



**HAL**  
open science

## **Contribution to the modeling of a liquid film flowing down inside a vertical circular tube.**

Samuel Ndoumbe, François Lusseyran, Boujema Izrar

### ► **To cite this version:**

Samuel Ndoumbe, François Lusseyran, Boujema Izrar. Contribution to the modeling of a liquid film flowing down inside a vertical circular tube.. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, 2003, 331, pp.173-178. <10.1016/S1631-0721(03)00025-1>. <hal-00009280>

**HAL Id: hal-00009280**

**<https://hal.science/hal-00009280v1>**

Submitted on 4 Oct 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Contribution to the modeling of a liquid film flowing down inside a vertical circular tube.

## Contribution à la modélisation d'un film annulaire tombant.

Samuel Ndoumbe <sup>a,b</sup>, François Lusseyran <sup>b</sup>, Boujema Izrar <sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire d'Energétique de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA), CNRS-UMR 7563, 2, avenue de la Forêt de Haye, BP 160, 54504 Vandoeuvre cedex, France. Courriel : ndoumbe@limsi.fr*

<sup>b</sup> *Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI), CNRS-UPR 3251, Université Paris-Sud, 91403 ORSAY cedex, France. Courriel : lussey@limsi.fr*

<sup>c</sup> *Laboratoire d'Aérothermique, CNRS-UPR 9020, 3, avenue de la recherche Scientifique 45076 Orleans la Source, France. Courriel : izrar@cnrs-orléans.fr.*

*Tel. : 33(0)1 69 85 81 72 Fax. : 33(0)1 69 85 80 88.*

This note focuses on the development of a 2D model of a thin liquid film flowing down inside a vertical pipe. This model is based on the large wavelength assumption and valid for high Reynolds and Weber numbers.

Un modèle 2D décrivant le ruissellement d'un film liquide mince à l'intérieur d'une conduite cylindrique maintenue verticale est développé. Il est basé sur l'hypothèse de grande longueur d'onde et valable pour des grands nombres de Reynolds et de Weber.

### I. INTRODUCTION

Various models relate to falling films on vertical or inclined plate and small Reynolds number whereas most experimental observations at high Reynolds number are made inside cylindrical tubes. The aim of this note is to present a 2D model which accounts for small and medium cylinder curvature at high Reynolds number, in order to make a more realistic comparison with the experimental data [3].

### II. MAIN EQUATIONS

We consider a viscous fluid film flowing down a vertical infinite pipe of radius  $R_c$  having a common interface with a quiescent gas phase. System (1-4) defines the full equations of motion for the annular falling film. Two small parameters are defined :  $\epsilon$  which is the ratio between the film thickness  $h_0$  and the characteristic length and  $\epsilon_r$  for the reduced curvature of the cylinder. In order to reduce these model equations, we use a boundary-layer theory. To satisfy the assumptions of large Reynolds numbers ( $\epsilon Re = O(1)$ ) and  $\epsilon^2 W = O(1)$ , equations (10-11) are simplified by dropping the terms of order  $\epsilon/Re$  or higher. We assume that the instantaneous streamwise velocity  $u$  is described by a self-similar velocity profile (14). These reduced equations are integrated through the local and instantaneous thickness  $h$  of the liquid film. The final model is a system of two coupled equations (16a, 16b) involving  $h$  and the local flow rate  $q$ , as the only dependent variables. We give an approximated model at order  $\epsilon_r^2$ .

### III. DISCUSSION

If one follows the Shkadov procedure [6] the smallness parameter  $\epsilon$  may be effectively included in the dimensionless numbers of the flow, avoiding to specify a characteristic length  $l_c$ . The fact remains that, in the cylindrical geometry the parameter associated with the curvature cannot be eliminated in the same way and the specification of  $l_c$  is mandatory. In this case, the characteristic length may be defined as the length of the neutral mode [7] or the length of the most energetic wave [5]. The cylindrical model developed in this study could be improved by writing the streamwise velocity field as polynomials functions [1]. The dimensionless equation are found by using time and space scales based only on the physical properties of liquid which are the kinematic viscosity and the gravity acceleration. This may contribute to give more information of the nonlinear terms included in the functions  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$ .

---

## I. INTRODUCTION

Les divers développements théoriques réalisés sur le film tombant se divisent en deux groupes. Le premier prend en compte les deux phases de l'écoulement à travers des équations d'évolution décrivant les variables de chaque phase. Le second groupe, dans lequel nous nous plaçons, considère que la phase gazeuse est inactive. Cependant, les différents modèles [1] existant dans la littérature ne concernent que le film ruisselant sur une plaque plane verticale ou inclinée alors que la majeure partie des observations expérimentales [2], compatibles avec des situations industrielles, sont faites à l'intérieur des tubes cylindriques de diamètre variant de 0.5 à 10 cm. Pourtant, on sait par expérience que le cylindre est plus stable à haut débit que le cas plan ce qui n'est pas explicable par la seule périodicité azimutale. L'objet de cette note est de présenter un modèle  $2D$  qui tienne compte de la courbure du cylindre et les grands nombres de Reynolds afin de permettre une future comparaison plus réaliste avec les données expérimentales [3].

