



HAL
open science

Conjecture de l'inertie modérée de Serre

Xavier Caruso

► **To cite this version:**

| Xavier Caruso. Conjecture de l'inertie modérée de Serre. 2005. hal-00009201

HAL Id: hal-00009201

<https://hal.science/hal-00009201v1>

Preprint submitted on 29 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Conjecture de l'inertie modre de Serre

Xavier Caruso

Septembre 2005

Abstract

Let K be a local field of mixte characteristics. We assume that the residue field is perfect. Let X_K be a proper smooth scheme over K admitting an integer model X which is proper and semi-stable. In this article, we prove a period isomorphism linking the tale cohomology of $X_{\bar{K}}$ with coefficients in $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ and the log-crystalline cohomology of the special fiber of X . Nevertheless, we have a restriction on the absolute ramification of K and the degree of the cohomologies.

We apply the theory to deduce a complete proof of the Serre conjecture on the tame inertia.

Rsum

On considre K un corps complet pour une valuation discrte, de caractristique nulle et dont le corps rsiduel est suppos parfait de caractristique p . On appelle \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K , et \bar{K} une clture algbrique. Soit X_K un schma propre et lisse sur K admettant un modle propre et semi-stable X sur \mathcal{O}_K . Dans cet article, on dmontre un isomorphisme de priodes reliant le r -ime groupe de cohomologie tale de $X_{\bar{K}}$ coefficients dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et un r -ime groupe de cohomologie log-cristalline de la fibre spciale de X . Nous avons toutefois la restriction $er < p - 1$ (et une restriction lgrement plus forte si $n > 1$) o e dsigne l'indice de ramification absolu de K .

On en dduit une preuve complte de la conjecture de Serre sur l'inertie modre (voir [Ser72]).

Table des matires

1	Introduction	2
2	Les objets d'algbre linaira	3
2.1	La catgorie \mathcal{M}^r	3
2.1.1	L'anneau S	4
2.1.2	Dfinition des catgories	4
2.2	Les objets tus par p	5
2.3	Foncteurs vers les representations galoisiennes	8
2.3.1	Un anneau de priodes	8
2.3.2	La version contravariante	9
2.3.3	La version covariante	11
2.3.4	Lien entre les foncteurs T_{st}^* et T_{st*}	12

3	Les faisceaux sur le site log-syntomique	16
3.1	Rappels et prliminaires	16
3.1.1	Log-schmas et sites usuels	16
3.1.2	Topologie log-syntomique	17
3.1.3	Plusieurs bases	18
3.2	Les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}$	18
3.2.1	Dfinition et description locale	18
3.2.2	Les oprateurs ϕ_s et N	20
3.3	Le cas de la caractristique p	21
3.3.1	Une nouvelle description des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_1^{[s]}$	21
3.3.2	Les faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$	23
3.3.3	Les faisceaux $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ et $\bar{\mathcal{J}}^{[s]}$	24
3.3.4	Les faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{car}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$	25
4	Calcul de la cohomologie cristalline	26
4.1	En caractristique p	26
4.1.1	Des isomorphismes sur les faisceaux	26
4.1.2	Des isomorphismes sur les groupes de cohomologie	29
4.1.3	Fin de la preuve	33
4.1.4	Reformulation sur la base E_1	39
4.1.5	Le cas $r = 0$	44
4.2	Dvissages	47
5	Calcul de la cohomologie tale	48
5.1	Les faisceaux \mathcal{S}_n^s	49
5.2	La preuve	50
5.2.1	Le foncteur j_\star	51
5.2.2	Le calcul de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$	51
5.2.3	Le calcul de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$	52
5.2.4	Le calcul de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$	53
5.3	Une conjecture de Serre	54

1 Introduction

Tout au long de cet article, on considre p un nombre premier et k un corps parfait de caractristique p . On note $W = W(k)$ l’anneau des vecteurs de Witt coefficients dans k et K_0 son corps des fractions. On note σ le Frobenius sur k , sur W et sur K_0 . On considre K une extension totalement ramifie de K_0 de degr e . On fixe π une uniformisante de K et on note $E(u)$ son polynme minimal sur K_0 . Il s’agit d’un polynme d’Eisenstein. On note de plus \mathcal{O}_K l’anneau des entiers de K . Le corps rsiduel \mathcal{O}_K/π s’identifie k .

On fixe \bar{K} (resp. \bar{k}) une clture algbrique de K (resp. de k) et on dfinit G_K (resp. G_k) comme le groupe de Galois absolu de K (resp. de k). On dsigne par K^{nr} (resp. K^{mr}) l’extension maximale non ramifie (resp. modrment ramifie) de K et I comme (resp. I_s) le groupe d’inertie (resp. d’inertie sauvage), c’est--dire le groupe de Galois de \bar{K} sur K^{nr} (resp. sur K^{mr}). Le quotient $I_t = I/I_s$ est le groupe d’inertie modre.

Le but de cet article est de comparer, lorsque X est un schma propre et semi-stable sur \mathcal{O}_K , la cohomologie log-cristalline (dfinie par Kato — voir [Kat89]) de la fibre spciale de X et la

cohomologie étale de $X_{\bar{K}} = X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}$. Ces thormes de comparaison s'inscrivent dans une grande ligne amorcée par Grothendieck, Tate et Raynaud et poursuivie par Fontaine, Messing, Faltings, Kato, Tsuji, Breuil... Nous nous intéressons particulièrement aux cas des coefficients de torsion. Précisément nous obtenons le thorme :

Thorme 1.1. *On garde les notations précédentes et on fixe r un entier vérifiant $er < p - 1$. Si $X_n = X \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p^n$, on a un isomorphisme canonique de modules galoisiens :*

$$H_i^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(r) = T_{st\star}(H_{log-cris}^i(X_n/(S/p^n S)))$$

pour tout $i < r$ (et aussi $i = r$ si $n = 1$).

Dans ce thorme S et $T_{st\star}$ désignent respectivement une certaine W -algèbre, et un certain foncteur d'une catégorie de S -modules de torsion $\underline{\mathcal{M}}^r$ vers la catégorie des \mathbb{Z}_p -représentations galoisiennes, tous deux introduits par Breuil dans [Bre97a] (pour le cas $e = 1$) et [Bre99] (pour le cas général), et traduits dans [Car].

Comme conséquence du thorme 1.1 et des résultats de [Car], nous donnons une réponse affirmative à une question formulée par Serre dans le paragraphe 1.13 de [Ser72] :

Thorme 1.2. *On garde les notations précédentes et on fixe r un entier quelconque. Soient V la restriction au groupe d'inertie I de la \mathbb{F}_p -représentation $H_i^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee$ ($o \ll^\vee \gg$ signifie que l'on prend le \mathbb{F}_p -dual) et V^{ss} la semi-simplifiée de V . Alors les poids de l'inertie modère sur V^{ss} sont tous compris entre 0 et er .*

Cet article s'articule comme suit. Les deux chapitres qui suivent cette introduction se bornent à présenter les principaux objets : le chapitre 2 est consacré aux objets d'algèbre linéaire (l'anneau S , les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et les foncteurs $T_{st\star}^*$ et $T_{st\star}$), alors que le chapitre 3 plus géométrique introduit le site log-syntomique et les faisceaux \mathcal{O}_n^{st} et $\mathcal{J}_n^{[s]}$, ainsi que certaines variantes, qui s'avèreront cruciaux pour la preuve du thorme 1.1.

Dans le chapitre 4, on prouve que le groupe de cohomologie $H_{log-cris}^r(X_n/(S/p^n S))$ peut être muni de structures supplémentaires qui en font un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ (auquel on peut alors appliquer le foncteur $T_{st\star}$). La démonstration se découpe en deux parties : en premier lieu, on montre le résultat lorsque $n = 1$, puis on l'étend à tout n par un dévissage.

Finalement, dans le chapitre 5, on étudie la cohomologie étale et on prouve le thorme 1.1, d'où nous déduisons directement le thorme 1.2.

Ce travail a été accompli dans le cadre de ma thèse de doctorat en mathématique que je prépare sous la direction de Christophe Breuil. Je tiens à le remercier vivement ici pour les conseils, les explications et les réponses qu'il a toujours su me fournir, ainsi que pour la relecture patiente des versions préliminaires de ce texte.

2 Les objets d'algèbre linéaire

2.1 La catégorie \mathcal{M}^r

On reprend les notations du début de l'introduction et on fixe dans tout ce chapitre un entier r positif ou nul vérifiant l'inégalité $er < p - 1$. On rappelle que e désigne le degré de l'extension K/K_0 , c'est-à-dire l'indice de ramification absolue de K .

2.1.1 L'anneau S

Soit $W[u]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée u coefficients dans W . Par définition, S est le complété p -adique de l'enveloppe aux puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$ compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW[u]$. Concrètement, S est la sous- W -algèbre de $K_0[[u]]$ suivante :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, w_i \in W[u], \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}$$

ou encore :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!}, w_i \in W, \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0 \right\}$$

où $q(i)$ désigne le quotient de la division euclidienne de i par e .

On munit S d'un Frobenius ϕ défini comme l'unique application σ -semi-linéaire vérifiant $\phi(u^i/q(i)!) = u^{pi}/q(i)!$ et d'un opérateur de monodromie N défini comme l'unique application W -linéaire vérifiant $N(u^i/q(i)!) = -iu^i/q(i)!$. On munit également S d'une filtration : pour tout entier positif ou nul n , on définit $\text{Fil}^n S$ comme le complété p -adique de l'idéal engendré par les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$ pour $i \geq n$. On a $\text{Fil}^0 S = S$, $\text{Fil}^n S \subset \text{Fil}^{n-1} S$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fil}^n S = 0$, et certaines compatibilités vis-à-vis des opérateurs savoir $N(\text{Fil}^n S) \subset \text{Fil}^{n-1} S$ et, pour $0 \leq n \leq p-1$, $\phi(\text{Fil}^n S) \subset p^n S$. Cela permet de définir, pour $0 \leq n \leq p-1$, l'application $\phi_n = \frac{\phi}{p^n} : \text{Fil}^n S \rightarrow S$. L'élément $\phi_1(E(u))$ est une unité de S , on le notera c par la suite.

On note $S_n = S/p^n S$. Le Frobenius, l'opérateur de monodromie et la filtration passent au quotient et définissent des structures analogues sur S_n .

2.1.2 Définition des catégories

Par définition, un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est donné :

1. d'un S -module \mathcal{M} isomorphe à une somme directe (finie) de S_n pour des entiers n convenables ;
2. d'un sous-module $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} contenant $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$;
3. d'une flèche ϕ -semi-linéaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vérifiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r} \phi_r(s) \phi_r((E(u))^r x)$$

pour tout élément $s \in \text{Fil}^r S$ et tout élément $x \in \mathcal{M}$ et telle que $\text{im } \phi_r$ engendre \mathcal{M} en tant que S -module ;

4. d'une application W -linéaire $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que :
 - pour tout $s \in S$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
 - $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Une flche entre deux objets \mathcal{M} et \mathcal{M}' de cette catgorie est un morphisme S -linaire de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' respectant la filtration et commutant aux applications ϕ_r et N .

Nous renvoyons [Car] pour l'tude de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Il y est prouv en particulier que $\underline{\mathcal{M}}^r$ est une catgorie ablienne et artinienne.

2.2 Les objets tus par p

Dans ce paragraphe, nous nous intrissons la sous-catgorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$ forme des objets tus par p . Cette dernire catgorie est quivalente une catgorie d'objets sur $k[u]/u^{ep}$ plus simple manipuler que les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (voir [Car]). Cependant, nous aurons besoin d'une description encore diffrente utilisant des objets sur $k[u]/u^p$, et c'est celle-ci que nous allons dtailler dans ce paragraphe.

On commence par rappeler le rsultat suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tu par p . Alors l'application :*

$$S_1 \otimes_{k[u]/u^e} \text{Fil}^r \mathcal{M} / E(u) \text{Fil}^r \mathcal{M} \xrightarrow{\text{id} \otimes \phi_r} \mathcal{M}$$

est un isomorphisme (o S est vu comme un $k[u]/u^e$ -module via le Frobenius $\phi : u^i \mapsto u^{pi}$).

Dmonstration. Le cas gnral est similaire au cas $e = 1$ trait dans [Bre97a] (corollaire 2.2.2.2). \square

On dduit directement de ce lemme le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.2. *Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tus par p . Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application S_1 -linaire telle que $f(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{N}$. Alors il existe une unique application S_1 -linaire $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \text{Fil}^r \mathcal{N} \\ \phi_r \downarrow & & \downarrow \phi_r \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{g} & \mathcal{N} \end{array}$$

Soit $\tilde{S} = k[u]/u^p$. On munit \tilde{S} d'un Frobenius ϕ , unique application σ -semi-linaire vrifiant $\phi(u^i) = u^{ip}$, et d'un opérateur de monodromie N , unique application k -linaire vrifiant $N(u^i) = -iu^i$. On dfinit galement une filtration sur \tilde{S} en posant pour tout entier n , $\text{Fil}^n \tilde{S} = u^{en} \tilde{S}$. On dispose d'un morphisme d'anneaux $S_1 \rightarrow \tilde{S}$ qui envoie u sur u et toutes les puissances divisibles $u^i/q(i)!$ sur 0 pour $i \geq p$.

On dfinit la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ en adaptant la dfnition de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ est la donne suivante :

1. un \tilde{S} -module $\tilde{\mathcal{M}}$ libre de rang fini ;
2. un sous-module $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$ contenant $\text{Fil}^r \tilde{S} \cdot \tilde{\mathcal{M}} = u^{er} \tilde{\mathcal{M}}$;
3. une flche ϕ -semi-linaire $\phi_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ telle que l'image de ϕ_r engendre $\tilde{\mathcal{M}}$ en tant que \tilde{S} -module ;
4. une application k -linaire $N : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ telle que :

- pour tout $\lambda \in \tilde{S}$ et tout $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
- $u^e N(\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}) \subset \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$
- le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow c_\pi N \\ \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}} \end{array}$$

o c_π est la rduction de c dans \tilde{S} .

Les morphismes entre deux objets de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}$ sont les applications \tilde{S} -linaires qui respectent le Fil^r et commutent au Frobenius et l'oprateur de monodromie.

On dispose pour les objets de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}$ de la proposition suivante, fort utile pour les manipulations :

Proposition 2.2.3. *Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ un objet de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}$. Alors il existe (e_1, \dots, e_d) une \tilde{S} -base de $\tilde{\mathcal{M}}$ et des entiers n_1, \dots, n_d compris entre 0 et er tels que :*

$$\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} = \bigoplus_{i=1}^d u^{n_i} k[u] / u^p \cdot e_i.$$

Une telle famille (e_1, \dots, e_d) est appele une base adapte de $\tilde{\mathcal{M}}$.

Dmonstration. C'est une consquence directe du thorme de structure des modules de type fini sur un anneau principal (l'anneau tant ici $k[u]$). \square

Par ailleurs, on dispose d'un foncteur T de la sous-catgorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$ forme des objets tus par p dans la catgorie $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}$ dfini de la faon suivante. Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tu par p . C'est en particulier un S_1 -module libre de rang fini et le produit tensoriel $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_{S_1} \tilde{S}$ est un \tilde{S} -module libre de rang fini. On dispose d'une projection canonique $\mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$. On dfinit $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ comme l'image de $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ par cette projection, et on vrifie facilement que les oprateurs ϕ_r et N dfinis sur \mathcal{M} passent au quotient pour fournir respectivement des oprateurs $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ encore nots ϕ_r et N .

Notons $\kappa = \ker(S_1 \rightarrow \tilde{S})$ et prouvons un lemme concernant ce noyau :

Lemme 2.2.4. *On suppose $r \neq 0$, c'est--dire $1 \leq er \leq p-2$. Alors $\kappa \subset \text{Fil}^r S_1$, $\phi_r(\kappa) \subset \text{Fil}^r S_1$ et $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$.*

Dmonstration. On constate que κ est l'idal engendr par les $u^i/q(i)!$ pour $i \geq p$. En particulier, on a bien $\kappa \subset \text{Fil}^r S_1$. Par ailleurs, puisque $r > 0$, on a, pour $i \geq p$:

$$\phi_r \left(\frac{u^i}{q(i)!} \right) = \phi_r \left(u^{er} \frac{u^{i-er}}{q(i)!} \right) = \phi_r(u^{er}) \phi \left(\frac{u^{i-er}}{q(i)!} \right) = c^r \frac{u^{p(i-er)}}{q(i)!}. \quad (1)$$

Comme $er \leq p-2$, on a $p(i-er) \geq 2p$ et donc $\phi_r(\kappa)$ est inclus dans κ' , l'idal engendr par les $u^i/q(i)!$ pour $i \geq 2p$. En particulier, $\phi_r(\kappa) \subset \text{Fil}^r S_1$.

D'autre part, si $i \geq 2p$, on a $p(i-er) > i + ep$ et $v_p((p(i-er))!) > v_p(q(i)!)$ d'o par la formule (1) $\phi_r(u^i/q(i)!) = 0$ (dans S_1). Ainsi $\phi_r(\kappa') = 0$, d'o $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$. \square

On a alors la proposition suivante qui permet de rduire l'tude de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ celle de la catgorie $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}$ et des dvissages.

Proposition 2.2.5. *Le foncteur T est une equivalence de categories*

Dmonstration. Il faut traiter part le cas trivial $r = 0$ qu'on laisse au lecteur. On suppose partir de maintenant $1 \leq er \leq p - 2$.

Prouvons la pleine fidlit du foncteur T . Soient \mathcal{M} et \mathcal{M}' deux objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tus par p et $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un morphisme entre ces objets. On suppose que f vaut 0 dans $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, c'est--dire que $f(\mathcal{M}) \subset \kappa\mathcal{N}$. En particulier, $f(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \kappa\mathcal{N}$ et donc :

$$f \circ \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}) = \phi_r \circ f(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \phi_r(\kappa\mathcal{N}).$$

Par hypothse $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$ engendre tout \mathcal{M} , et donc $f(\mathcal{M}) \subset \phi_r(\kappa\mathcal{N})$. En ritrant l'argument, et puisque $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$ (lemme 2.2.4), on obtient $f(\mathcal{M}) = 0$ et donc $f = 0$, ce qui assure la fidlit du foncteur.

Considrons present \mathcal{M} et \mathcal{N} deux objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tus par p . Notons $\widetilde{\mathcal{M}}$ et $\widetilde{\mathcal{N}}$ leurs images respectives dans la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Soit $\tilde{f} : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{N}}$ un morphisme de la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. On veut montrer qu'il existe un morphisme (ncessairement unique) de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ tel que $f \equiv \tilde{f} \pmod{\kappa\mathcal{N}}$. On construit f par approximations successives. On conside dans un premier temps $f_0 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un relev S_1 -liniare quelconque de \tilde{f} . Comme $\kappa\mathcal{N} \subset \text{Fil}^r \mathcal{N}$, le relev f_0 est automatiquement compatible Fil^r et les applications f_0 et ϕ_r commutent modulo $\kappa\mathcal{N}$. Par le corollaire 2.2.2, il existe une unique application S_1 -liniare $f_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{f_0} & \text{Fil}^r \mathcal{N} \\ \phi_r \downarrow & & \downarrow \phi_r \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{N} \end{array}$$

On vrifie directement que $f_0 \equiv f_1 \pmod{\kappa\mathcal{N}}$, ce qui implique d'une part que f_1 respecte les Fil^r et d'autre part, par un argument analogue celui utilis pour la fidlit, que $\phi_r \circ f_0 \equiv \phi_r \circ f_1 \pmod{\phi_r(\kappa\mathcal{N})}$. Ainsi f_1 et ϕ_r commutent modulo $\phi_r(\kappa\mathcal{N})$. On construit de mme f_2 partir de f_1 , et celui-ci convient.

Il reste prouver que f_2 commute automatiquement \mathcal{N} . Il s'agit nouveau d'un argument analogue. Pour plus de prcisions, on pourra consulter la fin de la preuve du lemme 6.1.3 de [Car].

Montrons pour finir l'essentielle surjectivit. Soit $\widetilde{\mathcal{M}}$ un objet de la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$. Considrons (e_1, \dots, e_d) une base adapte de $\widetilde{\mathcal{M}}$ pour les entiers n_1, \dots, n_d . Notons \mathcal{M} le S_1 -module engendr par des lments $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d$ et dfinissons :

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = \text{Fil}^r S_1 \cdot \mathcal{M} + \sum_{i=1}^d u^{n_i} S_1 \cdot \hat{e}_i \subset \mathcal{M}.$$

Soit $\text{pr} : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ l'application S_1 -liniare dfinie par $\text{pr}(\hat{e}_i) = e_i$ pour tout i . Elle est surjective et respecte les Fil^r . Pour tout i , notons \hat{x}_i un relev (*i.e.* un antcdent par pr) de $\phi_r(e_i)$ et dfinissons $\phi_r(\hat{e}_i) = \hat{x}_i$. On prolonge ϕ_r tout $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ (de faon respecter les conditions de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$) obtenant ainsi une application $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, dont il est facile de vrifier que l'image engendre tout \mathcal{M} .

Il reste dfinir un opérateur de monodromie sur \mathcal{M} . Pour cela, on procde nouveau par approximations successives. On commence par dfinir N_0 en imposant la condition de Leibniz

et que $N_0(\hat{e}_i)$ soit un relev de $N(e_i)$. On vrifie immdiatement que $E(u)N_0(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$ et que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N_0 \downarrow & & \downarrow cN_0 \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

commute modulo $\kappa \mathcal{M}$. Une variante du corollaire 2.2.2 assure que l'on peut construire une application N_1 vrifiant la condition de Leibniz et faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N_0 \downarrow & & \downarrow cN_1 \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Mais alors N_1 est un autre relev de N , ce qui implique que $E(u)N_1(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$. Et par ailleurs, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N_1 \downarrow & & \downarrow cN_1 \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

commute modulo $\phi_r(\kappa) \mathcal{M}$. L'application N_2 obtenue partir de N_1 de la mme faon que N_1 a t obtenue partir de N_0 rpond finalement la question. \square

Remarque. Contrairement ce qui se passe pour les objets modulo u^{ep} , il n'est, notre connaissance, pas possible de dcrire un quasi-inverse du foncteur T par une simple formule.

2.3 Foncteurs vers les representations galoisiennes

Il existe deux versions du foncteur vers les representations galoisiennes. La premire, que nous notons $T_{\text{st}\star}$, est covariante et la seconde, T_{st}^* , est contravariante. Nous sommes dans l'obligation de prsenter ici les deux foncteurs et d'tablir les liens qui les relient, car pour ce que nous voulons faire, il sera plus commode d'utiliser la version covariante, mais nous aurons galement besoin d'utiliser les rsultats de [Car] o seulement la version covariante est prsente et tudie.

