



**HAL**  
open science

# Density of paths of iterated Levy transforms of Brownian motion.

Marc Malric

► **To cite this version:**

Marc Malric. Density of paths of iterated Levy transforms of Brownian motion.. 2005. hal-00013282v2

**HAL Id: hal-00013282**

**<https://hal.science/hal-00013282v2>**

Preprint submitted on 12 Nov 2005 (v2), last revised 24 Jun 2009 (v5)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Densité des trajectoires des transformés de Lévy itérés d'un mouvement brownien

(Density of paths of iterated Lévy transforms  
of Brownian motion)

Marc Malric

13 novembre 2005

**Abstract :** The Lévy transform of a Brownian motion  $B$  is the Brownian motion  $B'_t = \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s$ . Call  $T$  the corresponding transformation on the Wiener space  $W$ . We establish that a. s. the orbit of  $w(\in W)$  under  $T$  is dense in  $W$  for the compact uniform convergence topology.

## Introduction

Soient  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien (unidimensionnel, issu de l'origine), et  $(L_t)_{t \geq 0}$  son temps local en 0. Le transformé de Lévy de  $B$  est le mouvement brownien

$$B'_t = \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s = |B_t| - L_t$$

Soit  $T$  la transformation correspondante sur l'espace de Wiener. A la fin du chapitre XII de [RY], Revuz et Yor ont posé la question de l'ergodicité de  $T$ . Notre but est d'établir que l'orbite sous  $T$  de chaque trajectoire est p.s. dense dans  $W$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $\mathbb{R}^+$ . Il s'agit là d'une condition nécessaire mais non suffisante pour l'ergodicité éventuelle de la transformation de Lévy, comme c'était le cas pour la densité dans  $\mathbb{R}^+$  des zéros des itérés par  $T$  du mouvement brownien, établie dans [M].

D'ailleurs, le présent article s'inscrit comme la suite naturelle de [M]. Comme dans [M], la démarche repose sur l'utilisation des "remontées de Lévy" : après être suffisamment descendu dans les itérations ; c'est-à-dire à partir de  $T^n B$ ,

pour  $n$  assez grand pour qu'au moins un des itérés antérieurs s'annule sur un intervalle donné, on choisit en remontant au niveau 0, les signes d'excursion convenables afin que la trajectoire remontée prenne la forme désirée.

Si l'idée à la base est simple, sa mise en oeuvre soulève un certain nombre de difficultés.

C'est pourquoi au paragraphe 1, nous définissons les  $B$ -mouvements browniens remontés que nous appelons pour simplifier la terminologie  $B$ -mouvements remontés. Pour illustrer le fonctionnement et l'intérêt de ces familles de processus, nous les appliquons dans ce paragraphe à un problème d'approximation plus élémentaire, l'approximation à un temps.

Au paragraphe 2, nous définissons les sommes disjointes de  $B$ -mouvements remontés, que nous appliquons cette fois à l'approximation à  $d$  temps. Par rapport à la situation antérieure, une structure d'arbre importante doit être mise en place : le langage de la programmation nous a paru le plus approprié pour réaliser cette tâche.

Enfin, au paragraphe 3, nous mettons en oeuvre les techniques précédemment introduites pour obtenir la densité des trajectoires  $(T^n(w), n \in \mathbb{N})$ .

En fait, mises à part les Propositions 1 et 2 du paragraphe 1, et la définition des sommes disjointes du paragraphe 2, le paragraphe 3 se suffit à lui-même. Mais il nous a paru utile de montrer sur des situations plus simples correspondant à 1 temps et à  $d$  temps, comment fonctionnent les remontées, dans le but, en particulier, de familiariser le lecteur avec notre technique.

Pour terminer, je tiens à remercier vivement M.Yor et M. Emery pour leur patience et les conseils qu'ils m'ont prodigués.

## 1 $B$ -mouvements remontés et approximation à un temps

Soit  $(W, \mathcal{W}, P)$  l'espace de Wiener du mouvement brownien  $B$ . Rappelons que, pour toute application  $w \in W$ , on appelle transformé de Lévy de  $w$ , et on note  $Tw$ , l'application définie par :

$$\forall t \quad (Tw)_t = |w_t| - L_t(w)$$

où :

$$L_t(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{|w_s| < \varepsilon} ds$$

est une définition possible du temps local de  $w$  en 0.

D'après le théorème de Skorokhod,

$$L_t(w) = \sup\{-(Tw)_s, 0 \leq s \leq t\} .$$

Lorsque  $w$  est une trajectoire brownienne,  $L_t(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{|w_s| < \varepsilon} ds$ , et lorsque  $\beta$  est un mouvement brownien,  $T\beta$  est encore un mouvement brownien, de filtration celle de  $|\beta|$ , la valeur absolue de  $\beta$ . Nous énoncerons, pour commencer, le résultat élémentaire qui est à la base des considérations qui vont suivre.

**Proposition 1.**

Soit  $e$  une excursion positive de  $(Tw)$ ,  $w \in W$ ,  $g$  son début et  $d$  sa fin. Alors, il existe une unique excursion  $e'$  de  $w$  dont le support contient celui de  $e$ . Le début  $g'$  de  $e'$  n'est autre que  $\arg \min_{[0, g]} Tw$  (notations de [M], p.502), et sa fin  $d'$  coïncide avec  $\inf_{[0, g]} \{t > g, Tw_t\} = \min\{Tw_s, s \in [0, g]\}$ . La hauteur  $h'$  (en valeur absolue) de l'excursion  $e'$  (c'est-à-dire  $\sup\{|w_s|, s \in [g', d']\}$ ) s'obtient en ajoutant à  $h$ , hauteur de  $e$ , la hauteur de l'excursion de  $Tw$  où  $Tw$  atteint son minimum sur  $[0, g]$ , si  $e > 0$ .

**Preuve de la Proposition 1.**

Elle découle immédiatement des rappels précédents : formules de Tanaka et lemme de Skorokhod. ■

On définit, par récurrence, les itérées de Lévy successives de  $w : T^0w = w$ , et  $\forall n \in \mathbb{N} T^{n+1}w = T(T^n w)$ . Nous poserons :  $\forall n \in \mathbb{N}, T^n B = B^n$ , et écrirons indifféremment :  $T^n w$  ou  $w^n$ ,  $T^n \mathcal{W}$  ou  $\mathcal{W}^n$ .

Puisqu'il y a perte d'information, nous envisageons la transformation de Lévy comme une descente. Ainsi, nous dirons que  $w$  est une remontée de Lévy de  $Tw$ . Bien sûr, deux remontées quelconques de  $Tw$  ont la même valeur absolue, et ne diffèrent que par les signes d'excursions.

On dira aussi que  $w$  est une remontée de Lévy d'ordre  $n$  de  $T^n w$ . La notion que nous allons maintenant introduire va se révéler essentielle par la suite :

**Proposition 2. et définition**

Etant donné un entier  $r > 0$ , et trois suites de variables aléatoires sur  $(W, \mathcal{W}, P)$  :  $(Y_i)_{0 \leq i \leq r-1}$ ,  $(Y_{<i>})_{0 \leq i \leq r-1}$  et  $(Z^i)_{0 \leq i \leq r-1}$  telles que

- $Y_i$  est  $\mathcal{W}_\infty^i$ -mesurable indépendante de  $\mathcal{W}_\infty^{i+1}$ , et  $n_i$ -dimensionnelle pour un certain  $n_i \in \mathbb{N}$
- $Y_{<i>}$  est  $\mathcal{W}_\infty^{i+1}$ -mesurable,  $n_i$ -dimensionnelle et  $P(Y_i = Y_{<i>} | \mathcal{W}_\infty^{i+1}) > 0, P$  p.s.
- $Z^i$  est un complément indépendant de  $\mathcal{W}_\infty^{i+1} \vee \sigma(Y_i)$  dans  $\mathcal{W}_\infty^i$

Notons :  $\forall i$  de 0 à  $r - 1$ ,

$$\begin{aligned} f_i : (W, \mathcal{W}_\infty^i, P) &\rightarrow (W, \mathcal{W}_\infty^{i+1}, P) \times (Y_i(W), \sigma(Y_i), P_{Y_i}) \times (Z^i(W), \sigma(Z^i), P_{Z^i}) \\ w^i &\rightarrow (w^{i+1}, \tilde{Y}_i(w^i), \tilde{Z}^i(w^i)) \end{aligned}$$

où pour  $w \in W$ ,  $Y_i(w) = \tilde{Y}_i(w^i)$ , et  $Z^i(w) = \tilde{Z}^i(w^i)$ .

Alors,  $f_i$  est un isomorphisme d'espaces mesurés modulo 0.

Nous appellerons suites de  $B$ -mouvements remontés d'indice  $r$  les suites de processus ainsi définis par récurrence (descendante) :

- $C^r := B^r$
- $\forall i$  de  $r$  à 1,  $C^{i-1}(w) = f_{i-1}^{-1}(C^i(w), \tilde{Y}_{\langle i-1 \rangle}(C^i(w)), Z^{i-1}(w))$  où comme précédemment,  $\forall w \in W$ ,  $Y_{\langle i-1 \rangle}(w) = \tilde{Y}_{\langle i-1 \rangle}(w^i)$ .

Nous dirons, pour abrégé, que  $(C^i)_{0 \leq i \leq r}$  est une suite de  $B$ -m.r ( $r$ ), et plus précisément que  $C^i$  est un  $B$ -m.r ( $r, i$ ), et  $C^0$  un  $B$ -m.r ( $r$ ). On a :  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $TC^i = C^{i+1}$  (les nouvelles notations sont compatibles avec la convention antérieure).

De plus,  $\forall i \in \{r_0, \dots, 0\} \forall w \in \bigcap_{j=r_0}^i [Y_j = Y_{\langle j \rangle}]$ ,  $C^i(w) = w^i = B^i(w)$ , en posant  $r_0 = r - 1$ , l'ensemble  $\bigcap_{j=r_0}^i [Y_j = Y_{\langle j \rangle}]$  étant  $\mathcal{W}_\infty^i$ -mesurable et non négligeable.

### Preuve de la Proposition 2.

$f_i$  est un isomorphisme d'espaces mesurés modulo 0 d'après la théorie de Rohlin des compléments indépendants (cf. [BEKSY], Proposition 4).

La notation  $TC^i = C^{i+1}$  découle immédiatement des définitions ainsi que le fait que

$$\forall w \in \bigcap_{j=r-1}^i [Y_j = Y_{\langle j \rangle}], \quad C^i(w) = w^i$$

Enfin, comme :

$$P\left(\bigcap_{j=r-1}^i [Y_j = Y_{\langle j \rangle}]\right) = E\left(P(Y_i = Y_{\langle i \rangle} | \mathcal{W}_\infty^{i+1}) \prod_{j=r-1}^{i-1} 1_{[Y_j = Y_{\langle j \rangle}]}\right),$$

on en déduit immédiatement que  $P(\bigcap_{j=r-1}^i [Y_j = Y_{\langle j \rangle}]) > 0$ . ■

La définition des  $B$ -m.r ( $r$ ) posée, nous pouvons énoncer la version à 1 temps de notre résultat final.

### Proposition 3.

Soient  $\varepsilon$  et  $t$  deux réels strictement positifs,  $\varphi$  un élément de  $W$ . Il existe un entier  $r$ , un  $B$ -m.r ( $r$ )  $(C^i)_{0 \leq i \leq r}$  tels que, en posant  $X := C_t^0$

$$P(|X - \varphi(t)| > \varepsilon) < \varepsilon$$

### Remarque.

La démonstration de cette proposition va nécessiter 5 lemmes, dans les énoncés desquels sont introduites un certain nombre de quantités fondamentales. Pour faciliter la lecture, une synthèse du rôle de ces quantités est proposée en fin du paragraphe 1.

### Preuve de la Proposition 3.

Dans un premier temps, plaçons-nous sur l'espace de Wiener  $(\check{W}, \check{\mathcal{W}}, \check{P})$  du mouvement brownien  $\check{B}$ .

### Lemme 1.

(1) Les variables aléatoires suivantes, qui sont des fonctionnelles de la dernière excursion de  $\check{B}$  avant  $t$ , sont  $T\check{\mathcal{W}}_t$ -mesurables :

- $t_0(\check{w}) = g_t(\check{w})$ ,  $m_0(\check{w}) = \sup\{|\check{w}_s|, s \in [t_0(\check{w}), t]\}$  ;
- $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $m_{k+1}(\check{w}) = \sup\{m_k(\check{w}) - |\check{w}_s|, s \in [t_k(\check{w}), t]\}$  ;
- $t_{k+1}(\check{w})$  est le dernier instant avant  $t$  en lequel le sup précédent est atteint.

La suite  $(m_k(\check{w}))_{k \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante de limite nulle, tandis que la suite  $(t_k(\check{w}))_{k \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante de limite  $t$  p.s.

(2) Soit  $K(\check{w}) = \inf\{k \in \mathbb{N} \mid 0 < m_k(\check{w}) < \varepsilon' \wedge |\varphi(t)|\}$  où  $\varepsilon'$  est une autre variable aléatoire  $> 0$ ,  $T\check{\mathcal{W}}_t$ -mesurable.  $K$  est une variable aléatoire  $T\check{\mathcal{W}}_t$ -mesurable finie p.s.

(3) Soit  $\mathcal{P}_n(\check{w})$  la propriété : "il existe une suite d'excursions  $(e_i^0)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\check{w}$ , de débuts  $(G_i^0)_{1 \leq i \leq n}$  formant une suite strictement décroissante majorée par  $t_0(\check{w})$ , de hauteurs  $(h_i^0)_{1 \leq i \leq n}$  telles que :

$$(1) \quad |\check{w}_t - \check{w}_{t_{K(\check{w})}}| + \sum_{i=1}^n h_i^0 < |\varphi(t)| < |\check{w}_t - \check{w}_{t_{K(\check{w})}}| + \sum_{i=1}^n h_i^0 + \frac{\varepsilon}{2} \quad "$$

Soit  $N(\check{w})$  le plus petit des entiers  $n$  tels que  $\mathcal{P}_n(\check{w})$  ait lieu.

$N$  est une variable aléatoire  $T\check{\mathcal{W}}_t$ -mesurable finie p.s. De plus, quelle que soit  $N'$  variable aléatoire  $T\check{\mathcal{W}}_t$ -mesurable à valeurs entières finies il existe une suite d'excursions  $(e_i^0)_{1 \leq i \leq N'}$  de  $\check{w}$  telle que :

- (1) ait lieu là où  $N'$  majore  $N$
- les débuts  $(G_i^0)_{1 \leq i \leq N'}$  et hauteurs  $(h_i^0)_{1 \leq i \leq N'}$  sont des suites de variables aléatoires  $T\check{\mathcal{W}}_t$ -mesurables.

**Preuve du lemme 1.**

- 1) Par construction, les suites  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont respectivement décroissante positive et croissante majorée par  $t$ , donc convergentes. Notons  $\mu$  la limite de  $(m_k)$ , et  $\tau$  celle de  $(t_k)$ .  
Supposons  $\mu > 0$ . Alors, l'oscillation de  $\check{w}$  serait infinie au voisinage de  $\tau$ , contredisant la continuité de  $\check{w}$ . Donc  $\mu = 0$ .  
Supposons  $\tau < t$ . Alors,  $\check{w}$  serait constante sur  $[\tau, t]$ , ce qui est encore impossible (p.s. cette fois). Donc  $\tau = t$  p.s.
- 2) La mesurabilité de  $K$  est immédiate et sa finitude découle de (1).
- 3) Rangeons les excursions de  $\check{w}$  antérieures à  $t_0$  par hauteurs décroissantes. On obtient la suite  $(\check{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , de hauteurs  $(\check{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Comme la variation des trajectoires browniennes est infinie sur tout intervalle, on a p.s. :

$$(2) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \check{h}_n = \infty, \quad \text{et}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \check{h}_n = 0.$$

Soit  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$  l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ , et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$  l'ensemble des parties de  $\mathbb{N}$  de cardinal  $n$ .

Pour tout  $H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ , posons :

$$Z_H(\check{w}) := \left| \check{w}_t - \check{w}_{t_{K(\check{w})}} \right| + \sum_{n \in H} \check{h}_n$$

Introduisons l'évènement  $C_H := [Z_H(\check{w}) < |\varphi(t)| < Z_H(\check{w}) + \frac{\varepsilon}{2}]$ .

On a  $C_H \in T\check{\mathcal{W}}_t$  et  $\bigcup_{H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})} C_H = \check{W}$ , d'après (2) et (3).

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n := \bigcup_{H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})} C_H$ .

Soit  $N(\check{w}) = \inf\{n \in \mathbb{N} / \check{w} \in C_n\}$ . Alors  $N$  est manifestement une variable aléatoire  $T\check{\mathcal{W}}_t$ -mesurable et finie p.s.

