite :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}''^\vee \longrightarrow \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee \longrightarrow \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}'^\vee \longrightarrow 0$$

est exacte à gauche. Il s'agit simplement de démontrer la surjectivité de $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee \to \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}'^\vee$. Notons $\mathrm{Fil}^1\mathcal{N}$ l'image de ce morphisme. On vérifie directement que ce Fil^1 fait de $\mathcal{M}'^\vee$ un second module fortement divisible : notons le $\mathcal{N}$. On a une suite exacte $0 \to \mathcal{M}''^\vee \to \mathcal{M}^\vee \to \mathcal{N} \to 0$.

D'autre part, l'identité fournit un morphisme $f : \mathcal{N} \to \mathcal{M}'$ dans la catégorie $'(\mathrm{Mod}/S)$ dont le dual s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}' & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}'' \\
 & & {\scriptstyle f^\vee}\downarrow & & \| & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathcal{N}^\vee & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}''
\end{array}$$

On en déduit que $f^\vee$ est un isomorphisme de modules fortement divisibles, puis qu'il en est de même de $f = (f^\vee)^\vee$. Finalement $\mathrm{Fil}^1\mathcal{N} = \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}'$, et la surjectivité de $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee \to \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}'^\vee$ en découle. □

2.2 Sur la catégorie $(\mathbf{Mod}/S)$

2.2.1 Définition de l'objet dual

On introduit les deux S-modules S_{K_0} et S_∞ définis par $S_{K_0} = S \otimes_W K_0$ et $S_\infty = S \otimes_W K_0/W$. On pose $\mathrm{Fil}^1 S_{K_0} = \mathrm{Fil}^1 S \otimes_W K_0 \subset S_{K_0}$ (car K_0 est plat sur W). On a une projection $S_{K_0} \to S_\infty$ et on note $\mathrm{Fil}^1 S_\infty$ l'image de $\mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$ dans S_∞. On vérifie que $\phi_1 : \mathrm{Fil}^1 S \to S$ induit des applications $\mathrm{Fil}^1 S_{K_0} \to S_{K_0}$ et $\mathrm{Fil}^1 S_\infty \to S_\infty$ que l'on appelle encore ϕ_1.

Soit $\mathcal{M}$ un objet de (Mod/S). Le dual de $\mathcal{M}$ est l'objet $(\mathcal{M}^\vee, \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee, \phi_1^\vee)$ défini de la façon suivante :

- ☞ $\mathcal{M}^\vee = \mathrm{Hom}_S(\mathcal{M}, S_\infty)$ (où Hom_S signifie que l'on considère *tous* les morphismes S-linéaires) ;
- ☞ $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}^\vee$ formé des $f : \mathcal{M} \to S_\infty$ qui envoient $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$ dans $\mathrm{Fil}^1 S_\infty$;
- ☞ pour tout $f \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$, l'application $\phi_1^\vee(f)$ est l'unique morphisme S-linéaire faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Fil}^1\mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{M} \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1^\vee(f)} \\
\mathrm{Fil}^1 S_\infty & \xrightarrow{\phi_1} & S_\infty
\end{array}$$

Il reste à prouver l'existence et l'unicité du morphisme $\phi_1^\vee(f)$ mentionné ci-dessus. Comme dans le cas des modules fortement divisibles, l'unicité résulte simplement du fait que $\phi_1(\mathrm{Fil}^1\mathcal{M})$ engendre tout $\mathcal{M}$. L'existence par contre est plus délicate. Nous consacrons tout le paragraphe suivant à son établissement.

2.2.2 Existence du morphisme $\phi_1^\vee(f)$

On commence par prouver deux lemmes :

Lemme 2.2.1. *Pour tout objet $\mathcal{M}$ de (Mod/S), il existe $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{M}}'$ des modules fortement divisibles et une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}' \longrightarrow \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

dans la catégorie $'(Mod/S)$.

Démonstration. Par les alinéas 3.1.1 et 3.3.12 de [BBM82], il existe des groupes p-divisibles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ et une suite exacte $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{H}' \to 0$. Le lemme s'en déduit par l'anti-équivalence de Breuil (en travaillant dans un premier temps modulo p^n puis en passant à la limite). □

Remarque. On peut également démontrer le lemme précédent avec seulement des considérations d'algèbre linéaire.

Lemme 2.2.2. *Si $\mathcal{M}$, $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{M}}'$ sont comme dans le lemme 2.2.1, alors on a également une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}^\vee \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}'^\vee \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

dans la catégorie $'(Mod/S)$.

Démonstration. Définissons dans un premier temps les flèches. La première est simplement la transposée de l'inclusion $\hat{\mathcal{M}}' \hookrightarrow \hat{\mathcal{M}}$. Pour la seconde, considérons $f \in \hat{\mathcal{M}}'^\vee$ et $x \in \mathcal{M}$. Soit $\hat{x} \in \hat{\mathcal{M}}$ un relèvement de x. Comme $\mathcal{M}$ est tué par une puissance de p, il existe un entier n tel que $p^n\hat{x} \in \hat{\mathcal{M}}'$. La réduction dans S_∞ de $\frac{1}{p^n} f\left(p^n \hat{x}\right)$ ne dépend ni de l'entier n, ni du relèvement $\hat{x}$ choisi. Cela permet de définir une application S-linéaire $\mathcal{M} \to S_\infty$.

Par exactitude à gauche, le noyau de $\hat{\mathcal{M}}^\vee \to \hat{\mathcal{M}}'^\vee$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{M}, S)$ qui est nul puisque $\mathcal{M}$ est tué par une puissance de p. La première flèche est donc bien injective.

Prouvons l'exactitude au milieu. Soit $f : \mathcal{M}' \to S$ une application S-linéaire. On suppose que l'image de f dans $\mathcal{M}^\vee$ est nulle et on veut montrer que f se prolonge à $\mathcal{M}$. Soient $x \in \mathcal{M}$ et n un entier tel que $p^n x \in \mathcal{M}'$. Par hypothèse $\frac{1}{p^n} f\left(p^n x\right)$ est nul dans S^∞, ce qui signifie que $f\left(p^n x\right)$ est un multiple de p^n. On définit alors $f(x) = \frac{f(p^n x)}{p^n}$ (qui est bien défini puisque S est intègre).