2.3.1 Un anneau de priodes

Avant de pouvoir dfinir ces foncteurs, il faut introduire l'anneau de priodes \hat{A}_{st} . Cet anneau a une interprétation cohomologique que nous passons sous silence pour l'instant.

Pour tout entier n , on considre l'application :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n & : W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n \\ (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) & \mapsto \hat{a}_0^{p^n} + p\hat{a}_1^{p^{n-1}} + \dots + p^{n-1}\hat{a}_{n-1}^p \end{aligned}$$

o $\hat{a}_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n$ est un relev quelconque de a_i . On note $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)^{\text{DP}}$ l'enveloppe aux puissances divises de $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$ par rapport $\ker \hat{\theta}_n$ (et compatibles avec les puissances divises canoniques

sur $pW_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$). Les $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)^{\text{DP}}$ forment un systme projectif pour les applications de transition donnees par le Frobenius sur les vecteurs de Witt. On note A_{cris} la limite projective de ce systme. On voit facilement que le Frobenius sur les vecteurs de Witt induit une application $\phi : A_{\text{cris}} \rightarrow A_{\text{cris}}$. En outre, on dfinit sur A_{cris} une filtration obtenue partir des filtrations donnees par les puissances divises sur $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)^{\text{DP}}$. Si $t < 0$, on pose par convention $\text{Fil}^t A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}$. Par ailleurs, A_{cris} est muni d'une action du groupe de Galois G_K .

Par dffinition \hat{A}_{st} est le complt p -adique de $A_{\text{cris}} \langle X \rangle$. On munit \hat{A}_{st} d'une filtration en posant :

$$\text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{X^i}{i!}, \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0, a_i \in \text{Fil}^{t-i} A_{\text{cris}} \right\}$$

pour tout entier t . On tend le Frobenius \hat{A}_{st} en imposant $\phi(X) = (1 + X)^p - 1$. On vrifie que $\phi(\text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}}) \subset p^t \hat{A}_{\text{st}}$, ce qui permet de dfinir une application $\phi_t = \phi/p^t : \text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$. D'autre part, on dfinit sur \hat{A}_{st} une drivation A_{cris} -linaire, par la formule :

$$N \left(\frac{X^i}{i!} \right) = (1 + X) \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}.$$

On tend galement l'action de G_K tout \hat{A}_{st} . Pour cela, on commence par fixer¹ $\underline{\pi} = (\pi_n)$ un systme compatible de racines p^n -imes de π . Soit $g \in G_K$. On dfinit $\varepsilon_n(g)$ comme l'unique lment de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ vrifiant $g(\pi_n) = \varepsilon_n(g)\pi_n$. La famille des $(\varepsilon_n(g))$ forme un systme compatible de racines p^n -imes de l'unit et par suite un lment $[\varepsilon(g)] \in A_{\text{cris}}$ obtenu partir des representants de Teichmller $[\varepsilon_n(g)] \in W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$. L'action de g sur X est alors donnee par la formule $g(X) = [\varepsilon(g)](1 + X) - 1$. On tend cette action tout \hat{A}_{st} par semi-linarit.

L'anneau S n'est pas sans rapport avec \hat{A}_{st} . Si l'on note $[\underline{\pi}]$ l'lment de \hat{A}_{st} dfini partir du systme (π_n) fix prcdemment, \hat{A}_{st} peut tre vu comme une S -algbre *via* l'unique morphisme W -linaire $S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$ qui envoie u sur $\frac{[\underline{\pi}]}{1+X}$. Ce morphisme est injectif et identifie S aux invariants de \hat{A}_{st} sous l'action du groupe G_K .

2.3.2 La version contravariante

Nous commenons par la version contravariante qui est plus simple dfinir. Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On pose :

$$T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty})$$

o par dffinition $\hat{A}_{\text{st}, \infty} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0/W$ et o le Hom prcdent signifie que l'on ne considere que les morphismes S -linaires, compatibles Fil^r , ϕ_r et N . L'objet $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ est un \mathbb{Z}_p -module de torsion (de type fini) qui hrite d'une action de G_K . On a donc ainsi bien dfini un foncteur de $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catgorie des \mathbb{Z}_p -representations (de torsion) du groupe G_K .

Ce foncteur est tudi en dtail dans [Bre97a] (pour le cas $e = 1$) et dans [Car]. Le thorme suivant rsume ses propriets :

Thorme 2.3.1. *Le foncteur T_{st}^* est exact, pleinement fidle, d'image essentielle stable par quotients et par sous-objets. De plus, si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S -module $S_{n_1} \oplus \dots \oplus S_{n_d}$, alors la representation galoisienne $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ est isomorphe en tant que \mathbb{Z}_p -module $\mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p^{n_d}\mathbb{Z}$.*

¹Ainsi \hat{A}_{st} dpend *a priori* de ce choix. Cependant, on peut montrer qu'il n'en dpend pas isomorphisme canonique prs.

On dispose en outre d'une description plus simple du foncteur T_{st}^* pour les objets tus par p . Considérons pour cela l'anneau $\tilde{A} = \hat{A}_{\text{st}}/p \otimes_{S_1} \tilde{S}$. Comme dans le paragraphe 2.3 de [Car], on montre que \tilde{A} s'identifie à $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi) \langle X \rangle$. Il est possible de décrire les structures supplémentaires sur $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi) \langle X \rangle$. Exactement, $\text{Fil}^t(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi) \langle X \rangle$ est l'idéal engendré par les $\pi_1^{e(t-i)} \frac{X^i}{i!}$. La monodromie est l'unique opérateur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$ -linéaire envoyant $\frac{X^i}{i!}$ sur $(1+X) \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$. Il faut toutefois faire attention à ϕ_t car si $x \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est un multiple de π_1^{et} et si \bar{x} désigne la réduction modulo π de x , alors $\phi_t(\bar{x})$ est la réduction modulo π de $(-1)^t \frac{x^p}{p^t}$ (et pas $\frac{x^p}{p^t}$). On a ensuite la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p . Alors :*

$$T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \tilde{A})$$

où Hom signifie que l'on considère les morphismes \tilde{S} -linéaires et commutant Fil^r , ϕ_r et N .

Démonstration. La tensorisation par \tilde{S} au-dessus de S_1 fournit une application :

$$T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \tilde{A}).$$

On vérifie directement que cette application commute à l'action de Galois.

Soit $\psi \in T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ qui s'envoie sur 0 par l'application précédemment définie. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\mathcal{M}) & \xrightarrow{0} & \tilde{A} \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites de la projection $S_1 \rightarrow \tilde{S}$. Ainsi, en reprenant les notations du lemme 2.2.4, on a $\text{im } \psi \subset \kappa \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. Or ψ commute par définition à ϕ_r , d'où on déduit $\psi \circ \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}) = \phi_r \circ \psi(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \phi_r(\kappa \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}})$. Comme par hypothèse, $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$ engendre \mathcal{M} , il vient $\text{im } \psi \subset \phi_r(\kappa \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}})$. En appliquant maintenant l'argument, et en utilisant $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$, on obtient $\text{im } \psi = 0$ et donc $\psi = 0$. Ceci démontre l'injectivité de la flèche.

Pour la surjectivité, on procède par approximations successives. Soit $\tilde{\psi} : T(\mathcal{M}) \rightarrow \tilde{A}$ un morphisme \tilde{S} -linéaire compatible aux structures. On note $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$ un morphisme S_1 -linéaire faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{A} \end{array}$$

Dans un premier temps, on vérifie qu'automatiquement ψ respecte le Fil^r et commute à ϕ_r modulo $\kappa \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. D'après une variante du corollaire 2.2.2, il existe une unique application S_1 -linéaire ψ_1 faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \\ \phi_r \downarrow & & \downarrow \phi_r \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi_1} & \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \end{array}$$

L'application ψ_1 respecte encore le Fil^r et commute ϕ_r modulo $\phi_r(\kappa)\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. De mme, partir de ψ_1 , on construit ψ_2 , qui respecte le Fil^r et commute ϕ_r sans restriction.

Par un argument analogue (voir la fin de la preuve du lemme 6.1.2 de [Car]), on montre que ψ_2 commute galement N . \square

2.3.3 La version covariante

On commence par une dfnition, dj prsente dans [Bre98] (dfinition 3.2.1.1) :

Dfnition 2.3.3. Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (resp. de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}^r$). On appelle filtration admissible de \mathcal{M} toute filtration dcroissante $(\text{Fil}^t \mathcal{M})_{0 \leq t \leq r}$ par des sous- S -modules (resp. des sous- \tilde{S} -modules) vrfiant :

1. $\text{Fil}^0 \mathcal{M} = \mathcal{M}$ et $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ est « le » $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} ;
2. pour tous $0 \leq t \leq t' \leq r$, $\text{Fil}^{t'-t} S \cdot \text{Fil}^t \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{t'} \mathcal{M}$ (resp. $\text{Fil}^{t'-t} \tilde{S} \cdot \text{Fil}^t \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{t'} \mathcal{M}$) ;
3. pour tout $1 \leq t \leq r$, $N(\text{Fil}^t \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^{t-1} \mathcal{M}$.

Si $(\text{Fil}^t \mathcal{M})_{0 \leq t \leq r}$ est une filtration admissible de \mathcal{M} , on dfnit des opérateurs $\phi_t : \text{Fil}^t \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ par $\phi_t(x) = c^{t-r} \phi_t(E(u)^{r-t} x)$.

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On considre le produit tensoriel $\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$. Il s'agit d'un \hat{A}_{st} -module de torsion naturellement muni d'une action de G_K (en regardant son action sur le premier facteur). On le munit en outre d'un opérateur de monodromie $N : \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ en posant $N(a \otimes x) = N(a) \otimes x + a \otimes N(x)$.

On considre sur \mathcal{M} une filtration admissible quelconque². On peut alors dfinir, pour tout s compris entre 0 et r :

$$\text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) = \sum_{t=0}^s \text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}} \otimes \text{Fil}^{s-t} \mathcal{M}.$$

C'est un sous- \hat{A}_{st} -module de $\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ qui dpend de la filtration admissible choisie. On dfnit finalement $\phi_s : \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \rightarrow \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ comme l'unique application additive vrfiant $\phi_s(a_t \otimes x_t) = \phi_t(a_t) \otimes \phi_{s-t}(x_t)$ pour $a_t \in \text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}}$ et $x_t \in \text{Fil}^{s-t} \mathcal{M}$.

On pose finalement :

$$T_{\text{st}\star}(\mathcal{M}) = \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$$

o la notation signifie que l'on ne retient que les $x \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ pour lesquels $N(x) = 0$ et $\phi_r(x) = x$. On obtient alors un \mathbb{Z}_p -module galoisien qui dpend *a priori* du choix d'une filtration admissible. Toutefois, nous allons prouver dans la suite que ce n'est pas le cas (voir la remarque faisant suite au corollaire 2.3.8).

Encore une fois, $T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$ a une description plus simple lorsque \mathcal{M} est tu par p . Pour la donner, posons $\tilde{\mathcal{M}} = T(\mathcal{M})$ et notons $\text{pr} : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ la projection canonique. On vrfie facilement que si $(\text{Fil}^t \mathcal{M})$ est une filtration admissible de \mathcal{M} , alors $(\text{pr}(\text{Fil}^t \mathcal{M}))$ est une filtration admissible de $\tilde{\mathcal{M}}$. En recopiant les constructions prcdentes, on dfnit le \mathbb{Z}_p -module galoisien :

$$\text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} \tilde{\mathcal{M}})_{N=0}^{\phi_r=1}$$

et on a alors la proposition suivante :

²Il en existe toujours : on peut par exemple prendre $\text{Fil}^t \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} / E(u)^{r-t} x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}\}$.

Proposition 2.3.4. *Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tu par p alors :*

$$T_{st\star}(\mathcal{M}) = \text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}^{\phi_r=1}.$$

Dmonstration. Si \mathcal{M} est tu par p , le \hat{A}_{st} -module $\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}$ l'est galement. Il s'identifie au $\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st}$ -module $\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M}$, et on dispose d'une application canonique :

$$\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M} \rightarrow \tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}).$$

Cette application est clairement surjective, et en reprenant les notations du lemme 2.2.4, son noyau s'identifie $\kappa(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. En outre, on vrifie directement qu'elle induit une flche compatible l'action de G_K :

$$\Psi : \text{Fil}^r(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} \rightarrow \text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}^{\phi_r=1}.$$

Reste prouver que cette dernire application est un isomorphisme. Soit $x \in \ker \Psi$. On a $x \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$ et donc $\phi_r(x) = x$. Par ailleurs, on a $x \in \kappa(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$, d'o on dduit $x = \phi_r(x) \in \phi_r(\kappa(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M}))$ puis $x = \phi_r(x) = 0$, puisque $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$ (lemme 2.2.4). L'application Ψ est donc injective.

Passons la surjectivit. Considrons $x \in \text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}^{\phi_r=1}$ et notons $\hat{x} \in \hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M}$ un relev quelconque de x . On vrifie alors que $\hat{x} \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ et que $\phi_r(\hat{x}) = \hat{x} + y$ pour un certain $y \in \kappa(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. Posons $\hat{x}_1 = \hat{x} + y \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. On a $\hat{x}_1 \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ et $\phi_r(\hat{x}_1) = \hat{x}_1 + y'$ pour un certain $y' \in \phi_r(\kappa(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M}))$. On pose alors $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + y' \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{st}/p\hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \mathcal{M})^{\phi_r=1}$. On vrifie finalement que N annule \hat{x}_2 , ce qui assure que \hat{x}_2 est un antcedent par Ψ de x . \square

2.3.4 Lien entre les foncteurs T_{st}^* et $T_{st\star}$

Fixons ε une suite de racines p^n -imes de l'unit et dfinissons $t = \log([\varepsilon]) \in A_{\text{cris}}$ o le log est donn par la srie usuelle. On a $\phi(t) = pt$ et plus exactement l'ensemble des solutions dans A_{cris} de $\phi(t) = pt$ est le \mathbb{Z}_p -module engendr par t . C'est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang 1 isomorphe $\mathbb{Z}_p(1)$ en tant que representation galoisienne. Autrement dit $(\text{Fil}^r \hat{A}_{st})_{N=0}^{\phi_r=1} = (\text{Fil}^r A_{\text{cris}})^{\phi_r=1}$ est isomorphe en tant que representation galoisienne $\mathbb{Z}_p(r)$. De mme, la representation galoisienne $(\text{Fil}^r \hat{A}_{st,\infty})_{N=0}^{\phi_r=1}$ est isomorphe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$.

On ne sait toujours pas que le foncteur $T_{st\star}$ est bien dfini mais si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ muni d'une filtration admissible fixe, on peut dfinir une application :

$$\Psi : T_{st\star}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{st}^*(\mathcal{M})^\vee(r)$$

o par dfnition $T_{st}^*(\mathcal{M})^\vee(r)$ est la representation galoisienne $\text{Hom}(T_{st}^*(\mathcal{M}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))$. En effet, soient $x = \sum_i a_i \otimes x_i \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$, et $f : \mathcal{M} \rightarrow \hat{A}_{st,\infty}$ compatible aux structures. On pose $\Psi(x)(f) = \sum_i a_i f(x_i)$. C'est un lment de $(\text{Fil}^r \hat{A}_{st,\infty})_{N=0}^{\phi_r=1}$ soit, en vertu de l'isomorphisme dcrit prcdemment, un lment de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$. On vrifie immdiatement que Ψ est un morphisme \mathbb{Z}_p -linaire commutant l'action de Galois.

On veut dmontrer que Ψ est un isomorphisme pour tout objet $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^r$ et pour cela on suit la dmonstration du paragraphe 3.2.1. de [Bre98] (qui concerne le cas $e = 1$) : la mthode consiste prouver que Ψ est un isomorphisme pour les objets tus par p , dmontrer que le foncteur $T_{st\star}$ est bien dfini et exact, puis conclure l'aide d'un dvissage.

On rappelle, dans un premier temps, que les objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$ ont une structure relativement simple (proposition 4.1.1 de [Car]) :

Proposition 2.3.5. *Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors \mathcal{M} est tu par p et admet une base adapte (e_1, \dots, e_d) pour des entiers n_1, \dots, n_d . De plus $N(e_i) = 0$ pour tout i et il existe une (unique) matrice G inversible coefficients dans k telle que :*

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_1}e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d}e_d) \end{pmatrix} = {}^tG \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}.$$

On introduit les modules suivants :

$$\text{Fil}_X^t \hat{A}_{st} = \left\{ \sum_{i=t}^m a_i \frac{X^i}{i!}, m \in \mathbb{N}, a_t \in A_{\text{cris}} \right\} \quad (2)$$

et on dmontre (comme dans le lemme 3.1.2.1. de [Bre98]) que $\text{Fil}_X^t(\hat{A}_{st}/p^n) = (\text{Fil}_X^t \hat{A}_{st})/p^n$ est plat sur S_n . Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $(\text{Fil}^t \mathcal{M})$ est une filtration admissible de \mathcal{M} , on dfinit pour tout s compris entre 0 et r :

$$\text{Fil}_X^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) = \sum_{t=0}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{st} \otimes_S \text{Fil}^{s-t} \mathcal{M}.$$

On a les deux lemmes suivants :

Lemme 2.3.6. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $(\text{Fil}^t \mathcal{M})$ une filtration admissible de \mathcal{M} . Alors, pour tout s compris entre 0 et r , on a $\text{Fil}_X^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) = \text{Fil}^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})$ et si $s \geq 1$, on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{t=1}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{st} \otimes_S \text{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^s \text{Fil}_X^i \hat{A}_{st} \otimes_S \text{Fil}^{s-i} \mathcal{M} \longrightarrow \text{Fil}^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

o la premiere flche est la somme des applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}_X^t \hat{A}_{st} \otimes_S \text{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} & \rightarrow & \text{Fil}_X^{t-1} \hat{A}_{st} \otimes_S \text{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} \oplus \text{Fil}_X^t \hat{A}_{st} \otimes_S \text{Fil}^{s-t} \mathcal{M} \\ x_t \otimes y_{s+1-t} & \mapsto & x_t \otimes y_{s+1-t} \oplus -x_t \otimes y_{s+1-t} \end{array}$$

Dmonstration. La preuve est une adaptation de celle du lemme 3.2.1.2 de [Bre98]. Pour la premiere assertion, on a dj clairement $\text{Fil}_X^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})$.

On a une description alternative de A_{cris} (voir [Fon94a]). Si on note $R = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ pour les applications de transitions donnees par le Frobenius, on peut dfiner un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\theta} & : & W(R) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \\ (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) & \mapsto & \sum_{n \geq 0} p^n \hat{x}_n^{(n)} \end{array}$$

o \mathbb{C}_p dsigne le complt p -adique de \bar{K} et o $\hat{x}_n^{(n)}$ est la limite quand m tend vers l'infini d'une suite $(\hat{a}_n^{(n+m)})p^m$, $\hat{a}_i^{(j)} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ dsignant un relev quelconque de $a_i^{(j)}$. L'anneau A_{cris} s'identifie alors l'enveloppe aux puissances divises de $W(R)$ relativement $\ker \hat{\theta}$ (et compatibles aux puissances divises canoniques sur $pW(R)$). On vrifie facilement que $[\pi] \in A_{\text{cris}}$ (dfini la fin du paragraphe 2.3.1) correspond bien au representant de Teichmller de π (dfini au mme endroit). Par ailleurs, on montre (voir [Fon94a]) que $\ker \hat{\theta}$ est un idal principal, engendr par $E([\pi])$.

Ainsi, si $x \in \text{Fil}^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})$, il s'crit comme une somme de termes de la forme :

$$a \gamma_j(E([\pi])) \gamma_k(X) \otimes m$$

(o $\gamma_j(x) = \frac{x^j}{j!}$) avec $a \in A_{\text{cris}}$, $m \in \text{Fil}^{s-t}\mathcal{M}$ et $j + k \geq t$. Mais $[\pi] = u(1 + X)$ et donc $E([\pi]) - E(u)$ est un multiple de uX . On peut donc écrire $E([\pi]) = E(u) + uXb$ pour un certain $b \in \hat{A}_{\text{st}}$ puis :

$$\gamma_j(E([\pi])) = \sum_{\ell=0}^j \gamma_{j-\ell}(E(u))(ub)^\ell \gamma_\ell(X).$$

En rinjectant cette expression dans x , on obtient bien $x \in \text{Fil}_X^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$.

Pour la deuxième partie du lemme, la démonstration est exactement la même que celle de [Bre98]. \square

Lemme 2.3.7. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Pour tout s compris entre 0 et r , on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \xrightarrow{N} \text{Fil}^{s-1}(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

o par convention $\text{Fil}^{-1}(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$.

Démonstration. La démonstration est la même que celle du lemme 3.2.1.3 de [Bre98]. Toutefois, on se ramène la fin, non pas un objet de $\underline{MF}_k^{f,r}$ (en reprenant les notations de l'article), mais un objet simple de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dont la structure est connue par la proposition 2.3.5. Le même argument s'applique alors. \square

On déduit des deux lemmes précédents le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.8. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ ne dépend pas de la filtration admissible choisie et si :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors la suite induite :

$$0 \longrightarrow \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} \longrightarrow \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} \longrightarrow 0$$

est également exacte.

Démonstration. C'est la même que celle de la proposition 3.2.1.4 de [Bre98], en remplaçant nouveau $\underline{MF}_k^{f,r}$ par la sous-catégorie de $\underline{\mathcal{M}}^r$ formée des objets tus par p , et en utilisant la proposition 2.3.5 qui donne la structure de tels objets. \square

Remarque. On prouve de même que si $0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors la suite :

$$0 \longrightarrow (\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} \longrightarrow (\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow (\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} \longrightarrow 0$$

l'est aussi.

D'autre part, le corollaire précédent prouve en particulier que $T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$ ne dépend pas de la filtration choisie. Ainsi le foncteur $T_{\text{st}\star}$ est bien défini.