Munissons l'ensemble dénombrable  $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$  de l'ordre lexicographique, après avoir identifié les éléments de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$  avec les suites strictement croissantes de  $n$  entiers naturels. Soit alors, lorsque  $\check{w} \in C_n$ ,  $H_n^0$  le plus petit élément  $H$  de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$  tel que  $\check{w} \in C_H$ . Notons  $(e_i^{0n})_{1 \leq i \leq n}$  la suite rangée dans l'ordre chronologique décroissant des éléments de  $(\check{e}_i)_{i \in H_n^0}$ .

Soit enfin  $N'$  une variable aléatoire  $T\check{\mathcal{W}}_t$ -mesurable à valeurs entières. Posons :  $e_i^{0N'} := \sum_{n=i}^{\infty} 1_{[N'=n]} e_i^{0n}$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Nous omettrons, par commodité de notation, s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'indice supérieur  $N'$ . Par construction, la suite  $(e_i^0)_{i \in \mathbb{N}}$  vérifie toutes les conditions de l'énoncé. ■

Comme la famille  $([K = k] \cap [N = n])_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$  constitue une partition de  $\check{W}$  mesurable et dénombrable,

$$\exists (k_0, n_0) \in \mathbb{R}^2 / \check{P}([K \leq k_0] \cap [N \leq n_0]) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit  $r_0 := k_0 + n_0$ . Remarquons que  $k_0, n_0$ , et  $r_0$  ne dépendent que de la loi du mouvement brownien.

Nous allons maintenant appliquer les constructions du Lemme 1 au mouvement brownien  $B^{r_0}$  au lieu de  $\check{B}$ , et noterons  $e_i^{r_0}, G_i^{r_0}$ , et  $h_i^{r_0}$  les objets intervenant dans ce lemme. Notre objectif est de procéder, à partir de la trajectoire  $w^{r_0+1}$ , à  $r_0 + 1$  "remontées de Lévy", c'est-à-dire définir un B.m.r( $r_0 + 1$ )  $(C^i)_{0 \leq i \leq r_0+1}$ , de telle manière que  $C_t^0$  approche suffisamment  $\varphi(t)$  et avec une grosse probabilité. C'est l'objet des lemmes suivants. Soit  $r_1 := r_0 + 1$ .

### Lemme 2.

*Etant donnée une suite  $(e_i^{*k})_{1 \leq i \leq p_k}$  d'excursions de  $B^k$ , de débuts  $(G_i^{*k})_{1 \leq i \leq p_k}$  formant une suite de variables aléatoires  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$ -mesurables strictement décroissante, de cardinal  $p_k$ , variable aléatoire elle-même  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$ -mesurable, il existe deux suites d'excursions de  $B^k$  :  $(e_i^{*k'})_{1 \leq i \leq p_k}$  et  $(e_i^{*k''})_{1 \leq i \leq p_k}$*

- de débuts  $(G_i^{*k'})_{1 \leq i \leq p_k}$  et  $(G_i^{*k''})_{1 \leq i \leq p_k}$ ,
- et de hauteurs  $(h_i^{*k'})_{1 \leq i \leq p_k}$  et  $(h_i^{*k''})_{1 \leq i \leq p_k}$

*variables aléatoires  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$ -mesurables vérifiant :*

$$(4) \quad \begin{cases} G_{p_k}^{*k'} < G_{p_k}^{*k} < G_{p_k}^{*k''} < G_{p_k-1}^{*k'} < \dots < G_1^{*k''} < g_t(w^k) \\ h_{p_k}^{*k'} < h_{p_k}^{*k''} < h_{p_k-1}^{*k'} < \dots < h_1^{*k''} < \varepsilon^* \end{cases}$$

*pour toute variable aléatoire  $\varepsilon^* > 0$ ,  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$ -mesurable, fixée au préalable. On appelle  $e_i^{*k'}$  et  $e_i^{*k''}$  les excursions-tampons encadrant  $e_i^{*k}$ ,  $e_i^{*k'}$  étant le tampon de gauche, et  $e_i^{*k''}$  celui de droite.*

### Preuve du lemme 2.



Posons  $G_0^{*k'} := g_t(w^k)$ , et  $h_0^{*k'} := \varepsilon^*$ ,  $G_{p_k+1}^{*k} := 0$ . On utilise à nouveau la variation infinie des trajectoires browniennes sur tout intervalle. Il suffit de choisir :

- pour  $(e_i^{*k''})_{1 \leq i \leq p_k}$ , l'excursion de  $w^k$  la plus haute parmi ses excursions dont le support est inclus dans  $]G_i^{*k}, G_{i-1}^{*k'}[$  et la hauteur inférieure à  $h_{i-1}^{*k'}$ .
- pour  $(e_i^{*k'})_{1 \leq i \leq p_k}$ , l'excursion de  $w^k$  la plus haute parmi ses excursions dont le support est inclus dans  $]G_{i+1}^{*k}, G_i^{*k}[$  et la hauteur inférieure à  $h_i^{*k''}$ .

Pour ces choix des excursions-tampons, les mesurabilités sont évidentes ainsi que (4). ■

Soit  $(e_z^k)_{z \in Z_k}$  la famille des excursions de  $w^k$  antérieures à  $t$ , de hauteurs supérieures à  $h_{p_k}^{k'}$ , et différentes de l'excursion qui enjambe  $t$ , des excursions  $(e_i^{*k})_{1 \leq i \leq p_k}$  et de leurs tampons. On range cette famille dans l'ordre chronologique décroissant. Les débuts de ces excursions sont des variables aléatoires  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$ -mesurables.

Soit  $(e_i^{+k})_{0 \leq i \leq q_k}$  la famille des excursions de  $B^k$  ainsi obtenue à partir de  $(e_i^{*k})_{1 \leq i \leq p_k}$  (cf lemme 2)

- $e_0^{+k}$  est l'excursion de  $w^k$  qui enjambe  $t$
- pour tout  $i$  de 1 à  $p_k$ ,  $e_i^{+k} := e_i^{*k}$
- $(e_i^{+k})_{p_k+1 \leq i \leq 3p_k}$  est la suite, rangée dans l'ordre chronologique décroissant, des excursions-tampons
- $(e_i^{+k})_{3p_k+1 \leq i \leq q_k}$  coïncide avec  $(e_z^k)_{z \in Z_k}$

$q_k$  est une variable aléatoire finie, elle aussi  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$ -mesurable.

On en déduit l'existence d'une suite d'entiers déterministes  $(q_k^0)_{0 \leq k \leq r_0}$  telle que :

$$P(A_\varepsilon^k) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} - (r_1 - k) \frac{\varepsilon}{2r_1},$$

où

$$A_\varepsilon^k = [K \leq k_0] \cap [N \leq n_0] \cap \left( \bigcap_{s=k}^{r_0} [q_s \leq q_s^0] \right).$$

Sur  $A_\varepsilon^k$ , on complète la famille  $(e_i^{+k})_{q \leq i \leq q_k}$  en  $(e_i^{+k})_{0 \leq i \leq q_k^0}$  par adjonction d'excursions de  $w^k$  de supports 2 à 2 disjoints contenus dans  $[d_{t'}, d_{t'} + 1]$  où  $t'$  est un réel fixé supérieur à  $t$ , choisies  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$ -mesurablement.

Sur  ${}^c A_\varepsilon^k$ , ou bien on se contente de supprimer les excursions d'indices supérieurs à  $q_k^0$  (si tel est le cas), ou bien, comme précédemment, on ajoute des excursions de supports disjoints contenus dans  $[d_{t'}, d_{t'} + 1]$ .

Introduisons alors la suite de variables aléatoires  $(Y_k)_{0 \leq k \leq r_0}$  telle que :

$$\forall w \in W, \quad Y_k(w) = (\text{sgn } e_i^{+k})_{0 \leq i \leq q_k^0} \in \{-1, 1\}^{q_k^0+1}$$

Nous allons maintenant mettre en oeuvre les deux outils essentiels dans cette question : le principe de retournement des excursions (cf [M], p. 502), et la théorie de Röhlin des compléments indépendants (cf [R], développée dans [E.S], Proposition 4 et ses corollaires 3 et 4).

**Lemme 3.**

- 1)  $Y_k$  est  $\mathcal{W}_\infty^k$ -mesurable, indépendante de  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$  et uniformément distribuée sur  $\{-1, 1\}^{q_k^0+1}$ .
- 2)  $\mathcal{W}_\infty^k$  est conditionnellement non atomique sachant  $\mathcal{W}_\infty^{k+1} \vee \sigma(Y_k)$  d'où l'existence de  $Z^k$  pour tout  $k \in \{0, \dots, r_0\}$ .

**Preuve du lemme 3.**

- 1) On constate d'abord que  $Y_k(W) = \{-1, 1\}^{q_k^0+1}$ . Par ailleurs, d'après le principe de retournement des excursions,  $Y_k$  est indépendante de  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$  et uniformément distribuée.
- 2)  $\mathcal{W}_\infty^k$  est conditionnellement non atomique sachant  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$ . Donc d'après le corollaire 3 b) de [E.S] p. 274,  $\mathcal{W}_\infty^k$  est conditionnellement non atomique sachant  $\mathcal{W}_\infty^{k+1} \vee \sigma(Y_k)$ , puisque la tribu  $\sigma(Y_k)$  est indépendante de  $\mathcal{W}_\infty^{k+1}$  et finie.  
En conséquence, la tribu  $\mathcal{W}_\infty^{k+1} \vee \sigma(Y_k)$  possède un complément indépendant  $Z^k$  dans  $\mathcal{W}_\infty^k$ .

■

Toutes les constructions que nous venons de mettre en place reposent sur la définition des  $(e_i^{*k})_{1 \leq i \leq p_k}$ , que nous allons obtenir par récurrence descendante. L'initialisation est fournie par le lemme 1 : nous choisissons pour  $(e_i^{*r_0})_{1 \leq i \leq p_{r_0}}$  la famille  $(e_i^{r_0})_{1 \leq i \leq n_0}$ .

Quant à l'hérédité, elle résulte du :

**Lemme 4.**

*Etant données deux suites  $(e_i^{*s})_{1 \leq i \leq p_s}$  et  $(e_i^{+s})_{1 \leq i \leq q_s^0}$  vérifiant les hypothèses du lemme 2 sur l'événement  $E_s$  : "toutes les excursions-tampons sont  $< 0$  ainsi que les excursions  $(e_i^{*s})_{1 \leq i \leq \pi_s}$ , toutes les autres excursions de  $(e_i^{+s})_{1 \leq i \leq q_s}$  sont  $> 0$ " où  $\pi_s$  est une variable aléatoire  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable, à valeurs entières majorées par  $p_s$  p.s.; les excursions  $(e_i^{*s})_{\pi_s+1 \leq i \leq p_s}$  sont "conservées" dans toute remontée au rang  $s - 1$ ; c'est-à-dire qu'il existe une unique famille d'excursions de  $w^{s-1}$ , que nous noterons  $(e_i^{*s-1})_{1 \leq i \leq p_{s-1}}$  avec  $p_{s-1} = p_s - \pi_s$ , vérifiant :*

- $\text{supp } e_i^{*s-1} \supset \text{supp } e_{\pi_s+i}^{*s}$

- les  $\text{supp } e_i^{*s-1}$ ,  $1 \leq i \leq p_{s-1}$  sont 2 à 2 disjoints.

**Preuve du lemme 4.**

Conformément à la proposition 1, sur  $E_s$ , puisque chaque excursion  $e_i^{*s}$ ,  $\pi_s + 1 \leq i \leq p_s$ , est positive et encadrée par ses deux excursions-tampons qui, elles, sont  $< 0$ , puisque par construction le dernier minimum de  $w^s$  avant le début de  $e_i^{*s}$  est atteint sur le support de son tampon de gauche, le minimum suivant étant atteint sur le support de son tampon de droite,  $e_{i-\pi_s}^{*s-1}$  est l'excursion de  $w^{s-1}$  qui commence à l'instant où pour la dernière fois le tampon de gauche de  $e_i^{*s}$  atteint son minimum et se termine à l'instant où pour la première fois le tampon de droite atteint le minimum du tampon de gauche. ■

Pour que l'hérédité ait effectivement lieu, sur  ${}^c E_s$ , nous choisissons les  $(e_i^{*s-1})_{1 \leq i \leq p_{s-1}}$  arbitrairement parmi les excursions de  $w^{s-1}$  mais  $\mathcal{W}_\infty^{s-1}$ -mesurablement et à supports disjoints.

Nous sommes maintenant en mesure de définir les  $(Y_{\langle i \rangle})_{0 \leq i \leq r_0}$ .

Pour tout  $k \in \{1, \dots, k_0\}$ , soit  $\pi_{r_1-k} := 0$ , d'où  $p_{r_1-k} = n_0$ , posons :

$$Y_{\langle r_1-k \rangle}(j) := \begin{cases} 1 & \text{pour } j \in \{1, \dots, n_0\} \cup \{3n_0 + 1, \dots, q_{r_1-k}^0\} \\ -1 & \text{pour } j \in \{0\} \cup \{n_0 + 1, \dots, 3n_0\} \end{cases}$$

Pour tout  $k \in \{k_0 + 1, \dots, r_0\}$ , soit  $\pi_{r_1-k} := 1$ , d'où  $p_{r_1-k} = n_0 - (k - 1 - k_0)$ , posons :

$$Y_{\langle r_1-k \rangle}(j) := \begin{cases} 1 & \text{pour } j \in \{0\} \cup \{2, \dots, p_{r_1-k}\} \cup \{3p_{r_1-k} + 1, \dots, q_{r_1-k}^0\} \\ -1 & \text{pour } j \in \{1\} \cup \{p_{r_1-k} + 1, \dots, 3p_{r_1-k}\} \end{cases}$$

Enfin, pour  $k = r_1$ ,  $p_0 = 1$ ,  $Y_0$  est le signe de l'excursion qui enjambe  $t$ , et  $Y_{\langle 0 \rangle} := \text{sgn } \varphi(t)$ .

Ainsi, sont en place les 3 suites de variables aléatoires  $(Y_i)_{0 \leq i \leq r_0}$ ,  $(Y_{\langle i \rangle})_{0 \leq i \leq r_0}$ , et  $(Z^i)_{0 \leq i \leq r_0}$  (d'ailleurs ici, les  $Y_{\langle i \rangle}$  sont des applications déterministes). On peut en déduire, grâce à la proposition 1, la suite de B.m.r( $r_1$ )  $(C^i)_{0 \leq i \leq r_1}$ .

Nous allons maintenant établir que  $C_t^0$  est proche de  $\varphi(t)$  avec une grosse probabilité.

**Lemme 5.**

$$P \text{ p.s., sur } A_\varepsilon^0, |C_t^0 - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \frac{\varepsilon^*}{2} (2k_0 + n_0 - 1)$$

**Preuve du lemme 5.**

Remarquons d'abord que :  $\forall s \in \{0, \dots, r_0\}$ ,  $E_s \supset [Y_s = Y_{\langle s \rangle}]$ .

Aussi, d'après la proposition 1 et le lemme 4 :

$$C_{\bullet}^0(w) \in \bigcap_{s=0}^{r_0} [Y_s = Y_{\langle s \rangle}] \subset \bigcap_{s=0}^{r_0} E_s$$

Ainsi, lors des  $k_0$  premières remontées, chaque excursion  $e_i^{*s}$ ,  $1 \leq i \leq r_0$ , verra d'après la proposition 1 sa hauteur s'ajouter à celle de son tampon de gauche pour donner la hauteur de  $e_i^{*s-1}$ , pour tout  $s$  de  $r_0$  à  $r_0 - k_0 + 1$ , et  $i$  de 1 à  $r_0$ . On en déduit :

$$h_i^{r_0} < h_i^{n_0} < h_i^{r_0} + k_0 \varepsilon^* .$$

Puis, pour les  $r_0$  remontées suivantes, à condition de choisir  $\varepsilon^*$  inférieure à  $m_k(w^{r_0})$ , on constate, lorsque l'excursion de  $w^{n_0-i}$  qui enjambe  $t$  reçoit  $e_1^{*n_0-i+1}$ , que celle-ci a déjà reçu  $k_0 + i - 2$  tampons, donc

$$h_i^{r_0} < h_1^{n_0-i+1} < h_i^{r_0} + (k_0 + i - 1) \varepsilon^*$$

On en déduit :

$$\sum_{i=1}^{n_0} h_i^{r_0} < \sum_{i=1}^{n_0} h_1^{n_0-i+1} < \sum_{i=1}^{n_0} h_i^{r_0} + (n_0 k_0 + \frac{n_0(n_0-1)}{2}) \varepsilon^*$$

Puis :

$$w_t^{r_0} + \sum_{i=1}^{n_0} h_i^{r_0} < w_t^{r_0} + \sum_{i=1}^{n_0} h_1^{n_0-i+1} < w_t^{r_0} + \sum_{i=1}^{n_0} h_i^{r_0} + \left( n_0 k_0 + \frac{n_0(n_0-1)}{2} \right) \varepsilon^*$$

Or

$$w_t^{r_0} + \sum_{i=1}^{n_0} h_1^{n_0-i+1} = |C_t^0(w)| ,$$

tandis que :

$$-\frac{\varepsilon}{2} < |w_t^{r_0} + \sum_{i=1}^{n_0} h_i^{r_0}| - |\varphi(t)| \leq 0$$

Finalement, comme  $\text{sgn } C_t^0(w) = \text{sgn } \varphi(t)$ ,

$$|C_t^0(w) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \frac{\varepsilon^*}{2} (2k_0 + n_0 - 1)$$

Prenons  $\varepsilon^* := \text{Min} \left( \frac{\varepsilon}{n_0(2k_0 + n_0 - 1)}, m_{k_0}(w^{r_0}) \right)$ .