Passons à la surjectivité. Soit $f : \mathcal{M} \to S_\infty$ une application S-linéaire. Considérons $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_d)$ une base de $\hat{\mathcal{M}}$ et notons e_i l'image dans $\mathcal{M}$ de $\hat{e}_i$. Pour tout i, notons $\hat{x}_i$ un relevé quelconque dans S_{K_0} de $x_i = f(e_i) \in S_\infty$. On définit $\hat{f}(\hat{e}_i) = \hat{x}_i$ et par linéarité on étend $\hat{f}$ en une application $\hat{\mathcal{M}}^\vee \to S_{K_0}$. On vérifie alors que la restriction de $\hat{f}$ à $\hat{\mathcal{M}}'$ tombe dans S et qu'elle induit f dans $\mathcal{M}^\vee$.

Il reste à prouver l'exactitude au niveau des Fil^1. L'injectivité et l'exactitude au milieu se traitent comme précédemment. Pour la surjectivité, considérons $f \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$ et $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_d)$ une base adaptée de $\hat{\mathcal{M}}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$. Notons e_i l'image dans $\mathcal{M}$ de $\hat{e}_i$. Par hypothèse $E(u)^{n_i} f(e_i) \in \mathrm{Fil}^1 S_\infty$ et cela assure qu'il existe $\hat{x}_i \in S_{K_0}$ relevant $f(e_i)$ et tel que $E(u)^{n_i}\hat{x}_i \in \mathrm{Fil}^1 S_{K_0}$. L'application $\hat{f}$ définie par $\hat{f}(\hat{e}_i) = \hat{x}_i$ se restreint alors à $\hat{\mathcal{M}}'$ en un élément de $\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}}'^\vee$ qui est un antécédent de f. □

On déduit finalement simplement des deux lemmes précédents l'existence de $\phi_1^\vee(f)$, pour $f \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee$. En effet, par le lemme 2.2.2, f se relève en un élément $\hat{f} \in \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{M}}'^\vee$ et on vérifie sans difficulté que l'image de $\phi_1^\vee(\hat{f})$ dans $\mathcal{M}^\vee$ convient.

2.2.3 Propriétés du foncteur de dualité

Nous n'avons toujours pas montré que le triplet $(\mathcal{M}^\vee, \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee, \phi_1^\vee)$ reste un objet de (Mod/S), mais pour cela nous allons avoir besoin de l'exactitude que nous prouvons dans un premier temps. La preuve est basée sur une légère généralisation du lemme 2.2.1 que nous donnons ci-dessous :

Lemme 2.2.3. *Soit $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{X} \to \mathcal{N} \to 0$ une suite exacte dans la catégorie (Mod/S). Il existe des modules fortement divisibles $\hat{\mathcal{M}}$, $\hat{\mathcal{M}}'$, $\hat{\mathcal{X}}$, $\hat{\mathcal{X}}'$, $\hat{\mathcal{N}}$ et $\hat{\mathcal{N}}'$ qui s'insèrent dans le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \hat{\mathcal{M}}' & \longrightarrow & \hat{\mathcal{X}}' & \longrightarrow & \hat{\mathcal{N}}' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \hat{\mathcal{M}} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{X}} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{N}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où toutes les lignes et colonnes sont des suites exactes dans la catégorie $'(Mod/S)$.

Démonstration. Par le lemme 2.2.1, on peut déjà construire un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & \hat{\mathcal{M}}' & & & & \hat{\mathcal{N}}' & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & \hat{\mathcal{M}} & & & & \hat{\mathcal{N}} & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Pour le reste, on pose $\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{M}} \oplus \hat{\mathcal{N}}$ et $\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}} = \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{M}} \oplus \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{N}}$. Tout d'abord, on a $\hat{\mathcal{X}}/\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}} \simeq \hat{\mathcal{M}}/\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{M}} \oplus \hat{\mathcal{N}}/\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{N}}$; c'est donc un module sans p-torsion. Considérons ensuite $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_d)$ une base adaptée de $\hat{\mathcal{N}}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$. Notons e_i l'image de $\hat{e}_i$ dans $\mathcal{N}$ et $e'_i \in \mathcal{X}$ un relevé de e_i. Si $n_i = 0$, on a $e_i \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{N}$ et donc on peut choisir $e'_i \in \mathrm{Fil}^1\mathcal{X}$, ce que l'on ne se prive pas de faire. On définit une application surjective $f : \hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ qui coïncide sur $\hat{\mathcal{M}}$ avec la projection $\hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ et qui est définie sur $\hat{\mathcal{N}}$ par les égalités $f(0 \oplus \hat{e}_i) = e'_i$. On vérifie que f

induit une application surjective $\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}} \to \mathrm{Fil}^1\mathcal{X}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \hat{\mathcal{M}} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{X}} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{N}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On définit à présent l'opérateur $\phi_1 : \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ de la façon suivante. Sur $\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{M}}$, il coïncide avec l'application $\phi_1 : \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$. Il ne reste qu'à donner ses valeurs sur les éléments $E(u)^{n_i}(0 \oplus \hat{e}_i)$. Notons $x_i = \phi_1(E(u)^{n_i}e_i) \in \mathcal{N}$ et $x_i' \in \mathcal{X}$ un relevé un x_i. Les éléments x_i' et $\phi_1(E(u)^{n_i}\hat{e}_i)$ s'envoient tous deux sur x_i dans $\mathcal{N}$; ils admettent donc un antécédent commun dans $\hat{\mathcal{X}}$, disons $\hat{x}_i$. On pose $\phi_1(E(u)^{n_i}(0 \oplus \hat{e}_i)) = \hat{x}_i$ et on vérifie que l'on obtient bien ainsi un module fortement divisible. De plus, l'application f ainsi que la projection canonique $\hat{\mathcal{X}} \to \hat{\mathcal{N}}$ sont par construction compatibles à ϕ_1.