Lemme 2.3.9. *Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} \longrightarrow \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \xrightarrow{\phi_r-id} (\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow 0.$$

Dmonstration. Il suffit de montrer que $\phi_r - \text{id}$ est surjective. De mme que dans le lemme 3.2.1.6 de [Bre98], on se ramne au cas d'un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. D'aprs la proposition 2.3.5, on peut crire $\mathcal{M} = S_1 e_1 \oplus \cdots \oplus S_1 e_d$ o e_1, \dots, e_d sont tels que $N(e_i) = 0$ et $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ est le sous-module de \mathcal{M} engendr par $\text{Fil}^p S \cdot \mathcal{M}$ et les $u^{n_1} e_1, \dots, u^{n_d} e_d$ pour certains entiers n_i compris entre 0 et er . On a alors directement :

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M} &= \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \cdot e_d \\ (\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} &= A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}} \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}} \cdot e_d \\ \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} &= \sum_{i=1}^p (A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}} \cdot u^{n_i} e_i + \text{Fil}^p A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}} \cdot e_i). \end{aligned}$$

On note G l'unique matrice inversible coefficients dans k telle que :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_1} e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d} e_d) \end{pmatrix} = {}^t G \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

et on conclut de mme que dans le lemme 3.2.1.6 de [Bre98]. □

Corollaire 2.3.10. *Le foncteur $T_{\text{st}\star}$ est exact.*

On dduit finalement de cette tude le thorme suivant :

Thorme 2.3.11. *L'application Ψ dfinie prcdemment induit une transformation naturelle inversible entre les foncteurs $T_{\text{st}\star}$ et $(T_{\text{st}}^{\star})^{\vee}(r)$.*

Dmonstration. Comme la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est artinienne, et que les foncteurs T_{st}^{\star} et $T_{\text{st}\star}$ sont exacts, il suffit de montrer le rsultat lorsque \mathcal{M} est un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Si \mathcal{M} est un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$, la proposition 2.3.5 nous assure dans un premier temps que \mathcal{M} est tu par p . On a donc :

$$T_{\text{st}}^{\star}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \tilde{A}) \quad \text{et} \quad T_{\text{st}\star}(\mathcal{M}) = \text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}^{\phi_r=1}.$$

Par ailleurs la mme proposition fournit une description explicite de $T(\mathcal{M})$ et de ses structures supplmentaires. Prcisment, il existe des entiers n_i tels que :

$$\begin{aligned} T(\mathcal{M}) &= \tilde{S}e_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{S}e_d \\ \text{Fil}^r T(\mathcal{M}) &= \tilde{S}u^{n_1} e_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{S}u^{n_d} e_d \end{aligned}$$

avec de surcrot $N(e_i) = 0$ pour tout i . Par ailleurs, quitte passer une extension non ramifie de K , on peut supposer (voir thorme 4.3.2 de [Car]) que ϕ_r est donn par $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$, les indices tant considrs modulo d .

Des descriptions prcdentes, on dduit facilement :

$$\text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0} = \bar{\pi}_1^{n_1} \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus \bar{\pi}_1^{n_d} \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi \cdot e_d$$

o $\bar{\pi}_1$ est la rduction modulo π de π_1 (qui, on le rappelle, est une racine p -ime de π fixe). L'oprateur ϕ_r agit sur ce module par $\phi_r(\bar{\pi}_1^{n_i} e_i) = e_{i+1}$. Tout lment de $\text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}$ s'crit de faon unique $x = \sum_{i=1}^d a_i \otimes e_i$ avec $a_i = \pi_1^{n_i} x_i$ et un tel lment appartient $T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$ si, et seulement si :

$$x_i^p = \bar{\pi}_1^{n_{i+1}} x_{i+1}$$

pour tout indice $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, se donner un lment de $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ revient se donner l'image b_i de chacun des e_i , ces images devant vrifier $N(b_i) = 0$, $u^{n_i}b_i \in \text{Fil}^r \tilde{A}$ et commuter ϕ_r . La premiere condition impose $b_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$. La deuxime condition assure que $b_i = \pi_1^{m_i} y_i$ pour $m_i = er - n_i$ et $y_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$. Finalement, la commutation ϕ_r impose les relations :

$$(-1)^r y_i^p = \bar{\pi}_1^{m_{i+1}} y_{i+1}.$$

On est finalement ramen prouver que l'accouplement :

$$(a_1, \dots, a_d) \times (b_1, \dots, b_d) \mapsto \sum_{i=1}^d a_i b_i$$

dfini sur les couples de d -uplets solutions des systmes prcdents et valeurs dans $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi)^{\phi_r=1}$. Ce dernier espace est encore $\bar{t}\mathbb{F}_p$ (ou \bar{t} est la rduction modulo π d'une racine $(p-1)$ -ime de p^r) est non dgrn. Or par le lemme 5.1.2 de [Car]³, si on choisit η une racine $(p^h - 1)$ -ime de π , si on note $\bar{\eta}$ sa rduction modulo π , et si on pose :

$$\begin{aligned} s_i &= n_i p^{d-1} + n_{i+1} p^{d-2} + \dots + n_{i+d-1} \\ t_i &= m_i p^{d-1} + m_{i+1} p^{d-2} + \dots + m_{i+d-1} \end{aligned}$$

les solutions de ces systmes s'crivent :

$$a_i = a^{p^i} \bar{\eta}^{s_i} \quad \text{et} \quad b_i = (-1)^{r_i} b^{p^i} \bar{\eta}^{t_i}$$

o a dcrit \mathbb{F}_q ($q = p^d$), l'ensemble des racines dans \bar{k} de l'equation $x^q = x$, et o b dcrit l'ensemble des racines dans \bar{k} de l'equation $x^q = (-1)^{rd} x$.

Si rd est pair, $\sum_{i=1}^d a_i b_i = \text{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(ab) \cdot \bar{\eta}^v$ o $v = s_i + t_i = er \cdot \frac{q-1}{p-1}$ est indpendant de i , et on conclut en remarquant que la trace de $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ est une forme bilinaire non dgrne.

Si rd est impair, on note $\varepsilon \in \bar{k}$ une racine $(p-1)$ -ime de -1 , on vrifie que $\sum_{i=1}^d a_i b_i = \varepsilon \text{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(ab/\varepsilon) \cdot \bar{\eta}^v$ et on conclut comme dans le cas prcdent. \square

En vertu de ce thorme, tous les rsultats dmontrs sur le foncteur T_{st}^* se transposent au foncteur $T_{\text{st}\star}$. On obtient ainsi un quivalent du thorme 2.3.1 :

Thorme 2.3.12. *Le foncteur $T_{\text{st}\star}$ est exact, pleinement fidle, d'image essentielle stable par quotients et par sous-objets. De plus, si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S -module $S_{n_1} \oplus \dots \oplus S_{n_d}$, alors la representation galoisienne $T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$ est isomorphe en tant que \mathbb{Z}_p -module $\mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p^{n_d}\mathbb{Z}$.*

3 Les faisceaux sur le site log-syntomique

3.1 Rappels et prliminaires

3.1.1 Log-schmas et sites usuels

On renvoie [Kat89] pour la dfinition et les proprits des log-schmas et des morphismes de log-schmas (en particulier des morphismes log-lisses ou log-tales). Tous les log-schmas considrs

³Dans cette rfrence, on travaillait non pas modulo π mais modulo p . Cependant, on vrifie sans mal que la mthode marche dans les deux cas.

dans ce papier sont intgres. Si S est un log-schma, on note \dot{S} le schma sous-jacent. Si M est un monode, on note M^{gp} le groupe associ, c'est--dire l'ensemble des lments de la forme ab^{-1} pour a et b dans M o deux lments ab^{-1} et cd^{-1} sont identifis s'il existe $s \in M$ tel que $sad = sbc$ (i.e. simplement $ad = bc$ si M est intgre). Si M est un monode et G un sous-groupe de M^{gp} , on dfnit le quotient M/G comme le quotient de M par la relation d'quivalence $x \sim y \leftrightarrow xy^{-1} \in G$.

Si S est un log-schma fin dont le schma sous-jacent est tu par un entier non nul et muni d'un idal puissances divises et si X est un log-schma fin sur T auquel les puissances divises s'tendent, on note $(X/S)_{\text{cris}}$ le petit site (log-)cristallin fin (dfini dans [Kat89], chapitre 5) et $(X/S)_{\text{CRIS}}$ le gros site (log-)cristallin fin (dfini dans [Bre96], chapitre 3). On note $\mathcal{O}_{X/S}$ le faisceau structural sur ces sites, $\mathcal{J}_{X/S}$ son idal puissances divises et $\mathcal{J}_{X/S}^{[n]}$ les puissances divises successives de $\mathcal{J}_{X/S}$.

De mme, si S est un log-schma fin, on note $S_t = \dot{S}_t$ le petit site (log-)tale de S : c'est la catgorie des log-schmas X pour lesquels \dot{X} est tale sur \dot{S} et la log-structure sur X est induite par celle de S , les recouvrements tant les recouvrements tales usuels (sur les schmas sous-jacents). On note galement S_{ET} le gros site (log-)tale de S dfini comme la catgorie des log-schmas fins localement de type fini sur S et munie de la topologie tale. On note \mathcal{O}_X le faisceau structural sur chacun de ces deux sites.

3.1.2 Topologie log-syntomique

On rappelle la dfinition d'un morphisme de log-schmas log-syntomiques, due Kato (voir [Kat89]) :

Dfnition 3.1.1. *Un morphisme de log-schmas fins $f : Y \rightarrow X$ est dit log-syntomique s'il est intgre, si $\dot{f} : \dot{Y} \rightarrow \dot{X}$ est localement de prsentation finie, et si f peut s'crire tale localement comme la compose d'un morphisme log-lisse avec une immersion ferme exacte dont l'idalest engendr en chaque point par une suite transversalement rgulire relativement X .*

On montre (voir [Bre96]) que les morphismes log-syntomiques sont stables par changement de base et par composition. En outre, on dispose de la proprit remarquable suivante :

Proposition 3.1.2. *Si $Y \rightarrow X$ est une immersion ferme exacte dfinie par un nil-idal, on peut tale-localement relever les morphismes log-syntomiques sur Y en des morphismes log-syntomiques sur X .*

Il est de plus possible de donner une description locale trs explicite des morphismes log-syntomiques. Prcisment, si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme log-syntomique, alors il existe une carte (locale pour la topologie tale) sur laquelle f prend la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} \frac{P \oplus \mathbb{N}^r}{G} & \longrightarrow & \frac{(A \otimes_{\mathbb{Z}[P]} \mathbb{Z}[(P \oplus \mathbb{N}^r)G][X_1, \dots, X_s])}{I} \\ \uparrow f & & \uparrow f \\ P & \longrightarrow & A \end{array}$$

o A est un anneau, P est un monode intgre, r et s des entiers, G un sous-groupe de $P^{\text{gp}} \oplus \mathbb{Z}^r$ et I un idal contenant les $[g] - 1$ (pour $g \in G$) et engendr par une suite transversalement rgulire relativement A .

Si S est un log-schma fin, on note S_{SYN} le gros site (log-)syntomique sur X , c'est--dire la catgorie des log-schmas fins localement de type fini sur X munie de la topologie log-syntomique : une famille $(f_i : X_i \rightarrow X)$ recouvre X si tous les morphismes f_i sont log-syntomiques et si topologiquement $\dot{X} = \bigcup_i f_i(\dot{X}_i)$. De mme on dfnit le petit site (log-)syntomique S_{syn} en se restreignant la catgorie des log-schmas log-syntomiques sur S .

3.1.3 Plusieurs bases

Pour la suite, on sera amené à considérer plusieurs bases qui sont :

$$\left(\begin{array}{c} \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_K/p^n \\ 1 \mapsto \pi \end{array} \right) ; \quad \left(\begin{array}{c} \mathbb{N} \rightarrow S_n \\ 1 \mapsto u \end{array} \right) ; \quad \left(\begin{array}{c} \mathbb{N} \rightarrow \tilde{S} \\ 1 \mapsto u \end{array} \right) ; \quad \left(\begin{array}{c} \mathbb{N} \rightarrow k \\ 1 \mapsto 0 \end{array} \right)$$

On note simplement T_n la première, E_n la deuxième, \tilde{E} la troisième et $\bar{E} = \bar{T}$ la quatrième. Ces quatre bases sont munies de puissances divisées : sur T_n , elles sont prises par rapport à l'idéal engendré par p , sur E_n et \tilde{E} par rapport à l'idéal engendré par les $\frac{E(u)^i}{i!}$ pour $i \geq 1$ et sur la dernière par rapport à l'idéal nul. On a un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & \hookrightarrow & T_2 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & T_n & \hookrightarrow & \dots \\ & \searrow & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \tilde{E} & \hookrightarrow & E_1 & \hookrightarrow & E_2 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & E_n & \hookrightarrow & \dots \end{array}$$

où tous les morphismes sont des paississements, les flèches verticales tant obtenues en envoyant u sur π .

Les bases E_n , \tilde{E} et \bar{E} sont munies d'un relèvement du Frobenius : c'est la multiplication par p sur les monodes, l'évaluation à la puissance p sur \tilde{S} et k et le Frobenius défini au paragraphe 2.1.1 sur S_n .

3.2 Les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}$

Dans ce paragraphe, on définit des faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sur le site syntomique qui permettent de calculer la cohomologie cristalline. On donne ensuite une description locale explicite de ces faisceaux, technique mais cruciale pour mener bien les calculs.

3.2.1 Définition et description locale

Pour tout entier n et tout entier (relatif) s , on définit sur $(T_n)_{\text{SYN}}$ les préfaisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ par la formule :

$$\mathcal{J}_n^{[s]}(U) = H^0((U/E_n)_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{U/E_n}^{[s]}) = H^0((U/E_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{U/E_n}^{[s]})$$

où U sur T_n est vu sur E_n via l'paississement du paragraphe 3.1.3. On pose $\mathcal{O}_n^{\text{st}} = \mathcal{J}_n^{[0]}$. On montre (voir [Bre96]) que les $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sont des faisceaux et qu'ils calculent la cohomologie log-cristalline dans le sens où :

$$H^i(X_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^i(X_{\text{SYN}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^i((X/E_n)_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{X/E_n}^{[s]}) = H^i((X/E_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{X/E_n}^{[s]})$$

pour tout entier i et tout log-schma X fini localement de type fini sur E_n .

Soit U un log-schma log-syntomique sur la base T_n . On a vu qu'au niveau local, on peut trouver une carte du morphisme $U \rightarrow T_n$ qui prend la forme :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{N}x_0 \oplus \mathbb{N}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N}x_r}{G} & \xrightarrow{\alpha} & \frac{\mathcal{O}_K/p^n[(\mathbb{N}x_0 \oplus \mathbb{N}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N}x_r)G][X_1, \dots, X_s]}{([x_0] - \pi, f_1, \dots, f_t)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{N}x_0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_K/p^n \end{array}$$

o G est un sous-groupe de \mathbb{Z}^{r+1} et $([x_0] - \pi, f_1, \dots, f_t)$ est une suite transversalement rgulire relativement \mathcal{O}_K/p^n et telle que l'idal engendr contienne tous les $[g] - 1$, pour $g \in G$.

Notons $Q = \mathbb{N}x_0 \oplus \mathbb{N}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N}x_r$, $P = Q/G$ et $A = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[QG][X_1, \dots, X_s]}{([x_0] - \pi, f_1, \dots, f_t)}$, de sorte que (tale-)localement $U = (\text{Spec } A, P)$. Dcrire localement (pour la topologie syntomique) les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}$ serait par exemple donner des formules explicites pour les modules $\mathcal{O}_n^{\text{st}}(\text{Spec } A, P)$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}(\text{Spec } A, P)$. Cependant, on ne sait donner de telles formules que si le Frobenius est surjectif sur A et sur P , ce qui n'est *a priori* pas le cas ici. Nous allons donc devoir considrer des ouverts encore plus petits (toujours pour la topologie syntomique) pour forcer cette condition de surjectivit.

Notons $Q^i = \mathbb{N}x_0^{p^{-i}} \oplus \mathbb{N}x_1^{p^{-i}} \oplus \dots \oplus \mathbb{N}x_r^{p^{-i}}$, $P^i = Q^i/G$ et $A^i = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[Q^iG][X_1^{p^{-i}}, \dots, X_s^{p^{-i}}]}{([x_0] - \pi, f_1, \dots, f_t)}$. On a des morphismes de log-schmas $(\text{Spec } A^{i+1}, P^{i+1}) \rightarrow (\text{Spec } A^i, P^i)$ qui sont des recouvrements log-syntomiques, et le Frobenius devient surjectif sur la limite de ces recouvrements. On est amen dcrire explicitement les objets suivants :

$$\mathcal{O}_n^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) = \varinjlim_i \mathcal{O}_n^{\text{st}}(\text{Spec } A^i, P^i) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_n^{[s]}(A^\infty, P^\infty) = \varinjlim_i \mathcal{J}_n^{[s]}(\text{Spec } A^i, P^i).$$

Notons $Q^\infty = \mathbb{N}x_0^{1/p^\infty} \oplus \mathbb{N}x_1^{1/p^\infty} \oplus \dots \oplus \mathbb{N}x_r^{1/p^\infty}$, $P^\infty = Q^\infty/G$ et $A^\infty = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[Q^\infty G][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}]}{([x_0] - \pi, f_1, \dots, f_t)}$. Par ailleurs, si M est un monode et n un entier, posons :

$$M^{(n)} = \{x \in M^{\text{gp}} / x^{p^n} \in M\}.$$

Si de plus M est muni d'un morphisme de monodes $\mathbb{N} \rightarrow M$, on dfinit $\mathbb{N} \oplus_{(\phi^n), \mathbb{N}} M$ comme la limite inductive du diagramme $\mathbb{N} \xleftarrow{p^n} \mathbb{N} \rightarrow M$. Posons :

$$W_n^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) = W_n(A^\infty/pA^\infty) \otimes_{\mathbb{Z}[P^\infty]} \mathbb{Z}[(\mathbb{N} \oplus_{(\phi^n), \mathbb{N}} P^\infty)^{(n)}].$$

On dispose d'un morphisme canonique surjectif :

$$\begin{aligned} W_n^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) &\rightarrow A^\infty \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) \otimes [h] &\mapsto (\hat{a}_0^{p^n} + \dots + p^{n-1}\hat{a}_{n-1}) \cdot \alpha(h^{p^n}) \end{aligned}$$

o $\hat{a}_i \in A^\infty$ dsigne un relev quelconque de a_i . On note finalement $W_n^{\text{st}, \text{DP}}(A^\infty, P^\infty)$ l'enveloppe aux puissances divises relativement l'idal noyau (et compatible aux puissances divises canoniques sur l'idal (p)). On munit $W_n^{\text{st}, \text{DP}}(A^\infty, P^\infty)$ d'une structure de S_n -module en envoyant u sur l'lement $1 \otimes [1 \oplus (0, \dots, 0)]$. Comme dans l'appendice D de [Bre98], on montre la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *Avec les notations prcdentes, il existe un isomorphisme S_n -linaire canonique :*

$$\mathcal{O}_n^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) \xrightarrow{\sim} W_n^{\text{st}, \text{DP}}(A^\infty, P^\infty).$$

Il existe une autre description locale qui a l'avantage d'tre lgrement plus simple, mais l'inconvnient d'tre non canonique. Notons pour cela :

$$W_n^{\text{cris}}(A^\infty, P^\infty) = W_n(A^\infty/pA^\infty) \otimes_{\mathbb{Z}[P^\infty]} \mathbb{Z}[(P^\infty)^{(n)}]$$

et $W_n^{\text{cris}, \text{DP}}$ son enveloppe puissances divises par rapport l'idal noyau de l'application $(a_0, \dots, a_{n-1}) \otimes [h] \mapsto (\hat{a}_0^{p^n} + \dots + p^{n-1}\hat{a}_{n-1})\alpha(h^{p^n})$ o $\hat{a}_i \in A^\infty$ dsigne un relev quelconque de a_i . On a alors le lemme suivant qui tablit un lien entre les anneaux $W_n^{\text{cris}, \text{DP}}(A^\infty, P^\infty)$ et $W_n^{\text{st}, \text{DP}}(A^\infty, P^\infty)$:

Lemme 3.2.2. *On garde les notations précédentes et on note $g \in P^\infty$ l'image de x_0 . Soit $h \in P^\infty$ une racine p^n -ième de g . Alors l'application $W_n^{\text{cris}, DP}(A^\infty, P^\infty) \langle X \rangle \rightarrow W_n^{\text{st}, DP}(A^\infty, P^\infty)$ qui envoie X sur $(1 \otimes (1 \oplus h)) - 1$ est un isomorphisme.*

On en déduit directement la proposition :

Proposition 3.2.3. *Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme S_n -linéaire :*

$$\mathcal{O}_n^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) \xrightarrow{\sim} W_n^{\text{cris}, DP}(A^\infty, P^\infty) \langle X \rangle$$

où la structure de S_n -module est donnée sur $W_n^{\text{cris}, DP}(A^\infty, P^\infty) \langle X \rangle$ par $\frac{u^i}{i!} \mapsto \frac{T_0^i}{i!} \frac{1}{1+X}$ où T_0 désigne une racine p^n -ième de $[x_0]$. En outre, cet isomorphisme est compatible la filtration donnée à gauche par les $\mathcal{J}_n^{[s]}(A^\infty, P^\infty)$ et à droite par les puissances divisées.

Remarque. Attention l'isomorphisme précédent n'est pas canonique : il dépend du choix d'une racine p^n -ième de g , image de x_0 dans P^∞ .

3.2.2 Les opérateurs ϕ_s et N

La description précédente permet de prouver la proposition suivante importante :

Proposition 3.2.4. *Le faisceau $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ est plat sur S_n et les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sont plats sur W_n .*

Démonstration. L'argument est le même que celui de la proposition 2.1.2.1 de [Bre98]. \square

Si n et m sont deux entiers avec $n \leq m$, on a un paississement $i : T_n \hookrightarrow T_m$. Ainsi pour tout faisceau \mathcal{F} sur $(T_n)_{\text{syn}}$, on peut former le faisceau $i_* \mathcal{F}$ sur $(T_m)_{\text{syn}}$. Le foncteur i_* est exact (c'est une conséquence de la propriété 3.1.2) et, par abus, on note encore \mathcal{F} le faisceau $i_* \mathcal{F}$. L'exactitude assure qu'il revient au même de calculer les cohomologies de \mathcal{F} sur les sites $(T_n)_{\text{syn}}$ et $(T_m)_{\text{syn}}$.