D'après ce qui précède on a :

$$\forall w \in A_{\varepsilon}^0, |C_t^0(w) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

Et le B-m.r( $r_1$ )  $C_t^0$  répond aux exigences de l'énoncé.

■

**Remarque de synthèse.**

Les excursions  $(e_i^{*r_0})$  définies au lemme 1 sont les excursions constructives : ajoutées une par une à une trajectoire ramenée pas à pas à proximité de 0 à l'instant  $t$ , elles permettront à la trajectoire remontée au niveau 0 de s'approcher de  $\varphi(t)$  à cet instant. Seulement, au cours des diverses remontées, comme au plus une excursion constructive est mise en action, toutes les autres doivent être protégées : d'une part par des excursions-tampons qui encadrent chacune d'entre elles, et ensuite en contrôlant toutes les excursions antérieures à  $t$ , et de hauteurs supérieures à la hauteur du plus petit tampon. C'est ainsi qu'à l'issue du lemme 2 on constitue la famille  $(e_j^{+r_0})$  qui rassemble les excursions constructives et les excursions de protection. Puis, conformément au lemme 3, on doit se ramener à une famille d'excursions de cardinal déterministe : on y parvient au prix d'une légère perte de probabilité en adjoignant à la famille précédente des excursions de support postérieur à  $t$  en nombre convenable. Nous définissons alors la variable aléatoire  $Y_{r_0}$  comme la suite des signes de  $(e_j^{+r_0})$ . Quant à  $Y_{\langle r_0 \rangle}$ , il s'agit de la suite des signes "convenables" : les excursions constructives protégées sont positives comme les excursions de protection de hauteurs plus grandes que le plus petit tampon, tandis que les excursions-tampons sont négatives.

Enfin, le lemme 4 assure l'hérédité du procédé des remontées.

Ainsi sont en place les trois suites de variables aléatoires  $(Y_i)$ ,  $(Y_{\langle i \rangle})$  et  $(Z^i)$ , donc d'après la proposition 2 les B-m.r  $(r_1)$ . Grâce au lemme 5, on vérifie que  $C^0$  remplit les conditions de l'énoncé.

## 2 Sommes disjointes de B-m.r. et approximations à $d$ -temps

Passons à la généralisation du résultat de 1 à  $d$  temps. Pour cela, nous aurons besoin de la

**Définition 1.**

*On appelle somme disjointe de B-m.r  $(r)$  toute famille  $(\Gamma_i)_{0 \leq i \leq r}$  de processus telle qu'il existe :*

- une partition finie ou dénombrable  $\mathcal{W}_\infty$ -mesurable  $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de  $W$
- pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ , un B-m.r  $(r)$   $(C_\lambda^i)_{0 \leq i \leq r}$  vérifiant :

$$\forall i \in [0, \dots, r], \quad \Gamma^i = \sum_{\lambda \in \Lambda} 1_{H_\lambda} C_\lambda^i$$

*Nous noterons  $Y_i^\lambda$ ,  $Y_{\langle i \rangle}^\lambda$  et  $Z_\lambda^i$  les variables aléatoires associées à  $C_\lambda^i$ .*

**Proposition 4.**

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $0 < t_1 < \dots < t_d$  et  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Alors, il existe un entier  $r$  et une somme disjointe  $(\Gamma_i)_{0 \leq i \leq r}$  de B-m.r ( $r$ ) tels que :

$$P(\|X - \varphi(t_1, \dots, t_d)\| > \varepsilon) < \varepsilon, \quad \text{où } X = \Gamma^o_{(t_1, \dots, t_d)}$$

**Remarque 1.**

De façon analogue à ce que nous avons fait pour la Proposition 2, nous présentons en fin du Paragraphe II une remarque de synthèse, où le lecteur trouvera une discussion des nouveautés techniques de ce paragraphe II.

**Preuve de la Proposition 4.**

On procède par récurrence sur  $d$ . Au rang 1, le résultat découle de la Proposition 2 : dans ce cas, la somme disjointe est réduite à un seul B-m.r ( $r$ ). Supposons le résultat acquis au rang  $d$ . Soit  $(t_1, \dots, t_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ ,  $0 < t_1 < \dots < t_{d+1}$ . Appliquons l'hypothèse de récurrence au mouvement brownien  $B^{s_0}$ , pour un certain entier  $s_0$  qu'on déterminera ultérieurement. On en déduit l'existence de  $\tilde{\Gamma}$  somme disjointe de  $B^s$ -m.r ( $r_d$ ) tel que en posant

$$\tilde{X} := \tilde{\Gamma}(t_1, \dots, t_d) \quad P(\|\tilde{X} - \varphi(t_1, \dots, t_d)\| > \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Nous noterons  $\tilde{w}^i = \tilde{\Gamma}^i(w^{s_0})$ .

Par ailleurs, d'après le théorème de densité des zéros (cf. [M]), il existe p.s. un entier  $\ell$  tel que  $\tilde{w}^\ell$  s'annule au moins une fois sur  $]t_d, t_{d+1}[$ .

En effet, pour  $\ell$  assez grand,  $\tilde{w}^\ell = w^{s_0 + \ell}$ .

Soit  $L(w)$  le plus petit de ces entiers  $\ell$ .  $L$  est une v.a. finie p.s.. Donc, il existe un entier  $\ell_0$ , que nous choisirons supérieur ou égal à  $r_d$  vérifiant :

$$P\left(\left[\|\tilde{X} - \varphi(t_1, \dots, t_d)\| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \cap [L \leq \ell_0]\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}$$

■

On a d'autre part le lemme suivant :

**Lemme 6.**

Le plan dans lequel nous représentons les trajectoires est rapporté au repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\tau_b^{a+}$  la translation verticale de vecteur  $(b-a)\vec{j}$ .

Soit  $\tau_b^{a-}$  la réflexion d'axe horizontal la droite d'équation :  $y = \frac{a+b}{2}$ . Considérons  $(t, k, p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}^2$  tel que :  $w_t^k = a$  et  $w_t^{k+p} = b$ , et notons  $\gamma_t$

le premier instant postérieur à  $t$  en lequel l'une au moins des itérées  $w^i$ ,  $2 \leq i \leq k+p-1$  s'annule. On a alors :

$$w_{|[t,\gamma_t]}^{k+p} = \begin{cases} \tau_b^{a+} \circ w_{|[t,\gamma_t]}^k & \text{si } \prod_{i=k}^{k+p-1} w_t^i > 0 \\ \tau_b^{a-} \circ w_{|[t,\gamma_t]}^{-k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous noterons  $\tau_{k+p}^k(w)$  la transformation plane qui transforme  $w_{|[t_j,\gamma_{t_j}]}^k$  en  $w_{|[t_d,\gamma_{t_d}]}^{k+p}$ .

### Preuve du lemme 6.

C'est une conséquence immédiate des formules de Tanaka lorsque  $p = 1$ . Dans le cas général, on décompose le déplacement  $\tau$  qui transforme  $w_{|[t,\gamma_t]}^k$  en  $w_{|[t,\gamma_t]}^{k+p}$  sous la forme  $\tau = \tau_p \circ \tau_{p-1} \circ \dots \circ \tau_1$  où  $\tau_i$  transforme  $w_{|[t,\gamma_t]}^{k+i-1}$  en  $w_{|[t,\gamma_t]}^{k+i}$ . D'après la remarque précédente, chaque  $\tau_i$  est une translation verticale ou une réflexion d'axe horizontal selon le signe de  $w_t^{k+i-1}$ . Le résultat annoncé s'en déduit. ■

Notre but est de "remonter" la trajectoire  $\tilde{w}^{\ell_0}$ , qui n'est autre que  $w^{s_0+\ell_0}$  puisque  $\ell_0 \geq r_d$ , du niveau  $s_0 + \ell_0$  au niveau 0 de telle manière que la trajectoire remontée s'approche de  $\varphi(t_{d+1})$  à l'instant  $t_{d+1}$  tout en conservant la proximité avec  $\varphi(t_1, \dots, t_d)$  acquise au niveau  $r$  et ce en respectant les conditions habituelles de mesurabilité. Pour que cela puisse être réalisé sans dommage, nous allons mettre en oeuvre une structure permettant de protéger l'acquis des  $d$  premiers instants.

Pour tout  $i$  de 1 à  $d$ ,  $k$  de 0 à  $\ell_0$ ,  $j$  de 0 à  $2^k - 1$ , posons :

$$\begin{aligned} t_{0i}^{s_0} &= \tilde{t}_{0i}^0 := t_i \\ t_{2^j i}^{s_0+k+1} &:= t_{ji}^{s_0+k} \quad , \quad t_{2^{j+1}i}^{s_0+k+1} := g_{t_{ji}^{s_0+k}}(w^{s_0+k+1}) \\ \tilde{t}_{2^j i}^{k+1} &:= \tilde{t}_{ji}^k \quad , \quad \tilde{t}_{2^{j+1}i}^{k+1} := g_{\tilde{t}_{ji}^k}(\tilde{w}^{k+1}) \\ \tilde{e}_{ji}^k &:= e_{\tilde{t}_{ji}^k}(\tilde{w}^k) \text{ excursion de } \tilde{w}^k \text{ qui enjambe l'instant } \tilde{t}_{ji}^k \end{aligned}$$

puis pour les niveaux antérieurs pour tout  $\ell$  de 0 à  $s-1$

$$\begin{aligned} t_{0i}^\ell &:= t_i \\ e_{0i}^\ell &:= e_{t_i}(w^\ell) \end{aligned}$$

Cette fois, les remontées seront moins faciles que lors de la Proposition 2 ; il ne suffira pas de descendre dans les itérations, et prévoir au niveau inférieur

les excursions dont la somme des hauteurs s'approche de  $\varphi(t_{d+1})$ , car dans une telle transformation, on serait contraint pour remonter de "redresser" toutes les grandes excursions, et en conséquence de perturber gravement l'acquis des  $d$  premiers instants. En fait, on doit au niveau inférieur prévoir la valeur que devrait avoir l'itérée à l'instant  $t_{d+1}$  afin que, remontant de la même façon, on retrouve au niveau  $s$  les mêmes valeurs aux instants  $t_1, \dots, t_d$  et une valeur proche de  $\varphi(t_{d+1})$  à l'instant  $t_{d+1}$ . On choisit en conséquence au niveau inférieur une famille d'excursions, "constructives", qu'on mettra en oeuvre comme à l'accoutumée successivement par un nombre convenable de remontées "horizontales" pendant lesquelles nous considérerons que le niveau essentiel reste inchangé ; La notion précise de niveau essentiel apparaîtra plus tard dans l'exposé. Contentons nous pour l'instant d'une v.a. à valeurs entières nommée esslevel  $k$ . Notons enfin que la valeur prévue au niveau inférieur repose sur l'hypothèse qu'aucune des remontées depuis le niveau inférieur considéré jusqu'à ce que  $\text{esslevel} = s_0$  ne s'annule pas sur  $]t_d, t_{d+1}[$ . Dans le cas contraire tout le procédé devra être recommencé. Nous allons maintenant définir la partition à partir de laquelle nous construirons  $\Gamma$ , la somme disjointe de B-m.r ( $r_{d+1}$ ).

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \{-1; 1\}^F, \\ &\quad \text{où } F = \{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 / 1 \leq i \leq d, 0 \leq k \leq \ell_0, 0 \leq j \leq 2^k - 1\} \\ \Delta &:= \{[\alpha n, \alpha(n+1)[, n \in \mathbb{Z}\}^{\ell_0+1}, \text{ où } \alpha > 0 \text{ sera fixé ultérieurement} \\ H_{\lambda, \delta} &:= \{w \in W / (\text{sgn } \tilde{e}_{ji}^k)_{(i,k,j) \in F} = \lambda, \tilde{w}_{t_d}^k \in \delta(k), \forall k \in \{0, \dots, \ell_0\}\} \end{aligned}$$

Notons  $a\delta(k)$  le début de l'intervalle  $\delta(k)$  et :

$$\varepsilon(\lambda, k) := \prod_{i=0}^{k-1} \lambda(d, i, 0)$$

**Lemme 7.**

Sur  $H_{\lambda, \delta}$ , les déplacements  $\tau_k^0(\tilde{w})$  et  $\tau_{a\delta(k)}^{a\delta(0)\varepsilon(\lambda, k)}$  diffèrent d'au plus  $2\alpha$ .

**Preuve du lemme 7.**

D'après le lemme 6, sur  $H_{\lambda, \delta}$ , ces déplacements sont de même nature, translation verticale ou réflexion d'axe horizontal. Dans le cas d'une translation :  $\varepsilon(\lambda, k) = +1$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, |\tau_k^0(\tilde{w})(y) - \tau_{a\delta(k)}^{a\delta(0)\varepsilon(\lambda, k)}(y)| &= |\tilde{w}_{t_d}^k - \tilde{w}_{t_d} - (a\delta(k) - a\delta(0))| \\ &= |\tilde{w}_{t_d}^k - a\delta(k) - (\tilde{w}_{t_d} - a\delta(0))| \\ &\leq \alpha \end{aligned}$$



Dans le cas d'une réflexion :  $\varepsilon(\lambda, k) = -1$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, |\tau_k^0(\tilde{w})(y) - \tau_{a\delta(k)}^{a\delta(0)-}(y)| &= |(\tilde{w}_{t_d}^k + \tilde{w}_{t_d} - y) - (a\delta(k) + a\delta(0) - y)| \\ &= |(\tilde{w}_{t_d}^k - a\delta(k)) + (\tilde{w}_{t_d} - a\delta(0))| \\ &\leq 2\alpha \end{aligned}$$

■

Ce lemme nous permettra de remplacer la valeur à prévoir  $\tau_k^0(\tilde{w})(\varphi(t_{d+1}))$  - qui n'a pas la bonne mesurabilité - par  $\tau_{a\delta(k)}^{a\delta(0)}(\varphi(t_{d+1}))$  sur  $H_{\lambda, \delta}$ .

On a alors l'analogie du lemme 1 :

**Lemme 8.**

Soit, pour  $s \in \{0, \dots, s_0 + \ell_0\}$ ,  $K_s = \inf\{k \in \mathbb{N}/0 < m_k(w^s) < \varepsilon^*\}$ .  $K_s$  est une v.a. finie  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable.

Par ailleurs, pour  $w \in Z_s^{\lambda, \delta} := \{w \in H_{\lambda, \delta}/w^s \text{ s'annule au moins une fois sur } ]t_d, t_{d+1}[ \}$ , soit  $\mathcal{P}_n(w)$  la propriété : "il existe une suite d'excursions de  $w^s$ ,  $(e_i^s(w))_{1 \leq i \leq n}$ , de débuts  $(G_i^s)_i$  formant une suite de réels strictement décroissante à valeurs dans  $]t_d, t_{d+1}[$ , et de hauteurs  $(h_i^s)_i$  tels que :

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n h_i^s < |\tau_{a\delta(\text{esslevel}(s))}^{a\delta(0) \varepsilon(\lambda, \text{esslevel}(s))}(\varphi(t_{d+1}))| < \sum_{i=1}^n h_i^s + \frac{\varepsilon}{4}$$

Soit  $N_s^{\lambda, \delta}(w)$  le plus petit des entiers  $n$  tels que  $\mathcal{P}_n(w)$  a lieu, pour  $w \in H_{\lambda, \delta}$ . Nous conserverons la même définition de  $N_s^{\lambda, \delta}(w)$  lorsque  $w^s$  s'annule sur  $]t_d, t_{d+1}[$  et poserons  $N_s^{\lambda, \delta}(w) = 0$  sinon.

$N_s^{\lambda, \delta}$  est une v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable.

Pour tout  $A \subset Z_s^{\lambda, \delta}$ ,  $\mathcal{W}^\infty$ -mesurable, il existe  $(k^*, n^*) \in \mathbb{N}^2$  tel que

$$\begin{aligned} P([K_s \leq k^*] \cap [N_s^{\lambda, \delta} \leq n^*] / A \cap [|\tilde{X} - \varphi(t_1, \dots, t_d)| < \varepsilon] \cap [L \leq \ell_0]) \\ \geq \left( \frac{1 - \varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \right)^{\frac{1}{s_0 + \ell_0}}. \end{aligned}$$

Nous noterons  $n^*(A) := n^*$ ,  $k^*(A) := k^*$ .

Il existe une suite strictement décroissante d'excursions de  $w^s$ ,  $(e_i^{\lambda, \delta, s})_{1 \leq i \leq n^*(A)}$

qui vérifie  $\mathcal{P}_{n^*(A)}(w)$  avec probabilité  $\left( \frac{1 - \varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \right)^{\frac{1}{s_0 + \ell_0}}$  sur  $A$ , et telle que  $(G_i^{\lambda, \delta, s})_i$

et  $(h_i^{\lambda, \delta, s})_i$  soient des suites de v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurables. Nous appellerons excursions constructives leurs éléments.