On pose $\hat{\mathcal{X}}' = \ker f$ et $\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}}' = \hat{\mathcal{X}}' \cap \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}}$. Le quotient $\hat{\mathcal{X}}'/\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}}'$ s'injecte dans $\hat{\mathcal{X}}/\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}}$ et est donc également sans p-torsion. Par ailleurs, l'application ϕ_1 précédemment définie induit une flèche $\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}}' \to \mathcal{X}'$ qui s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{M}}' & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}}' & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{N}}' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\phi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\phi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\phi_1}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \hat{\mathcal{M}}' & \longrightarrow & \hat{\mathcal{X}}' & \longrightarrow & \hat{\mathcal{N}}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les deux lignes sont exactes par application du lemme du serpent. On en déduit que $\phi_1(\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{X}}')$ engendre $\hat{\mathcal{X}}'$ et que $\hat{\mathcal{X}}'$ est un S-module libre. Il s'agit donc d'un module fortement divisible et cela termine la démonstration. □

Lemme 2.2.4. *Le foncteur $^\vee$ conserve les suites exactes courtes.*

Démonstration. On ne traite que l'exactitude en tant que S-module, celle au niveau des Fil^1 étant en tout point analogue. Soit $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{X} \to \mathcal{N} \to 0$ une suite exacte dans (Mod/S). D'après le lemme 2.2.3, il existe un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \hat{\mathcal{M}}' & \longrightarrow & \hat{\mathcal{X}}' & \longrightarrow & \hat{\mathcal{N}}' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \hat{\mathcal{M}} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{X}} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{N}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où $\hat{\mathcal{M}}$, $\hat{\mathcal{M}}'$, $\hat{\mathcal{X}}$, $\hat{\mathcal{X}}'$, $\hat{\mathcal{N}}$ et $\hat{\mathcal{N}}'$ sont des modules fortement divisibles. En dualisant, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \hat{\mathcal{N}}'^\vee & \longrightarrow & \hat{\mathcal{X}}'^\vee & \longrightarrow & \hat{\mathcal{M}}'^\vee & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{X}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{M}^\vee & & \end{array}$$

où la ligne du haut est exacte (proposition 2.1.4) et les flèches verticales sont surjectives (lemme 2.2.2). La surjectivité $\mathcal{X}^\vee \to \mathcal{M}^\vee$ résulte alors d'une chasse au diagramme triviale et permet de conclure. □

La propriété suivante résume finalement les propriétés du foncteur $^\vee$:

Proposition 2.2.5. *Le foncteur $^\vee$ est une dualité de la catégorie (Mod/S). De plus, il transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes.*

Démonstration. Il ne reste qu'à prouver que le dual d'un objet $\mathcal{M}$ de (Mod/S) est encore un objet de (Mod/S). Par le lemme 2.2.4, il suffit de le faire lorsque $\mathcal{M}$ est tué par p.

Dans ce cas, $\mathcal{M}$ est un S/pS-module libre et de $\mathrm{Hom}_S(S/pS, S_\infty) = S/pS$, on déduit que $\mathcal{M}^\vee$ est aussi un S/pS-module libre. Il ne reste qu'à prouver que $\phi_1(\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee)$ engendre $\mathcal{M}^\vee$. Mais si $0 \to \hat{\mathcal{M}}' \to \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M} \to 0$ est une suite exacte dans $'(\mathrm{Mod}/S)$ avec $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{M}}'$ des modules fortement divisibles, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{M}}'^\vee & \twoheadrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}^\vee \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} \\ \hat{\mathcal{M}}'^\vee & \twoheadrightarrow & \mathcal{M}^\vee \end{array}$$

et $\phi_1(\mathrm{Fil}^1\hat{\mathcal{M}}'^\vee)$ engendre $\hat{\mathcal{M}}'^\vee$ puisque $\hat{\mathcal{M}}'^\vee$ est encore un module fortement divisible. Une chasse au diagramme permet alors de conclure. □

3 Dualité de Cartier

Dans cette dernière section, on montre que la dualité définie précédemment correspond *via* le foncteur Mod à la dualité de Cartier sur les schémas en groupes.

3.1 Rappels de théorie de Dieudonné cristalline

On considère $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_K$-groupe. Comme en 1.2.3, on note $\mathcal{G}_n$ la réduction modulo p^n de $\mathcal{G}$. C'est un schéma en groupes commutatifs fini et plat sur la base $T_n = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_K/p^n)$. On rappelle par ailleurs que E_n désigne le schéma $\mathrm{Spec}\,(S_n)$ où $S_n = S/p^nS$. La projection $S_n \to \mathcal{O}_K/p^n$ qui envoie u sur π définit un épaississement $T_n \hookrightarrow E_n$.

Avant de poursuivre, notons également que, par la suite, nous aurons à considérer les objets $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ et $\mathrm{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux faisceaux de groupes abéliens sur un certain site. Le premier désignera toujours l'ensemble des morphismes entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ dans la catégorie des faisceaux de *groupes abéliens*. Le second, quant à lui, est une version faisceautique du premier : si U est un objet du site, on a par définition :

$$\mathrm{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F}')(U) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{F}'_{|U})$$

où les morphismes sont toujours considérés dans la catégorie des faisceaux abéliens.

De même, on définit les objets $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ et $\mathrm{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ qui sont respectivement un groupe abélien et un faisceau de groupes abéliens. On prêtera attention au fait qu'ici l'association :

$$U \mapsto \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{F}'_{|U})$$

ne définit pas en général un faisceau mais seulement un préfaisceau. Par définition, $\mathrm{E}xt^1(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ est le faisceau associé à ce préfaisceau.

Dans [BBM82] (voir définition 3.1.5), Berthelot, Breen et Messing associent à $\mathcal{G}_n$ un cristal sur le site[2] $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$, appelé *cristal de Dieudonné* de $\mathcal{G}_n$ et noté $\mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$. Par définition, on a $\mathbb{D}(\mathcal{G}_n) = \mathrm{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$.

D'autre part, de façon très générale, si A et B sont deux objets d'une catégorie abélienne tués par un entier N, on a une flèche canonique :

$$\mathrm{Ext}^1(A,B) \to \mathrm{Hom}(A,B)$$

qui à une extension E associe la flèche du serpent associée au diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow N & & \downarrow 0 & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Puisque $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{O}_{T_n/E_n}$ sont tués par p^n, ceci s'applique à notre situation et fournit une flèche canonique :

$$\sigma : \mathbb{D}(\mathcal{G}_n) \to \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \tag{3}$$

qui, d'après la proposition 4.2.9 de [BBM82], induit un isomorphisme sur les sections globales. Autrement dit :

$$\mathbb{D}(\mathcal{G}_n)(T_n,E_n) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) = \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \tag{4}$$

la dernière égalité étant obtenue grâce à l'adjonction des foncteurs $w^\star$ et $w_\star$ (les Hom calculés sur les petit et gros sites syntomiques sont les mêmes puisque $\mathcal{G}_n$ est représentable par un schéma syntomique sur T_n). L'isomorphisme (4) est celui qui fournit le lien entre le point de vue de [BBM82] (cristal de Dieudonné) et le point de vue de [Bre00] (objet de (Mod/S)).