Les descriptions locales données précédemment permettent facilement de prouver l'exactitude des deux suites de faisceaux (sur $(T_m)_{\text{syn}}$) suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_i^{\text{st}} \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}_{n+i}^{\text{st}} \longrightarrow \mathcal{O}_n^{\text{st}} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{J}_i^{[s]} \xrightarrow{p^n} \mathcal{J}_{n+i}^{[s]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[s]} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

pour tout entier i tel que $n+i \leq m$. D'autre part, toujours pour $n+i \leq m$, la multiplication par p^i identifie sur le site $(T_m)_{\text{syn}}$ les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $p^i \mathcal{O}_{n+i}^{\text{st}}$. Comme la base E_n est munie d'un relèvement du Frobenius (voir paragraphe 3.1.3), les groupes $\mathcal{O}_n^{\text{st}}(U) = H^0((U/E_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{U/E_n})$ héritent d'un opérateur de Frobenius ϕ qui s'étend immédiatement en un morphisme de faisceaux $\phi : \mathcal{O}_n^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{st}}$.

Par ailleurs, on vérifie directement en utilisant la platitude et la description locale que pour tout entier s , on a l'inclusion $\phi(\mathcal{J}_n^{[s]}) \subset p^s \mathcal{O}_n^{\text{st}}$. Les suites exactes précédentes permettent alors de définir un morphisme de faisceaux ϕ_s sur le site $(T_m)_{\text{syn}}$ (pour $m \geq n+s$) comme la composée :

$$\mathcal{J}_n^{[s]} \xleftarrow{\sim} \mathcal{J}_{n+s}^{[s]} / p^n \xrightarrow{\phi} p^s \mathcal{O}_{n+s}^{\text{st}} \xleftarrow[p^s]{\sim} \mathcal{O}_n^{\text{st}}$$

après avoir vérifié que ϕ passe au quotient.

Remarque. Les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ et $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ sont définis sur le site $(T_n)_{\text{syn}}$ mais ϕ_s n'est, lui, défini que sur $(T_{n+s})_{\text{syn}}$.

Finalement on peut munir $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ d'un opérateur N qui sur la description locale (voir proposition 3.2.3) est simplement défini comme l'unique application $W_n^{\text{cris,DP}}(A^\infty, P^\infty)$ -linéaire qui envoie $\frac{X^i}{i!}$ sur $(1+X)\frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$ (cette application ne dépend pas d'un choix d'une racine p^n -ième de g , elle est donc canoniquement définie et peut se recoller).

3.3 Le cas de la caractéristique p

Dans ce paragraphe, on se concentre sur le cas $n = 1$ et on donne des descriptions plus faciles à manipuler des faisceaux précédemment introduits. En effet, par la suite, nous procéderons systématiquement par divissages et donc le cas $n = 1$ aura toujours un statut particulier.

3.3.1 Une nouvelle description des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_1^{[s]}$

On reprend la description donnée par la proposition 3.2.3 dans le cas $n = 1$:

$$\mathcal{O}_1^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) = W_1^{\text{cris,DP}}(A^\infty, P^\infty) \langle X \rangle.$$

Un calcul facile prouve que le morphisme qui envoie π sur $[x_0]$ identifie $W_1^{\text{cris,DP}}(A^\infty, P^\infty)$:

$$\left(\frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}]}{([x_0]^e, f_1, \dots, f_t)} \right)^{\text{DP}}$$

où l'on nomme encore de façon abusive $f_i \in k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}]$ l'image de $f_i \in \mathcal{O}_K/p[Q^\infty G][X_1, \dots, X_s]$ et où par définition $G^{1/p}$ désigne le sous-groupe de $(Q^\infty)^{\text{gp}}$ formé des x tels que $x^p \in G$. On remarque en outre que la suite $([x_0]^e, f_1, \dots, f_t)$ est encore régulière dans $k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}]$.

Soit $\psi_i \in k[Q^\infty G][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}]$ vérifiant $\psi_i^p = f_i$. En explicitant les puissances divisées, on voit que $\mathcal{O}_1^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty)$ s'identifie :

$$\bigoplus_{m_0, \dots, m_{t+1} \in \mathbb{N}} \mathcal{B} \cdot \gamma_{pm_0}(u^e) \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X) \quad (3)$$

où $u = \frac{[x_0^{1/p}]}{1+X}$ et où on a posé :

$$\mathcal{B} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}][X]}{([x_0]^e, f_1, \dots, f_t, X^p)}. \quad (4)$$

La description précédente fournit également une description locale des faisceaux $\mathcal{J}_1^{[s]} : \mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty)$ s'identifie au sous- \mathcal{B} -module de $\mathcal{O}_1^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty)$ engendré par les :

$$\gamma_{m_0}(u^e) \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t) \gamma_{m_{t+1}}(X) \quad \text{avec} \quad m_0 + \cdots + m_t \geq s.$$

Les quotients $\mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]}$ ont également une structure sympathique :

$$\frac{\mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty)}{\mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} (\mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \dots, \psi_t, X)) \cdot \gamma_{m_0}(u^e) \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t) \gamma_{m_{t+1}}(X). \quad (5)$$

Si $s < p$, donc en particulier pour $s \leq r$, la dernire description se simplifie lgrement et donne :

$$\frac{\mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty)}{\mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} (\mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \dots, \psi_t, X)) \cdot u^{em_0} \psi_1^{m_1} \dots \psi_t^{m_t} X^{m_{t+1}} \quad (6)$$

Comme ces quotients ne sont pas tus par u , on introduit de nouveaux faisceaux intermdi-aires :

Dfnition 3.3.1. Soit q un nombre rationnel de la forme $\frac{t}{e}$ o t est un entier positif ou nul. Si $t = se + \delta$ est la division euclidienne de t par e , on pose :

$$\mathcal{J}_1^{[q]} = u^\delta \mathcal{J}_1^{[s]} + \mathcal{J}_1^{[s+1]}.$$

On peut nouveau valuer les quotients successifs comme le rsume la proposition suivante :

Proposition 3.3.2. Soit $0 \leq q < p$ un nombre rationnel de la forme $\frac{t}{e}$ pour un certain entier t . Notons $t = se + \delta$ la division euclidienne de t par e . Alors, en reprenant les notations prcdentes :

$$\frac{\mathcal{J}_1^{[q]}(A^\infty, P^\infty)}{\mathcal{J}_1^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} \mathcal{C} \cdot u^{em_0 + \delta} \psi_1^{m_1} \dots \psi_t^{m_t} X^{m_{t+1}} \quad (7)$$

o :

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{B}}{(u, \psi_1, \dots, \psi_t, X)} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}]}{([x_0^{1/p}], \psi_1, \dots, \psi_t)}. \quad (8)$$

Dmonstration. Il est clair que $\frac{\mathcal{J}_1^{[q]}(A^\infty, P^\infty)}{\mathcal{J}_1^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)}$ s'identifie

$$\frac{u^\delta (\mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty) / \mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty))}{u^{\delta+1} (\mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty) / \mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty))}.$$

D'aprs la formule (6), il suffit de montrer que si l'on pose $B = \mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \dots, \psi_t, X)$, l'application de multiplication par u^δ induit un isomorphisme de $\mathcal{C} = B/uB$ dans $u^\delta B/u^{\delta+1}B$. La surjectivit est claire.

Montrons l'injectivit. Soit $B' = k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}]$. Il suffit de montrer que s'il existe un entier $\delta \leq e$ et des lments x, y, y_1, \dots, y_t de B' tels que :

$$u^\delta x = u^e y + y_1 \psi_1 + \dots + y_t \psi_t \quad (9)$$

alors, il existe $y'_1, \dots, y'_t \in B'$ tels que :

$$x = u^{e-\delta} y + y'_1 \psi_1 + \dots + y'_t \psi_t.$$

Nous allons prouver ce rsultat par rcurrence sur t . On rappelle que la famille $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_t)$ est une suite rgulire de B et que, dans B , on a $u^e = \psi_0$ (puisque X est nul).

L'initialisation de la rcurrence provient simplement du fait que u n'est pas diviseur de 0 dans B (puisque u^e ne l'est pas). Pour l'hrdit, on suppose que l'quation (9) est vrifie. Cela entrane $u^\delta x \equiv y_t \psi_t \pmod{u^e, \psi_1, \dots, \psi_{t-1}}$ et donc $u^{e-n\delta} y_t \psi_t \equiv 0 \pmod{u^e, \psi_1, \dots, \psi_{t-1}}$. Puisque la suite $(u^e, \psi_1, \dots, \psi_t)$ est rgulire, il vient $u^{e-\delta} y_t \equiv 0 \pmod{u^e, \psi_1, \dots, \psi_{t-1}}$, et donc il existe $z, z_1, \dots, z_{t-1} \in B$ tels que :

$$u^{e-\delta} y_t = zu^e + z_1 \psi_1 + \dots + z_{t-1} \psi_{t-1}.$$

En appliquant l'hypothse de rccurrence, on obtient l'existence d'lments $z', z'_1, \dots, z'_{t-1}$ dans B tels que :

$$y_t = z'u^\delta + z'_1\psi_1 + \dots + z'_{t-1}\psi_{t-1}.$$

En rinjectant dans (9), il vient :

$$u^\delta(x - z'y_t) = u^e y + (y_1 + z'_1 y_t)\psi_1 + \dots + (y_{t-1} + z'_{t-1} y_t)\psi_{t-1}$$

et une nouvelle application de l'hypothse de rccurrence permet de conclure. \square

Remarque. Sur les quotients de la proposition qui prcde, la structure de A^∞ -module est simple dcrite. En effet, ces quotients sont tus par u et par tous les ψ_i , et donc la structure de A^∞ -module se factorise en une structure de \mathcal{C} -module, qui est dcrite de faon transparente sur la somme directe prcdente.

Finalement, remarquons que si $s \leq p - 1$ et si $p \geq 3$, il est possible de donner une dfnition alternative de $\phi_s : \mathcal{J}_1^{[s]} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ qui est dj valable sur le site $(T_2)_{\text{syn}}$. On remarque pour cela que ϕ_1 s'annule sur $\mathcal{J}_1^{[2]}$ et qu'il dfnit ainsi par passage au quotient un morphisme de faisceaux (sur le site $(T_2)_{\text{syn}}$) $\mathcal{J}_1^{[1]}/\mathcal{J}_1^{[2]} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}}$. En outre, on a le lemme suivant :

Lemme 3.3.3. *Le morphisme de faisceaux canoniques $\text{Sym}_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[1]}/\mathcal{J}_1^{[2]} \rightarrow \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]}$ est un isomorphisme.*

Dmonstration. Avec les descriptions prcdentes, c'est une consquence directe de l'alina I.3.4.4 de [Ber74]. \square

On vrifie que l'application ϕ_s s'obtient comme la compose :

$$\mathcal{J}_1^{[s]} \longrightarrow \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]} \xrightarrow{\text{Sym}^s \phi_1} \mathcal{O}_1^{\text{st}}.$$

Cette dernire formule assure, au moins pour $s \leq p - 1$ et $p \geq 3$, que ϕ_s ne dpend que de ϕ_1 et peut tre dfini sur $(T_2)_{\text{syn}}$.

3.3.2 Les faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$, $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$

Lorsque $n = 1$, on dfnit des versions simplifies des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_1^{[s]}$ en remplaant la base E_1 par la base \tilde{E} (voir le paragraphe 3.1.3 pour la dfnition).

Si U est un log-schma sur T_1 , on dfnit pour tout entier s :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}(U) = H^0((U/\tilde{E})_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{U/\tilde{E}}^{[s]}) = H^0((U/\tilde{E})_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{U/\tilde{E}}^{[s]})$$

et $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} = \tilde{\mathcal{J}}^{[0]}$. Comme prcdemment, les prfaisceaux $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$ sont des faisceaux sur le gros site syntomique $(T_1)_{\text{SYN}}$ et calculent la cohomologie log-cristalline :

$$H^i(X_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^i(X_{\text{SYN}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^i((X/\tilde{E})_{\text{cris}}, \tilde{\mathcal{J}}_{X/\tilde{E}}^{[s]}) = H^i((X/\tilde{E})_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{X/\tilde{E}}^{[s]}).$$

De mme que prcdemment, on pose pour $q = s + \frac{\delta}{e}$ o $s \geq 0$ et $0 \leq \delta < e$ sont des entiers :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} = u^\delta \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} + \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}.$$

Il est encore possible de donner une description locale trs explicite de ces faisceaux. En reprenant les arguments utilis pour les faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_1^{[s]}$, et en reprenant les notations des paragraphes 3.2.1 et 3.3.1, on aboutit :

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_1, \dots, m_{t+1} \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X) \quad (10)$$

avec :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}][X]}{([x_0], f_1, \dots, f_t, X^p)} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}][X]}{(u^p, f_1, \dots, f_t, X^p)}. \quad (11)$$

et, pour $q = s + \frac{\delta}{e} < \frac{p}{e}$ (par exemple si $q \leq r$) :

$$\frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}(A^\infty, P^\infty)}{\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} \tilde{\mathcal{C}} \cdot u^{em_0 + \delta} \psi_1^{m_1} \cdots \psi_t^{m_t} X^{m_{t+1}} \quad (12)$$

o $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$. La structure de A^∞ -module sur ce dernier quotient se factorise en une structure de $\tilde{\mathcal{C}}$ -module, qui est celle qui correspond l'criture sous forme de somme directe.

En comparant les formules (7) et (12), on en dduit la proposition suivante :

Proposition 3.3.4. *Pour $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q < \frac{p}{e}$, la projection canonique induit un isomorphisme de faisceaux :*

$$\mathcal{J}_1^{[q]} / \mathcal{J}_1^{[q+1/e]} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}.$$

Par ailleurs, pour tout entier $s < \frac{p}{e}$, l'oprateur $\phi_s : \mathcal{J}_1^{[s]} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ induit par passage au quotient un morphisme $\phi_s : \mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+1/e]} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}} / u^p \mathcal{O}_1^{\text{st}}$. D'autre part, la projection canonique $\mathcal{O}_1^{\text{st}} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ s'annule sur $u^p \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ et donc fournit un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{st}} / u^p \mathcal{O}_1^{\text{st}} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ (attention, ce n'est pas un isomorphisme). Tout cela, avec la proposition prcdente, permet de dfinir un oprateur $\tilde{\phi}_s$ comme la compose :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]} \xleftarrow{\sim} \mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+1/e]} \xrightarrow{\phi_s} \mathcal{O}_1^{\text{st}} / u^p \mathcal{O}_1^{\text{st}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}.$$

Encore une fois, le morphisme $\tilde{\phi}_s$ n'est pas dfini sur $(T_1)_{\text{syn}}$, mais *a priori* simplement sur $(T_{s+1})_{\text{syn}}$.

Finalement, on munit le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ d'un oprateur \tilde{N} , aprs avoir remarqu que l'oprateur $N : \mathcal{O}_1^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ passe au quotient puisque $N(u^p \mathcal{O}_1^{\text{st}} + \sum_{i \geq p} \gamma_i(u) \mathcal{O}_1^{\text{st}}) \subset u^p \mathcal{O}_1^{\text{st}} + \sum_{i \geq p} \gamma_i(u) \mathcal{O}_1^{\text{st}}$.

3.3.3 Les faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ et $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$

On recopie les dfinitions prcdentes en se plaant dsormais sur la base \bar{E} (voir paragraphe 3.1.3) : pour tout entier s et tout $U \in (T_1)_{\text{SYN}}$, on pose

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}(U) = H^0((\bar{U}/\bar{E})_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{\bar{U}/\bar{E}}^{[s]}) = H^0((\bar{U}/\bar{E})_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{\bar{U}/\bar{E}}^{[s]})$$

o $\bar{U} = U \times_{T_1} \bar{E}$. On obtient ainsi des faisceaux sur le site $(T_1)_{\text{SYN}}$ qui, comme prcdemment, calculent la cohomologie log-cristalline. On pose en outre $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} = \tilde{\mathcal{J}}^{[0]}$.

On dispose encore d'une description locale du faisceau $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$. En gardant les mmes notations, on a :

$$\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_1, \dots, m_{t+1} \in \mathbb{N}} \bar{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X) \quad (13)$$

avec :

$$\bar{\mathcal{B}} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}][X]}{(u, f_1, \dots, f_t, X^p)}. \quad (14)$$

L'ement u est nul par hypothse dans \bar{E} et donc galement dans $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$. On ne dfinit donc pas les faisceaux intermdiaires $\bar{\mathcal{J}}^{[q]}$ pour q rationnel, mais, si s est un entier, on a toujours une description explicite du quotient :

$$\frac{\bar{\mathcal{J}}^{[s]}(A^\infty, P^\infty)}{\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} \bar{\mathcal{C}} \cdot \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t) \gamma_{m_{t+1}}(X) \quad (15)$$

o $\bar{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$. Il est encore une fois possible de dcire la structure de A^∞ -module sur ce quotient : elle se factorise par la structure de $\bar{\mathcal{C}}$ -module naturelle sur la somme directe. Finalement, en comparant les formules (7) et (15), on voit que le morphisme naturel $\bar{\mathcal{J}}_1^{[s]} / \bar{\mathcal{J}}_1^{[s+1/e]} \rightarrow \bar{\mathcal{J}}^{[s]} / \bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ est un isomorphisme pour $s < p$. Cela permet de dfinir un opérateur $\bar{\phi}_s$ comme la compose :

$$\bar{\mathcal{J}}^{[s]} \longrightarrow \bar{\mathcal{J}}^{[s]} / \bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} \xleftarrow{\sim} \bar{\mathcal{J}}_1^{[s]} / \bar{\mathcal{J}}_1^{[s+1/e]} \xrightarrow{\phi_s} \mathcal{O}_1^{\text{st}} / u^p \mathcal{O}_1^{\text{st}} \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}.$$

3.3.4 Les faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$, $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$

Sur un log-schma de caractristique p , on dfinit le Frobenius absolu de la faon suivante : c'est le Frobenius absolu classique sur le schma sous-jacent et la multiplication par p sur le monode (supposer qu'il soit not additivement).

Soit U un log-schma fin (localement de prsentation finie) sur T_1 . On voit U sur E_1 grce l'paississement $T_1 \hookrightarrow E_1$. On note $U' = U \times_{E_1} E_1$ o E_1 est vu sur lui-mme par le morphisme de Frobenius absolu. Le Frobenius absolu sur U se factorise par U' et fournit donc un morphisme $U \rightarrow U'$ appel Frobenius relatif f_U .

Dans la terminologie de Kato (voir [Kat89], paragraphe 4.9), la flche f_U est faiblement purement insparable et d'aprs le thorme 4.10 de *loc. cit.*, elle se factorise de faon *unique* sous la forme :

$$f_U : U \rightarrow U'' \rightarrow U'$$

o le premier morphisme est purement insparable et le second est log-tale. On dfinit alors, comme dans le paragraphe 2.2.1 de [Bre98] :

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}}(U) = \Gamma(U'', \mathcal{O}_{U''}).$$

On prouve (voir appendice B de [Bre98]) que l'on dfinit ainsi un faisceau $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$ sur le gros site syntomique $(T_1)_{\text{SYN}}$. Par ailleurs, d'aprs les rsultats de [Kat89], si $U = (\text{Spec } A, P)$, on a simplement :

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}}(U) = (S_1 \otimes_{(\phi), k} A / \pi A) \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{N} \oplus_{(\phi), \mathbb{N}} P]} \mathbb{Z}[(\mathbb{N} \oplus_{(\phi), \mathbb{N}} P)^{(1)}].$$

Avec les notations introduites prcdemment, ceci se rcrit :

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_0 \in \mathbb{N}} \mathcal{B} \cdot \gamma_{pm_0}(u^\epsilon) \quad (16)$$

o on rappelle que \mathcal{B} est dfini par la formule (4).

On dfinit de mme sur le site $(T_1)_{\text{SYN}}$ les faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ en remplaant la base E_1 respectivement par les bases \tilde{E} et \bar{E} . Comme prcdemment, on peut donner une description explicite des faisceaux obtenus. On obtient :

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) = \tilde{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) = \bar{\mathcal{B}} \quad (17)$$

o les anneaux $\tilde{\mathcal{B}}$ et $\bar{\mathcal{B}}$ sont dfinis respectivement par les formules (11) et (14).

Pour finir, mentionnons que la structure de A^∞ -module sur l'objet $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty)$ est donne par l'application $A^\infty \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ dduite du Frobenius. En particulier, on constate que cette application se factorise par $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{C}}$. Il en va de mme pour $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty)$.

4 Calcul de la cohomologie cristalline

On montre dans cette partie comment associer un log-schma X propre et log-lisse sur la base $T = (\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_K, 1 \mapsto \pi)$ dont la rduction modulo p est du *type de Cartier* (voir dfnition 4.8 de [Kat89]) sur $X \times_T T_1$, et un entier n des objets des catgories $\underline{\mathcal{M}}^r$ tus par p^n . Prcisment, il s'agit, pour tout $i < r$, des quadruplets :

$$(H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$$

o par dfnition $X_n = X \times_T T_n$. On fait remarquer une fois de plus que le morphisme ϕ_r n'est dfini que sur $(X_{n+r})_{\text{syn}}$. Toutefois, l'criture prcdente du quadruplet est lgitime car on dispose d'isomorphismes canoniques entre $(H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}})$ et $(H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}})$ d'une part et $H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]})$ et $H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]})$ d'autre part.

On commence par traiter le cas $n = 1$ (sous-partie 4.1) : alors, l'lment de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est tu par p et peut-tre donc vu dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$. On procde ensuite par dvissage avant de passer un passage la limite projective pour proposer une version entire (sous-partie 4.2).

4.1 En caractristique p

On se donne ici, un log-schma fin X_1 propre et log-lisse sur la base T_1 (voir paragraphe 3.1.3). En particulier, le morphisme structural $X_1 \rightarrow T_1$ est log-syntomique. On suppose que X_1 est du type de Cartier et qu'il admet un relvement X_2 fin et log-lisse sur T_2 . Ce relvement est automatiquement log-syntomique sur T_2 .

Le but, ici, est de prouver que le quadruplet $(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ dfnit un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour tout $i \leq r$. On montre d'abord l'nonc quivalent avec la base \tilde{E} , *i.e.* que le quadruplet $(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}), \tilde{\phi}_r, \tilde{N})$ dfnit un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$. Le point le plus difficile est la libert du \tilde{S} -module $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Les deux paragraphes 4.1.1 et 4.1.2 y sont consacs. Dans le paragraphe 4.1.3, on explique comment on termine la preuve pour la base \tilde{E} avant d'en dduire dans le paragraphe 4.1.4, le thorme sur la base E_1 .

4.1.1 Des isomorphismes sur les faisceaux

On suit pratiquement la lettre la mthode initie par Fontaine et Messing ([FM87]) et dveloppe par Breuil ([Bre98]) dans le cas qui nous intrsse. Pour tout entier $s \geq 1$, on note $\mathcal{J}_1^{(s)}$ le noyau

du morphisme compos $\mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_s^{\text{st}}$. On note $\nu_s : \mathcal{J}_1^{(s)} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ la rduction modulo p et on dfini $\hat{f}_s : \mathcal{J}_1^{(s)} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ par $\hat{f}_s(x) = y$ si $\phi(x) = p^s \hat{y}$ o \hat{y} est une section (locale) du faisceau $\mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}}$.