## II. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Nous considérons le ruissellement d'un film liquide mince le long de la paroi interne d'une conduite cylindrique verticale (figure 1) de section circulaire et de rayon  $R_c$  sous l'effet de la gravité. Le liquide est newtonien incompressible et isotherme. Les points de départ de la recherche des équations d'évolution du film sont les équations de Navier-Stokes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1a)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u}, \quad (1b)$$

où  $\rho$  est la densité,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $p$  la pression et  $\vec{u} = (u, v)$  la vitesse. A ces équations sont jointes les conditions aux limites :

- de non glissement à la paroi :

$$u = v = 0, \quad (2)$$

- cinématique à l'interface :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v = 0, \quad (3)$$

- de saut dynamique à la surface libre :

$$p - p_g = - \frac{\sigma}{\left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{R_c - h} \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) \right] \quad (4a)$$

$$+ \frac{2\mu}{1 + \frac{\partial h}{\partial x}} \left[ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \\ 2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 1 - \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (4b)$$

où  $\sigma$  est le coefficient de tension superficielle et  $p_g$  la pression du gaz supposée constante.

La solution de base correspond à un film tombant avec une épaisseur constante  $h_0$  le long de toute la conduite. Cette solution est obtenue à partir des équations précédentes en supposant que l'écoulement est permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) et établi suivant l'axe ( $v = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ ) de la conduite, dans ce cas nous obtenons des équations réduites dont la solution est la composante axiale de la vitesse

$$u = \frac{g R_c^2}{4\nu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_c} \right)^2 + 2 \left( 1 - \frac{h_0}{R_c} \right)^2 \log \left( \frac{r}{R_c} \right) \right], \quad (5)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique. Le débit est

$$q_0 = \int_{R_c - h_0}^{R_c} 2 \pi r u dr \quad (6)$$

correspondant à une vitesse débitante

$$u_0 = \frac{q_0}{\pi R_c^2 \left(1 - \left(1 - \frac{h_0}{R_c}\right)^2\right)}. \quad (7)$$

L'épaisseur  $h_0$  est solution de l'équation

$$8\nu^2 Re \left( R_c^2 - (R_c - h_0)^2 \right) = g h_0 R_c^4 \times \left[ 1 - 4 \left(1 - \frac{h_0}{R_c}\right)^2 + 3 \left(1 - \frac{h_0}{R_c}\right)^4 - 4 \left(1 - \frac{h_0}{R_c}\right)^4 \log \left(1 - \frac{h_0}{R_c}\right) \right] \quad (8)$$

où  $Re = u_0 h_0 / \nu$  est le nombre de Reynolds. L'écart entre  $h_0$  et l'épaisseur de Nüsselt  $(3\nu^2 Re/g)^{1/3}$  est négligeable pour  $R_c > 1.5$  cm.

Dans la suite, nous introduisons une nouvelle variable  $y = R_c - r$ , l'expression (5) de la vitesse devient

$$u = \frac{g R_c^2}{2\nu} \left[ \frac{y}{R_c} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{R_c}\right)^2 + \left(1 - \frac{h_0}{R_c}\right)^2 \log \left(1 - \frac{y}{R_c}\right) \right], \quad (9)$$

où  $\frac{g R_c^2}{2\nu} \left(\frac{y}{R_c} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{R_c}\right)^2\right)$  correspond au profil de base d'un film liquide ruisselant sur un plan vertical et  $\frac{g R_c^2}{2\nu} \left(\left(1 - \frac{h_0}{R_c}\right)^2 \log \left(1 - \frac{y}{R_c}\right)\right)$  est le terme de correction du profil plan lié à la courbure du cylindre. La paroi du cylindre est identifiée par l'équation  $y = 0$  et l'interface par la relation  $y = h(x, t)$

Pour tenir compte de l'hypothèse de grande longueur d'onde [4], nous introduisons le rapport d'aspect  $\epsilon = h_0/l_c$  où  $l_c$  est la longueur caractéristique suivant l'axe des  $x$ . Nous négligeons les termes d'ordre supérieur à  $\epsilon^2$  pour aboutir aux équations réduites de Navier-Stokes sous la forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{R-y} = 0 \quad (10a)$$

$$-\frac{1}{Re} \left( -\frac{1}{R-y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{Fr^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \epsilon - \frac{\epsilon^2}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (10b)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\epsilon}{Re} \left( -\frac{1}{R-y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{v}{(R-y)^2} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \epsilon^2 = 0 \quad (10c)$$