3.2 Construction du morphisme de comparaison

On garde les notations du paragraphe précédent. On note, en outre, $\mathcal{G}^\vee$ le dual de Cartier de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_m^\vee = \mathcal{G}^\vee \times_{\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_K)} T_m$ pour $m = n$ et $m = n+1$. On désigne encore par $\mathcal{G}_n^\vee$ le faisceau sur le site $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$ défini par le schéma $\mathcal{G}_n^\vee$. On rappelle que $\mathcal{G}_n^\vee = \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_\mathrm{m})$ où $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ est défini par $\mathbb{G}_\mathrm{m}(U,T) = \Gamma(U,\mathcal{O}_U)^\star$.

Le but, ici, est d'obtenir un isomorphisme canonique et fonctoriel :

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \to \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee).$$

Or, on dispose d'une suite exacte de faisceaux abéliens :

$$0 \longrightarrow 1 + \mathcal{J}_{T_n/E_n} \longrightarrow \mathcal{O}^\star_{T_n/E_n} \longrightarrow \mathbb{G}_\mathrm{m} \longrightarrow 0$$

et la flèche de cobord associée au foncteur $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n,\cdot)$ induit un morphisme $\mathcal{G}_n^\vee \to \mathrm{E}xt^1(\mathcal{G}_n, 1 + \mathcal{J}_{T_n/E_n})$. Par ailleurs, on a un morphisme $\log : 1 + \mathcal{J}_{T_n/E_n} \to \mathcal{O}_{T_n/E_n}$ défini par :

$$\log(1+x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \cdots$$

[2]En réalité dans [BBM82], il n'est pas du tout question de topologie syntomique. Cependant d'après le corollaire 2.3.11 de [BBM82], il s'agit bien du même préfaisceau.

qui induit, par fonctorialité, un morphisme $\mathrm{E}xt^1(\mathcal{G}_n, 1+\mathcal{J}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) = \mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$. En composant les deux flèches précédentes, on définit :

$$\alpha_{\mathrm{CRIS}} : \mathcal{G}_n^\vee \to \mathbb{D}(\mathcal{G}_n).$$

Finalement, par application du foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$, on obtient :

$$\alpha_{\mathrm{CRIS}}^\star : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$$

où la notation « $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}$ » signifie que l'on se restreint aux morphismes $\mathcal{O}_{T_n/E_n}$-linéaires. D'après le théorème 5.2.7 de [BBM82], $\alpha_{\mathrm{CRIS}}^\star$ est un isomorphisme.

Le but de $\alpha_{\mathrm{CRIS}}^\star$ s'identifie (grâce à l'adjonction des foncteurs $w^\star$ et $w_\star$) à $\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$, tandis que la source est naturellement munie d'un morphisme γ (obtenu en regardant les sections globales) vers $\mathrm{Hom}_{S_n}(\mathrm{Mod}(\mathcal{G}), S_n)$.

Lemme 3.2.1. *Le morphisme γ : $Hom_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to Hom_{S_n}(Mod(\mathcal{G}), S_n)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On remarque que $\mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$ et $\mathcal{O}_{T_n/E_n}$ sont tous les deux des cristaux sur le site $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$. Le lemme résulte alors de la description de la catégorie de ces cristaux en terme de modules à connexion intégrable et quasi-nilpotente (dans cette situation, la connexion est nécessairement nulle). □

Au final, la composée $\beta^\star = \alpha_{\mathrm{CRIS}}^\star \circ \gamma^{-1}$ fournit un isomorphisme :

$$\beta^\star : \mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \to \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$$

dont on vérifie directement qu'il est fonctoriel en $\mathcal{G}$. Il reste à prouver que $\beta^\star$ est isomorphisme *dans la catégorie* (Mod/S). C'est l'objet des paragraphes suivants.

3.3 Cas des groupes de la forme $\mathcal{H}(n)$

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas particulier où $\mathcal{G}$ est le noyau de la multiplication par p^n sur un groupe p-divisible $\mathcal{H}$. Notons, pour simplifier, $\mathcal{H}_n = \mathcal{H} \times_{\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_K)} T_n$ et pour tout m, $\mathcal{H}_n(m)$ le noyau de la multiplication par p^m sur $\mathcal{H}_n$. La supposition que l'on vient de faire entraîne alors $\mathcal{G}_n = \mathcal{H}_n(n)$.

Cette hypothèse supplémentaire a l'avantage de fournir un inverse au morphisme σ défini en (3). En effet, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n(2n) \xrightarrow{p^n} \mathcal{G}_n \longrightarrow 0$$

et on note s le morphisme de cobord :

$$s : \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) = \mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$$

associé au foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$.

Lemme 3.3.1. *Les morphismes σ et s sont inverses l'un de l'autre. En particulier, le faisceau $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$ est un cristal sur $(T_n/E_n)_{SYN\text{-}CRIS}$.*

Démonstration. On vérifie facilement, en déroulant les définitions, que $\sigma \circ s = \mathrm{id}$. Il suffit, pour conclure, de prouver que s est un épimorphisme. Considérons $(U,T) \in (T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$ avec $T = \operatorname{Spec} S$ affine et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})(T_n,E_n) \otimes_{S_n} S & \longrightarrow & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})(U,T) \\ \downarrow{\scriptstyle s_{(T_n,E_n)}\otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle s_{(U,T)}} \\ \mathbb{D}(\mathcal{G}_n)(T_n,E_n) \otimes_{S_n} S & \longrightarrow & \mathbb{D}(\mathcal{G}_n)(U,T) \end{array}$$

La flèche de gauche est un isomorphisme, ainsi que celle du bas puisque $\mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$ est un cristal sur $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$. On en déduit que $s_{(U,T)}$ est surjectif, ce qui suffit pour conclure. □

Notons :

$$\sigma^\star : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n})$$

$$(\text{resp. } s^\star : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}))$$

le morphisme induit par σ (resp. par s) *via* le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\cdot, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$.

3.3.1 Les morphismes β_{CRIS} et β_{syn}

On pose $\beta_{\text{CRIS}} = \sigma \circ \alpha_{\text{CRIS}}$. Sur le *petit* site syntomique, à partir de la suite exacte (que l'on déduit de (2)) :

$$0 \longrightarrow 1 + \mathcal{J}_n^{\text{cris}} \longrightarrow \mathcal{O}_n^{\text{cris}\star} \longrightarrow \mathcal{O}_n^\star \longrightarrow 0$$

on définit un morphisme $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star) \to \mathrm{E}xt^1(\mathcal{G}_n, 1+\mathcal{J}_n^{\text{cris}})$ qui fournit, après composition par log, un morphisme $\alpha_{\text{syn}} : \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star) \to \mathrm{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}})$. Le morphisme β_{syn} s'obtient de façon analogue en composant par la flèche canonique $\mathrm{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \to \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}})$.