On dfini ensuite $F^s \mathcal{O}_1^{\text{st}} = \text{im } \nu_s$ et $F_s \mathcal{O}_1^{\text{st}} = \text{im } \hat{f}_s$. Ce sont deux sous-faisceaux d'anneaux de $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$. On montre facilement que la suite $(F^s \mathcal{O}_1^{\text{st}})$ est dcroissante alors que la suite $(F_s \mathcal{O}_1^{\text{st}})$ est croissante. En outre, le morphisme \hat{f}_s se factorise en un isomorphisme :

$$f_s : F^s \mathcal{O}_1^{\text{st}} / F^{s+1} \mathcal{O}_1^{\text{st}} \xrightarrow{\sim} F_s \mathcal{O}_1^{\text{st}} / F_{s-1} \mathcal{O}_1^{\text{st}}.$$

On note $F_s^{\text{car}} \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$ -algbre de $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ engendr par $F^s \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ et $F_s^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ (resp. $F_s^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$) l'image de $F_s^{\text{car}} \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ dans $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ (resp. dans $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$). On note galement $F^s \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ la rduction de $F^s \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ dans $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$.

Soient \mathcal{O}_1 le faisceau structural sur le site $(T_1)_{\text{SYN}}$, et $\bar{\mathcal{O}}$ sa rduction modulo π . On a, en reprenant les notations du paragraphe 4.1, les descriptions locales suivantes :

$$\mathcal{O}_1(A^\infty, P^\infty) = A^\infty \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{O}}(A^\infty, P^\infty) = A^\infty / \pi. \quad (18)$$

On dispose de fiches naturelles $\mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{car}}$, $\bar{\mathcal{O}} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}} \rightarrow \bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ qui localement sur les descriptions prcdentes sont donnes par l'lvation la puissance p . Ces fiches se factorisent toutes les trois par \mathcal{C} .

Proposition 4.1.1. *i) Pour tout entier s , on a $F^s \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} = \bar{\mathcal{J}}[s]$.*

ii) On a $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} F_s^{\text{car}} \mathcal{O}_1^{\text{st}} = \mathcal{O}_1^{\text{st}}$, $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} F_s^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} = \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ et $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} F_s^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} = \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$.

iii) Pour tout entier s , l'isomorphisme f_s se factorise en des isomorphismes de faisceaux sur $(\bar{E})_{\text{syn}}$:

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \bar{\mathcal{J}}[s] / \bar{\mathcal{J}}[s+1] \xrightarrow{\sim} F_s^{\text{car}} \mathcal{O}_1^{\text{st}} / F_{s-1}^{\text{car}} \mathcal{O}_1^{\text{st}}$$

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \bar{\mathcal{J}}[s] / \bar{\mathcal{J}}[s+1] \xrightarrow{\sim} F_s^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} / F_{s-1}^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$$

$$\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \bar{\mathcal{J}}[s] / \bar{\mathcal{J}}[s+1] \xrightarrow{\sim} F_s^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} / F_{s-1}^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$$

Dmonstration. Elle est entirement analogue celle de la proposition 2.2.2.2 de [Bre98]. Signalons toutefois une subtilit peut-tre insuffisamment souligne dans *loc. cit.* : une fois prouvs i) et ii), on est amen valuer, pour le premier isomorphisme de iii), le produit tensoriel :

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{A^\infty} \frac{\bar{\mathcal{J}}[s](A^\infty, P^\infty)}{\bar{\mathcal{J}}[s+1](A^\infty, P^\infty)}$$

qui d'aprs les descriptions prcdentes s'identifie :

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{A^\infty} \left(\bigoplus_{\sum m_i = s} \bar{\mathcal{C}} \cdot \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t) \gamma_{m_{t+1}}(X) \right).$$

Il faut alors se souvenir que chacun des facteurs du produit tensoriel est tu par u et tous les ψ_i , de sorte que la structure de A^∞ -module sur ces deux facteurs se factorise en une structure de $\bar{\mathcal{C}}$ -module. Ayant constat cela, le produit tensoriel se rcrit :

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{\bar{\mathcal{C}}} \left(\bigoplus_{\sum m_i = s} \bar{\mathcal{C}} \cdot \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t) \gamma_{m_{t+1}}(X) \right)$$

et donc vaut bien :

$$\bigoplus_{\sum m_i = s} \mathcal{O}_1^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) \cdot \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t) \gamma_{m_{t+1}}(X)$$

comme annonc dans *loc. cit.* La fin de la preuve reste inchangé. \square

Notons qu'au passage la preuve de [Bre98] donne des descriptions locales explicites pour les faisceaux F_s^{car} , qui sont (toujours en gardant les mmes notations) :

$$\begin{aligned} F_s^{\text{car}} \mathcal{O}_1^{\text{st}} &= \bigoplus_{\substack{m_0 \in \mathbb{N} \\ m_i + \cdots + m_{t+1} \leq s}} \mathcal{B} \cdot \gamma_{pm_0}(u^e) \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X) \\ F_s^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} &= \bigoplus_{m_1 + \cdots + m_{t+1} \leq s} \tilde{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X) \\ F_s^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} &= \bigoplus_{m_1 + \cdots + m_{t+1} \leq s} \bar{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X). \end{aligned}$$

De ces descriptions explicites, on dduit le thorme suivant :

Thorme 4.1.2. *Soit $s < \frac{p}{e}$ un entier (si $p = 2$ et $e = 1$, on impose $s = 0$). On a alors des isomorphismes de faisceaux sur le site $(T_2)_{\text{syn}}$:*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+1/e]} &= \tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]} \xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_s]{\sim} F_s^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \\ \bar{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+1/e]} &= \bar{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]} \xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_s]{\sim} F_s^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}. \end{aligned}$$

Dmonstration. Encore une fois, la preuve est identique celle du thorme 2.2.2.3 de [Bre98]. Notons toutefois que la subtilit mentionne dans la preuve de la proposition prcdente apparat nouveau ici. \square

Remarque. On dmontre de faon tout fait identique que l'on a galement les isomorphismes suivants, pour $s \leq \frac{p}{e} - 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+1]} &\xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_s]{\sim} F_s^{\text{car}} \mathcal{O}_1^{\text{st}} \\ \tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+1]} &= \tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_s]{\sim} F_s^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \\ \bar{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+1]} &= \bar{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_s]{\sim} F_s^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}. \end{aligned}$$

certainement plus proches de ceux de [Bre98] (rappelons que $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ sont tus par π).

Par ailleurs, si l'on ne se procupe que de la version « \mathcal{J}_1 » et pas de la version « $\tilde{\mathcal{J}}$ », les isomorphismes prcdents sont valables pour tout $s \leq p - 1$.

4.1.2 Des isomorphismes sur les groupes de cohomologie

Nous aimerions prsnt dduire du thorme 4.1.2 des isomorphismes sur les groupes de cohomologie et, pour cela, nous allons projeter ces faisceaux sur le site tale : l'intrt est que sur ce site le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ (resp. $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$) se rduit simplement $\tilde{S} \otimes_{(\phi),k} \bar{\mathcal{O}}$ (resp. $\bar{S} \otimes_{(\phi),k} \bar{\mathcal{O}}$).

Soit X un log-schma fin localement de type fini sur une des trois bases E_1 , \tilde{E} ou \bar{E} . On dispose dans ces conditions d'un morphisme de topo :

$$\alpha : \widetilde{X}_{\text{SYN}} \rightarrow \widetilde{X}_t$$

dfini de la faon suivante : si \mathcal{F} est un faisceau sur X_{SYN} , on dfinit $\alpha_* \mathcal{F}$ comme la restriction de \mathcal{F} au site X_t , et on vrifie que l'on obtient ainsi un faisceau pour la topologie tale. Rciproquement si \mathcal{F} est un faisceau sur $X_{\text{ÉT}}$, on dfinit $\alpha^* \mathcal{F}$ comme le faisceau associ (pour la topologie syntomique) au prfaisceau \mathcal{F} .

Si Γ_{SYN} (resp. $\Gamma_{\text{ÉT}}$) dsigne le foncteur des sections globales pour la topologie syntomique (resp. tale), on a videmment la relation $\Gamma_{\text{SYN}} = \Gamma_{\text{ÉT}} \circ \alpha_*$ d'o $R\Gamma_{\text{SYN}} = R\Gamma_{\text{ÉT}} \circ R\alpha_*$. Ainsi pour calculer la cohomologie syntomique d'un faisceau, il suffit de calculer le $R\alpha_*$ de ce faisceau puis de dterminer l'hypercohomologie tale du complexe obtenu. C'est ce que nous allons faire.

Calcul des $R\alpha_*$ de plusieurs faisceaux Pour calculer les $R\alpha_*$ des faisceaux prcdemment introduits, on aimerait utiliser les rsolutions de Berthelot et Kato. Cependant, celles-ci sont valables sur le site cristallin et non sur le site syntomique. Il nous faut donc faire un pont entre cohomologie cristalline et cohomologie syntomique, pont qui passe par la cohomologie cristalline-syntomique.

Soit X un log-schma fin localement de type fini sur une des trois bases E_1 , \tilde{E} ou \bar{E} . Reprenant les notations de [Bre98] auquel on aura besoin de se rfrer par la suite, on note Υ la base retenue.

On dfinit le *site cristallin-syntomique* sur X/Υ en munissant la catgorie sous-jacente au site cristallin sur X/Υ de la topologie syntomique : il s'agit donc d'une catgorie de couples $(U \hookrightarrow T)$ et on convient qu'une famille de couples $(U_i \hookrightarrow T_i)$ recouvre $(U \hookrightarrow T)$ si les T_i forment un recouvrement syntomique de T et si les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & T_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & T \end{array}$$

sont cartsiens.

Bien entendu, selon que l'on conside la catgorie sous-jacente au petit site cristallin sur X/Υ ou au grand, on obtient respectivement les petit et grand sites cristallin-syntomiques sur X/Υ . On les note $(X/\Upsilon)_{\text{syn-cris}}$ et $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$. Par les rsultats de [Bre96] (lemme 3.3.1), on a des morphismes de topo entre les diffrents catgories de faisceaux sur les sites prcdents comme le rsume le carr commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{X/\Upsilon})_{\text{SYN-CRIS}} & \xrightarrow{v} & (\widetilde{X/\Upsilon})_{\text{CRIS}} \\ \downarrow w & & \downarrow u \\ \widetilde{X}_{\text{SYN}} & \xrightarrow{\alpha} & \widetilde{X}_t \end{array}$$

Par ailleurs, il est possible de définir, comme en 3.3.4, sur le site $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$ (resp $(X/\Upsilon)_{\text{syn-cris}}$) des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$, $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ en posant $\mathcal{O}_1^{\text{car}}(U \hookrightarrow T) = \mathcal{O}_1^{\text{car}}(U)$ (où le deuxième $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$ est celui défini précédemment⁴) et des formules analogues pour les autres faisceaux. (Attention, dans [Bre98], ces faisceaux sont notés respectivement $\mathcal{O}_X^{\text{car}, E_1}$, $\mathcal{O}_X^{\text{car}, \tilde{E}_1}$ et $\mathcal{O}_X^{\text{car}, \bar{E}_1}$.) De même, ces faisceaux vivent également sur les sites $(X/\Upsilon)_{\text{CRIS}}$ (resp. $(X/\Upsilon)_{\text{cris}}$) et $X_{\text{ÉT}}$ (resp. X_t).

Soit \mathcal{F} un faisceau sur un des sites $(X/\Upsilon)_{\text{CRIS}}$, $(X/\Upsilon)_{\text{cris}}$, $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$ ou $(X/\Upsilon)_{\text{syn-cris}}$. Pour tout T apparaissant dans un couple de la forme $(U \hookrightarrow T)$, on sait que \mathcal{F} définit un faisceau $F|_{U \hookrightarrow T}$ sur T_t . On dit que \mathcal{F} est *composantes quasi-cohérentes* si tous les faisceaux $F|_{U \hookrightarrow T}$ sont des \mathcal{O}_T -modules quasi-cohérents.

On montre (en adaptant la preuve du lemme 3.3.2 de [Bre96]) que si \mathcal{F} est un faisceau composantes quasi-cohérentes sur $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$, alors $R^i v_* \mathcal{F} = 0$ pour tout $i \geq 1$. Autrement dit $Rv_* \mathcal{F} \simeq v_* \mathcal{F}$. De même, par un calcul de Čech, on prouve (voir [Bre98], appendice C.1) que $Rw_* \mathcal{F} \simeq w_* \mathcal{F}$ (toujours en supposant que \mathcal{F} est composantes quasi-cohérentes).

On dispose d'un résultat de comparaison entre cohomologie log-cristalline et cohomologie de de Rham (théorème 6.4 de [Kat89]) qui donne avec les rappels précédents le théorème suivant :

Théorème 4.1.3. *Soit X un log-schéma fini localement de type fini sur Υ . On suppose que l'on a une Υ -immersion ferme $X \hookrightarrow Y$ avec Y log-lisse sur Υ . Soit D l'enveloppe aux puissances divisées de X dans Y (voir paragraphe 6.n de [Kat89] pour une définition). Alors, pour tout entier s :*

– si $\Upsilon = T_1$:

$$R\alpha_* \mathcal{J}_1^{[s]} = \mathcal{J}_D^{[s]} \rightarrow \mathcal{J}_D^{[s-1]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/T_1}^1 \rightarrow \mathcal{J}_D^{[s-2]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/T_1}^2 \rightarrow \dots$$

– si $\Upsilon = \tilde{T}$:

$$R\alpha_* \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} = \mathcal{J}_D^{[s]} \rightarrow \mathcal{J}_D^{[s-1]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\tilde{T}}^1 \rightarrow \mathcal{J}_D^{[s-2]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\tilde{T}}^2 \rightarrow \dots$$

– si $\Upsilon = \bar{T}$:

$$R\alpha_* \bar{\mathcal{J}}^{[s]} = \mathcal{J}_D^{[s]} \rightarrow \mathcal{J}_D^{[s-1]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\bar{T}}^1 \rightarrow \mathcal{J}_D^{[s-2]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\bar{T}}^2 \rightarrow \dots$$

et :

– si $\Upsilon = T_1$:

$$R\alpha_* \left(\mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+1]} \right) = \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}}{\mathcal{J}_D^{[s+1]}} \rightarrow \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}}{\mathcal{J}_D^{[s]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/T_1}^1 \rightarrow \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]}}{\mathcal{J}_D^{[s-1]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/T_1}^2 \rightarrow \dots$$

– si $\Upsilon = \tilde{T}$:

$$R\alpha_* \left(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \right) = \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}}{\mathcal{J}_D^{[s+1]}} \rightarrow \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}}{\mathcal{J}_D^{[s]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\tilde{T}}^1 \rightarrow \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]}}{\mathcal{J}_D^{[s-1]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\tilde{T}}^2 \rightarrow \dots$$

– si $\Upsilon = \bar{T}$:

$$R\alpha_* \left(\bar{\mathcal{J}}^{[s]} / \bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} \right) = \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}}{\mathcal{J}_D^{[s+1]}} \rightarrow \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}}{\mathcal{J}_D^{[s]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\bar{T}}^1 \rightarrow \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]}}{\mathcal{J}_D^{[s-1]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\bar{T}}^2 \rightarrow \dots$$

⁴Notez que si $U \hookrightarrow T$ est un objet de $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$, alors $U \rightarrow X$ est tale et donc en particulier log-syntomique.

Remarque. En gardant les notations du thorme, si on suppose en plus X log-lisse sur Υ , on peut choisir $Y = X$ et alors $\mathcal{J}_D^{[s]} = \mathcal{O}_X$ si $s \leq 0$ et $\mathcal{J}_D^{[s]} = 0$ sinon. Les expressions des $R\alpha_\star$ se simplifient alors considrablement. Par exemple, dans le cas o $\Upsilon = \bar{T}$, on obtient :

$$\begin{aligned} R\alpha_\star \bar{\mathcal{J}}^{[s]} &= 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \omega_{X/\bar{T}}^s \rightarrow \omega_{X/\bar{T}}^{s+1} \rightarrow \omega_{X/\bar{T}}^{s+2} \rightarrow \cdots \\ R\alpha_\star (\bar{\mathcal{J}}^{[s]}/\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}) &= 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \omega_{X/\bar{T}}^s \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Retenons ces rsolutions que l'on sera amen rutiliser par la suite.

On peut montrer galement (voir appendice B de [Bre98]) un raffinement du thorme prcdent qui permet de tenir compte des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$:

Thorme 4.1.4. *Soit X un log-schma fin localement de type fini sur T_1 . On suppose que l'on a une T_1 -immersion ferme $X \hookrightarrow Y$ avec Y log-lisse sur T_1 . Soit D l'enveloppe aux puissances divises de X dans Y . Alors, pour tout entier s :*

$$\begin{aligned} R\alpha_\star \left(\mathcal{O}_1^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1}^{\text{SYN}} \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]} \right) &= \\ \mathcal{O}_1^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}}{\mathcal{J}_D^{[s+1]}} &\rightarrow \left(\mathcal{O}_1^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}}{\mathcal{J}_D^{[s]}} \right) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/T_1}^1 \rightarrow \left(\mathcal{O}_1^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]}}{\mathcal{J}_D^{[s-1]}} \right) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/T_1}^2 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

o « \otimes^{SYN} » signifie que l'on prend le faisceau associ au faisceau produit tensoriel pour la topologie syntomique sur X .

On a d'autre part des versions analogues avec les bases \tilde{T} et \bar{T} .

Remarque. Si X est de plus du type de Cartier, le faisceau $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$ sur X_t s'identifie $\Sigma \otimes_{(\phi),k} \mathcal{O}_X$ o Σ est l'anneau de Υ . Dans ce dernier cas, on obtient une rsolution plus simple.

Intressons-nous maintenant un analogue du thorme 4.1.3 pour les faisceaux $\mathcal{J}_1^{[q]}$, $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ et $\bar{\mathcal{J}}^{[q]}$ o q n'est pas forcement un entier. Soit $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$. Si X/Υ est comme prcdemment un log-schma fin, localement de type fini, on commence par dfinir des faisceaux $\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[q]}$ sur les sites $(X/\Upsilon)_{\text{CRIS}}$ et $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$ en posant :

$$\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[q]} = u^\delta \mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[s]} + \mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[s+1]}$$

si $eq = es + \delta$ est la division euclidienne de eq par e . (On remarque que lorsque $\Upsilon = \bar{E}$, on a $u = 0$ et donc le premier terme de la somme n'intervient que si $\delta = 0$).

On s'intresse particulirement au quotient $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$. Par dfnition, on a immdiatement :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} = \frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}}{u^\delta (\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]})}$$

et une galit analogue pour les faisceaux $\mathcal{J}_{X/\Upsilon}^{[q]}$. Du fait que $Rv_\star \mathcal{F} = v_\star \mathcal{F}$ (resp. $Rw_\star \mathcal{F} = w_\star \mathcal{F}$) si \mathcal{F} est un faisceau composantes quasi-cohrentes, on dduit :

$$Rv_\star \left(\mathcal{J}_{X/\bar{T}}^{[s]}/\mathcal{J}_{X/\bar{T}}^{[q]} \right) = \mathcal{J}_{X/\bar{T}}^{[s]}/\mathcal{J}_{X/\bar{T}}^{[q]} \quad (\text{resp. } Rw_\star \left(\mathcal{J}_{X/\bar{T}}^{[s]}/\mathcal{J}_{X/\bar{T}}^{[q]} \right) = \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}).$$

En vrifiant soigneusement que la dmonstration de l'appendice B de [Bre98] s'applique encore dans ce contexte, on obtient le thorme suivant :

Thorme 4.1.5. *Avec les notations prcdentes, on a :*

$$R\alpha_{\star} \left(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \right) = \frac{\mathcal{J}_D^{[s]} / \mathcal{J}_D^{[s+1]}}{u^{\delta}(\mathcal{J}_D^{[s]} / \mathcal{J}_D^{[s+1]})} \rightarrow \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]} / \mathcal{J}_D^{[s]}}{u^{\delta}(\mathcal{J}_D^{[s-1]} / \mathcal{J}_D^{[s]})} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\bar{T}}^1 \rightarrow \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]} / \mathcal{J}_D^{[s-1]}}{u^{\delta}(\mathcal{J}_D^{[s-2]} / \mathcal{J}_D^{[s-1]})} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\bar{T}}^2 \rightarrow \dots$$

et :

$$R\alpha_{\star} \left(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \right) = \tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s]} / \mathcal{J}_D^{[s+1]}}{u^{\delta}(\mathcal{J}_D^{[s]} / \mathcal{J}_D^{[s+1]})} \rightarrow \left(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]} / \mathcal{J}_D^{[s]}}{u^{\delta}(\mathcal{J}_D^{[s-1]} / \mathcal{J}_D^{[s]})} \right) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\bar{T}}^1 \rightarrow \dots$$

Remarque. Bien videmment, on a des versions analogues pour les bases T_1 et \bar{T} . En outre, il est possible d'crire des rsolutions de ce type pour beaucoup d'autres faisceaux. Cependant, pour cet article, nous aurons seulement besoin de celle-ci.

Des isomorphismes la Deligne-Illusie On reprend les notations et les hypothses du dbut de paragraphe 4.1 : X_1 dsigne un log-schma propre, log-lisse et du type de Cartier sur T_1 et on suppose qu'il admet un relvement fin et log-lisse X_2 sur T_2 .

Thorme 4.1.6. *On garde les notations que l'on vient de rappeler. Alors, pour tout $0 \leq i \leq s < \frac{p}{e}$, on a :*

$$\begin{aligned} \tilde{S} \otimes_{(\phi),k} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) &\xrightarrow{\sim_{id \otimes \phi_s}} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{\text{st}}) \\ H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) &\xrightarrow{\sim_{\phi_s}} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \bar{\mathcal{O}}_1^{\text{st}}) \end{aligned}$$

et des versions quivalentes en remplaant « $\tilde{\mathcal{J}}$ » par « \mathcal{J}_1 ».

Dmonstration. Comme les deux faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$ sont tus par π , le produit tensoriel $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$ est isomorphe $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$.