**Preuve du lemme 8.**

Elle est identique à celle du lemme 1.

Afin de pouvoir, à chacun des niveaux "essentiels", de  $\ell_0$  à 0, insérer, si besoin est,  $k^* + n^*$  remontées "horizontales" permettant de configurer convenablement la trajectoire à l'instant  $t_{d+1}$ , nous aurons besoin ici encore de la notion d'excursions-tampons. C'est l'objet du

**Lemme 9.** (analogue au lemme 2)

Soit  $(s, \lambda, \delta) \in \{0, \dots, s_0 + \ell_0\} \times \Lambda \times \Delta$ . Etant donnée  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s})_{1 \leq i \leq p_s}$  une suite de v.a. à valeurs dans les excursions de  $w^s$  antérieures à  $t_{d+1}$ , et rangée dans l'ordre strictement décroissant ( $p_s$  est une v.a. à valeurs entières). Soit  $g_i^{*s}$  (resp.  $h_i^{*s}$ ) le début (resp. la hauteur de  $e_{\lambda, \delta, i}^{*s}$ ,  $1 \leq i \leq p_s$ ). Il existe deux suites d'excursions de  $w^s$ , les excursions-tampons  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s'})_{1 \leq i \leq p_s}$  et  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s''})_{1 \leq i \leq p_s}$  vérifiant :

$$\begin{cases} g_{p_s}^{*s'} < g_{p_s}^{*s} < g_{p_s}^{*s''} < g_{p_s-1}^{*s''} < \dots < g_1^{*s''} < g_{t_{d+1}}(w^s) \\ h_{p_s}^{*s'} < h_{p_s}^{*s''} < h_{p_s-1}^{*s'} < \dots < h_1^{*s''} < \varepsilon^* \end{cases}$$

pour toute v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable  $\varepsilon^* > 0$  fixée par avance.

Lorsque les  $g_i^{*s}$ ,  $1 \leq i \leq p_s$  sont  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurables, il en est de même pour les débuts  $g_i^{*s'}$  et  $g_i^{*s''}$  de leurs tampons.

On introduit alors  $(e_{\lambda, \delta, i}^{+s})_{1 \leq i \leq q_s}$  la suite d'excursions de  $w^s$  obtenue en concaténant

- $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s})_{1 \leq i \leq p_s}$
- $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s'})_{1 \leq i \leq p_s}$  et  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s''})_{1 \leq i \leq p_s}$
- $(e_{\lambda, \delta, i}^s)_{1 \leq i \leq p_s}$  la suite finie constituée de toutes les autres excursions de  $w^s$  de hauteurs supérieures à  $h_{p_s}^{*s'}$  et antérieures à  $g_{t_{d+1}}(w^s)$  réarrangée dans l'ordre chronologique strictement décroissant.

**Preuve du lemme 9.**

Elle suit celle du lemme 2.

**Lemme 10.** (analogue du lemme 4)

Etant données deux suites  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s})_{1 \leq i \leq p_s}$  et  $(e_{\lambda, \delta, i}^{+s})_{1 \leq i \leq q_s}$  vérifiant les hypothèses du lemme précédent; alors, sur l'événement  $E_s^{\lambda, \delta}$  : "toutes les excursions-tampons sont  $< 0$  ainsi que les excursions  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s})_{1 \leq i \leq \pi_s}$ , toutes les autres excursions de  $(e_{\lambda, \delta, i}^{+s})_{1 \leq i \leq q_s}$  sont  $> 0$ " où  $\pi_s$  est une v.a. à valeurs entières majorée par  $p_s$ . Les excursions  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s})_{\pi_s+1 \leq i \leq q_s}$  sont "conservées" au rang  $s - 1$ . C'est-à-dire qu'il existe une unique famille d'excursions de  $w^{s-1}$  que nous noterons  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s-1})_{1 \leq i \leq p_s - \pi_s}$  (pour toute remontée possible de  $w^s$ ) vérifiant :

- $\text{supp } e_{\lambda, \delta, i}^{*s-1} \supset \text{supp } e_{\lambda, \delta, \pi_s+i}^{*s}$  pour tout  $i$  de 1 à  $p_s - \pi_s$
- les supports des  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s-1})_{1 \leq i \leq p_s - \pi_s}$  sont 2 à 2 disjoints.

**Preuve du lemme 10.**

Elle est identique à celle du lemme 4. ■

Nous poserons  $e_{\lambda,\delta,0}^{+s} := e_{t_{d+1}}(w^s)$ .

Il s'agit maintenant de définir les v.a.  $(Y_{\lambda,\delta,s}^{d+1})_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$  et  $(Z_{\lambda,\delta,s}^{d+1})_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$ . Cette définition prendra forme à partir d'une arborescence importante, aussi allons nous utiliser un langage de type programmation proche du langage Pascal.

Afin de ne pas alourdir la notation nous omettrons le plus souvent les indices  $\lambda$  et  $\delta$  dans le "programme" de construction du B-m.r  $(r_{d+1})$ .

### Variables

$s, \text{esslevel}(s), \sigma, n_s(w), k^*, n^*, R(w)$  of integers.

$\square, \square_1$  of strings

$Y_s^{d+1}, Y_{\langle s \rangle}^{d+1}$  of finite sequences of signs.

$(ep_j^s)_j, (ec_j^s)_j, (e_j^{*s})_j, (e_j^{+s})_j$  of finite sequences of excursions

$M_\Psi, M_\square, M_{\square_1}$  of elements of  $\mathcal{W}_\infty$

### Initialisation

$s := s_0 + \ell_0, \text{esslevel}(s) := s_0 + \ell_0$

$M_\Psi := [B_{|_{[0,td]}^{s_0+\ell_0}} = \tilde{\Gamma}_{|_{[0,td]}^{\ell_0}}]$  (by hypothesis,  $P(M_\Psi) = 1$ )

For all  $s$ , do :

$(e_j^{*s})_j$  is the concatenation of  $(ep_j^s)_j$  and  $(ec_j^s)_j$  rearranged to be strictly decreasing (the first are the protecting excursions and the second the building excursions).

$Y_s^{d+1} := (\text{sgn}(e_j^{+s})_j), n_s(w) = \#(e_j^{+s})_j.$

End for.

If  $w \notin M_\Psi$ , do triv  $(w, s_0 + \ell_0)$

End if.

While no zero of  $w^s$  occurs on  $(t_d, t_{d+1})$ , do

$(e_j^{+s})_j := \phi; Y_{\langle s \rangle}^{d+1} := \phi$

$M_\Psi := M_\Psi \cap [B^s \neq 0 \text{ on } (t_d, t_{d+1})]$

$s := s - 1, \text{esslevel}(s) := s - 1$

do  $\square := s - s_0, M_\square := M_\Psi \cap [B^s \text{ vanishes on } (t_d, t_{d+1})]$

### Label 1

do :  $(ep_j^s)_j := \text{arranged}(e_{t_{ji}^{\text{esslevel}(s)}(w^s)})_i$

$(ec_j^s)_j := (e_j^s)_j$  by lemma 8 on  $A := M_\square$

$k^* := k^*(M_\square), n^* := n^*(M_\square)$  with the notations of lemma 8.

$\sigma := \text{esslevel}(s).$

For  $i = 0$ , to  $k^* - 1$

let  $(e_j^{+s})_j$  be the sequence associated to  $(e_j^{*s})_j$  by lemma 9

$Y_{\langle s \rangle}^{d+1} :=$  "the plug excursions and the excursions straddling  $t_{d+1}$  are  $< 0$ , all the other excursions of  $(e_j^{+s})_j$  are  $> 0$ "

(i.e.  $Y_{\langle s \rangle}^{d+1}(k) = -1 \Leftrightarrow k \in \{0\} \cup \{p_s + 1, \dots, 3p_s\}$ )

If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{\langle s \rangle}^{d+1}$  do triv  $(w, s)$

End if.

let  $(e_j^{*s-1})_j$  be associated to  $(e_j^{+s})_j$  by lemma 10  
 $\square_1 := \square$ ,  $\square := \square h$ ,  $M_\square := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{<s>}^{d+1}]$  ( $h$  like horizontal).  
 $s := s - 1$ ,  $\text{esslevel}(s) := \sigma$   
 $i := i + 1$

End for.

For  $i = 0$  to  $n^* - 1$   
 $(e_j^{+s})_j$  be associated to  $(e_j^{*s})_j$  by lemma 9  
 $Y_{<s>}^{d+1} :=$  "the plug excursions and the first building excursion are  $< 0$ , all the other excursions of  $(e_j^{+s})_j$  are  $> 0$ "  
If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{<s>}^{d+1}$  do triv  $(w, s)$

End if.

let  $(e_j^{*s-1})_j$  be associated to  $(e_j^{+s})_j$  by lemma 10  
 $\square_1 := \square$ ,  $\square := \square h$ ,  $M_\square := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{<s>}^{d+1}]$   
 $s := s - 1$ ,  $\text{esslevel}(s) := \sigma$   
 $i := i + 1$

End for.

do  $(e_j^{+s})_j := (e_j^{*s})_j$   
 $Y_{<s>}^{d+1} := (\text{sgn}(\text{arranged}(\tilde{e}_{ji}^{\text{esslevel}(s)-s_0})))_i$   
If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{<s>}^{d+1}$  do triv  $(w, s)$

End if.

do  $\square_1 := \square$ ,  $\square := \square v$ , ( $v$  like vertical)  
 $M_\square := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{<s>}^{d+1}]$   
while no zero of  $w^s$  occurs on  $(t_d, t_{d+1})$  and  $\text{esslevel}(s) > r$   
do  $s := s - 1$ ,  $\text{esslevel}(s) := \text{esslevel}(s + 1) - 1$   
do  $(e_j^{+s})_j := \text{arranged}(e_{t_{ji}^{\text{esslevel}(s)-s_0}})$   
 $Y_{<s>}^{d+1} := (\text{sgn}(\text{arranged}(\tilde{e}_{ji}^{\text{esslevel}(s)-s_0})))_i$   
If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{<s>}^{d+1}$  do triv  $(w, s)$

End if.

do  $\square_1 := \square$ ,  $\square := \square v$ ,  $M_\square := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{<s>}^{d+1}]$

End while.

if  $\text{esslevel}(s) > s_0$ , go to **Label 1**

End if.

(the horizontal rises have correctly configured the path if no following vertical rise vanishes on  $(t_d, t_{d+1})$ , else the procedure must return to the beginning).

do  $R(w) := s - \ell_0$  ( $R(w)$  est le nombre minimum de remontées nécessaires

pour donner à la trajectoire la forme désirée).

while  $s > 0$

let  $(e_j^{*s})_j := (e_{0i}^s)_{1 \leq i \leq d+1}$

$(e_j^{+s})_j$  be the sequence associated to it by lemma 9

$Y_{<s>}^{d+1} :=$  "all the plug excursions are  $< 0$ , the other excursions of  $(e_j^{+s})_j$  are  $> 0$ "

If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{<s>}^{d+1}$  do triv  $(w, 0)$

End if.

do  $\square_1 := \square, \square := \square v, M_\square := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{<s>}^{d+1}]$

$s := s - 1, \text{esslevel}(s) := \text{esslevel}(s + 1) - 1$

End while.

do  $(e_i^{+0})_i := (e_{0i}^0)_{1 \leq i \leq d+1}$

$Y_{<0>}^{d+1} := (\text{sgn}(\varphi(t_i)))_{1 \leq i \leq d+1}$

if  $Y_0^{d+1} \neq Y_{<0>}^{d+1}$  do triv  $(w, s)$

End if.

do  $\square_1 := \square, \square := \square v, M_\square := M_{\square_1} \cap [Y_0^{d+1} = Y_{<0>}^{d+1}]$

End prog.

function triv( $w, s$ )

for  $i = s - 1$  to  $0$

do  $(e_j^{+i})_j$  is a sequence of  $n_i^0$  excursions of  $w^i$  chosen  $\mathcal{W}_\infty^{i+1}$ -measurably among the excursions of  $w^i$ .

$Y_{<i>}^{d+1} := (1, 1, \dots, 1) \quad n_i^0$  terms.

(the deterministic integers  $n_i^0$  will soon be defined).

End for.

End function.

function arrang  $(e_{ji}(\varphi))$

where  $\varphi \in W$ , and  $(e_{ji}(\varphi))_{ij}$  is a finite family of excursions of  $\varphi$ .

let  $g_{ji}$  be the beginning of  $e_{ji}$

$G$  the set of all the  $g_{ji}$  of the finite family

$\gamma$  the end of  $G$ ,  $N$  its cardinality

$\Gamma := G$

while  $\#(\Gamma) > 0$  do

$i := N - \#(\Gamma) + 1$

$e_i :=$  "the excursion of the family which begins at  $\gamma$ "

$\Gamma := \Gamma \setminus \{\gamma\}$

End while.

do arrang  $(e_{ji})_{ij} := (e_1, e_2, \dots, e_N)$

End function.

Pour réaliser ce programme, nous avons dû supposer  $s_0$  assez grand. Nous allons justifier maintenant que cela est possible.

En effet,  $R(w)$  est une v.a. à valeurs entières constantes sur chaque branche de l'arbre de parties  $(M_\square)$  que nous venons de construire.

Il est facile de vérifier que chaque  $M_\square$  est  $\mathcal{W}_\infty^s$ -mesurable, pour le niveau  $s$  associé. Comme l'arbre en question est fini, la borne supérieure de  $R(w)$ , ou plutôt  $R_{\lambda,\delta}(w)$  lorsque  $w$  parcourt toutes les parties de l'arbre est elle aussi finie ; nous la noterons  $s_0^{\lambda,\delta}$ .

Choisissons une partie finie  $\Pi$  de  $\Lambda \times \Delta$  telle que :

$$P(\left[ \|\tilde{X} - \varphi(t_1, \dots, t_d)\| < \frac{\varepsilon}{2} \right] \cap [L \leq \ell_0] \cap \left( \bigcup_{(\lambda,\delta) \in \Pi} H_{\lambda,\delta} \right)) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

Nous poserons  $s_0 := \text{Max}\{s_0^{\lambda,\delta}, (\lambda, \delta) \in \Pi\}$ .

Par ailleurs, les v.a.  $n_s^{\lambda,\delta}(w)$  étant finies, il existe une famille d'entiers déterministes  $(n_s^0)_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$  telle que :

$$P(A_{\lambda,\delta}^{*\varepsilon} | H_{\lambda,\delta}) \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}$$

où

$$A_{\lambda,\delta}^{*\varepsilon} := (\|\tilde{X} - \varphi(t_1, \dots, t_d)\| < \varepsilon) [L \leq \ell_0] \cap \left( \bigcap_{s=0}^{s_0 + \ell_0} (n_s^{\lambda,\delta}(w) \leq n_s^0) \cap \dots \right. \\ \left. \dots (K_s \leq k^*) \cap (N_s^{\lambda,\delta} \leq n^*) \right)$$

On complète alors les  $(e_j^{+s})_{0 \leq j \leq n_s(w)}$  en  $(e_j^{+s})_{0 \leq j \leq n_s^0}$  par adjonction d'excursions de  $w^s$  postérieures à  $t_{d+1}$  et choisies  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurablement, si besoin est, sinon par troncature on ramène la famille au cardinal  $n_s^0$ .

Conjointement, on amène la famille  $Y_{<s>}^{d+1}$  au cardinal  $n_s^0$  par adjonction de 1 ou troncature selon les cas.

Le programme fournit alors les v.a.  $(Y_{\lambda,\delta,s}^{d+1})_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$  et  $(Y_{\lambda,\delta,<s>}^{d+1})_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$  qui vérifient les conditions requises par la Proposition 1 pour tout  $(\lambda, \delta) \in \Lambda \times \Delta$ . Grâce au P.R.E. et à la théorie de Rohlin des compléments indépendants on peut leur associer les  $(Z_{\lambda,\delta,d+1}^s)_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$ .

En conséquence, nous pouvons considérer la somme disjointe  $\Gamma$  des B-m.r( $s_0 + \ell_0$ )  $C^{\lambda,\delta}$  associés à la partition  $(H_{\lambda,\delta})_{\Lambda \times \Delta}$ . Il nous reste à vérifier que  $\Gamma$  approche  $\varphi(t_1, \dots, t_{d+1})$  aux instants  $(t_1, \dots, t_{d+1})$  avec une grosse probabilité.