La condition d'adhérence et les conditions aux limites restent inchangées alors que les conditions dynamiques donnent

$$p = p_g - \frac{W}{R-h} + \frac{2\epsilon}{Re} \left( -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \epsilon^2 W \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2(R-h)} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (11a)$$

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\epsilon^2}{Re} \left[ -\frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (11b)$$

où  $W = \sigma / (\rho h_0 u_0^2)$  est le nombre de Weber,  $R = R_c/h_0$  le rayon adimensionnel et  $Fr = u_0/\sqrt{gh_0}$  le nombre de Froude qui prend la valeur  $\sqrt{Re/3}$  en géométrie plane verticale. Dans les équations (10 - 11), les différentes variables ont été réduites de la manière suivante :

$$x \rightarrow x/l_c, \quad r \rightarrow R - y/h_0, \quad t \rightarrow t/(l_c/u_0), \quad u \rightarrow u/u_0, \quad v \rightarrow \epsilon v/u_0, \quad p \rightarrow p/(\rho u_0^2). \quad (12)$$

Il est à noter que  $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\partial}{\partial x} \sim \epsilon$ . L'hypothèse de grande longueur d'onde impose  $\epsilon$  petit devant l'unité. En faisant l'hypothèse que  $\epsilon Re = O(1)$  et  $\epsilon^2 W = O(1)$ , nous pouvons négliger dans les équations (10b, 10c, 11a, 11b) le terme

en  $\epsilon/Re$ ,  $\epsilon^2/Re$  et  $\epsilon^2$ , pour obtenir :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{R-y} = 0 \quad (13a)$$

$$-\frac{1}{Re} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{Fr^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \epsilon = 0 \quad (13b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (13c)$$

$$p|_{y=h} = p_g - \frac{W}{R-h} - \epsilon^2 W \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2(R-h)} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (13d)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=h} = 0. \quad (13e)$$

### III. ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DU FILM TOMBANT

Il apparaît donc naturel de ramener toutes les équations réduites (10 - 11) à l'interface par intégration sur l'épaisseur. Cette technique est d'usage courant dans les problèmes où l'inconnue principale est localisée sur une partie de la frontière du domaine. Le relèvement des équations (10a, 10b) sur l'épaisseur se fait avec l'hypothèse que le profil de vitesse est auto similaire

$$u(x, y, t) = U(x, t) \frac{\varphi(y)}{\varphi(h(x, t))} \quad (14)$$

où  $\varphi(y) = y/R - 1/2(y/R)^2 + (1 - h/R)^2 \ln(1 - y/R)$  et  $U$  la vitesse locale à l'interface du film. On pose  $\psi(y) = \varphi(y)/\varphi(h(x, t))$ . A partir de la définition de  $q = \int_0^h \left(1 - \frac{y}{R}\right) u dy$ , le débit instantané du film, le relèvement intégral consiste à écrire (13a, 13b) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h (R-y) u dy \right) + (R-h) \left( \frac{\partial h}{\partial x} u|_{y=h} + v|_{y=h} \right) = 0 \quad (15a)$$

$$R \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h (R-y) u^2 dy \right) - \frac{R}{\epsilon Re} \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} + \left( \frac{h^2}{2} - hR \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} (p|_{y=h}) - \frac{1}{\epsilon Fr^2} \right) = 0 \quad (15b)$$

En tenant compte des conditions aux limites (13-11), on aboutit donc à un système de deux équations dont les inconnues sont  $h$  l'épaisseur instantanée et  $q$  :

$$\left(1 - \frac{h}{R}\right) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (16a)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (q^2 \Phi_1(h)) - \frac{q \Phi_2(h)}{\epsilon Re} + \left(h - \frac{h^2}{2R}\right) \left( \frac{\partial}{\partial x} (p|_{y=h}) - \frac{1}{\epsilon Fr^2} \right) = 0 \quad (16b)$$

où  $\int_0^h (R-y) u^2 dy = Rq^2 \Phi_1(h)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = q \Phi_2(h)$ . Les expressions des fonctions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont facilement déterminées par les relations

$$\Phi_1(h) = R^2 \left( \int_0^h \psi^2(\zeta) \zeta d\zeta \right) / \left( \int_0^h \psi(\zeta) \zeta d\zeta \right)^2 \text{ et } \Phi_2(h) = R\psi'(0) / \left( \int_0^h \psi(\zeta) \zeta d\zeta \right).$$