Comme X_1 est suppos du type de Cartier, le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ sur le site $(X_1)_t$ s'identifie $\tilde{S} \otimes_{(\phi),k} \bar{\mathcal{O}}$. Dans ces conditions, le thorme 4.1.5 assure que la flche canonique :

$$\tilde{S} \otimes_{(\phi),k} R\alpha_{\star}(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) \rightarrow R\alpha_{\star}(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) = R\alpha_{\star}(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) \quad (19)$$

est un isomorphisme (α dsigne le morphisme de topo $(\widetilde{X_1})_{\text{SYN}} \rightarrow (\widetilde{X_1})_t$). Par le thorme 4.1.2, on a un nouvel isomorphisme :

$$R\alpha_{\star}(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) \simeq R\alpha_{\star}(F_s^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}). \quad (20)$$

D'autre part, en combinant la proposition 4.1.1 et le thorme 4.1.4, on obtient pour tout entier t :

$$R\alpha_{\star}(F_t^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} / F_{t-1}^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \simeq \tilde{S} \otimes_{(\phi),k} R\alpha_{\star}(\bar{\mathcal{J}}^{[t]} / \bar{\mathcal{J}}^{[t+1]}) = \tilde{S} \otimes_{(\phi),k} \omega_{\bar{X}/\bar{T}}^t[-t]$$

o $\bar{X} = X \times_{T_1} \bar{T}$. On en dduit que :

$$\tau_{\leq t-1} R\alpha_{\star}(F_t^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \simeq \tau_{\leq t-1} R\alpha_{\star}(F_{t-1}^{\text{car}} \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}})$$

et puis par une recurrence immddiate :

$$\tau_{\leq s} R\alpha_*(F_s^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \simeq \tau_{\leq s} R\alpha_*(F_t^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$$

pour tout entier $t \geq s$. Le thorme dcoule alors de la propriit $\bigcup_{t \in \mathbb{N}} F_t^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} = \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ (proposition 4.1.1) et des isomorphismes (19) et (20).

On traite de manire exactement similaire le cas de « \mathcal{J}_1 ». \square

Remarque. En utilisant l'isomorphisme donn par la remarque qui suit le thorme 4.1.2, on obtient des isomorphismes analogues qui s'crivent :

$$\begin{aligned} \tilde{S} \otimes_{(\phi), \mathcal{O}_K/p} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}) &\xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{\text{st}}) \\ k \otimes_{(\phi), \mathcal{O}_K/p} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}) &\xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \bar{\mathcal{O}}_1^{\text{st}}) \end{aligned}$$

o $\Sigma = k$ ou \tilde{S} est vu comme une \mathcal{O}_K/p -algre par la compose $\mathcal{O}_K/p \rightarrow k \rightarrow \Sigma$, la premiere flche tant la projection canonique et la seconde le Frobenius. En particulier, mis ensemble ces isomorphismes impliquent que le morphisme naturel :

$$\frac{H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]})}{u \cdot H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]})} \longrightarrow H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$$

est un isomorphisme pour tout $i \leq s < \frac{p}{e}$.

4.1.3 Fin de la preuve

On garde les notations et les hypotheses introduites au dbut du paragraphe 4.1.

Au vu du thorme 4.1.6, il reste prouver, pour s'assurer que le quadruplet :

$$(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}), \phi_r, N)$$

est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, les deux choses suivantes :

1. la flche canonique $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})$ est surjective,
2. la flche canonique $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est injective,

les autres propriits de compatibilit tant claires.

Si \mathcal{F} est un faisceau sur $(X_1)_{\text{syn}}$, nous notons simplement $H^i(\mathcal{F})$ pour $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{F})$ et si ce dernier est un espace vectoriel de dimension finie sur k , nous notons $h^i(\mathcal{F})$ sa dimension.

Propriits de finitude. Pour la suite, nous aurons besoin de raisonner sur les dimensions de certains groupes de cohomologie. Il nous faut donc prouver dans un premier temps qu'ils sont de dimension finie. Nous commenons par donner un rsultat agrable sur les faisceaux $u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$:

Proposition 4.1.7. *Pour tous entiers k et $i < \frac{p}{e}$ (on impose $i = 0$ si $p = 2$ et $e = 1$), les k -espaces vectoriels $H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ sont de dimension finie et gaux $u^k H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$.*

Dmonstration. En premier lieu, on remarque que si $k \geq p$, tout est nul et donc la proposition est trivialement vrifie. Montrons que $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est de dimension finie sur k . Le log-schma $\bar{X} = X_1 \otimes_{T_1} \bar{T}$ est log-lisse sur $\bar{T} = \bar{E}$ par changement de base et donc, par la remarque qui suit

le thorme 4.1.3, $R\alpha_*\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} = \mathcal{O}_{\bar{X}/\bar{E}} \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^1 \rightarrow \dots$. Comme \bar{X} est propre, les $\omega_{\bar{X}/\bar{E}}^j$ sont de dimension finie, et il en est donc de mme de $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Le thorme 4.1.6 permet alors de conclure.

Prouvons dsormais la proposition par rcurrence sur i . En crivant la suite exacte longue associe :

$$0 \longrightarrow u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \xrightarrow{u^{p-k}} u^{p-k} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow 0$$

et en appliquant l'hypothse de rcurrence, on prouve que la flche $H^i(u^k \mathcal{O}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\mathcal{O}^{\text{st}})$ est injective. Ainsi $H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est de dimension finie car inclus dans $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Par ailleurs, on vrifie facilement que l'on dispose d'une suite exacte de faisceaux, pour tout entier $k \leq p-1$:

$$0 \longrightarrow u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \xrightarrow{u} u^{k+1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow 0 .$$

Par l'hypothse de rcurrence, la suite exacte longue associe prend la forme :

$$0 \longrightarrow H^i(u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(u^{k+1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$$

et fournit une ingalit sur les dimensions savoir $h^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \leq h^i(u^{k+1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) + h^i(u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Or $u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \simeq \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$, d'o en additionnant les ingalits prcdentes pour k variant de 0 p , on obtient $h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \leq ph^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Or le thorme 4.1.6 prouve qu'il y a en fait galit entre les deux nombres prcdents. Cela implique que toutes les ingalits sommes sont des galits et par suite que l'on a des suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow H^i(u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(u^{k+1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow 0 .$$

Si $k \leq p$, le morphisme de multiplication par u^k se factorise par $H^i(\mathcal{O}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(u^k \mathcal{O}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\mathcal{O}^{\text{st}})$. D'aprs ce qui prcde, la premiere flche est surjective et la seconde est injective. On en dduit le rsultat annonc. \square

Intressons-nous prsent aux faisceaux $u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ et commenons par un lemme qui les relie entre eux :

Lemme 4.1.8. *Soient $k \in \{0, \dots, p-1\}$ et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$. Notons s la partie entiere de q . Alors on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow u^{k+1} \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0 .$$

Dmonstration. Commenons par prciser les flches qui apparaissent dans la suite exacte. La premiere $u^{k+1} \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \rightarrow u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}$ est simplement l'inclusion naturelle entre deux sous-faisceaux de $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$. La seconde flche est lgrement plus subtile. Remarquons en premier lieu, que si l'on note K le noyau de la projection (multiplication par u^k) $\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \rightarrow u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$, on dispose d'un diagramme comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} & \xrightarrow{u^k} & u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \longrightarrow 0 \\ & & & \searrow & \downarrow & & \\ & & & & \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} & & \end{array}$$

La flche diagonale compose est nulle : en effet, d'aprs les descriptions locales, tout lment de K est un multiple de u (au moins dans $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$) et donc s'annule lorsqu'on le projette dans $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$.

On en dduit un morphisme de faisceaux $u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$ (qui correspond moralement la division par u^k). Par ailleurs, on dispose d'une inclusion $\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$ et la seconde flche de la suite exacte est la compose $u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \rightarrow u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$.

Il reste vrifier que la flche prcdente tombe en fait dans $\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ et que la suite obtenue ainsi est bien exacte. Montrons dans un premier temps un rsultat analogue sur les faisceaux « \mathcal{J}_1 », savoir que la suite :

$$0 \longrightarrow u\mathcal{J}_1^{[q]} \longrightarrow \mathcal{J}_1^{[q+1/e]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$$

est exacte et que l'image de la dernire flche est $\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$. Notons $f : u\mathcal{J}_1^{[q]} \rightarrow \mathcal{J}_1^{[q+1/e]}$ et $g : \mathcal{J}_1^{[q+1/e]} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$ les applications qui interviennent. Il est clair que f est injective et que $g \circ f = 0$. Notons $q = s + \frac{\delta}{e}$ avec $0 \leq \delta < e$. En reprenant les notations du paragraphe 3.3, un lment de $\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)$ s'crit comme une somme de multiples de termes d'une des deux formes suivantes :

- i) $u^{em_0 + \delta + 1} \psi_1^{m_1} \dots \psi_t^{m_t} X^{m_{t+1}}$ avec $m_0 + \dots + m_{t+1} \geq s$;
- ii) $u^{em_0} \psi_1^{m_1} \dots \psi_t^{m_t} X^{m_{t+1}}$ avec $m_0 + \dots + m_{t+1} \geq s + 1$.

On vrifie directement que les lments du premier type s'envoient sur 0 par g et que les lments du second type s'envoient dans $\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$. Finalement l'application g tombe bien dans $\tilde{\mathcal{J}}_{[s+1]}$ comme annonc. En outre, un lment de $\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ s'crit comme une somme de multiples de $u_{em_0} \psi_1^{m_1} \dots \psi_t^{m_t} X^{m_{t+1}}$ avec $m_0 + \dots + m_{t+1} \geq s + 1$, et admet donc un antcdent par g .

Il ne reste qu'vrifier l'exactitude au milieu. Soit $x \in \mathcal{J}_1^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)$ tel que $g(x) = 0$. La flche $u\mathcal{J}_1^{[q]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \rightarrow \mathcal{J}_1^{[q+1/e]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ rsultant de l'inclusion canonique est un isomorphisme et donc, quitte modifier x , on peut supposer qu'il est lment de $\mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)$. Notons \bar{x} l'image de x dans :

$$\frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)}{\tilde{\mathcal{J}}^{[s+2]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s+1} (\mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \dots, \psi_t, X)) \cdot u^{em_0} \gamma_{m_1}(\psi_1) \dots \gamma_{m_t}(\psi_t) \gamma_{m_{t+1}}(X).$$

Le fait que $g(x) = 0$ implique que dans la somme directe prcdente, \bar{x} n'a des composantes non nulles que sur les $(\mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \dots, \psi_t, X)) \cdot u^{em_0} \psi_1^{m_1} \dots \psi_t^{m_t} X^{m_{t+1}}$ avec $m_0 > 0$. Il s'ensuit $x \in u\mathcal{J}_1^{[s+1]} + \mathcal{J}_1^{[s+2]} \subset u\mathcal{J}_1^{[q]} + \mathcal{J}_1^{[s+2]}$. Quitte faire une nouvelle modification, on peut donc supposer $x \in \mathcal{J}_1^{[s+2]}(A^\infty, P^\infty)$, et par une rccurrence immddiate $x \in \mathcal{J}_1^{[Np]}(A^\infty, P^\infty)$ pour un certain entier N qu'il reste choisir.

Par ailleurs, on dispose d'une dcomposition de $\mathcal{O}_1^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty)$ (formule 10) :

$$\mathcal{O}_1^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_1, \dots, m_{t+1} \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \dots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X)$$

et d'une dcomposition analogue de $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty)$:

$$\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_1, \dots, m_{t+1} \in \mathbb{N}} \bar{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \dots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X).$$

On vrifie directement que g respecte ces dcompositions. On peut donc supposer que x est lment de l'un des termes correspondant un uplet (m_0, \dots, m_{t+1}) de la premiere somme directe. De plus comme $x \in \tilde{\mathcal{J}}^{[Np]}(A^\infty, P^\infty)$, on vrifie que si $x \neq 0$, alors $m = m_0 + \dots + m_{t+1} \geq N - t - 2$. Mais alors l'hypothse $g(x) = 0$ implique $x \in u\mathcal{J}_1^{[mp]}(A^\infty, P^\infty) \subset u\mathcal{J}_1^{[q]}(A^\infty, P^\infty)$ si N est choisi suffisamment grand.

Pour en dduire le lemme, on raisonne partir du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
u\mathcal{J}_1^{[q]} & \xrightarrow{f} & \mathcal{J}_1^{[q+1/e]} \\
\downarrow u^k & & \downarrow u^k \\
u^{k+1}\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} & \xrightarrow{f_k} & u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}
\end{array}
\begin{array}{c}
\searrow g \\
\nearrow g_k
\end{array}
\rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$$

o les multiplications par u^k sont surjectives. On en dduit dans un premier temps $\text{im } g_k = \text{im } g = \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$. Par ailleurs l'injectivit de la flche f_k et le fait que $g_k \circ f_k = 0$ sont immdiats. Une chasse au diagramme facile permet alors de conclure. \square

En corollaire, on en dduit enfin la proposition suivante :

Proposition 4.1.9. *Pour tout entier k , tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ et tout entier i , l'espace vectoriel $H^i(u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ est de dimension finie sur k .*

Dmonstration. Pour $k \geq p$, l'assertion est vidente puisque $u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} = 0$.

Par ailleurs, comme $\bar{X} = X_1 \times_{T_1} \bar{T}$ est log-lisse sur $\bar{T} = \bar{E}$, on a par la remarque qui suit le thorme 4.1.3, $R\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} = 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^s \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^{s+1} \rightarrow \dots$, et donc puisque \bar{X} est propre sur \bar{E} , les groupes $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]})$ sont de dimension finie pour tous entiers i et s . Si $k \leq p-1$, le lemme 4.1.8 assure que $H^i(u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$ est de dimension finie si et seulement si $H^i(u^{k+1}\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ l'est. On se ramne ainsi $k = p$ ou $q = 0$. Le premier cas est trait prcdemment et le second par la proposition 4.1.7. \square

Surjectivit de $\mathbf{H}^i((\mathbf{X}_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow \mathbf{H}^i((\mathbf{X}_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})$. On commence par prouver un lemme :

Lemme 4.1.10. *Soient $i \in \mathbb{N}$ et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$. Supposons $0 \leq i \leq q < \frac{p}{e}$ (et $i = q = 0$ si $p = 2$ et $e = 1$). On a des suites exactes courtes :*

$$0 \longrightarrow H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow H^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow 0.$$

Dmonstration. Montrons tout d'abord que la suite :

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \xrightarrow{u} u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow 0$$

est exacte. La premiere flche rsulte de l'inclusion $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} = u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \subset \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ et donc est injective. La surjectivit est galement claire. Par ailleurs, le noyau de la multiplication par u sur $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ est $u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ et donc le noyau de $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \rightarrow u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ s'identifie $(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \cap \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$.

En crivant la suite exacte longue associe la suite exacte courte prcdente, on obtient dj l'exactitude au milieu dans la suite de l'nonc du lemme. Pour l'injectivit, on remarque que d'aprs la proposition 4.1.7, on a $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) = u^{p-1}H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ et donc la flche compose $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est injective. Il en est donc de mme de la flche $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$. La surjectivit dcoule de l'injectivit car les flches de bord sont nulles. \square

La surjectivit de $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})$ rsulte directement de la proposition plus gnrale suivante :

Proposition 4.1.11. *Soient i un entier et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ vrifiant $0 \leq i \leq q < \frac{p}{e}$ (et $i = q = 0$ si $p = 2$ et $e = 1$). On a des suites exactes courtes :*

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) \longrightarrow 0.$$

En outre, si s dsigne la partie entiere de q , on a galement un dbut de suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) .$$

Dmonstration. La preuve rsulte d'un calcul de dimension. Prcisment, on va prouver que pour tout $0 \leq i \leq q < \frac{p}{e}$, on a $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) + h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$. On dduira alors la proposition par une rccurrence immdiate sur i .

D'aprs le lemme prcdent, on a dj $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = h^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) + h^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$. La formule (12) montre que la multiplication par $u^{e(q-s)}$ induit un isomorphisme entre les faisceaux $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$ et $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}$. Le thorme 4.1.6 implique alors $h^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$. D'autre part, on a la suite exacte (lemme 4.1.8) :

$$0 \longrightarrow u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0.$$

Or, puisque $R\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} = 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^{s+1} \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^{s+2} \rightarrow \dots$ (par la remarque qui suit le thorme 4.1.3), on a $H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}) = 0$ pour tout $j \leq s$. On en dduit $H^j(u\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$ pour tout $j \leq s$. En particulier $h^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$ ce qui conclut la dmonstration. \square

Injectivit de $\mathbf{H}^i((\mathbf{X}_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow \mathbf{H}^i((\mathbf{X}_1)_{\text{syn}}, \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Commenons par noncer le lemme suivant :

Lemme 4.1.12. *Pour tout $i < \frac{p}{e}$, l'application $H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]})$ est injective.*

Dmonstration. Par un raisonnement analogue celui utilis pour la preuve du lemme 4.1.8, on montre que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]} \xrightarrow{u^{ei}} u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]} \longrightarrow 0.$$

Il suffit donc de prouver que $H^{i-1}(u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]}) = 0$. Par le mme argument que celui utilis dans la preuve de la proposition 4.1.11, on montre que $H^j(u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]}) = H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[i+p/e]})$ pour tout $j \leq \frac{p}{e}$ et donc *a fortiori* pour tout $j \leq i$. Posons $q = i + \frac{p}{e}$ et notons s la partie entiere de q . On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow 0.$$

tale-localement, on peut relever X_1 et un log-schma Y_1 log-lisse (auquel on tend les puissances divises) sur \tilde{E} . Par les thormes 4.1.3 et 4.1.5, la flche $R\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \rightarrow R\alpha_*(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ s'crit explicitement :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{J}_{Y_1}^{[s]} & \longrightarrow & \mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \omega_{Y_1/\tilde{E}}^1 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{Y_1}^{[s-2]} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \omega_{Y_1/\tilde{E}}^2 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \frac{\mathcal{J}_{Y_1}^{[s]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s+1]}}{u^\delta(\mathcal{J}_{Y_1}^{[s]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s+1]})} & \longrightarrow & \frac{\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s]}}{u^\delta(\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s]})} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \omega_{Y_1/\tilde{E}}^1 & \longrightarrow & \frac{\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-2]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]}}{u^\delta(\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-2]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]})} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \omega_{Y_1/\tilde{E}}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

o δ est le reste de la division euclidienne de p par e . Or, si $j < i$, on a $s - j \geq \frac{p}{e}$ et donc $\gamma_{s-j}(u) = 0$. Il s'ensuit $\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-j]} = 0$. On montre de mme que $\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-i]}$ est tu par u^δ . Ainsi $H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = 0$ pour $j < i$ et la flche $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ est un isomorphisme. La nullit de $H^{i-1}(u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]})$ (et donc le lemme) rsulte alors d'une critique de la suite exacte longue associe la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow 0.$$

□

Proposition 4.1.13. *Pour tout i et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ tels que $q \leq i \leq r$, l'application $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ est injective.*

Dmonstration. Si $p = 2$, on a ncessairement $q = i = r = 0$ et le rsultat est vident. Supposons donc $p \geq 3$.

On raisonne par rcurrence descendante sur q . Le rsultat est trivial pour $q = i$. Supposons-le vrai pour un certain q et dmontrons-le pour $q - \frac{1}{e}$. On vrifie facilement que l'on a des suites exactes courtes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{st} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}^{[i]} & \xrightarrow{u^{p-ei}} & u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{st} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]} & \xrightarrow{u^{p-ei}} & u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui donnent lieu de nouvelles suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc} H^i(u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{st}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) & \longrightarrow & H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \\ & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^i(u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{st}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) & \longrightarrow & H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) \end{array}$$

La deuxime suite est exacte gauche car la flche compose $H^i(u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{st}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{st})$ est injective (voir preuve de la proposition 4.1.7). On veut montrer que la flche verticale du milieu est injective, et une chasse au diagramme laisse au lecteur assure que pour cela, il suffit de prouver que la flche verticale de droite l'est.

Or, on peut former le carr commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \end{array}$$

La flche du haut est injective d'aprs le lemme 4.1.12 et celles de droite le sont galement respectivement d'aprs la proposition 4.1.11 et l'hypothse de rcurrence. On en dduit que celle de gauche l'est aussi comme on le souhaitait. □

On a finalement le thorme :

Thorme 4.1.14. *Pour tout $i \leq r$, le quadruplet $(H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}^{st}), H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}), \phi_r, N)$ dfinit un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}$.*

Dmonstration. Il restait prouver la surjectivit de $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\mathcal{J}^{[r+1/e]})$ et l'injectivit de $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Le premier point est une consquence immdiate de la proposition 4.1.11. Pour le second point, on remarque que le morphisme $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ se factorise par $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. La premiere des deux flches prcdentes est injective par la proposition 4.1.11 et la seconde est aussi injective par la proposition 4.1.13. Ceci clt la dmonstration. \square

4.1.4 Reformulation sur la base E_1

On montre dans ce paragraphe que le quadruplet :

$$(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$$

est un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour tout $i \leq r$. Pour cela, on commence par recopier la lettre les arguments des paragraphes 4.1.2 et 4.1.3 pour obtenir un quivalent du thorme 4.1.6 qui s'nonce comme suit :

Thorme 4.1.15. *Pour $0 \leq i \leq s \leq p-1$ (et seulement pour $i = s = 0$ si $p = 2$), on a un isomorphisme :*

$$S_1 \otimes_{(\phi), k[u]/u^e} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]}) \xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_1^{\text{st}}).$$

Dans un premier temps, il nous faut montrer que $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_1^{\text{st}})$ est un S_1 -module libre et pour cela il suffit de prouver que $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$ est un $k[u]/u^e$ -module libre par le thorme 4.1.15. C'est vident si $e = 1$. *partir de maintenant et jusqu' la fin de cette partie, on suppose $e \geq 2$.*

Dans ce cas, on est tent de comparer les deux faisceaux $\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}$ et $\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1]}$ puisque la version « \sim » a dj t tudie. Cependant, en regardant les descriptions explicites, on se rend compte qu'il n'est pas vrai en gnral que ces deux faisceaux sont isomorphes; c'est le cas simplement lorsque $er \leq p - e$.

La solution consiste introduire une nouvelle catgorie d'objets modulo u^{2p} et prcder en deux tapes : on passe des objets modulo u^p aux objets modulo u^{2p} puis de ces derniers aux objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Les objets modulo u^{2p} On rappelle que tout au long de ce paragraphe, on suppose $e \geq 2$.