On vérifie, en déroulant les définitions, que β_{syn} se décrit localement de la façon explicite suivante. Soit $f \in \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star)$. Soit $U \in (T_n)_{\text{syn}}$. On cherche à décrire l'élément $\beta_{\text{syn}}(f(U)) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_{n|U}, {\mathcal{O}_n^{\text{cris}}}_{|U})$. Considérons pour cela $V \in U_{\text{syn}}$ suffisamment petit pour que la suite $0 \to 1 + \mathcal{J}_n^{\text{cris}}(V) \to \mathcal{O}_n^{\text{cris}\star}(V) \to \mathcal{O}_n^\star(V) \to 0$ soit exacte. L'élément f fournit par restriction à V une application $g : \mathcal{G}_n(V) \to \mathcal{O}_n^\star(V)$. Soient $x \in \mathcal{G}_n(V)$ et $y \in \mathcal{O}_n^{\text{cris}\star}(V)$ un relevé quelconque de $g(x)$. On vérifie directement que y^{p^n} ne dépend que de x et que c'est un élément de $1+\mathcal{J}_n^{\text{cris}}(V)$. Le morphisme $\beta_{\text{syn}}(f(U))$ est alors celui qui, sur V, associe $\log(y^{p^n})$ à x.

Finalement, notons que l'on aura également besoin d'utiliser le morphisme $i_\star\beta_{\text{syn}}$ où on rappelle que i désigne l'inclusion $T_n \hookrightarrow T_{n+1}$; par abus, on notera ce morphisme encore β_{syn}.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $(T_n)_{\text{SYN}}$ et $\mathcal{F}'$ un faisceau de $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$, les morphismes d'adjonction permettent de construire un morphisme canonique :

$$w^\star \mathrm{H}om(\mathcal{F}, w_\star \mathcal{F}') \to \mathrm{H}om(w^\star\mathcal{F}, \mathcal{F}'). \tag{5}$$

Avec $\mathcal{F} = \mathcal{G}_n$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{O}_{T_n/E_n}$, on obtient une flèche $w^\star\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \to \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$ puis, par application du foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(w^\star\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_n^{\text{cris}}}(\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}), \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \end{aligned}$$

et finalement par restriction au petit site puis application du foncteur $i_\star$, un morphisme :

$$\gamma_1 : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}}(\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}), \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})$$

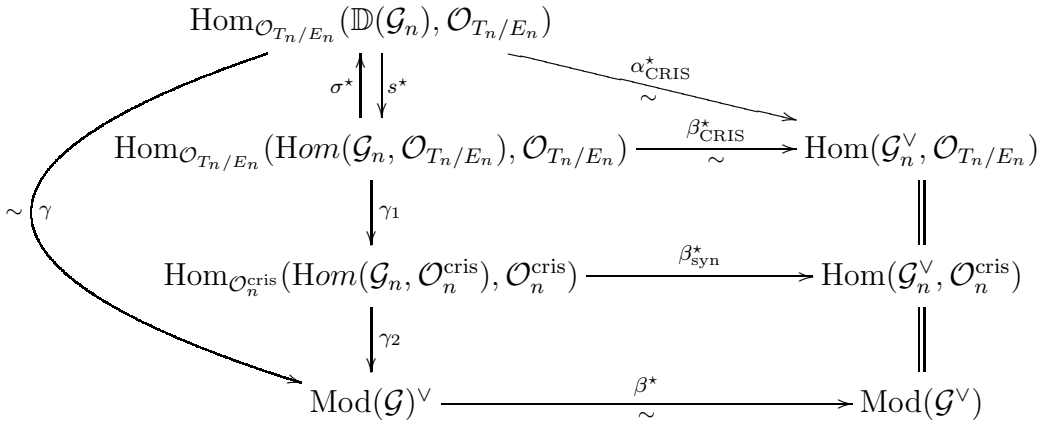
où, cette fois-ci, le dernier Hom est calculé sur le $(T_{n+1})_{\mathrm{syn}}$. (On remarque que puisque $\mathcal{G}_n$ est représentable par un schéma syntomique, on a l'identification $i_\star \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) = \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, i_\star \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})$.)

De plus, on vérifie facilement que si $\mathcal{F}'$ est de la forme $w^\star \mathcal{F}''$, le morphisme (5) est un isomorphisme. Autrement dit $\mathrm{H}om(w^\star \mathcal{F}, w^\star \mathcal{F}') = w^\star \mathrm{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des faisceaux sur le gros site syntomique. En particulier, en prenant $\mathcal{F} = \mathcal{G}_n$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{O}_n^\star$, on obtient un isomorphisme (sur le site cristallin) entre $\mathcal{G}_n^\vee$ et $w^\star \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star)$. On en déduit que $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star)$ est le faisceau sur $(T_n)_{\mathrm{SYN}}$ défini par le schéma $\mathcal{G}_n^\vee$. On note ce faisceau encore $\mathcal{G}_n^\vee$. Les propriétés d'adjonction fournissent des égalités :

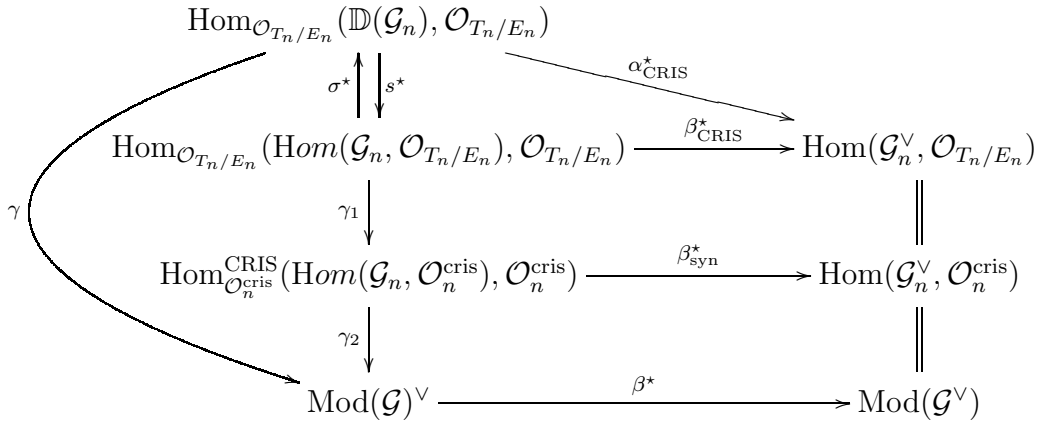
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) = \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$$

les Hom étant calculés sur les gros ou petits sites.