**Lemme 11.** (analogue au lemme 5)

Pour presque tout  $w$  appartenant à  $A_{\lambda, \delta}^{*\varepsilon} \cap H_{\lambda, \delta}$ ,  $(\lambda, \delta) \in \Pi$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{(t_1, \dots, t_d)}(w) - \varphi(t_1, \dots, t_d)\| &< [(2^{\ell_0} + 2)(k^* + n^*) + s_0]\varepsilon^* \\ |\Gamma_{(t_{d+1})} - \varphi(t_{d+1})| &< [n^*(k^* + \frac{n^* - 1}{2}) + s_0]\varepsilon^* \end{aligned}$$

où pour tout  $\ell \in \{0, \dots, \ell_0\}$  on pose

$$\begin{aligned} k_\ell^{*\lambda, \delta} &:= \max\{k_{\lambda, \delta}^*(M_\square), \text{ pour tous les } \square \text{ commençant par } \ell\} \\ n_\ell^{*\lambda, \delta} &:= \max\{n_{\lambda, \delta}^*(M_\square), \text{ pour tous les } \square \text{ commençant par } \ell\} \\ \text{puis } k_{*\lambda, \delta} &:= \max\{k_\ell^{*\lambda, \delta}, \ell \in \{0, \dots, \ell_0\}\} \\ \text{et } n_{*\lambda, \delta} &:= \max\{n_\ell^{*\lambda, \delta}, \ell \in \{0, \dots, \ell_0\}\} \\ \text{enfin } k^* &:= \max\{k_{*\lambda, \delta}, (\lambda, \delta) \in \Pi\} \\ n^* &:= \max\{n_{*\lambda, \delta}, (\lambda, \delta) \in \Pi\} \end{aligned}$$

**Preuve du lemme 11.**

Remarquons d'abord que chaque trajectoire  $\Gamma_{\lambda, \delta}^{s_0 + \ell_0}(w)$  a subi au plus :

- $(\ell_0 + 1)$   $k^*$  remontées de type  $h$  ramenant près de 0, ( $h$ )
- $(\ell_0 + 1)$   $n^*$  remontées de type  $h$  donnant la valeur convenable prévisionnelle ( $h'$ )
- $\ell_0$  remontées de type  $v$  pour arriver à la valeur convenable au niveau essentiel  $s_0(v)$
- $s_0$  remontées de type  $h$  pour passer du niveau essentiel  $s_0$  au niveau 0 ( $h_0$ )

Or, dans une remontée ( $h$ ), chaque excursion de protection, et chaque excursion constructive reçoit son tampon de gauche, et la trajectoire correspondante varie en hauteur à chaque instant antérieur à  $t_d$  d'au plus  $\varepsilon^*$ .

Il en est de même lors d'une remontée ( $h'$ ), à ceci près que la première excursion constructive disparaît, absorbée par l'excursion qui enjambe  $t_{d+1}$ .

Dans une remontée ( $v$ ), chaque (nouvelle) excursion de protection est somme de deux excursions de protection du niveau précédent : à chaque instant, sa hauteur varie d'au plus 2 fois la variation des précédentes. Quant à l'excursion qui enjambe  $t_{d+1}$ , elle reçoit l'excursion de protection qui enjambe  $t_d$  dont la variation s'ajoute à sa variation propre.

Enfin, dans une remontée ( $h$ ), chaque excursion qui enjambe l'un des  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq d + 1$ , reçoit son tampon de gauche : sa variation à chaque instant augmente d'au plus  $\varepsilon^*$ .

Seulement, il faut noter que, pour l'excursion qui enjambe  $t_{d+1}$ , seules importent ses variations à partir de la dernière remontée ( $v$ ) qui suit une remontée



s'annulant sur  $]t_d, t_{d+1}[$ , ceci à cause du retour à son début du procédé des remontées.

Faisons maintenant le bilan des variations :

Pour une excursion de protection, sa variation est de :

- $(k^* + n^*)\varepsilon^*$  après les  $k^* + n^*$  premières remontées horizontales
- $2(k^* + n^*)\varepsilon^*$  après la première remontée horizontale

Ainsi, à l'issue des  $\ell_0$  remontées verticales, peut-on majorer la variation des excursions enjambant l'un des  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , (en considérant le retour à son début du procédé des remontées à chaque remontée verticale) par

$$2^{\ell_0-1} \times 2(k^* + n^*)\varepsilon^* + 2(k^* + n^*)\varepsilon^*$$

(En effet, si on note  $u_k$  la variation au bout de  $k$  remontées verticales, on a  $u_{k+1} = 2u_k + 2$ , en prenant  $(k^* + n^*)\varepsilon^*$  comme unité. On conclut à l'aide de  $v_k = u_k + 2$ ).

Ajoutons ensuite les variations dûes aux remontées ( $h$ ) ; nous obtenons :

$$(2^{\ell_0} + 2)(k^* + n^*)\varepsilon^* + s_0\varepsilon^* \quad \text{pour arriver au niveau 0}$$

■

Il suffit désormais pour conclure de choisir :

$$\varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{2} \cdot \min \left( \frac{1}{(2^{\ell_0} + 2)(k^* + n^*) + s_0}, \frac{1}{n^*(k^* + \frac{n^*-1}{2}) + s_0} \right)$$

et  $\alpha = \frac{\varepsilon}{8}$ ,

la hauteur des excursions tampons ne modifiant en rien les autres variables aléatoires qui interviennent dans la démonstration.

Alors, sur  $\bigcup_{(\lambda, \delta) \in \Pi} A_{\lambda, \delta}^{*\varepsilon} \cap H_{\lambda, \delta}$ ,  $X = \Gamma_{(t_1, \dots, t_{d+1})}$  approche  $\varphi_{(t_1, \dots, t_{d+1})}$  à  $\varepsilon$  près :

- pour les  $d$  premiers instants, à l'incertitude de départ  $\frac{\varepsilon}{2}$ , s'ajoute l'incertitude  $\frac{\varepsilon}{2}$  due au procédé.
- pour l'instant  $t_{d+1}$  à l'incertitude  $\frac{\varepsilon}{2}$  due au remplacement du déplacement prévisionnel exact (le dernier en date) par le déplacement approché s'ajoute l'incertitude  $\frac{\varepsilon}{2}$  due au procédé, à condition de poser

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Enfin,

$$P\left(\bigcup_{(\lambda, \delta) \in \Pi} A_{\lambda, \delta}^{*\varepsilon} \cap H_{\lambda, \delta}\right) \geq 1 - \varepsilon$$

### **Remarque de synthèse**

Les remontées que nous avons effectuées dans le paragraphe I peuvent être

qualifiées d'"horizontales" : on prépare au niveau  $r_0$  les excursions qui permettront de s'approcher de  $\varphi(t_{d+1})$  à l'instant  $t_{d+1}$ , puis on les fait agir successivement en redressant toutes les excursions importantes. En procédant par récurrence sur  $d$ , une difficulté nouvelle apparaît : la nécessité de protéger l'acquis des  $d$  premiers instants. Cette fois, on ne peut plus se contenter de remontées horizontales : d'abord, on ne peut utiliser que des excursions de supports inclus dans  $[t_d, t_{d+1}]$ , donc utiliser la densité des zéros. Ensuite, partant d'une itération qui s'annule entre  $t_d$  et  $t_{d+1}$ , procéder à des remontées horizontales afin de configurer convenablement la trajectoire à l'instant  $t_{d+1}$  au niveau considéré et comme il est indiqué dans les lemmes 6 et 7, puis reprendre les remontées verticales en redonnant aux excursions caractéristiques des  $d$  premiers instants le signe qui était le leur (ceci nous oblige à remplacer les B-m.r par les sommes disjointes de tels processus afin de garder ces signes en mémoire). Seulement, la valeur prévue pour la configuration de la trajectoire à l'instant  $t_{d+1}$  repose sur l'hypothèse qu'aucune des remontées verticales ultérieures ne s'annulera sur  $]t_d, t_{d+1}[$ . Dans le cas contraire, le procédé des remontées doit repartir à son début. On est face à une arborescence compliquée qu'il nous a paru commode de traiter en programmation.

### 3 Densité des orbites

#### Proposition 5.

Quels que soient  $\varepsilon > 0$  et  $\varphi \in W_{|[0,1]}$ , il existe une somme disjointe  $\Gamma$  de B-m.r telle que :

$$P(\|\Gamma_{|[0,1]} - \varphi_{|[0,1]}\|_\infty < \varepsilon) > 1 - 2\varepsilon$$

#### Remarque 2.

De façon analogue à ce que nous avons fait pour les Propositions 3 et 4, nous présentons en fin de ce paragraphe 3 une remarque de synthèse, à laquelle le lecteur peut d'ores et déjà se reporter.

#### Preuve de la Proposition 5.

On considère un module de continuité uniforme  $\alpha_0$  associé à  $(\frac{\varepsilon}{4}, \varphi, [0, 1])$  et un réel  $\alpha_1$  tel que  $P(A_\varepsilon^0) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$  où

$$A_\varepsilon^0 = \left[ \sup\{|B_t - B_u|, (t, u) \in [0, 1]^2 \text{ et } |t - u| < \alpha_1\} < \frac{\varepsilon}{2} \right],$$

puis  $\alpha := \min(\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $d_0 := \lceil \frac{1}{\alpha} \rceil + 1$ , et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $t_i = (i\alpha) \wedge 1$ .

Posons pour tout entier  $d \in [1, \dots, d_0]$ ,

$$A_\varepsilon^d := \left[ \sup\{|B_t - B_u|, (t, u) \in [t_d, 1]^2, |t - u| < \alpha\} < \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Notre objectif est de montrer, en raisonnant par récurrence sur  $d$ , la propriété  $\mathcal{P}_d(\varepsilon)$  : "Il existe un entier  $r_d$  et  $\Gamma$  une somme disjointe de B-m.r( $r_d$ ) vérifiant :

$$\mathbb{P}([\|\Gamma|_{[0, t_d]} - \varphi|_{[0, t_d]}\|_\infty < \varepsilon] \cap [|\Gamma_{t_d} - \varphi(t_d)| < \varepsilon_1] \cap A_\varepsilon^d) > 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{d}{d_0}\right) "$$

Remarquons que  $\mathcal{P}_0(\varepsilon)$  découle immédiatement du choix de  $\alpha_1$ . Supposons désormais  $\mathcal{P}_d(\varepsilon)$  satisfaite. Nous allons appliquer cette hypothèse au mouvement brownien  $B^{s_0}$ , pour un certain entier  $s_0$  qui comme le réel  $\varepsilon_1$ , sera précisé ultérieurement. Comme  $A_\varepsilon^d \subset \left[ \sup\{|B_t - B_u|, (t, u) \in [t_d, t_{d+1}]^2\} < \frac{\varepsilon}{2} \right] \cap A_\varepsilon^{d+1}$  et grâce à l'indépendance des accroissements de  $B$ , on en déduit l'existence d'une somme disjointe  $\tilde{\Gamma}$  de B <sup>$s_0$</sup> -m.r( $r_d$ ) vérifiant :

$$P(A_0^\varepsilon) > 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{d}{d_0}\right),$$

où

$$\begin{aligned} A_0^\varepsilon &:= [\|\tilde{\Gamma}|_{[0, t_d]} - \varphi|_{[0, t_d]}\|_\infty < \varepsilon] \cap [|\tilde{\Gamma}_{t_d} - \varphi(t_d)| < \varepsilon_1] \dots \\ &\dots \cap \left[ \sup\{|B_t^{s_0+r_d} - B_u^{s_0+r_d}|, (t, u) \in [t_d, t_{d+1}]^2\} < \frac{\varepsilon}{2} \right] \cap A_\varepsilon^{d+1} \end{aligned}$$

Nous noterons :  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{\Gamma}^i = \tilde{w}^i$ . Par définition,  $\forall i > r_d$ ,  $\tilde{w}^i = w^{s_0+i}$ , puis :

$$\varepsilon_2(w) := (\varepsilon - \|\tilde{\Gamma}|_{[0, t_d]} - \varphi|_{[0, t_d]}\|_\infty) \wedge (\varepsilon_1 - |\tilde{\Gamma}_{t_d} - \varphi(t_d)|)$$

Cette v.a est  $> 0$ .

Par ailleurs, d'après le théorème de densité des zéros (cf [M]), il existe p.s. un entier  $\ell$  tel que  $\tilde{w}^\ell$  s'annule au moins une fois sur  $]t_d, t_{d+1}[$ , car pour tout  $\ell > r_d$ ,  $\tilde{w}^\ell = w^{s_0+\ell}$ . Soit  $L(w)$  le plus petit de ces entiers  $\ell$ .  $L$  est une v.a finie p.s. Donc, il existe un entier  $\ell_0$  que nous choisirons  $> r_d$  tel que

$$P(A_1^\varepsilon) > 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{d}{d_0}\right) - \frac{\varepsilon}{5d_0} \quad \text{où} \quad A_1^\varepsilon := A_0^\varepsilon \cap [L \leq \ell_0].$$

■

On a d'autre part :

**Lemme 12.**

*Le plan dans lequel nous représentons les trajectoires est rapporté au repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ . Soient :*

- $\tau_b^{a(+1)}$  la translation verticale de vecteur  $(b-a)\vec{j}$

et

- $\tau_b^{a(-1)}$  la réflexion d'axe horizontal la droite d'équation  $y = \frac{a+b}{2}$ .

Considérons  $(t_d, k, p) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{N}^2$  tel que  $w_{t_d}^k = a$  et  $w_{t_d}^{k+p} = b$ , et notons  $\gamma_{t_d}$  le premier instant en lequel l'une au moins des itérées  $w^i$ ,  $k \leq i \leq k+p-1$ , s'annule au moins une fois sur  $]t_d, t_{d+1}[$ . On a alors :

$$w_{|t_d, \gamma_{t_d}|}^{k+p} = \begin{cases} \tau_b^{a(+1)} \circ w_{|t_d, \gamma_{t_d}|}^k & \text{si } \prod_{i=k}^{k+p-1} w_{t_d}^i > 0 \\ \tau_b^{a(-1)} \circ w_{|t_d, \gamma_{t_d}|}^k & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous noterons  $\tau_{k+p}^k(w)$  l'isométrie qui transforme  $w_{|t_d, \gamma_{t_d}|}^k$  en  $w_{|t_d, \gamma_{t_d}|}^{k+p}$ .

### Preuve du lemme 12.

C'est une conséquence immédiate des formules de Tanaka lorsque  $p = 1$ . Dans le cas général, on décompose le déplacement  $\tau_{k+p}^k(w)$  sous la forme :  $\tau_{k+p}^k(w) = \tau_p \circ \tau_{p-1} \circ \dots \circ \tau_1$ , où  $\tau_i$  transforme  $w_{|t_d, \gamma_{t_d}|}^{k+i-1}$  en  $w_{|t_d, \gamma_{t_d}|}^{k+i}$ .

D'après la remarque précédente, chaque  $\tau_i$  est une translation verticale ou une réflexion d'axe horizontal selon le signe de  $w_{t_d}^{k+i-1}$ . Le résultat annoncé s'en déduit. ■

Rappelons qu'étant donnés  $w \in W$  et  $t \in \mathbb{R}_*^+$ , on appelle excursion de  $w$  qui enjambe  $t$  l'application qu'on notera  $e_t(w)$  ainsi définie :

$$e_t(w) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^+, e_t(w)(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in [0, g_t(w)] \cup [d_t(w), +\infty[ \\ w_u & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous introduirons aussi l'application :  $de_t(w) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall u \in \mathbb{R}^+, de_t(w)(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in [0, t] \cup [R_t(w), +\infty[ \\ w_u - w_t & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $R_t(w) = \sup\{u > t, \forall s \in ]t, u], w_s \neq w_t\}$

Nous les noterons respectivement  $e_t$  et  $de_t$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, et  $e_t^s$  et  $de_t^s$  dans le cas d'excursions de  $w^s$ .

### Lemme 13.

Soit  $w \in W$  et  $e$  une excursion de  $w^s$ , négative et plus basse que toutes celles qui la précèdent; soit  $\gamma$  son début et  $\delta$  sa fin.

$$\gamma_1 = \arg \min_{[0, \gamma]} w^s, \gamma_2 = \inf\{t \in \text{supp}(e); e(t) = w_{\gamma_1}^s\}, \gamma_3 = \arg \min_{[\gamma, \delta]} e$$

Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} de_{\gamma_1}^s \text{ coïncide avec une excursion de } |w^{s-1}|, \text{ et son support est } [\gamma_1, \gamma_2] \\ de_{\gamma_3}^s \text{ coïncide avec une excursion de } |w^{s-1}|, \text{ qui débute à l'instant } \gamma_3 \text{ et de} \\ \text{support contenant } [\gamma_3, \delta] \end{array} \right.$$

De plus,  $\forall u \in [\gamma_2, \gamma_3]$ ,  $de_u^s$  coïncide avec une excursion de  $|w^{s-1}|$  si, et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} de_u^s \text{ est une excursion positive} \\ e(u) = \inf\{e(t), t \in [\gamma, u]\} \end{array} \right.$$

Il en est ainsi en particulier lorsque  $de_u^s$  est la première excursion positive de la forme  $de_v^s$ ,  $v \in [\gamma_2, \gamma_3]$ , à dépasser une certaine hauteur.

### Preuve du lemme 13.

D'après les formules de Tanaka :

$$|w_t^{s-1}| = w_t^s + \sup\{-w_u^s, u \in [0, t]\}$$

donc  $|w_{\gamma_1}^{s-1}| = w_{\gamma_1}^s - w_{\gamma_1}^s = 0$ , tandis que pour tout  $t > \gamma_1$ , suffisamment voisin de  $\gamma_1$  :  $w_t^s > w_{\gamma_1}^s$ .