En définissant un nouveau petit paramètre  $\epsilon_r = 1/R$  qui mesure les effets de courbure, nous faisons un développement en série des équations (16a-16b) et obtenons :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (1 + h\epsilon_r + h^2\epsilon_r^2) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A(\epsilon_r, h) q^2) - B(\epsilon_r, h) \frac{q}{\epsilon Re} - C(\epsilon_r, h) \frac{1}{\epsilon Fr^2} \\ & + C(\epsilon_r, h) \left[ \epsilon^2 W \left( \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \epsilon_r - \frac{1}{2} \frac{\partial h^3}{\partial x} - h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \epsilon_r^2 \right) - W \frac{\partial h}{\partial x} \epsilon_r^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (17b)$$

où  $A(\epsilon_r h) = \frac{6}{5h} + \frac{7}{10}\epsilon_r + \frac{139}{350}h\epsilon_r^2$ ,  $B(\epsilon_r h) = -\frac{3}{h^2} - \frac{3}{2h}\epsilon_r - \frac{21}{20}\epsilon_r^2$ ,  $C(\epsilon_r h) = 2h - h^2\epsilon_r$ .

On retrouve le cas plan en faisant tendre vers l'infini le rayon de la conduite, ce qui redonne le modèle de Shkadov correspondant aux équations (17a,17b) avec  $\epsilon_r = 0$ .

#### IV. DISCUSSION ET CONCLUSION

Ce modèle décrivant le ruissellement d'un film liquide dans une conduite cylindrique verticale permet d'explorer la dynamique linéaire du film dans des gammes de nombres de Reynolds correspondant à un régime d'écoulement interne laminaire ( $\leq 700$ ).

Si on suit la démarche de Shkadov [6] on peut certes inclure le paramètre de petitesse dans les nombres adimensionnels de l'écoulement et ainsi éviter de spécifier une échelle de longueur axiale. Ce n'est plus le cas en géométrie cylindrique où les termes de courbure imposent d'explicitier  $l_c$ . Dans ce cas, on peut définir la longueur caractéristique comme étant la longueur du mode neutre [7] ou la longueur d'onde de l'onde la plus énergétique [5]. Une autre démarche consiste d'une part à prendre comme échelle de longueur caractéristique  $l_c$  construite à partir de deux grandeurs physiques telles que  $\nu$  et  $g$  [1] et d'autre part à introduire un nouveau petit paramètre lié à la courbure du cylindre dont l'expression sera  $l_c/R_c$ . Cette démarche permettrait d'obtenir un modèle dont la construction se ferait à partir du profil de vitesse semi-parabolique dont la forme polynômiale s'adapte bien aux développements déjà initiés par [1] et d'avoir accès aux termes en  $\epsilon^2$  et ceux propres à la configuration cylindrique et qui sont englobés dans  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . En pratique le film plan est réputé moins résistant aux perturbations extérieures (vibrations, action de l'écoulement gazeux,...) que le film annulaire. Pourtant, du point de vue théorique, en considérant la très faible influence du rayon de courbure sur l'épaisseur moyenne du film, il est généralement considéré que son rôle est négligeable. Il serait donc intéressant, en partant d'une analyse linéaire des instabilités axiales, de quantifier l'influence du rayon sur les taux de croissance.

- 
- [1] RUYER-QUIL C., MANNEVILLE P., Improved modeling of down inclined planes, Eur. Phys. J. B. 15 (2000), 357-369.
  - [2] KARAPANTSIOS T. D., KARABELAS A. J., Longitudinal characteristic of wavy falling films, Int. J. Multiphase Flow 21 (1995), 119-127.
  - [3] NDOUMBE S., LUSSEYRAN F., IZRAR B., Etude longitudinale de la zone d'apparition des vagues à l'interface d'un film tombant, 15<sup>ième</sup> congrès Français de Mécanique, (2001).
  - [4] IZRAR, B., LUSSEYRAN, F., Chaotic behavior of an annular film of liquid unstabilized by an interfacial shear stress, Instabilities in Multiphase Flows ed. by G. Gouesbet and A. Berlemont, Plenum Press, New York (1993).
  - [5] NDOUMBE S., LUSSEYRAN F., IZRAR B., Three dimensional waves in the annular falling film flow, Proceedings of Fourth ICMF New-Orleans, (2001).
  - [6] SHKADOV, V. YA., Wave conditions in the flow of thin layer of viscous liquid under the action of gravity, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza 1 (1967), 43.
  - [7] TRIFONOV Y. Y., TSVELODUB O. Y., Nonlinear waves on the surface of falling liquid film. Part 1. J. Fluid. Mech, 229 (1991), 531-554

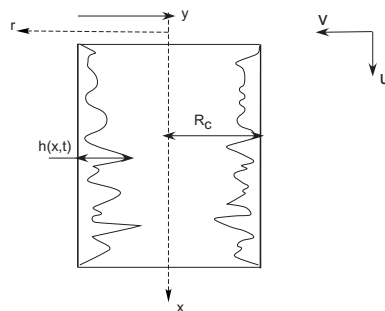


FIG. 1: Représentation de la géométrie de l'écoulement.