Le diagramme commutatif suivant résume les liens entre nombreux des morphismes introduits jusqu'alors :



Le morphisme γ_2 est obtenu simplement en regardant le morphisme induit sur les sections globales et les morphismes $\beta^\star_{\mathrm{CRIS}}$ et $\beta^\star_{\mathrm{syn}}$ ont des définitions évidentes. Notons de plus que tous les faisceaux syntomiques sont considérés sur le site $(T_{n+1})_{\mathrm{syn}}$. Comme $\beta^\star_{\mathrm{syn}} \circ \gamma_1$ est un isomorphisme, le morphisme γ_1 est injectif. Notons $\mathrm{Hom}^{\mathrm{CRIS}}_{\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}}(\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}), \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})$ son image. Le diagramme précédent se modifie alors de la façon suivante :



où désormais *toutes* les flèches sont des isomorphismes comme on le vérifie facilement. Lorsque nous aurons à considérer par la suite des morphismes γ_1, γ_2 et $\beta^\star_{\text{syn}}$, l'ensemble de départ ou d'arrivée (selon le cas) sera toujours $\mathrm{Hom}^{\mathrm{CRIS}}_{\mathcal{O}^{\mathrm{cris}}_n}(\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}^{\mathrm{cris}}_n), \mathcal{O}^{\mathrm{cris}}_n)$. En particulier, ces trois morphismes deviennent des isomorphismes.

3.3.2 Compatibilité à Fil^1

Le but de ce paragraphe est de montrer que le morphisme $\beta^\star$ envoie $\mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$ sur $\mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$. En réalité, cela résulte presque directement du lemme suivant :

Lemme 3.3.2. *Soit $f \in Fil^1 Mod(\mathcal{G})^\vee$. La restriction de $\gamma_2^{-1}(f)$ à $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}^{cris}_n)$ tombe dans $\mathcal{J}^{cris}_n$.*

Démonstration. Pour cette preuve on travaille sur le *petit* site cristallin $(T_n/E_n)_{\text{syn-cris}}$: c'est la restriction du gros site aux couples (U,T) pour lesquels U est syntomique sur T_n. Notons $\tilde{f}$ la restriction du faisceau $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2^{-1}(f)$ au petit site $(T_n/E_n)_{\text{syn-cris}}$. Il suffit de montrer que la restriction de $\tilde{f}$ à $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_{T_n/E_n})$ tombe dans $\mathcal{J}_{T_n/E_n}$ et pour cela de construire un morphisme $\tilde{g} : \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\mathrm{a}}) \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_{T_n/E_n}) & \longrightarrow & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_\star} & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\mathrm{a}}) & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \vdots{\scriptstyle \tilde{g}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{T_n/E_n} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T_n/E_n} & \xrightarrow{\mathrm{pr}} & \mathbb{G}_{\mathrm{a}} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{6}$$

Comme $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\mathrm{a}}) = w^\star \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)$ et $\mathbb{G}_{\mathrm{a}} = w^\star \mathcal{O}_n$, il revient au même de construire un morphisme $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n) \to \mathcal{O}_n$ sur le petit site syntomique $(T_n)_{\text{syn}}$. On construit celui-ci localement.

D'après la proposition 3.2.9 de [Bre00] (en remplaçant $\mathcal{H}(1)$ par $\mathcal{H}(n)$ ce qui ne modifie pas la preuve) le morphisme $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)$ est surjectif, et donc l'hypothèse du lemme fournit, à partir de f, une flèche $g : \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n) \to \mathcal{O}_K/p^n$.

Par ailleurs, puisque $\mathcal{G}_n$ est fini sur T_n, il est nécessairement affine : notons $\mathcal{A}_n$ son anneau et $c : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n \otimes_{O_K/p^n} \mathcal{A}_n$ la comultiplication. Notons $\mathcal{A}^c_n$ le noyau de $c - 1 \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes 1$. Considérons $U \in (T_n)_{\text{syn}}$, c'est en particulier un schéma plat sur T_n. On suppose en outre que $U = \mathrm{Spec}\, R$ est un schéma affine. On a alors :

$$\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)(U) = \left\{ x \in \mathcal{A} \otimes_{O_K/p^n} R \,/\, c(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \right\} = \mathcal{A}^c_n \otimes_{O_K/p^n} R$$

la dernière égalité provenant de la platitude de R sur $\mathcal{O}_K/p^n$. Le morphisme $g : \mathcal{A}^c_n \to \mathcal{O}_K/p^n$ construit précédemment donne, par tensorisation par R au dessus de $\mathcal{O}_K/p^n$, une flèche $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)(U) \to \mathcal{O}_n(U)$. Par recollement, on construit un morphisme de faisceaux sur le site syntomique qui correspond à un morphisme $\tilde{g} : \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\mathrm{a}}) \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ sur le site cristallin. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\tilde{g}$ fait commuter le diagramme (6). On considère pour cela $(U,T) \in (T_n/E_n)_{\text{syn-cris}}$ et on vérifie la commutativité du diagramme sur l'ouvert (U,T). On peut supposer U et T affines, disons $U = \mathrm{Spec}\, R$ et $T = \mathrm{Spec}\, S$. On considère le diagramme

suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})(U,T) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\star(U,T)}} & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\mathrm{a}})(U,T) \\
\| & & \| \\
\mathrm{Mod}(\mathcal{G}_n) \otimes_{S_n} S & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\star(T_n,E_n)} \otimes \mathrm{pr}_{(U,T)}} & \mathcal{A}_n^c \otimes_{O_K/p^n} R \\
{\scriptstyle f\otimes \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes \mathrm{id}} \\
S & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{(U,T)}} & R
\end{array}$$

On vérifie directement que le carré du haut est commutatif. Celui du bas l'est également par construction. Ainsi tout le diagramme commute, ce qui termine la preuve du lemme. □

Proposition 3.3.3. *Le morphisme $\beta^\star$ envoie $Fil^1 Mod(\mathcal{G})^\vee$ sur $Fil^1 Mod(\mathcal{G}^\vee)$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$. Par le lemme précédent, il existe un morphisme de faisceaux $\tilde{g}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) & \xrightarrow{\tilde{f}=\gamma_2^{-1}(f)} & \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}
\end{array}$$

Par ailleurs, le morphisme $\log : 1 + \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$ prend ses valeurs dans $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}$ et donc β_{syn} se factorise de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}_n^\vee & \xrightarrow{\beta_{\mathrm{syn}}} & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \\
& \searrow & \uparrow \\
& & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})
\end{array}$$