Ainsi,  $de_{\gamma_1}^s$  est une excursion positive de  $|w^{s-1}|$  de fin  $\gamma_2$ . De même,  $w_t^s > w_{\gamma_3}^s$  pour tout  $t \in ]\gamma_3, \delta]$ , donc  $de_{\gamma_3}^s$  est une excursion de  $|w^{s-1}|$  commençant à l'instant  $\gamma_3$  et dont le support contient  $[\gamma_3, \delta]$ .

Soit  $e'$  une excursion de  $w^{s-1}$  de support inclus dans  $[\gamma_2, \gamma_3]$ . Son début  $u$  et sa fin  $v$  vérifient :  $u = \arg \min_{[0, v[} w^s$  et  $v = \arg \min_{[0, v]} w^s$ .

On en déduit :  $de_u^s = |e'|$ .

Réciproquement, soit  $u \in [\gamma_2, \gamma_3]$  tel que  $de_u^s$  soit une excursion positive et  $u = \arg \min_{[0, u]} w^s$ .

Alors,  $u = \arg \min_{[0, v]} w^s$ , où  $v$  est la fin de  $de_u^s$  puisque  $de_u^s$  est positive.

Donc :  $w_u^{s-1} = w_v^{s-1} = 0$ , et pour tout  $t \in ]u, v[$ ,  $w_t^s \neq 0$ . En conséquence,  $de_u^s$  est une excursion de  $|w^{s-1}|$ .

Soit  $h > 0$  tel qu'il existe  $u \in [\gamma_2, \gamma_3]$  tel que  $de_u^s$  soit la première excursion positive de la forme  $de_v^s$ ,  $v \in [\gamma_2, \gamma_3]$ , dont la hauteur dépasse  $h$ . Alors, pour tout  $v < u$ , le support de  $de_v^s$  ne peut contenir celui de  $de_u^s$  sans contredire la minimalité de  $u$ .

■

Notre but est de remonter la trajectoire  $\tilde{w}^{\ell_0}$ , qui n'est autre que  $w^{s_0+\ell_0}$  du niveau  $s_0 + \ell_0$  au niveau 0 de telle manière que la trajectoire remontée s'approche de  $\varphi$  sur  $[t_d, t_{d+1}]$ , tout en conservant la proximité avec  $\varphi$  acquise au niveau  $s_0$ , et en respectant les conditions habituelles de mesurabilité. Pour que cela puisse être réalisé, sans dommage, nous introduisons la famille des

excursions de protection de  $\tilde{w} : ((\tilde{e}p_j^{(k)})_{1 \leq j \leq p_k})_{0 \leq k \leq \ell_0}$  constituée des excursions de  $\tilde{w}^k$  antérieures à  $t_d$ , et de hauteur (en valeur absolue) supérieure à  $\varepsilon_2(w)/2\ell_0$  et rangées dans l'ordre chronologique strictement décroissant, pour tout  $k$  de 0 à  $\ell_0$ .

Les  $p_k$ ,  $0 \leq k \leq \ell_0$  sont des v.a finies. Soit  $(p_k^0)_{0 \leq k \leq \ell_0}$  une suite d'entiers déterministes vérifiant :

$$P(A_2^\varepsilon) > 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{d}{d_0}\right) - \frac{2\varepsilon}{5d_0}$$

où

$$A_2^\varepsilon := A_1^\varepsilon \cap \left(\bigcap_{k=0}^{\ell_0} [p_k \leq p_k^0]\right)$$

Nous pouvons désormais modifier les excursions de protection :  $(\tilde{e}p_j^{(k)})_{0 \leq j \leq p_k^0}$  est constituée de l'excursion qui enjambe  $t_d$ , et des  $p_k^0$  excursions de  $\tilde{w}^k$  antérieures à  $t_d$  les plus hautes, rangées dans l'ordre chronologique strictement décroissant.

Soient :

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \{(\lambda_k)_{0 \leq k \leq \ell_0}\}, \lambda_k \in \{-1, +1\}^{\{0, \dots, p_k^0\}} = \prod_{k=0}^{\ell_0} \{-1, +1\}^{\{0, \dots, p_k^0\}} \\ \Delta &:= \{[n\beta, (n+1)\beta[; n \in \mathbb{Z}\}^{\{0, \dots, \ell_0\}} \end{aligned}$$

La partition  $(H_\nu^{d+1})$  à partir de laquelle nous allons construire  $\Gamma$  est ainsi définie :

$N_{d+1} := \Lambda \times \Delta \times \mathbb{N}$  est dénombrable ;

$\forall (\lambda, \delta, n) \in \Lambda \times \Delta \times \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} H_{\lambda, \delta, n}^{d+1} &:= \bigcap_{k=0}^{\ell_0} \left( [(sgn(\tilde{e}p_j^k))_{0 \leq j \leq p_k^0} = \lambda_k] \cap [\tilde{w}_{t_d}^k \in \delta(k)] \right) \\ &\quad \dots \cap \left[ \frac{\varepsilon}{2n} < \varepsilon_2(w) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \right] \\ H_{\lambda, \delta, 0}^{d+1} &:= \bigcap_{k=0}^{\ell_0} \left( [(sgn(\tilde{e}p_j^k))_{0 \leq j \leq p_k^0} = \lambda_k] \cap [\tilde{w}_{t_d}^k \in \delta(k)] \right) \cap [\varepsilon_2(w) \leq 0] \\ (H_{\lambda, \delta, 0} \cap A_0^\varepsilon &= \emptyset) \end{aligned}$$

Notons  $b\delta(k)$  le début de l'intervalle  $\delta(k)$ , et  $\varepsilon(\lambda, k) := \prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i(0)$ .

**Lemme 14.**

Sur  $H_{\lambda, \delta, n}^{d+1}$ , les déplacements  $\tau_k^0(\tilde{w})$  et  $\tau_{b\delta(k)}^{b\delta(0) \varepsilon(\lambda, k)}$  diffèrent d'au plus  $2\beta$ .

**Preuve du lemme 14.**

D'après le lemme 12, ces déplacements sont de même nature : translation verticale ou réflexion d'axe horizontal.

- Dans le cas d'une translation,  $\varepsilon(\lambda, k) = +1$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, |\tau_k^0(\tilde{w})(y) - \tau_{b\delta(k)}^{b\delta(0)\varepsilon(\lambda, k)}(y)| &= |\tilde{w}_{t_d}^k - \tilde{w}_{t_d}^0 - (b\delta(k) - b\delta(0))| \\ &= |\tilde{w}_{t_d}^k - b\delta(k) - (\tilde{w}_{t_d} - b\delta(0))| \\ &\leq \beta \end{aligned}$$

- Dans le cas d'une réflexion,  $\varepsilon(\lambda, k) = -1$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, |\tau_k^0(\tilde{w})(y) - \tau_{b\delta(k)}^{b\delta(0)^-}(y)| &= |(\tilde{w}_{t_d}^k + \tilde{w}_{t_d}^0 - y) - (b\delta(k) + b\delta(0) - y)| \\ &= |(\tilde{w}_{t_d}^k - b\delta(k)) + (\tilde{w}_{t_d} - b\delta(0))| \\ &\leq 2\beta \end{aligned}$$

■

Ce lemme nous permet de remplacer la valeur à prévoir  $\tau_k^0(\tilde{w})(\varphi(t_{d+1}))$ , qui n'a pas la bonne mesurabilité, par  $\tau_{b\delta(k)}^{b\delta(0)}(\varphi(t_{d+1}))$  sur  $H_{\lambda, \delta}$ .

L'objectif du lemme suivant est de préparer, au niveau  $s$  où l'itéré s'annule sur  $]t_d, t_{d+1}[$ , les excursions qui permettront à la trajectoire dument remontée au niveau 0 de s'approcher de  $\varphi$  sur  $]t_d, t_{d+1}[$ .

Soit  $Z_s := \{w \in W/w^s \text{ s'annule au moins une fois sur } ]t_d, t_{d+1}[ \}$ .

### Lemme 15.

Pour tout  $w \in Z_s$ ,  $\varepsilon'_s$  étant une v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$  qui sera précisée ultérieurement,

1) Les v.a. suivantes sont des fonctionnelles de  $|w^s|_{]t_d, t_{d+1}[}$  :

$t_0^s(w)$  est le début de la première excursion de  $w^s$  commençant après  $t_d$  et avant  $t_{d+1}$ , et de hauteur supérieure à  $\varepsilon'_s$ , ou  $t_{d+1}$  si cet ensemble est vide.

$\forall n \in \mathbb{N}$ , tant que  $t_n^s < t_{d+1}$ , posons :

$$t_{n+1}^s := \begin{cases} \inf\{u \in [t_n^s; \arg \max |de_{t_n^s}^s|, h(de_u^s) > \varepsilon'_s \text{ et } \text{sgn}(de_u^s) = -\text{sgn}(de_{t_n^s}^s)\} \\ \text{si cet ensemble n'est pas vide,} \\ \text{sinon :} \\ \arg \max |de_{t_n^s}^s| \wedge t_{d+1} \end{cases}$$

La suite  $(t_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante et finie. Soit  $1 + K_s^{\lambda, \delta, n}$  son cardinal.

2) Par ailleurs, soit la propriété :

$Q_p(w)$  : "il existe une suite d'excursions de  $(w^s)$ , de supports inclus dans  $[t_d, t_0^s]$ ,  $(e_i^s)_{1 \leq i \leq p}$ , de débuts  $(G_i^s)_i$  formant une suite de réels strictement décroissante, et de hauteurs  $(h_i^s)_i$  telles que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p h_i^s + \beta' + \max_{[t_{K_s^s}^s, t_{d+1}]} |de_{t_{K_s^s}^s}^s| &< |\tau_{b\delta(\text{esslevel}(s))}^{b\delta(0)\varepsilon(\lambda, k)}(\varphi(t_{d+1}))| \\ (6) \quad &< \sum_{i=1}^p h_i^s + \max_{[t_{K_s^s}^s, t_{d+1}]} |de_{t_{K_s^s}^s}^s| + 2\beta' \end{aligned}$$

où la v.a.  $\text{esslevel}(s)$  - niveau essentiel correspondant au niveau  $s$  - sera bientôt définie.

Soit  $N_s^{\lambda, \delta, n}(w)$  le plus petit des entiers  $p$  tels que  $Q_p(w)$  ait lieu lorsque  $w \in Z_s$  et 0 sinon.

$N_s^{\lambda, \delta, n}$  est une v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable finie p.s.

### Preuve du lemme 15.

1) Par construction, la suite  $(t_n^s)$  est strictement croissante et majorée par  $t_{d+1}$ . Supposons la infinie. Dans ce cas, elle admettrait une limite  $t_*^s \leq t_{d+1}$  et l'oscillation de  $w^s$  serait infinie au voisinage de  $t_*^s$ , contredisant la continuité de  $w^s$ . Donc,  $(t_n^s)_n$  est finie.

Il est clair que les  $t_n^s$  sont des v.a.  $\mathcal{W}_{t_{d+1}}^{s+1}$ -mesurables, comme  $K_s^{\lambda, \delta, n}$ .

2) Rangeons les excursions de  $(w_\bullet^s)$  de support inclus dans  $[t_d, t_0^s]$  par hauteurs décroissantes.

On obtient la suite  $(\widehat{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de hauteurs  $(\widehat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On a, p.s., puisque la variation des trajectoires browniennes est p.s. infinie sur tout intervalle :

$$(7) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{h}_n = \infty$$

et

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{h}_n = 0$$

Soient  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$  l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ , et pour tout entier  $n$ ,  $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$  l'ensemble des parties de  $\mathbb{N}$ , de cardinal  $n$ .

Pour tout  $H \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ , posons  $Z_H(w^s) := |w_{t_{d+1}}^s - w_{t_{K_s}^s}| + \sum_{n \in H} \widehat{h}_n$ .

Introduisons l'événement  $C_H := [Z_H(w^s) < |\tau_{b\delta(0)\varepsilon(\lambda, k)}^{b\delta(0)\varepsilon(\lambda, k)}(\varphi_{(t_{d+1})})| < Z_H(w^s) + \beta]$ . On a :  $C_H \in \mathcal{W}_\infty^{s+1}$ , et  $\bigcup_{H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})} C_H = W$ , d'après (7) et (8).

Posons, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $C_p := \bigcup_{H \in \mathcal{P}_p(\mathbb{N})} C_H$ .

Soit  $N_s^{\lambda, \delta, n}(w) = \inf\{p \in \mathbb{N}; w \in C_p\}$ .

Alors,  $N_s^{\lambda, \delta, n}$  est une v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable finie p.s.

Munissons l'ensemble dénombrable  $\mathcal{P}_p(\mathbb{N})$  de l'ordre lexicographique, après avoir identifié ses éléments avec les suites strictement croissantes de  $p$  entiers naturels.

Soit alors, lorsque  $w \in C_p$ ,  $H_p^0$  le plus petit élément  $H$  de  $\mathcal{P}_p(\mathbb{N})$ .

Notons  $(e_i^{0p})_{1 \leq i \leq p}$  la suite rangée dans l'ordre chronologique décroissant des éléments de  $(\widehat{e}_i)_{i \in H_p^0}$ .



■

**Remarque 3.**

Soit  $N'$  une v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable à valeurs entières. Alors la suite  $(e_i^{0N'})_{1 \leq i \leq N'}$  ainsi définie avec les notations de la preuve :

$$e_i^{0N'} = \sum_{p \in \mathbb{N}_{p \geq i}} 1_{[N'=p]} e_i^{0p} \text{ vérifie p.s. } Q_{N'}(w) \text{ sur } [N' \geq N_s^{\lambda, \delta, n}]$$

et  $(G_i^{0N'})_{1 \leq i \leq N'}$ , la suite des débuts est formée de v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurables et est strictement décroissante.

Afin de pouvoir, à chacun des niveaux essentiels de  $s_0 + \ell_0$  à  $s_0$ , insérer, si besoin est,  $K_s^{\lambda, \delta, n} + N_s^{\lambda, \delta, n}$  remontées "horizontales" permettant de configurer convenablement la trajectoire sur  $]t_d, t_{d+1}[$ , nous aurons besoin de la notion d'excursions-tampons. C'est l'objet du :

**Lemme 16.**

Etant donnée  $(e_{\lambda, \delta, n_i}^{*s})_{1 \leq i \leq q_s}$  une suite de v.a. à valeurs dans les excursions de  $w^s$  antérieures à  $t_{d+1}$ , et rangée dans l'ordre chronologique strictement décroissant ( $q_s$  est une v.a. à valeurs entières), soit  $g_i^{*s}$  (resp :  $h_i^{*s}$ ) le début, resp. la hauteur, de  $e_i^{*s}$ ,  $1 \leq i \leq q_s$ . Il existe deux suites d'excursions de  $w^s$ , les excursions-tampons,  $(e_i^{*s'})_{1 \leq i \leq q_s}$  et  $(e_i^{*s''})_{1 \leq i \leq q_s}$  vérifiant :

$$(9) \quad \begin{cases} g_{q_s}^{*s'} < g_{q_s}^{*s} < g_{q_s}^{*s''} < g_{q_s-1}^{*s'} < \dots < g_1^{*s''} < g_{t_{d+1}}(w^s) \\ h_{q_s}^{*s'} < h_{q_s}^{*s''} < h_{q_s-1}^{*s'} < \dots < h_1^{*s''} < \varepsilon_s^* \end{cases}$$

pour toute v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable  $\varepsilon_s^* > 0$ .

Lorsque les  $(g_i^{*s})_{1 \leq i \leq q_s}$  sont  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurables, il en est de même pour les débuts  $(g_i^{*s'})_{1 \leq i \leq q_s}$  et  $(g_i^{*s''})_{1 \leq i \leq q_s}$  de leurs tampons.

**Preuve du lemme 16.**

Posons  $g_0^{*s'} := g_{t_{d+1}}(w^s)$ ,  $h_0^{*s'} := \varepsilon_s^*$ , et  $g_{q_s+1}^{*s} := t_d$ .

On utilise à nouveau la variation infinie des trajectoires browniennes sur tout intervalle.

Il suffit de choisir :

- pour  $e_i^{*s''}$ ,  $1 \leq i \leq q_s$ , l'excursion de  $w^s$  la plus haute parmi ses excursions dont le support est inclus dans  $]g_i^{*s}, g_{i-1}^{*s'}[$  et la hauteur inférieure à  $h_{i-1}^{*s'}$ .
- pour  $e_i^{*s'}$ ,  $1 \leq i \leq q_s$ , l'excursion de  $w^s$  la plus haute parmi ses excursions dont le support est inclus dans  $]g_{i+1}^{*s}, g_i^{*s}[$  et la hauteur inférieure à  $h_i^{*s''}$ .