On introduit une nouvelle catgorie, note $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{(2)}$ dont la dfinition est trs proche des autres catgories dj introduites. On pose $\tilde{S}_{(2)} = k[u]/u^{2p}$. C'est un anneau muni d'un Frobenius ϕ semi-linaire envoyant u^i sur u^{pi} et d'un oprateur de monodromie N k -linaire envoyant u^i sur $-iu^i$. Un objet de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{(2)}$ est la donne de :

1. un $\tilde{S}_{(2)}$ -module $\tilde{\mathcal{M}}$ libre de rang fini ;
2. un sous-module $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$ contenant $u^{er} \tilde{\mathcal{M}}$;
3. une flche ϕ -semi-linaire $\phi_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ telle que l'image de ϕ_r engendre $\tilde{\mathcal{M}}$ en tant que $\tilde{S}_{(2)}$ -module ;
4. une application k -linaire $N : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ telle que :
 - pour tout $\lambda \in \tilde{S}_{(2)}$ et tout $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
 - $u^e N(\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}) \subset \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$

– le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow c_{(2), \pi N} \\ \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}} \end{array}$$

o $c_{(2), \pi}$ est la rduction de c dans $\tilde{S}_{(2)}$.

Les morphismes de $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{(2)}^r$ sont les applications $\tilde{S}_{(2)}$ -linaires qui commutent toutes les structures.

On prouve comme dans le paragraphe 2.2 que les catgories $\underline{\mathcal{M}}^r$, $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}_{(2)}^r$ et $\underline{\tilde{\mathcal{M}}}^r$ sont toutes les trois quivalentes *via* les foncteurs de rduction modulo u^{2p} et modulo u^p .

Pour tout rationnel $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, on dfinit sur le site $(T_1)_{\mathrm{SYN}}$ un faisceau $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}$ par la formule :

$$\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]} = \frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}}{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \cap u^{2p} \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}}.$$

On dfinit galement $\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\mathrm{st}} = \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[0]}$. Finalement, on vrifie que les applications ϕ_s et N passent au quotient et dfinissent des opérateurs encore nots ϕ_s et N sur ces nouveaux faisceaux.

Remarque. On peut vrifier que si l'on note $\tilde{E}_{(2)}$ la rduction de la base E_1 modulo u^{2p} , on a :

$$\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}(U) = H^0((U/\tilde{E}_{(2)})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}_{U/\tilde{E}_{(2)}}^{[s]}) = H^0((U/\tilde{E}_{(2)})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{J}_{U/\tilde{E}_{(2)}}^{[s]})$$

pour tout entier s et tout log-schma U fin et localement de type fini sur T_1 . En outre, on a galement :

$$H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_{(2)}^{[s]}) = H^i(X_{\mathrm{SYN}}, \mathcal{J}_{(2)}^{[s]}) = H^i((X/\tilde{E}_{(2)})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}_{X/\tilde{E}_{(2)}}^{[s]}) = H^i((X/\tilde{E}_{(2)})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{J}_{X/\tilde{E}_{(2)}}^{[s]})$$

pour tout entier i et tout log-schma X fin localement de type fini sur E_n . On a galement la relation $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]} = u^\delta \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]} + \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s+1]}$ si $eq = es + \delta$ est la division euclidienne de eq par e .

Il est alors possible, de manire analogue ce que nous avons fait dans le paragraphe 3.3, de donner des descriptions locales trs explicites des faisceaux prcdents. On retiendra simplement un quivalent de la proposition 3.3.4 :

Proposition 4.1.16. *Supposons $r > 0$. Sur le site $(T_1)_{\mathrm{syn}}$ les projections canoniques induisent des isomorphismes de faisceaux :*

$$\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]} / \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+2/e]} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{J}}^{[r]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_1^{[r]} / \mathcal{J}_1^{[r+1]} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]} / \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+1]}.$$

Dmonstration. Elle est tout fait analogue celle de la proposition 3.3.4. Remarquons cependant que l'hypothse $er \leq p - 2$ est cruciale pour le premier isomorphisme. Le second, quant lui, utilise la majoration moins fine (car on a suppos $r > 0$) $er + e \leq 2p$. \square

Un objet de la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ Nous nous proposons de prouver, ici, que le quadruplet :

$$(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}), \phi_r, N)$$

est un objet de la catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$. *On suppose partir de maintenant que $r > 0$.*

On recopie encore une fois les arguments des paragraphes 4.1.2 et 4.1.3 afin obtenir le thorme suivant :

Thorme 4.1.17. *Pour $0 \leq i \leq s \leq \frac{2p-2}{e}$ (pour $i = s = 0$ si $p = 2$), on a un isomorphisme :*

$$\tilde{S}_{(2)} \otimes_{(\phi), k[u]/u^2} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s+2/e]}) \xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}).$$

Comme prcdemment, pour simplifier, si \mathcal{F} est un faisceau sur $(X_1)_{\text{syn}}$, on note $H^i(\mathcal{F})$ pour $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{F})$ et si cet espace est de dimension finie sur k , on note $h^i(\mathcal{F})$ sa dimension. On a alors :

Thorme 4.1.18. *Pour tout $i \leq r$, le groupe de cohomologie $H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}})$ est libre de rang fini sur $\tilde{S}_{(2)}$.*

Dmonstration. D'aprs le thorme 4.1.17, il suffit de montrer que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+2/e]})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^2$. Or on a un isomorphisme $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+2/e]} \simeq \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}$ (proposition 4.1.16). Il suffit donc de prouver que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^2$.

Notons $\mathcal{M} = H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$, c'est un $k[u]/u^p$ -module libre de rang fini, disons d , d'aprs le thorme 4.1.14. Pour tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q \geq r$, le morphisme $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \rightarrow \mathcal{M}$ est injectif d'aprs les propositions 4.1.11 et 4.1.13. Notons $\text{Fil}^q \mathcal{M}$ son image. On obtient ainsi une suite dcroissante de sous- \tilde{S} -modules de \mathcal{M} .

Puisque la multiplication par u se factorise par $\text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M} \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{M}$, on a $u\text{Fil}^r \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M}$. Par ailleurs, nouveau la proposition 4.1.11 nous dit que le quotient $\text{Fil}^r \mathcal{M}/\text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M}$ est un k -espace vectoriel de dimension d . Or il en est de mme de $\text{Fil}^r \mathcal{M}/u\text{Fil}^r \mathcal{M}$. Il en rsulte que les k -espaces vectoriels $\text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M}$ et $u\text{Fil}^r \mathcal{M}$ ont mme dimension. L'inclusion trouve prcdemment prouve alors qu'ils sont gaux.

De mme en remplaant r par $r + 1/e$ (et en vrifiant que la proposition 4.1.11 s'applique encore), on obtient $\text{Fil}^{r+2/e} \mathcal{M} = u\text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M} = u^2\text{Fil}^r \mathcal{M}$. L'ingalit $er \leq p - 2$ et l'inclusion $u^{er} \mathcal{M} \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$ assurent que le quotient $\text{Fil}^r \mathcal{M}/\text{Fil}^{r+2/e} \mathcal{M} = \text{Fil}^r \mathcal{M}/u^2\text{Fil}^r \mathcal{M}$ est libre de rang d sur $k[u]/u^2$.

Par ailleurs, on a une suite exacte longue :

$$H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]})$$

et d'aprs la proposition 4.1.11 les premiere et dernire fiches sont injectives. On en dduit que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]})$ s'identifie au quotient $\text{Fil}^r \mathcal{M}/\text{Fil}^{r+2/e} \mathcal{M}$ et donc qu'il est libre de rang fini sur $k[u]/u^2$. \square

Remarque. La preuve prcdente implique $h^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) = ph^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) = 2ph^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) = 2ph^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$.

Avec cette dernire galit, on peut refaire la dmonstration de la proposition 4.1.7 et obtenir ainsi :

Proposition 4.1.19. *Pour tous entiers k et $i < \frac{2p}{e}$ (on impose $i = 0$ si $p = e = 2$), on a $H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) = u^k H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}})$.*

Sans surprise, on dispose d'un analogue de la proposition 4.1.11 dans cette nouvelle situation :

Proposition 4.1.20. *Soient i un entier et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ vrifiant $0 \leq i \leq q < E(\frac{p}{e}) + 1$ (et $i = q = 0$ si $p = 2$ et $e = 1$) o $E(\frac{p}{e})$ dsigne la partie entiere de $\frac{p}{e}$. On a des suites exactes courtes :*

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow 0.$$

En outre, si s dsigne la partie entiere de q , on a galement un dbut de suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow 0.$$

Dmonstration. La dmonstration est trs proche de celle de la proposition 4.1.11.

On commence par remarquer que puisque $r > 0$, on a $e \leq p - 2$ et $E(\frac{p}{e}) + 1 \leq \frac{2p-2}{e}$. Cela implique que si s dsigne la partie entiere de q , on a les identifications $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]} \simeq \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s+1/e]} \simeq \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$. Ainsi, on obtient $h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) = h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ pour tout entier i . (La dernire galit rsulte du thorme 4.1.6.)

Par ailleurs, une adaptation simple du lemme 4.1.10 fournit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) \xrightarrow{u} H^i(u\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) \longrightarrow 0$$

et donc l'galit $h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) = h^i(u\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) + h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. De mme en adaptant le lemme 4.1.8, on obtient la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow u\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0$$

et puisque $R\alpha_* \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} = 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^{s+1} \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^{s+2} \rightarrow \dots$, on a $H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}) = 0$ pour tout $j \leq s$ puis $H^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$. En particulier $h^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$ d'o il vient $h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) + h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]})$. On termine alors la dmonstration en raisonnant par recurrence sur i . \square

On a finalement la proposition :

Proposition 4.1.21. *Pour tout $i \leq r$, l'application $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}})$ est injective.*

Dmonstration. Il est possible d'adapter la dmonstration de la proposition 4.1.13, mais nous pouvons galement dduire l'nonc de la proposition 4.1.13. En effet, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} H^i(u^p \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) & & \\ & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^i(u^p \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et la suite du bas est exacte d'apr's la proposition 4.1.19 (notez que la multiplication par u^p sur $\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}$ identifie $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ et $u^p \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}$). Par la proposition 4.1.13, la flche verticale de droite est injective. On vrifie facilement qu'il en est alors forcment de mme de la flche verticale centrale. D'o la proposition. \square

On en dduit finalement le thorme :

Thorme 4.1.22. *Pour tout $i \leq r$, le quadruplet $(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}), \phi_r, N)$ dfinit un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}_{(2)}^r$.*

Un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ On veut ici enfin prouver que $(H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour tout $i \leq r$. Pour cela, on reprend nouveau les arguments prcdents.

On commence par prouver que $H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}})$ est un module libre (de rang fini) sur S_1 . D'aprs le thorme 4.1.15, il suffit de prouver que $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$ est libre sur $k[u]/u^e$. Or le faisceau $\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}$ s'identifie $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+1]}$ (proposition 4.1.16) et il suffit donc de prouver que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+1]})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^e$. Pour cela, on adapte facilement les arguments de la preuve du thorme 4.1.18 en remplaant les rfrences aux propositions 4.1.11 et 4.1.13 respectivement par des rfrences aux proposition 4.1.20 et 4.1.21.

Lemme 4.1.23. *Pour tous entiers i et s tels que $0 \leq i \leq s < \frac{p}{e}$, la flche $H^i(\mathcal{J}_1^{[s]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]})$ est surjective.*

Dmonstration. On raisonne par rcurrence sur s . Pour le cas $s = 0$, on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) &\simeq S_1 \otimes_{(\phi), k[u]/u^e} H^i(\mathcal{J}_1^{[i]}/\mathcal{J}_1^{[i+1]}) \\ H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) &\simeq \tilde{S}_{(2)} \otimes_{(\phi), k[u]/u^2} H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+2/e]}). \end{aligned}$$

On vrifie que la flche $H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}})$ s'obtient partir de la projection $S_1 \rightarrow \tilde{S}_{(2)}$ et le morphisme naturel $H^i(\mathcal{J}_1^{[i]}/\mathcal{J}_1^{[i+1]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+2/e]})$. Il suffit donc de prouver que ce dernier morphisme est surjectif. Or, d'une part, le faisceau $\mathcal{J}_1^{[i]}/\mathcal{J}_1^{[i+1]}$ s'identifie $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+1]}$ (proposition 4.1.16) et, d'autre part, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+1]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+1]}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+2/e]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+2/e]}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

o les lignes sont exactes : l'injectivit provient de la proposition 4.1.20 et la surjectivit provient de l'injectivit analogue sur les H^{i+1} (toujours consquence de la mme proposition). On en dduit directement la surjectivit de la flche verticale de droite, ce qui conclut le cas $s = 0$.

On procde ensuite par rcurrence sur s . On conside le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[s+1]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[s]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[s+1]}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s+1]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s+1]}) \end{array}$$

La flche verticale de droite est un isomorphisme par la proposition 4.1.16. La flche verticale du milieu est surjective par hypothse de rcurrence. Une chasse au diagramme prouve facilement que la flche verticale de gauche est aussi surjective, ce qui conclut. \square

Remarque. Le lemme est galement vrai pour $s \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $0 \leq i \leq s < E(\frac{p}{e}) + 1$. Ce raffinement se dmontre de manire analogue en choisissant un pas de $\frac{1}{e}$ (au lieu de 1) dans la rcurrence.

On parvient finalement au but de tout ce paragraphe :

Thorme 4.1.24. *Pour tout $i \leq r$, le quadruplet $(H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{st}), H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ dfinit un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.*

Dmonstration. Comme prcdemment, il ne reste plus qu' prouver que la flche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \rightarrow H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$ est surjective et que la flche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_1^{st})$ est injective.

Pour le premier point, on considre le carr commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+1]}) \end{array}$$

La flche de droite est un isomorphisme (proposition 4.1.16). La flche de gauche est surjective (lemme 4.1.23), et celle du bas l'est galement (proposition 4.1.20). On en dduit que celle du haut l'est aussi.

Pour le second point, on reprend les arguments de la preuve de la proposition 4.1.21. On raisonne partir du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^{[r]} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{O}_1^{st} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{st} \longrightarrow 0 \end{array}$$

o $K = u^p \mathcal{O}_1^{st}$ et o les deux suites horizontales sont exactes. Il donne lieu un nouveau diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} H^i(K) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) \\ & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^i(K) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_1^{st}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{st}) \end{array}$$

La suite du bas est exacte gauche car, par le lemme 4.1.23, la flche $H^{i-1}(\mathcal{O}_1^{st}) \rightarrow H^{i-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{st})$ est surjective. Mais la flche verticale de droite est injective (proposition 4.1.21). On en dduit que la flche verticale du milieu l'est galement. Ceci termine la preuve. \square

4.1.5 Le cas $r = 0$

Lorsque $r = 0$, la condition $er \leq p - 2$ est automatique et n'impose aucune borne sur e . Pour obtenir le thorme 4.1.24, dans ce cas, on a besoin d'introduire plus de catgories-tapes.

Plan de la preuve On reprend les constructions du dbut du paragraphe 4.1.4 en remplaant « (2) » par « (t) ».

Pour tout entier $1 \leq t \leq e$, on commence par dfinir une catgorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(t)}^r$ d'objets modulo u^{tp} . On considre pour cela l'anneau $\tilde{S}_{(t)} = k[u]/u^{tp}$ que l'on munit d'un Frobenius ϕ semi-linaire envoyant u^i sur u^{pi} et d'un opérateur de monodromie k -linéaire envoyant u^i sur $-iu^i$. Un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(t)}^r$ est la donne de :

1. un $\tilde{S}_{(t)}$ -module $\tilde{\mathcal{M}}$ libre de rang fini ;

2. un sous-module $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$ contenant $u^{er} \tilde{\mathcal{M}}$;
3. une flche ϕ -semi-linaire $\phi_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ telle que l'image de ϕ_r engendre $\tilde{\mathcal{M}}$ en tant que $\tilde{S}_{(t)}$ -module;
4. une application k -linaire $N : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ telle que :
 - pour tout $\lambda \in \tilde{S}_{(t)}$ et tout $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
 - $u^e N(\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}) \subset \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow c_{(t), \pi N} \\ \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}} \end{array}$$

o $c_{(t), \pi}$ est la rduction de c dans $\tilde{S}_{(t)}$.

Les morphismes de $\tilde{\mathcal{M}}_{(t)}^r$ sont les applications $\tilde{S}_{(t)}$ -linaires qui commutent toutes les structures. On prouve comme dans le paragraphe 2.2 que les catgories $\tilde{\mathcal{M}}_{(t)}^r$ sont toutes quivalentes $\underline{\mathcal{M}}^r$ via les foncteurs de rduction modulo u^{tp} .

D'autre part, pour tout rationnel $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, on dfinit sur le site $(T_1)_{\text{SYN}}$ un faisceau $\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q]}$ par :

$$\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q]} = \frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}}{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \cap u^{tp} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}}.$$

On pose $\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}} = \tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[0]}$ et on vrifie que les applications ϕ_s et N passent au quotient et dfinissent des oprateurs encore nots ϕ_s et N sur ces nouveaux faisceaux.

On va prouver par rcurrence sur t la proposition suivante (on rappelle qu'ici $r = 0$) :

Proposition 4.1.25. *Pour tout $t \leq e$, le quadruplet $(H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}}), H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}}), \phi_0, N)$ dfinit un objet de la catgorie $\tilde{\mathcal{M}}_{(t)}^0$ et la suite :*

$$0 \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q]}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow 0$$

est exacte pour $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q \leq \frac{t}{e}$.

On dduira ensuite du cas $t = e$ un quivalent du thorme 4.1.24 savoir :

Thorme 4.1.26. *Pour tout $t \leq e$, le quadruplet $(H^0(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^0(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), \phi_0, N)$ dfinit un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^0$.*

La rcurrence Le but de cette sous-partie est de prouver la proposition 4.1.25. Pour cela, comme nous l'avons dj dit, on raisonne par rcurrence sur t et on suit pas pas la dmonstration de la partie *Un objet de la catgorie $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$* du paragraphe 4.1.4. On redonne rapidement les grandes tapes.

On conside un entier t compris entre 2 et e . Les compatibilit entre les oprateurs ne posant pas de problme, il suffit de montrer que $H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}})$ est libre de rang fini sur $\tilde{S}_{(t)}$ et que l'image de ϕ_0 engendre tout $H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}})$. Or comme prcdemment, on dispose du thorme suivant :

Thorme 4.1.27. Avec les notations prcdentes, on a un isomorphisme :

$$\tilde{S}_{(t)} \otimes_{(\phi), k[u]/u^t} H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[t/e]}) \xrightarrow[\text{id} \otimes \phi_0]{\sim} H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}}).$$

Il suffit donc de prouver que $H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[t/e]})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^t$ et que la suite :

$$0 \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q]}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow 0$$

est exacte pour $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q \leq t$. (On remarque que seule la surjectivit n'est *a priori* pas claire).

On dispose d'un quivalent de la proposition 4.1.16 qui se dmontre de faon tout fait analogue :

Proposition 4.1.28. Sur le site $(T_1)_{\text{syn}}$ la projection canonique induit un isomorphisme de faisceaux :

$$\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[t/e]} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[t/e]}.$$

Remarque. Pour la preuve de la proposition prcdente, on utilise l'ingalit $t \leq p(t-1)$ qui est bien vrifie lorsque $t \geq 2$.

Lemme 4.1.29. Le module $H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}})$ est libre de rang fini sur $\tilde{S}_{(t)}$.

Dmonstration. Elle est assez semblable la preuve du thorme 4.1.18.

Il suffit de dmontre que $H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[t/e]})$ est libre sur $k[u]/u^t$. Par ailleurs d'aprs la proposition prcdente, le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}_{(t)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t)}^{[t/e]}$ s'identifie $\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[t/e]}$.

On utilise ce niveau l'hypothse de rcurrence qui assure que $\mathcal{M} = H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}})$ muni de ses structures supplmentaires est un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{(t-1)}^0$. C'est en particulier un $\tilde{S}_{(t-1)}$ -module libre de rang fini, disons d . Notons, pour $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $\text{Fil}^q \mathcal{M} = H^0(\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[q]})$. Ils forment une suite dcroissante de sous- $\tilde{S}_{(t-1)}$ -modules de \mathcal{M} .

Par ailleurs, on a $u\mathcal{M} \subset \text{Fil}^{1/e} \mathcal{M}$, et encore l'hypothse de rcurrence fournit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Fil}^{1/e} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[1/e]}) \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs on vrifie que pour tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q < \frac{t}{e}$, la multiplication par u^q induit un isomorphisme entre les faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[1/e]}$ et $\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[q+1/e]}$. On en dduit :

$$\dim_k H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[1/e]}) = \frac{1}{t} \dim_k H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[t/e]}) = d$$

la dernire galit tant une consequence du thorme 4.1.27 appliqu pour $t-1$. D'autre part, $\dim_k(\mathcal{M}/u\mathcal{M}) = d$ d'o il vient $\text{Fil}^{1/e} \mathcal{M} = u\mathcal{M}$. On montre de mme par rcurrence que $\text{Fil}^q \mathcal{M} = u^{eq} \mathcal{M}$ pour tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q \leq \frac{t}{e}$.

Finalement, on a une suite exacte longue :

$$0 \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[t/e]}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[t/e]}) \longrightarrow H^1(\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[t/e]}) \longrightarrow H^1(\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}).$$

D'aprs l'hypothse de rcurrence, toutes les fches $H^1(\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[q+1/e]}) \rightarrow H^1(\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[q]})$ sont injectives pour $q \leq \frac{t-1}{e}$ et donc la fche $H^1(\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[t/e]}) \rightarrow H^1(\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}})$ l'est aussi. On en dduit que $H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(t-1)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(t-1)}^{[t/e]})$ s'identifie $\mathcal{M}/\text{Fil}^{t/e} \mathcal{M} = \mathcal{M}/u^t \mathcal{M}$ qui est un bien un $k[u]/u^t$ -module libre de rang fini (en l'occurrence d). \square

Les propositions 4.1.19 et 4.1.20 ont des quivalents transparents dans ce nouveau contexte qui se dmontrent de faon analogue. On conclut comme cela la rcurrence.

La fin de la preuve Pour dduire le thorme 4.1.26 du cas $t = e$ de la proposition 4.1.25, on dgage tout d'abord le lemme suivant (preuve analogue celle de la proposition 3.3.4) :

Lemme 4.1.30. *Sur le site $(T_1)_{\text{syn}}$ la projection canonique induit un isomorphisme de faisceaux :*

$$\mathcal{O}_1^{\text{st}}/\mathcal{J}_1^{[1]} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{O}}_{(e)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(e)}^{[1]}.$$

En combinant ce prcdent lemme au thorme 4.1.15, on prouve la libert sur S_1 de $H^0(\mathcal{O}_1^{\text{st}})$. Par suite, on dmontre que la flche $H^0(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) \rightarrow H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(e)}^{\text{st}})$ est surjective en utilisant les mmes arguments que ceux prsents dans l'tape d'initialisation de la rccurrence du lemme 4.1.23. Finalement, en recopiant la premiere partie de la preuve du thorme 4.1.24, on parvient prouver la surjectivit du morphisme $H^0(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_1^{\text{st}}/\mathcal{J}_1^{[1]})$. Cela conclut la preuve du thorme 4.1.26.