En concaténant les deux diagrammes précédents, on remarque immédiatement que la composée $\tilde{f} \circ \beta_{\mathrm{syn}}$ tombe dans $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}$. Ainsi $\beta_{\mathrm{syn}}^\star(\tilde{f}) \in \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})$ ce qui implique $\beta^\star(f) \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$ comme annoncé. □

3.3.3 Compatibilité à ϕ_1

Dans ce paragraphe, on prouve que $\beta^\star$ est compatible à ϕ_1. Pour cela, on introduit $\mathcal{S}_n$ le sous-faisceau de $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}$ défini comme le noyau du morphisme $\phi_1 - \mathrm{id} : \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$. On commence par montrer un lemme concernant ce faisceau :

Lemme 3.3.4. *Le morphisme β_{syn} se factorise par $\mathcal{G}_n^\vee \to \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{S}_n) \hookrightarrow \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{cris})$.*

Démonstration. Il s'agit d'un calcul local pour la topologie syntomique. On reprend les notations (A^∞, *etc.*) du paragraphe 1.2.2. En particulier, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow 1 + \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \longrightarrow W_n^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty)^\star \xrightarrow{s} (A^\infty)^\star \longrightarrow 0\,.$$

D'après la description faite au début du paragraphe 3.3.1, il suffit de montrer que si $x \in (A^\infty)^\star$ vérifie $x^{p^n} = 1$ et si $y \in W_n^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty)^\star$ désigne un antécédent (que l'on a le droit de choisir) de x alors $\phi_1(\log(y^{p^n})) = \log(y^{p^n})$. Considérons un tel x.

Il est immédiat de vérifier que x admet un antécédent de la forme $y = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in W_n(A^\infty/pA^\infty)$. On note $z = y^{p^n} = (y_0^{p^n}, 0, \dots, 0)$ et $\hat{z} = (y_0^{p^{n-1}}, 0, \dots, 0) \in W_{n+1}(A^\infty/pA^\infty)$. Par définition, $\phi_1(\log(y^{p^n}))$ est la réduction modulo p^n de $\frac{1}{p}\phi(\log \hat{z})$. Mais :

$$\phi(\log \hat{z}) = \log(\phi(\hat{z})) = \log(\hat{z}^p) = p \log \hat{z}$$

l'égalité $\phi(\hat{z}) = \hat{z}^p$ étant vérifiée car $\hat{z}$ est un représentant de Teichmüller. On en déduit bien $\phi_1(\log(y^{p^n})) = \log(y^{p^n})$ comme voulu. □

Lemme 3.3.5. *Soient $f \in Fil^1 Mod(\mathcal{G})^\vee$ et $h = \phi_1(f)$. Alors, le diagramme de faisceaux sur $(T_{n+1})_{syn}$ suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{cris}) & \xrightarrow{\gamma_2^{-1}(f)} & \mathcal{J}_n^{cris} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} \\ \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{cris}) & \xrightarrow{\gamma_2^{-1}(h)} & \mathcal{O}_n^{cris} \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Notons $\tilde{f} = \gamma_2^{-1}(f)$ et $\tilde{h} = \gamma_2^{-1}(h)$. On fait à nouveau un calcul local : on reprend les notations (A^∞, *etc.*) du paragraphe 1.2.2. Comme $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$ est un cristal, on a :

$$w_\star \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \simeq \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$$

et le morphisme $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{h}$) s'écrit sur A^∞ :

$$\tilde{f}_{A^\infty} : \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$$

$$(\text{resp. } \tilde{h}_{A^\infty} : \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \xrightarrow{h\otimes \mathrm{id}} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)).$$

Notons :

$$K = \mathrm{Fil}^1 \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) + \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \subset \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$$

et montrons que η envoie $\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty)$ dans K. En reprenant les notations de la preuve du lemme 3.3.2, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) & \longrightarrow & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) & \longrightarrow & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)(A^\infty) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow \\ & & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_\star \otimes s} & \mathcal{A}_n^c \otimes_{\mathcal{O}_K/p^n} A^\infty \end{array}$$

où s est la flèche définie en 1.2.2 et où $\mathrm{pr}_\star : \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \to \mathcal{A}_n^c$ était noté $\mathrm{pr}_{\star(T_n,E_n)}$ dans le lemme 3.3.2. Il suffit donc de montrer que le noyau de $\mathrm{pr}_\star \otimes s$ est inclus dans K. Pour cela, on rappelle que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^1 \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{A}_n^c \longrightarrow 0$$

la surjectivité résultant du corollaire 3.2.10 de [Bre00] (avec $\mathcal{H}(n)$ à la place de $\mathcal{H}(1)$). Elle fournit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathrm{Mod}(\mathcal{G})\otimes_{S_n}\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) & \longrightarrow & \mathcal{A}_n^c\otimes_{S_n}\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})\otimes_{S_n}\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(\mathcal{G})\otimes_{S_n}\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) & \longrightarrow & \mathcal{A}_n^c\otimes_{S_n}\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \downarrow & \overset{\eta}{\searrow} & \downarrow & & \\
 & & & & \mathrm{Mod}(\mathcal{G})\otimes_{S_n}A^\infty & \longrightarrow & \mathcal{A}_n^c\otimes_{S_n}A^\infty & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où toutes les lignes et colonnes sont exactes, l'exactitude de la ligne centrale résultant de la platitude de $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$ sur S_n. Une chasse au diagramme donne alors le résultat : le noyau de η est inclus dans K.

On voit que $f\otimes\mathrm{id}$ envoie K sur $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$ et que la restriction $\tilde{f}:\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n,\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})\to\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}$ s'écrit sur A^∞ de la façon suivante :

$$\tilde{f}_{A^\infty}:\ \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n,\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty)\xrightarrow{\eta}K\xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}}\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)\ .$$

On considère pour terminer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n,\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) & \xrightarrow{\eta} & K & \xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}} & \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)\\
\downarrow{\scriptstyle\phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_1\otimes\phi+\phi\otimes\phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_1}\\
\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n,\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{Mod}(\mathcal{G})\otimes_{S_n}\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) & \xrightarrow{h\otimes\mathrm{id}} & \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)
\end{array}$$

où $\phi:\mathrm{Mod}(\hat{\mathcal{G}})\to\mathrm{Mod}(\hat{\mathcal{G}})$ est défini par la formule $\phi(x)=\frac{1}{c}\phi_1(E(u)x)$. On vérifie que les deux carrés commutent. On en déduit que tout le diagramme commute, ce qui démontre le lemme. □

Remarque. En examinant la preuve précédente, on constate qu'elle fournit une autre démonstration (pas très éloignée toutefois) du lemme 3.3.2.