Pour ces choix des excursions-tampons, les mesurabilités sont évidentes ainsi que (4). ■

On introduit alors  $(e_i^{+s})_{1 \leq i \leq \nu_s}$  la suite d'excursions de  $w^s$  obtenue en concaténant :

- $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s})_{1 \leq i \leq q_s}$
- $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s'})_{1 \leq i \leq q_s}$  et  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s''})_{1 \leq i \leq q_s}$  la suite finie constituée de toutes les autres
- $(e_{\lambda, \delta, i}^{y^s})_{1 \leq i \leq q_s}$  excursions de  $w^s$  de hauteur supérieure à  $h_{q_s}^{*s'}$  et antérieures à  $g_{t_{d+1}}(w^s)$

réarrangées dans l'ordre chronologique strictement décroissant.

Le lemme suivant va mettre en évidence le caractère héréditaire de la construction de ces familles d'excursions.

**Lemme 17.**

*Etant données deux suites  $(e_{\lambda, \delta, n, i}^{*s})_{1 \leq i \leq q_s}$  et  $(e_{\lambda, \delta, n, i}^{+s})_{1 \leq i \leq \nu_s}$  vérifiant les hypothèses du lemme précédent, sur l'événement*

$E_s^{\lambda, \delta, n}$  : "toutes les excursions-tampons sont  $< 0$  ainsi que les excursions  $(e_{\lambda, \delta, i}^{*s})_{1 \leq i \leq \pi_s}$ , toutes les autres excursions de  $(e_{\lambda, \delta, n, i}^{+s})_{1 \leq i \leq \nu_s}$  sont  $> 0$ " (où  $\pi_s$  est une v.a.  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable à valeurs entières majorée par  $q_s$ ),

les excursions  $(e_{\lambda, \delta, n, i}^{*s})_{\pi_s+1 \leq i \leq q_s}$  sont "conservées" au niveau  $s-1$ . C'est-à-dire qu'il existe une unique famille d'excursions de  $w^{s-1}$  que nous noterons  $(e_{\lambda, \delta, n, i}^{*s-1})_{1 \leq i \leq q_s - \pi_s}$  (pour toute remontée possible de  $w^s$ ) vérifiant :

- $\text{supp}(e_{\lambda, \delta, n, i}^{*s-1}) \supset \text{supp}(e_{\lambda, \delta, n, \pi_s+i}^{*s})$  pour tout  $i$  de 1 à  $q_s - \pi_s$
- les supports des  $e_{\lambda, \delta, n, i}^{*s-1}$  sont 2 à 2 disjoints.

Par ailleurs, les débuts des  $(e_{\lambda, \delta, n, i}^{*s-1})_{1 \leq i \leq q_s - \pi_s}$  sont des v.a.  $\mathcal{W}_\infty^s$ -mesurables.

**Preuve du lemme 17.**

Conformément à la Proposition 1, sur  $E_s^{\lambda, \delta}$ , puisque chaque excursion  $(e_i^{*s})_{\pi_s+1 \leq i \leq q_s}$  est positive et encadrée par ses deux excursions-tampons qui, elles, sont négatives puisque par construction le dernier minimum de  $w^s$  avant le début de  $e_i^{*s}$  est atteint sur le support de son tampon de gauche, le minimum suivant étant atteint sur le support de son tampon de droite,  $e_{i-\pi_s}^{*s-1}$  est l'excursion de  $w^{s-1}$  qui commence à l'instant où, pour la dernière fois, le tampon de gauche de  $e_i^{*s}$  atteint son minimum, et se termine à l'instant où, pour la première fois, le tampon de droite atteint le minimum du tampon de gauche. ■

Pour que l'hérédité ait effectivement lieu, sur  ${}^c E_s^{\lambda, \delta}$ , nous choisirons les  $(e_i^{*s-1})_{1 \leq i \leq q_s - \pi_s}$  arbitrairement parmi les excursions de  $w^{s-1}$ , mais

$\mathcal{W}_\infty^s$  -mesurabilité et à supports disjoints.

Il s'agit maintenant de définir les v.a.  $(Y_{\lambda,\delta,n,s}^{d+1})_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$ ,  $(Y_{\lambda,\delta,n,<s>}^{d+1})_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$  et  $(Z_{\lambda,\delta,n,s}^{d+1})_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$ . Cette définition prendra forme à partir d'une arborescence importante, aussi allons-nous utiliser un langage de type programmation proche du langage Pascal.

Afin de ne pas alourdir les notations, nous omettrons les indices  $\lambda, \delta, n$  dans le "programme" de construction du B-m.r( $r_{d+1}$ )  $\Gamma^{\lambda,\delta,n}$ , c'est-à-dire des familles de v.a. précédentes.

Avant de commencer l'écriture du "programme", introduisons la notation suivante :

- $t_j^{p_{s_0+k}}$  désigne le début  $\tilde{e}p_j^k$  pour tout  $j$  de 0 à  $p_k^0$  et  $k$  de  $\ell_0$  à 0.
- $t_i^{e_{N_s}}$  désigne le début de  $e_i^{0N_s}$ ,  $1 \leq i \leq N_s$ .

Etant données deux suites finies d'excursions de  $w$ ,  $(e'_i)_i$  et  $(e''_j)_j$  nous noterons :  $(e'_i)_i \vee (e''_j)_j$  la suite d'excursions obtenue en réarrangeant dans l'ordre chronologique décroissant (sans répétition) la concaténée de ces deux suites.

### Variables

$s, \text{esslevel}(s), \sharp(s), n_s, K_s, N_s, R, \text{level}(M)$  (where  $M \in \mathcal{W}_\infty$ ) of integers.

$\square, \square_1$  of strings

$Y_s^{d+1}, Y_{\langle s \rangle}^{d+1}$  of finite sequences of signs.

$(ep_j^s)_j, (ec_j^s)_j, (e_j^{*s})_j, (e_j^{+s})_j$  of finite sequences of excursions

$M_\Psi, M_\square, M_{\square_1}$  of elements of  $\mathcal{W}_\infty$

$\mathcal{B}, \mathcal{A}$  of finite set of strings.

### Initialisation

$s := s_0 + \ell_0, \text{esslevel}(s) := s_0 + \ell_0$

$M_\Psi := [B_{|_{[0, t_d]}^{s_0 + \ell_0}} = \tilde{\Gamma}_{|_{[0, t_d]}^{\ell_0}}]$

For all  $s$ , do :

$(e_j^{*s})_j := (ep_j^s)_j \vee (ec_j^s)_j$

(the first ones are the protecting excursions and the second the building excursions).

$Y_s^{d+1} := (\text{sgn}(e_j^{+s}))_j, n_s(w) = \sharp(e_j^{+s})_j.$

End for.

If  $w \notin M_\Psi$ , do triv  $(w, s_0 + \ell_0)$

End if.

While no zero of  $w^s$  occurs on  $(t_d, t_{d+1})$ , do

$(e_j^{+s})_j := (e_{t_j^{ps}}(w^s))_j$

$Y_{\langle s \rangle}^{d+1} := \lambda_s$

$s := s - 1, \text{esslevel}(s) := s - 1$

End while.

do  $\square := s - s_0, M_\square := M_\Psi \cap [\exists u \in (t_d, t_{d+1}), B_u^s = 0]$

$\text{level}(M_\square) := s, \mathcal{A} := \{s - s_0\}, \mathcal{B} := \{s\}, \sharp(s) := 1$

( $\sharp(s)$  représente le nombre de démarrages du procédé de configuration de la trajectoire ayant déjà eu lieu depuis le niveau  $s_0 + \ell_0$  jusqu'au niveau  $s$  compris,  $\mathcal{A}$  la généalogie de  $w$  et  $\mathcal{B}$  l'ensemble des niveaux où ces démarrages ont effectivement lieu).

### Label 1

do :  $(ep_j^s)_j := \text{arranged}(e_{t_j^{\text{esslevel}(s)}}(w^s))_j, \mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{\square\}, \sharp(s) := 1 + \sharp(s - 1)$

$(ec_j^s)_j := (e_{t_i^{cN_s}}(w^s))_i$

$\sigma := s.$

For  $i = 0$ , to  $K_\sigma - 1$ , do :

$(e_j^{+s})_j$  is the sequence associated to  $(e_j^{*s})_j$  by lemma 16

$Y_{\langle s \rangle}^{d+1} :=$  "the plug excursions and the excursion beginning at  $t_i^s$  are  $< 0$ , all the other excursions of  $(e_j^{+s})_j$  are  $> 0$ "  
 If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{\langle s \rangle}^{d+1}$  do triv  $(w, s)$

End if.

let  $(e_j^{*s-1})_j$  be associated to  $(e_j^{+s})_j$  by lemma 17

do :

$(e_j^{*s-1})_j := (e_j^{*s-1})_j \vee (e_{t_i^s}(w^{s-1}))$

do  $\square_1 := \square$ ,  $\square := \square h$  ( $h$  like horizontal)

$M_{\square} := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{\langle s \rangle}^{d+1}]$ , level( $M_{\square}$ ) :=  $s$ ,

$s := s - 1$ , esslevel( $s$ ) :=  $esslevel(\sigma)$ ,  $i := i + 1$ ,  $\sharp(s) := \sharp(\sigma)$

End for.

For  $i = 0$  to  $N_{\sigma} - 1$ , do :

$(e_j^{+s})_j$  is associated with  $(e_j^{*s})_j$  by lemma 16

$Y_{\langle s \rangle}^{d+1} :=$  "the plug excursions and the first building excursion are  $< 0$ , all the other excursions of  $(e_j^{+s})_j$  are  $> 0$ "

If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{\langle s \rangle}^{d+1}$  do triv  $(w, s)$

End if.

let  $(e_j^{*s-1})_j$  be the sequence associated to  $(e_j^{+s})_j$  by lemma 17

$\square_1 := \square$ ,  $\square := \square h$

$M_{\square} := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{\langle s \rangle}^{d+1}]$ , level( $M_{\square}$ ) :=  $s$ ,  $\mathcal{A} := \mathcal{A} \cup \{\square\}$

$s := s - 1$ , esslevel( $s$ ) :=  $esslevel(\sigma)$ ,  $i := i + 1$ ,  $\sharp(s) := \sharp(\sigma)$

End for.

do  $(e_j^{+s})_j$  is the sequence associated with  $(e_j^{*s})_j$  by lemma 16

$Y_{\langle s \rangle}^{d+1} := \lambda_{esslevel(\sigma) - s_0}$

If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{\langle s \rangle}^{d+1}$  do triv  $(w, s)$

End if.

do  $\square_1 := \square$ ,  $\square := \square v$ , ( $v$  like vertical)

$M_{\square} := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{\langle s \rangle}^{d+1}]$ , level( $M_{\square}$ ) :=  $s$ ,  $\mathcal{A} := \mathcal{A} \cup \{\square\}$ ,  $\sharp(s) := \sharp(\sigma)$

while no zero of  $w^s$  occurs on  $(t_d, t_{d+1})$  and esslevel ( $s$ )  $> s_0$ , do :

$s := s - 1$ , esslevel( $s$ ) :=  $esslevel(s + 1) - 1$ ,  $\sharp(s) := \sharp(\sigma)$

$(e_j^{+s})_j :=$  arranged  $(e_{t_j^{esslevel(s)(w^s)}})$

$Y_{\langle s \rangle}^{d+1} := \lambda_{esslevel(s) - s_0}$

If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{\langle s \rangle}^{d+1}$  do triv  $(w, s)$

End if.

do  $\square_1 := \square, \square := \square v$   
 $M_\square := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{<s>}^{d+1}]$ , level( $M_\square$ ) :=  $s$ ,  $\mathcal{A} := \mathcal{A} \cup \{\square\}$

End while.

if esslevel( $s$ )  $\geq s_0$ , go to **Label 1**

End if.

(the horizontal rises have correctly configured the path if no following vertical rise vanishes on  $(t_d, t_{d+1})$ , else the procedure must return to the beginning).

do  $R(w) := s, s := s - 1$ , esslevel( $s$ ) := essmevel( $s + 1$ ) - 1  
while  $s > 0$ , let :

$(e_j^{*s})_j$  be the sequence associated to  $(e_j^{+(s+1)})_j$  by lemma 17  
 $(e_j^{+s})_j$  be the sequence associated to  $(e_j^{*s})_j$  by lemma 16  
 $Y_{<s>}^{d+1} :=$  "all the plug excursions are  $< 0$ , the others  $> 0$ "  
If  $Y_s^{d+1} \neq Y_{<s>}^{d+1}$  do triv ( $w, s$ )

End if.

do  $\square_1 := \square, \square := \square v$   
 $M_\square := M_{\square_1} \cap [Y_s^{d+1} = Y_{<s>}^{d+1}]$ , level( $M_\square$ ) :=  $s$ ,  $\mathcal{A} := \mathcal{A} \cup \{\square\}$   
 $s := s - 1$ , esslevel( $s$ ) := esslevel( $s + 1$ ) - 1,  $\#(s) := \#(s + 1)$

End while.

let  $(e_j^{*0})_j$  be the sequence associated to  $(e_j^{+1})_j$  by lemma 17  
 $(e_j^{+0})_j := (e_j^{*0})_j$   
 $Y_{<0>}^{d+1} := \lambda_0$   
if  $\varphi(t_d)\varphi(t_{d+1}) < 0$ , do :  $(e_j^{+0})_j := (e_j^{+0})_j \vee (e_{t_{d+1}(w^0)})$   
 $Y_{<0>}^{d+1} := Y_{<0>}^{d+1} \vee (sgn(\varphi(t_{d+1})))$   
if  $Y_0^{d+1} \neq Y_{<0>}^{d+1}$  do triv ( $w, 0$ )

End if.

do  $\square_1 := \square, \square := \square v$   
 $M_\square := M_{\square_1} \cap [Y_0^{d+1} = Y_{<0>}^{d+1}]$ , level( $M_\square$ ) := 0,  $\mathcal{A} := \mathcal{A} \cup \{\square\}$

End prog.

function triv( $w, s$ )  
for  $i = s - 1$  to 0, do :  
 $(e_j^{+i}) := \emptyset$   
 $Y_{<i>}^{d+1} := \emptyset$

End function.

function arranged  $(e_\alpha(\varphi))_{\alpha \in A}$   
 where  $\varphi \in W$ , and  $(e_\alpha(\varphi))_{\alpha \in A}$  is a finite family of excursions of  $\varphi$ .  
 let  $g_\alpha$  be the beginning of  $e_\alpha$   
 $G$  the set of all the  $g_\alpha$  of the finite family  
 $\gamma$  the end of  $G$ ,  $N$  its cardinality  
 $\Gamma := G$ ,  $\gamma :=$  the end of  $\Gamma$   
 while  $\sharp(\Gamma) > 0$ , do :  
 $i := N - \sharp(\Gamma) + 1$   
 $e_i :=$  "the excursion of the family which begins at  $\gamma$ "  
 $\Gamma := \Gamma \setminus \{\gamma\}$

End while.

do arranged  $(e_\alpha(\varphi))_{\alpha \in A} := (e_1, e_2, \dots, e_N)$

End function.

function  $(e_\alpha(\varphi))_{\alpha \in A} \vee (e_\beta(\varphi))_{\beta \in B}$   
 do  $(e_\alpha(\varphi))_{\alpha \in A} \vee (e_\beta(\varphi))_{\beta \in B} :=$  arranged  $(e_\gamma(\varphi))_{\gamma \in A \cup B}$

End function.

Pour réaliser ce programme, nous avons dû supposer  $s_0$  fini. Nous allons justifier maintenant que cela est possible.

Nous commencerons par choisir une partie finie  $\Pi$  de  $N_{d+1}$  telle que :

$$P(A_3^\varepsilon) > 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{d}{d_0}\right) - \frac{3\varepsilon}{5d_0}$$

où

$$A_3^\varepsilon := A_2^\varepsilon \cap \left( \bigcup_{(\lambda, \delta, n) \in \Pi} H_{\lambda, \delta, n} \right)$$

Ensuite, chaque v.a.  $R^{\lambda, \delta, n}$  étant à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , il existe un entier naturel  $s_0$  tel que :

$$P(A_4^\varepsilon) > 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{d}{d_0}\right) - \frac{4\varepsilon}{5d_0}$$

où

$$A_4^\varepsilon := A_3^\varepsilon \cap \left( \bigcup_{(\lambda, \delta, n) \in \Pi} (H_{\lambda, \delta, n} \cap [R^{\lambda, \delta, n} \geq 0]) \right)$$

car  $s_0 + \ell_0 - R^{\lambda, \delta, n}$  ne dépend pas de  $s_0$ .

C'est un tel  $s_0$  que nous choisissons (le plus petit par exemple).

Par ailleurs, les v.a.  $n_s^{\lambda, \delta, n}(w)$  étant finies (à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ), il existe une famille d'entiers déterministes  $(n_s^{0, s_0})_{0 \leq s \leq s_0 + \ell_0}$  vérifiant :

$$P(A_*^\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{d+1}{d_0}\right)$$

où

$$A_*^\varepsilon := A_4^\varepsilon \cap \left( \bigcup_{(\lambda, \delta, n) \in \Pi} (H_{\lambda, \delta, n} \cap \bigcap_{s=0}^{s_0 + \ell_0} (n_s^{\lambda, \delta, n} \leq n_s^{0, s_0})) \right)$$

Ceci va nous permettre "d'amener" les v.a.  $Y_{\lambda, \delta, n, s}^{d+1}$  au cardinal  $n_s^{0, s_0} + 1$ .

- Si besoin est, on complète les  $(e_j^{+s})_{0 \leq j \leq n_s(w)}$  en  $(e_j^{+s})_{0 \leq j \leq n_s^0}$  par adjonction d'excursions de  $w^s$  postérieures à 1 et choisies  $\mathcal{W}_{t_{d+1}}^{s+1}$ -mesurablement.
- Sinon par troncature, on ne conserve que les  $(n_s^0 + 1)$  premières excursions. On agit de façon similaire sur les  $Y_{\lambda, \delta, n, <s>}^{d+1}$  en les amenant elles aussi au cardinal  $n_s^{0, \lambda, \delta, n}$  par adjonction de +1 ou troncature, pour tous  $(\lambda, \delta, n) \in N_{d+1}$ . Le programme fournit alors des v.a. qui satisfont les conditions de la Proposition 2.

Soit  $\varepsilon' > 0$  une constante. Nous allons définir les v.a.  $\varepsilon'_\sigma$ ,  $0 \leq \sigma \leq s_0 + \ell_0$  pour chaque  $(\lambda, \delta, n)$  appartenant à  $N_{d+1}$  de la manière suivante :

Soit  $\square \in B_{\lambda, \delta, n}$ , notons momentanément  $s := \text{level} M_\square$ .

Sur  $M_\square$ , pour tout  $\sigma$  vérifiant  $\sharp(\sigma) = \sharp(s)$ , posons :

$$\varepsilon'_\sigma := \varepsilon' . 2^{-\sharp(\sigma)}$$

(La raison de la division par 2 du dernier  $\varepsilon'$  à chaque retour à son début du procédé de configuration de la trajectoire entre  $t_d$  et  $t_{d+1}$  vient du fait que l'excursion qui enjambe  $t_d$  peut, à chacun de ces retours, absorber une nouvelle excursion intermédiaire - de support inclus entre  $t_d$  et  $t_{d+1}$  - dont la hauteur ne dépasse pas le dernier  $\varepsilon'$ ).

$\varepsilon_3^\sigma(w)$  désigne la différence entre  $\varepsilon'_\sigma$  et la plus haute des excursions de  $w^s$  de support inclus dans  $[t_d, t_{d+1}]$  et de hauteur strictement inférieure à  $\varepsilon'_\sigma$ .

On introduit ensuite,  $(\lambda, \delta, n)$  étant toujours fixé dans  $N_{d+1}$  :

$$\varepsilon''_\sigma(w) := \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n \left( s_0 + \sum_{i=s_0+1}^{s_0 + \ell_0} i \right)} \wedge \frac{\beta'}{\sum_{j=1}^{N_s} j + s_0 + \ell_0 - N_s}$$

où  $s$  et  $\sigma$  vérifient les mêmes conditions que précédemment,

- le premier terme devant permettre à la trajectoire de rester proche de  $\varphi$  sur  $[0, t_d]$  à  $\varepsilon$  près ; en effet, la trajectoire depuis le niveau  $(s_0 + \ell_0)$  va subir  $\ell_0$  remontées verticales au cours de chacune desquelles elle recevra une excursion négative, elle-même affectée par autant de tampons que de remontées horizontales ayant déjà eu lieu, ainsi que de  $s_0$  remontées horizontales à un tampon. Le facteur de  $2 \cdot 2^n$  au dénominateur représente un majorant du nombre total de tampons ayant pu affecter la trajectoire au niveau 0, et  $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ , nombre qui, rappelons le, minore  $\varepsilon_2(w)$ , la variation totale maximale qu'elle a pu subir.



- le deuxième terme doit permettre à la trajectoire de s'approcher à l'instant  $t_{d+1}$  de  $\varphi(t_{d+1})$  à  $2\beta'$  près ; les  $N_s$  excursions constructives étant affectées d'autant de tampons que leur ordre d'intervention. Les remontées suivantes sont horizontales et apportent chacune un tampon. Soit au plus  $(s_0 + \ell_0 - N)$  tampons supplémentaires.

On peut désormais énoncer le

**Lemme 18.**

Pour tout  $(\lambda, \delta, n) \in \Pi$ , et  $w \in A_*^\varepsilon \cap H_{(\lambda, \delta, n)}$  à condition de choisir :  $\varepsilon' = \varepsilon_1 = \beta = 2\beta' = \frac{\varepsilon}{28} \wedge \alpha$ , et  $\varepsilon_\sigma^* := \varepsilon_3^\sigma \wedge \varepsilon_\sigma''$ ,  $0 \leq \sigma \leq s_0 + \ell_0$ , on a :

$$\|\Gamma^{\lambda, \delta, n}|_{[0, t_{d+1}]} - \varphi|_{[0, t_{d+1}]}\|_\infty \leq \varepsilon$$

et

$$|\Gamma_{t_{d+1}}^{\lambda, \delta, n}(w) - \varphi(t_{d+1})| \leq \varepsilon_1$$

**Preuve du lemme 18.**

Soit  $\square \in B_{\lambda, \delta, n}$ ,  $s := \text{level} M_\square$ ,  $w \in M_\square \cap (\cap_{i=0}^{K_s-1} [Y_{s-i}^{d+1} = Y_{<s-i>}^{d+1}])$ . Etant donné le choix des  $\varepsilon_{s-i}^*(w)$ , il est facile de vérifier par récurrence, grâce au lemme 13 et aux définitions du lemme 15 que  $t_i^s$  est le début de la première excursion de  $w^{s-i}$ ,  $0 \leq i \leq K_s - 1$ , à support dans  $[t_d, t_{d+1}]$  et de hauteur supérieure à  $\varepsilon'_{s-i} = \varepsilon'_s$  puisque les excursions intermédiaires importantes (c'est-à-dire celles dont la hauteur dépasse la hauteur du plus petit tampon), au cours des  $K_s$  remontées, sont toutes positives, donc reçoivent à chaque remontée un tampon dont la hauteur a été prévue pour que la hauteur de l'excursion "composée" ne dépasse jamais  $\varepsilon'_\sigma$ .

Ainsi, toutes les excursions de  $w^s|_{[t_{K_s}^s, t_{d+1}]}$  sauf celle qui enjambe  $t_d$  sont de hauteur inférieure à  $\varepsilon'_\sigma$ .

De même, lors des  $N_s$  remontées suivantes pour  $w \in M_\square \cap (\cap_{i=0}^{K_s+N_s-1} [Y_{s-i}^{d+1} = Y_{<s-i>}^{d+1}])$ , l'excursion qui enjambe  $t_d$  ainsi que les excursions positives de supports contenus dans  $[t_d, t_{d+1}]$  reçoivent successivement  $N_s$  tampons de hauteur suffisamment petite pour que la première reste proche de  $\tau_{s-i}^0(w)(\varphi(t_d))$  à  $\varepsilon_1$ -près, et les autres gardent une hauteur inférieure à  $\varepsilon'_{s-i}$ .

Quant à l'excursion qui enjambe  $t_{d+1}$ , elle voit sa hauteur augmenter de  $\sum_{i=1}^{N_s} h_i$

et de la hauteur de  $\sum_{i=1}^{N_s} i = \frac{1}{2} N_s (N_s + 1)$  tampons. D'où notre choix de  $\varepsilon''_\sigma$ .

Pour ce qui est des excursions de protection  $(\tilde{e}p_j^s)_{1 \leq j \leq p_k^0}$ , leur variation est contrôlée au cours des  $(K_s + N_s)$  remontées. Par ailleurs, comme les excursions de  $w^s$  qu'elles n'englobent pas sont suffisamment petites, leur intervention,

même dans des conditions extrêmes, ne permettra pas à la trajectoire remontée au niveau 0 de s'éloigner de  $\varphi$  sur  $[0, t_d]$  de plus de  $\varepsilon$ .

Remarquons encore que chacune des v.a.  $\varepsilon'_\sigma, \varepsilon''_\sigma, \varepsilon_3^\sigma$  ou  $\varepsilon_\sigma^*$  est  $\mathcal{W}_\infty^{s+1}$ -mesurable, comme cela doit être.

Aussi, jusqu'à présent, nous pouvons affirmer que  $\Gamma^{\lambda, \delta, n}$ , pour tout  $(\lambda, \delta, n) \in N_{d+1}$  est convenablement défini en tant que B.m-r( $s_0 + \ell_0$ ), et que, pour tout  $(\lambda, \delta, n) \in \Pi$ , et  $w \in A_\varepsilon^* \cap H_{(\lambda, \delta, n)}$ ,  $\Gamma^{\lambda, \delta, n}(w)$  approche à la fois  $\varphi$  à  $\varepsilon$  sur  $[0, t_d]$ , et à l'instant  $t_{d+1}$  à  $\varepsilon_1$ -près.

Analysons maintenant plus en détail son comportement sur  $[t_d, t_{d+1}]$ . Notons  $\gamma_{t_d}$  le premier instant postérieur à  $t_d$  où l'une des itérées  $w^\sigma$ ,  $0 \leq \sigma \leq s_0 + \ell_0$  s'annule sur  $]t_d, t_{d+1}[$ , et  $\sigma_0$  le niveau correspondant.

Sur  $[t_d, \gamma_{t_d}]$ , d'après le lemme 12, les trajectoires de  $w^\sigma$  et  $w^{s_0+r_d}$  se déduisent l'une de l'autre par isométrie : elles ont la même variation totale.

Ainsi, étant donnée l'hypothèse sur  $w^{s_0+r_d}$  puisque  $w \in A_0^\varepsilon$ ,

$$\sup\{|w_t^\sigma - w_u^\sigma|; (t, u) \in [t_d, \gamma_{t_d}]^2\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous nous intéresserons aux  $\sigma < \sigma_0$ , et nous appellerons  $s$  le premier niveau  $< \sigma_0$  de retour à son début du procédé de configuration.

D'après la minimalité de  $\gamma_{t_d}$ , ou bien  $w^{s-1}$  est positive sur  $[t_d, \gamma_{t_d}]$  ou bien  $w^{s-1}$  y est négative, et  $\inf\{w_u^{s-1}; u \in [t_d, \gamma_{t_d}] > -\varepsilon'_{s-1}\}$ .

Dans le premier cas, l'annulation de  $w^s$  peut intervenir sur l'une des excursions de  $w^{s-1}$  de support inclus dans  $[t_d, t_{d+1}]$ , auquel cas l'excursion qui enjambe  $t_d$  verra sa hauteur augmenter d'au plus  $\varepsilon'_{s-1}$ . Ce phénomène pouvant se produire lors de chaque retour au début du procédé de configuration, nous avons défini les  $\varepsilon'_\sigma$  en conséquence.

Sinon l'annulation de  $w^s$  intervient sur l'excursion de  $w^{s-1}$  qui enjambe  $t_{d+1}$ , situation que nous allons préciser :

Le rectangle du plan définit par les droites d'équations :  $x = t_d, x = t_{d+1}, y = \inf_{\tau_{b\delta(esslevel(s-1))}^{b\delta(0)\varepsilon(\lambda, esslevel(s-1))}}(\varphi|_{[t_d, t_{d+1}]})$  et  $y = \sup_{\tau_{b\delta(esslevel(s-1))}^{b\delta(0)\varepsilon(\lambda, esslevel(s-1))}}(\varphi|_{[t_d, t_{d+1}]})$  contient par définition la trajectoire  $\tau_{b\delta(esslevel(s-1))}^{b\delta(0)\varepsilon(\lambda, esslevel(s-1))}(\varphi|_{[t_d, t_{d+1}]})$ , et d'après

le choix de  $\alpha_0$ , sa hauteur ne dépasse pas  $\frac{\varepsilon}{4}$ . Par ailleurs, la trajectoire de  $w^{s-1}|_{[t_d, t_{d+1}]}$  ne peut déborder de ce rectangle qu'entre  $t_d$  et  $\gamma_{t_d}$  d'au plus  $\frac{\varepsilon}{2} + 2\beta + \varepsilon_1$ , sinon d'au plus  $\varepsilon'_{s-1} + 2\beta + 2\beta'$  par application du lemme 13.

Au fur et à mesure des remontées suivantes, ce rectangle va se déplacer et la trajectoire correspondante  $w^\sigma$  ne débordera du rectangle déplacé que dans les mêmes conditions quantitatives.

Le second cas ne pose guère de problème. Il est comparable au premier : la trajectoire à chaque remontée est contenue dans un rectangle qui se déplace,

avec un débordement possible d'amplitude majorée par  $\frac{\varepsilon'}{2}$ , la hauteur du rectangle étant dans ce cas majorée par :

$$\frac{\varepsilon}{2} + 2\beta + \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon}{4} + 2\beta + 2\beta' .$$

Finalement, il nous suffit de choisir :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon' = \beta = 2\beta' := \frac{\varepsilon}{28} , \quad \text{pour qu'au niveau } 0 :$$

$$\|\Gamma^{\lambda, \delta, n}|_{[t_d, t_{d+1}]}(w) - \varphi|_{[t_d, t_{d+1}]} \|_{\infty} \leq \varepsilon$$

■

On en déduit immédiatement que  $\mathcal{P}_{d+1}(\varepsilon)$  a lieu. Donc, la propriété  $\mathcal{P}_d(\varepsilon)$  est établi par récurrence en particulier pour  $d = d_0$ , ce qui achève la démonstration de la Proposition.

On en déduit le :

**Théorème 1.**

*Pour presque tout  $w \in W$ , l'orbite de  $w$*

$$o(w) = \{T^n w; n \in \mathbb{N}\}$$

*est dense dans  $W$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

**Preuve du théorème 1.**

On utilise le :

**Lemme 19.**

*Soit  $\Gamma$  une somme disjointe de B.m-r( $r$ ). Alors,  $\forall F \in \mathcal{W}_{\infty}$ ,  $P(F) > 0 \Rightarrow P(\Gamma(F)) > 0$ .*

**Preuve du lemme 19.**

On se ramène immédiatement au cas d'un B.m-r( $r$ ). On montre alors en revenant à la définition, par récurrence, que pour tout  $i$  de  $r$  à 0,  $\Gamma^i(F)$  est non négligeable.

■

On raisonne maintenant par l'absurde :

Soit  $\varphi \in W|_{[0,1]}$  et  $\beta > 0$ .

Supposons  $P(E) = \alpha > 0$  où  $E = \{w \in W/o(w)|_{[0,1]} \cap B(\varphi, \beta) = \emptyset\}$ .

Soit  $\varepsilon := \min\left(\frac{\alpha}{2}, \beta\right)$ .

Alors, avec les notations de la Proposition 5,

$$P(F) > 0 , \quad F := E \cap A_*^{\varepsilon}$$

D'après le lemme 19,  $P(\Gamma(F)) > 0$ .

Or,  $E$  est invariant par  $T$  (vérification immédiate), et  $\Gamma(F) \subset \Gamma(E) \subset T^{-r}T^r(E) = E[\text{mod}0]$ .

Donc,  $P(\Gamma(F) \cap E) > 0$ , ce qui est contradictoire, car dans  $\Gamma(F)$ , toutes les trajectoires appartiennent à  $B(\varphi, \beta)$ , tandis que dans  $E$ , les orbites des trajectoires ne rencontrent pas  $B(\varphi, \beta)$ . ■

### Remarque de synthèse

Dans ce paragraphe, la difficulté supplémentaire est double : protéger l'acquis sur tout le segment  $[0, t_d]$ , et configurer convenablement la trajectoire sur  $[t_d, t_{d+1}]$  en entier. Seule une analyse plus précise de la transformation de Lévy obtenue au lemme 18 permet une utilisation fructueuse des méthodes mises en place dans les 2 premiers paragraphes : grâce à une meilleure connaissance des remontées, on peut au lemme 18 constater que la somme disjointe de B-m.r construite à l'issue du programme répond aux exigences de la Proposition 4.

## Références

- [BEKSY] M.T. Barlow, M. Emery, F.B. Knight, S. Song, M. Yor :  
Autour d'un théorème de Tsirel'son sur des filtrations browniennes et non-browniennes.  
Sém. Prob. XXXII, Lect. Notes in Maths. 1686, Springer (1998).
- [E,S] M. Emery, W. Schachermayer :  
On Vershik's standardness criterion and Tsirel'son's notion of cosiness.  
Sém. Prob. XXXV, Lect. Notes in Maths. 1755, Springer (2001).
- [M] M. Malric :  
Densité des zéros des transformées de Lévy itérées d'un mouvement brownien.  
C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (336), (2003).
- [R] V.A. Röhlin :  
On the fundamental ideas in Measure Theory.  
Math. Sb. 25, p. 107-150, 1949. Eng. translation : A.M.S. Transl. 71, p.3-55 (1952).

[R,Y] D. Revuz, M. Yor :  
Continuous Martingales and Brownian Motion.  
Third edition. Springer-Verlag. Berlin (1999).