Proposition 3.3.6. *Le morphisme $\beta^\star$ est compatible à ϕ_1.*

Démonstration. Pour cette preuve, on note encore β_{syn} le morphisme $\mathcal{G}_n^\vee\to\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n,\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})$ induit par β_{syn}.

Soit $f\in\mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$. Notons $\tilde{f}=\gamma_2^{-1}(f)$. D'après le lemme 3.3.2, il existe un morphisme $\tilde{g}:\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n,\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})\to\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n,\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}\\
\uparrow & & \uparrow\\
\mathrm{H}om(\mathcal{G}_n,\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}
\end{array}$$

Le morphisme $\phi_1(\beta^\star f)$ est alors défini comme la composée $\phi_1 \circ \tilde{g} \circ \beta_{\text{syn}}$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_n^\vee & \xrightarrow{\beta_{\text{syn}}} & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\text{cris}}) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathcal{J}_n^{\text{cris}} \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} \\ \mathcal{G}_n^\vee & \xrightarrow{\beta_{\text{syn}}} & \mathrm{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) & \xrightarrow{\gamma_2^{-1}(\phi_1(f))} & \mathcal{O}_n^{\text{cris}} \end{array}$$

Le carré de gauche commute (lemme 3.3.4), ainsi que celui de droite (lemme 3.3.5). On en déduit que tout le diagramme commute et donc que :

$$\beta^\star(\phi_1(f)) = \beta_{\text{syn}}^\star \circ \gamma_2^{-1}(\phi_1(f)) = \gamma_2^{-1}(\phi_1(f)) \circ \beta_{\text{syn}} = \phi_1 \circ \tilde{g} \circ \beta_{\text{syn}} = \phi_1(\beta^\star f)$$

ce qui implique la proposition. □

3.4 Cas général

Le but de ce dernier paragraphe est de prouver le théorème suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_K$-groupe. Alors on a un isomorphisme canonique et fonctoriel :*

$$Mod(\mathcal{G})^\vee \simeq Mod(\mathcal{G}^\vee)$$

dans la catégorie (Mod/S).

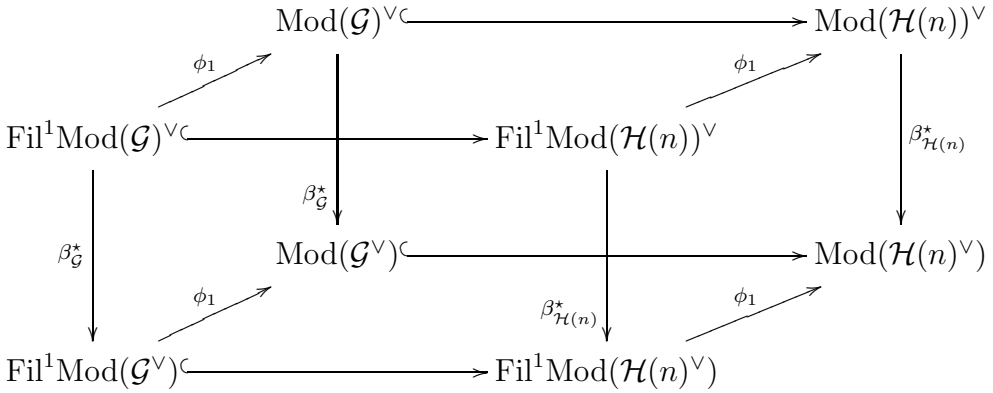
Démonstration. Bien sûr, l'isomorphisme dont il est question est $\beta^\star$ défini en 3.2.

On montre dans un premier temps que le morphisme $\beta^\star$ est compatible à Fil^1 et ϕ_1. D'après ce que l'on a fait précédemment c'est vrai si $\mathcal{G}$ est de la forme $\mathcal{H}(n)$ pour un groupe p-divisible $\mathcal{H}$. Dans le cas général, il existe un épimorphisme $\mathcal{H}(n) \to \mathcal{G}$ pour un certain groupe p-divisible $\mathcal{H}$ et un certain entier n. D'après la proposition 2.2.5 et la proposition 4.2.1.5 de [Bre00], on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee & \xrightarrow{u} & \mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \\ \downarrow{\scriptstyle \beta^\star_{\mathcal{H}(n)}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta^\star_{\mathcal{G}}} \\ \mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n)^\vee) & \xrightarrow{v} & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee) \end{array}$$

et la flèche induite $u : \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee \to \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$ est surjective. Soient $x \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$ et $y \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee$ un antécédent par u de x. On a $\beta^\star_{\mathcal{G}}(x) = v \circ \beta^\star_{\mathcal{H}(n)}(y)$ d'où, puisque v et $\beta^\star_{\mathcal{H}(n)}$ respectent le Fil^1, il vient $\beta^\star_{\mathcal{G}}(x) \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$ et la compatibilité recherchée.

Passons à la compatibilité avec ϕ_1. On considère cette fois-ci un monomorphisme $\mathcal{G} \to \mathcal{H}(n)$, qui donne naissance au cube commutatif suivant :



Les flèches horizontales sont toutes injectives et toutes les faces, sauf *a priori* celle de gauche, commutent. Une chasse au diagramme permet de prouver que la face de gauche est aussi commutative (on utilise l'injectivité de $\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \to \mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee$) et donc de conclure.

Finalement, il ne reste plus qu'à prouver que $\beta^\star : \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \to \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$ est surjectif. Or, par le lemme (facile) 4.2.14 de [Bre00], cela est automatique lorsque $\mathcal{G}$ est tué par p. On conclut par un dévissage aisé laissé au lecteur. □

Par passage à la limite, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 3.4.2. *Soit $\mathcal{G}$ un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$. Alors, si $G^\vee$ désigne le dual de Cartier de $\mathcal{G}$, on a un isomorphisme canonique et fonctoriel :*

$$Mod(\mathcal{G})^\vee \simeq Mod(\mathcal{G}^\vee)$$

dans la catégorie des modules fortement divisibles.

Bibliographie

[BBM82] P. Berthelot, L. Breen et W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture notes in math. **930**, Springer-Verlag (1982)

[Bre98] C. Breuil, *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620

[Bre99] _____, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122

[Bre00] _____, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Annals of Mathematics **152** (2000), 489–549

[Car05] X. Caruso, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, thèse (2005)