4.2 Dvissages

Le but de cette partie est de dduire partir du cas $n = 1$ trait prcdemment le cas n quelconque. Exactement, si X_n dsigne un log-schma propre et log-lisse sur T_n , et que $X_1 = X_n \times_{T_n} T_1$ est du type de Cartier (si $n = 1$, on suppose en outre que X_1 admet un relvement propre et log-lisse sur T_2), nous allons dmontre le thorme suivant :

Thorme 4.2.1. *Pour tout $i < r$ et tout entier n , le quadruplet :*

$$(H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$$

dfinit un objet de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Remarque. On rappelle que le morphisme ϕ_r n'est pas dfini sur $(X_n)_{\text{syn}}$ mais seulement sur $(X_{n+r})_{\text{syn}}$ mais que cela n'est pas grave du fait des identifications canoniques $H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}) \simeq H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}})$ et $H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}) \simeq H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]})$.

Dmonstration. On raisonne par rccurrence sur n . L'initialisation est donne par le thorme 4.1.24. Pour l'hrdit, on conside les suites exactes courtes suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^{[r]} & \xrightarrow{p^n} & \mathcal{J}_{n+1}^{[r]} & \longrightarrow & \mathcal{J}_n^{[r]} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_1^{\text{st}} & \xrightarrow{p^n} & \mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_n^{\text{st}} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Elles fournissent deux suites exactes longues de cohomologie qui s'insrent dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{i-1}(\mathcal{J}_n^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_{n+1}^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}) & \longrightarrow & H^{i+1}(\mathcal{J}_1^{[r]}) \\ \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow \\ H^{i-1}(\mathcal{O}_n^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_n^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) \end{array}$$

o tous les groupes de cohomologie sont calculs sur le site $(X_n)_{\text{syn}}$. Par hypothse de rccurrence, les deux quadruplets $(H^{i-1}(\mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^{i-1}(\mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$ et $(H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ sont des objets de la catgorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Comme celle-ci est ablienne, il en est de mme de leur image que l'on note $(\mathcal{M}', \text{Fil}^r \mathcal{M}', \phi_r, N)$. De mme, les deux quadruplets $(H^i(\mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$ et

$(H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^{i+1}(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ sont des objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$, le premier en vertu de l'hypothèse de récurrence et le second par le thorme 4.1.24. Leur noyau $(\mathcal{M}'', \text{Fil}^r \mathcal{M}'', \phi_r, N)$ est donc aussi objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

En outre, on dispose d'un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fil}^r \mathcal{M}' & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_{n+1}^{[r]}) & \longrightarrow & \text{Fil}^r \mathcal{M}'' \longrightarrow 0 \\ & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}}) & \longrightarrow & \mathcal{M}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

o les deux lignes horizontales sont exactes. Une adaptation directe du lemme 2.3.1.2 de [Bre98] entrane alors que $(H^i(\mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_{n+1}^{[r]}), \phi_r, N)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, ce qui achve la rcurrence. \square

Remarque. Il est fort probable que le thorme prcdent reste vrai lorsque $i = r$, mais ce cas particulier chappe la preuve que l'on vient de donner.

Le cas entier

Aprs avoir obtenu un thorme modulo p^n pour tout entier n , il est tentant de passer la limite projective. Prcisment, posons, au moins pour $i < r$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \varprojlim_{n \geq 1} H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}) \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} &= \varprojlim_{n \geq 1} H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}). \end{aligned}$$

Les applications ϕ_r et N passent la limite pour finir respectivement des applications $\text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ que l'on note encore ϕ_r et N .

Soit $\mathcal{M}_{\text{tors}}$ l'ensemble des lments de \mathcal{M} tu par une puissance de p , et $\mathcal{M}_{\text{free}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\text{tors}}$. On munit sans problme ces modules d'un Fil^r , d'un ϕ_r et d'un N , et en copiant les arguments du paragraphe 4.1 de [Bre98], on obtient le thorme suivant :

Thorme 4.2.2. *i) Le module $\mathcal{M}_{\text{tors}}$ muni des structures supplmentaires est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.
ii) Le module $\mathcal{M}_{\text{free}}$ muni des structures supplmentaires est un module fortement divisible⁵*

5 Calcul de la cohomologie tale

On fixe toujours un entier r vrifiant $er < p - 1$. On se donne de plus X_K un schma (au sens classique) propre et lisse sur K et on suppose que X_K admet un modle propre et semi-stable X sur l'anneau des entiers \mathcal{O}_K . Le diviseur donn par la fibre spciale fait de X un log-schma dfini sur la base $T = (\text{Spec } \mathcal{O}_K, \mathcal{O}_K \setminus \{0\})$ propre, log-lisse, et dont la fibre spciale est du type de Cartier. Nous sommes donc en situation d'utiliser les rsultats de la partie prcdente. En particulier, si $X_n = X \times_T T_n$, le thorme 4.2.1 s'applique et assure que pour tout n et pour tout $i \leq r$ le quadruplet :

$$(H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$$

⁵Pour une dfnition, on pourra se reporter [Bre99].

est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. D'autre part, par le thorme 4.1.24, le rsultat demeure pour $i = r$ lorsque $n = 1$.

Le but de cette partie est de dmontrer le thorme 1.1, dont nous prcisons l'nonc :

Thorme 5.0.3. *Pour tout entier r tel que $er < p - 1$, pour tout entier n et pour tout $0 \leq i < r$ (et aussi $i = r$ si $n = 1$), on a un isomorphisme canonique de modules galoisiens :*

$$H^i((X_{\bar{K}})_t, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(r) \xrightarrow{\sim} T_{st\star}(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}), H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N).$$

Fixons avant tout quelques notations. Si L est une extension algbrique de K , dfinissons $T_L = (\text{Spec } \mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L \setminus \{0\})$ et si n est un entier et Y est un log-schma sur T , posons $Y_n = Y \times_T T_n$, $Y_L = Y \times_T T_L$ et $Y_{n,L} = Y_n \times_T T_L = Y_L \times_T T_n$.

Le premier (et principal) ingrduit de la preuve est un rsultat de Kato et Tsuji qui s'nonce comme suit :

Thorme 5.0.4. *Pour $0 \leq i \leq s \leq p - 2$, on a des isomorphismes canoniques compatibles l'action de Galois :*

$$H^i((X_{n,\bar{K}})_t, s_{n,X_{\bar{K}}}^{\log}(s)) \xrightarrow{\sim} H^i((X_{\bar{K}})_t, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(s).$$

Dans le thorme prcdent, $s_{n,X_{\bar{K}}}^{\log}(s)$ dsigne un certain complexe de faisceaux tales sur $X_{n,\bar{K}}$ construit par Kato (voir [Kat87]). Par ailleurs, Breuil dmontre (lemme 3.2.4.3 de [Bre98] — la dmonstration est crite dans le cas non ramifi, mais elle fonctionne de la mme faon dans le cas gnral) le thorme suivant :

Thorme 5.0.5. *Pour tout entier i , et tout $s \in \{0, \dots, p - 1\}$, on a des isomorphismes canoniques compatibles l'action de Galois :*

$$\varinjlim_L H^i((X_{n+s,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^s) \xrightarrow{\sim} H^i((X_{n,\bar{K}})_t, s_{n,X_{\bar{K}}}^{\log}(s))$$

o la limite inductive est prise sur toutes les extensions finies L de K .

Ici, \mathcal{S}_n^s dsigne un certain faisceau sur le site log-syntomique dont le rappel de la dfnition est l'objet du paragraphe 5.1. Forts de cela, il ne reste plus pour conclure qu' prouver :

Proposition 5.0.6. *Pour $0 \leq i < r$ (et aussi $i = r$ lorsque $n = 1$), on a des isomorphismes canoniques compatibles l'action de Galois :*

$$\varinjlim_L H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^r) \xrightarrow{\sim} T_{st\star}(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}), H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N). \quad (21)$$

La dmonstration de cette proposition est l'objet du paragraphe 5.2. Finalement, le paragraphe 5.3 qui termine cette partie explique comment on dduit des rsultats prcdents le thorme 1.2.

5.1 Les faisceaux \mathcal{S}_n^s

On note T_n^{triv} le log-schma $\text{Spec } \mathcal{O}_K/p^n$ muni de la log-structure triviale. Comme on avait dfini les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sur le site $(T_n)_{\text{syn}}$ (voir paragraphe 3.2.1), on dfnit sur le site $(T_n^{\text{triv}})_{\text{syn}}$ des faisceaux $\mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]}$ en posant :

$$\mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]}(U) = H^0((U/T_n^{\text{triv}})_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{U/T_n^{\text{triv}}}^{[s]}) = H^0((U/T_n^{\text{triv}})_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{U/T_n^{\text{triv}}}^{[s]})$$

pour tout U log-syntomique sur T_n^{triv} . On pose galement $\mathcal{O}_n^{\text{cris}} = \mathcal{J}_n^{\text{cris},[0]}$.

Le morphisme naturel $T_n \rightarrow T_n^{\text{triv}}$ est log-syntomique, et donc les faisceaux prcdents dfinissent par restriction des faisceaux sur le site $(T_n)_{\text{syn}}$ encore nots $\mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]}$ et $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$. On dispose de descriptions explicites locales des faisceaux prcdents :

Proposition 5.1.1. *En reprenant les notations $(A^\infty, P^\infty$ et $W_n^{cris,DP}(A^\infty, P^\infty)$) du paragraphe 3.2.1, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathcal{O}_n^{cris}(A^\infty, P^\infty) \xrightarrow{\sim} W_n^{cris,DP}(A^\infty, P^\infty).$$

Par ailleurs, cet isomorphisme respecte la filtration donnée à gauche par les $\mathcal{J}_n^{cris,[s]}(A^\infty, P^\infty)$ et à droite par la filtration canonique par les puissances divisées.

Comme dans le cas « st », on définit pour $s \leq p-1$, des applications $\phi_s : \mathcal{J}_n^{cris,[s]} \rightarrow \mathcal{O}_n^{cris}$. Finalement, on appelle \mathcal{S}_n^s le noyau de l'application $\phi_s - \text{id}$.

La proposition suivante réunit deux suites exactes importantes propos des faisceaux introduits précédemment :

Proposition 5.1.2. *Pour tous entiers n et s , on a une suite exacte courte de faisceaux sur le site $(T_n)_{syn}$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{cris,[s]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[s]} \xrightarrow{N} \mathcal{J}_n^{[s-1]} \longrightarrow 0.$$

Pour tout entier n et tout $s \in \{0, \dots, p-1\}$, on a une suite exacte courte de faisceaux sur le site $(T_{n+s})_{syn}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_n^s \longrightarrow \mathcal{J}_n^{cris,[s]} \xrightarrow{\phi_s - \text{id}} \mathcal{O}_n^{cris} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. La première suite exacte résulte des descriptions précédentes si l'on se rappelle que :

$$N \left(\frac{X^i}{i!} \right) = (1+X) \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}.$$

On pourra consulter la preuve de la proposition 3.1.3.1 de [Bre98] pour plus de détails.

Pour la seconde suite exacte, il suffit de prouver la surjectivité de $\phi_s - \text{id}$ et avec les descriptions locales précédentes, on construit explicitement un antécédent (local pour la topologie log-syntomique) tout élément de $\mathcal{O}_n^{cris}(A^\infty, P^\infty)$. Exactement, la preuve est identique à celle de la proposition 3.1.4.1 de [Bre98], sauf le dernier argument qui est remplacé par celui du lemme 2.3.6. \square

5.2 La preuve

Le but de ce chapitre est de donner une preuve de la proposition 5.0.6, ce qui est suffisant comme nous l'avons expliqué, pour démontrer le théorème 1.1. On suit encore une fois de très près la démonstration de [Bre98] valable pour le cas $e = 1$.

On note $\mathcal{M} = H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})$. Pour tout entier s , on a un morphisme (pas nécessairement injectif) $H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[t]}) \rightarrow \mathcal{M}$ et on note $\text{Fil}^t \mathcal{M}$ son image. On vérifie que l'on obtient ainsi une filtration admissible (voir définition 2.3.3) sur \mathcal{M} . Par définition (voir paragraphe 2.3.3), le membre de droite de l'isomorphisme 21 s'identifie :

$$\text{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$$

avec :

$$\text{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) = \sum_{t=0}^r \text{Fil}_X^t \hat{A}_{st} \otimes_S \text{Fil}^{s-t} \mathcal{M}$$

o on rappelle que les Fil_X^t sont définis par la formule (2) et qu'ils sont plats sur S_n . On rappelle également que l'on dispose du lemme 2.3.6 qui permet de voir le module $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ comme le conoyau d'un morphisme.

La preuve de la proposition 5.0.6 passe par les calculs successifs des modules $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$, $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ et finalement $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} = T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$. Ceux-ci sont traités respectivement dans les paragraphes 5.2.2, 5.2.3 et 5.2.4. Le paragraphe 5.2.1, quant à lui, rappelle quelques préliminaires nécessaires pour la gestion des limites inductives.

5.2.1 Le foncteur j_\star

Dans ce paragraphe, on rappelle comment construire des faisceaux sur le site $(X_n)_{\text{syn}}$ dont la cohomologie s'identifie $\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]})$.

Si L est une extension de K , on a un morphisme canonique $j_L : T_L \rightarrow T$. On montre (lemme 3.1.1.1 de [Bre98]) qu'il est log-syntomique et donc qu'il induit un morphisme de topo $(\widetilde{T}_{n,L})_{\text{syn}} \rightarrow (\widetilde{T}_n)_{\text{syn}}$. Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur $(T_n)_{\text{syn}}$. Pour tout L , on considère le faisceau $j_{L\star} j_L^* \mathcal{F}$ et on remarque que si L' est une extension finie de L , on a un morphisme $j_{L\star} j_L^* \mathcal{F} \rightarrow j_{L'\star} j_{L'}^* \mathcal{F}$. On pose finalement :

$$j_\star \mathcal{F} = \varinjlim_L j_{L\star} j_L^* \mathcal{F}.$$

C'est un faisceau sur $(T_n)_{\text{syn}}$ et on montre (corollaire 3.1.1.4 de [Bre98]) que l'on a une identification canonique :

$$\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^i((X_n)_{\text{syn}}, j_\star \mathcal{J}_n^{[s]})$$

pour tout entier s .

5.2.2 Le calcul de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$

Le but de ce paragraphe est de donner une description en terme de conoyau (analogue celle du lemme 2.3.6) de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$. Pour cela, on commence par rappeler que l'anneau \hat{A}_{st} admet une interprétation cohomologique incarnée par l'isomorphisme canonique suivant :

$$\hat{A}_{\text{st}}/p^n = \varinjlim_L H^0((T_{n,L})_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}})$$

où la limite inductive est prise sur les extensions finies L de K . Il existe aussi un isomorphisme analogue pour décrire la filtration sur \hat{A}_{st} qui est :

$$\text{Fil}^t(\hat{A}_{\text{st}}/p^n) = \text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n = \varinjlim_L H^0((T_{n,L})_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[t]}).$$

Ces isomorphismes permettent de construire une application canonique :

$$\text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^0((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{s-t}) \rightarrow \varinjlim_L H^0((X_{n,L})_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^0((X_n)_{\text{syn}}, j_\star \mathcal{J}_n^{[s]})$$

et donc un morphisme de faisceaux :

$$\bigoplus_{t=0}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s-t]} \rightarrow \bigoplus_{t=0}^s \text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s-t]} \rightarrow j_\star \mathcal{J}_n^{[s]}.$$

On a alors le lemme suivant, mettre en parallèle avec le lemme 2.3.6 :

Lemme 5.2.1. *Pour tout entier $s \leq r$, on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s+1-t]}) & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s-t]}) & \longrightarrow & H^i(j_* \mathcal{J}_n^{[s]}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} \mathrm{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} \mathrm{Fil}^{s-t} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

o tous les morphismes respectent l'action de Galois, et o les deux lignes sont exactes et les flches verticales surjectives. (Notez que tous les groupes de cohomologie sont calculs sur le site $(X_n)_{syn}$.)

Dmonstration. Tout d'abord, prcisons les flches. Dans la suite exacte du haut, la premiere flche a dj t dfinie dans l'nonc du lemme 2.3.6. La flche correspondante dans la suite exacte du bas a une dfnition tout fait analogue. Les autres flches ne posent pas de problme, part *a priori* la flche verticale de droite. Cependant, elle n'en posera plus lorsque l'on aura prouv l'exactitude des deux suites (puisque ce sera alors simplement la flche induite sur les conoyaux).

L'exactitude de la ligne du haut n'est autre que l'objet du lemme 2.3.6. Les surjectivits des deux premieres flches verticales sont immdiates. Il ne reste donc plus qu' prouver l'exactitude de la suite exacte du bas (de laquelle rsultera directement la surjectivit de la flche verticale de droite).

On commence par prouver que la suite de faisceaux sur le site $(T_n)_{syn}$:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{t=1}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s+1-t]} \longrightarrow \bigoplus_{t=0}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s-t]} \longrightarrow j_* \mathcal{J}_n^{[s]} \longrightarrow 0$$

est exacte. Par un dvissage, on se ramne dans un premier temps au seul cas $n = 1$. De plus, en recopiant les arguments de la preuve de la proposition 3.1.2.3 de [Bre98], on se ramne au cas $s = 0$. Il s'agit donc de montrer que $\hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{O}_{st}^1 \simeq j_* \mathcal{O}_1^{st}$. C'est nouveau un calcul local pour la topologie log-syntomique, en tout point analogue celui men dans la dmonstration du lemme 3.1.2.2 de [Bre98]. \square

5.2.3 Le calcul de $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$

Le but de cette partie est de dmontrer le lemme suivant qui constitue la deuxime tape de la preuve.

Lemme 5.2.2. *On a des isomorphismes de modules galoisiens :*

$$\begin{aligned}
\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}) &\xrightarrow{\sim} (\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \\
\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{cris,[r]}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}
\end{aligned}$$

Dmonstration. La dmonstration est identique celle du corollaire 3.2.3.5 de [Bre98]. Nous redonnons simplement les grandes lignes. Tout d'abord, on montre comme dans le lemme 3.1.1.2 de [Bre98] la nullit de $\varinjlim_L R^i j_{L*} j_L^* \mathcal{J}_n^{[s]}$ d'o on dduit, partir de la premiere suite exacte de la proposition 5.1.2, une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow j_* \mathcal{J}_n^{cris,[s]} \longrightarrow j_* \mathcal{J}_n^{[s]} \xrightarrow{N} j_* \mathcal{J}_n^{[s-1]} \longrightarrow 0$$

de laquelle on dduit une suite exacte courte sur les groupes de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^i(j_* \mathcal{J}_n^{cris,[s]}) \longrightarrow H^i(j_* \mathcal{J}_n^{[s]}) \xrightarrow{N} H^i(j_* \mathcal{J}_n^{[s-1]}) \longrightarrow 0$$

o tous les groupes de cohomologie sont calculs sur le site $(X_n)_{\text{syn}}$ (l'argument est le mme que celui utilis pour la proposition 3.2.3.1 de [Bre98]).

La suite de la preuve consiste reprendre le diagramme du lemme 5.2.1 et procdre une tude relativement fine des noyaux des flches verticales. Prcisment, si on note :

$$\begin{aligned} K^t &= \ker(H^i(\mathcal{J}_n^{[t]}) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_n^{\text{st}})) = \ker(H^i(\mathcal{J}_n^{[t]}) \rightarrow \text{Fil}^t \mathcal{M}) \\ \bar{K}^t &= \ker(H^i(j_\star \mathcal{J}_n^{[t]}) \rightarrow \text{Fil}^t(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})) \end{aligned}$$

on peut complter le diagramme de la faon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} K^{s+1-t} & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} K^{s-t} & \longrightarrow & \bar{K}^s \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s+1-t]}) & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s-t]}) & \longrightarrow & H^i(j_\star \mathcal{J}_n^{[s]}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} \text{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} \text{Fil}^{s-t} \mathcal{M} & \longrightarrow & \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

L'oprateur N induit un morphisme entre le diagramme prcdent et son quivalent lorsque l'on remplace s par $s - 1$ (en particulier, il induit une application $N : \bar{K}_s \rightarrow \bar{K}_{s-1}$ pour tout $s \in \{0, \dots, r\}$ en convenant que $K_{-1} = K_0$). La suite exacte du haut implique en prenant $s = 0$ que $\bar{K}_0 = 0$. Par ailleurs, une tude un peu minutieuse de cette mme suite exacte (voir lemmes 3.2.3.3 et 3.2.3.4 de [Bre98]) montre que l'application $N : \bar{K}_r \rightarrow \bar{K}_{r-1}$ est un isomorphisme.

En considrant la suite exacte de droite, ceci implique que pour $s = 0$ et $s = r$, on a des isomorphismes :

$$\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]}) = H^i((X_n)_{\text{syn}}, j_\star \mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]}) \xrightarrow{\sim} \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$$

ce qui termine la preuve du lemme. \square

5.2.4 Le calcul de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$

Il n'est plus difficile present de terminer la preuve de la proposition 5.0.6. En effet, la deuxime suite exacte de la proposition 5.1.2 nous fournit une suite exacte longue :

$$\dots \longrightarrow H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{\text{cris},[r]}) \xrightarrow{\phi_r - \text{id}} H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \longrightarrow \dots$$

et puis, comme le foncteur \varinjlim_L est exact (la limite est filtrante) on obtient une nouvelle suite exacte longue :

$$\dots \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{\text{cris},[r]}) \xrightarrow{\phi_r - \text{id}} \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \longrightarrow \dots$$

Par ailleurs, la flche $\phi_r - \text{id} : \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{\text{cris},[r]}) \rightarrow \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}})$ s'identifie *via* les isomorphismes du lemme 5.2.2 la flche :

$$\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \xrightarrow{\phi_r - \text{id}} (\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$$

et on sait par le lemme 2.3.9 que celle-ci est surjective. On en dduit que la suite exacte longue se coupe en suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{\text{cris}, [r]}) \xrightarrow{\phi_r - \text{id}} \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \longrightarrow 0$$

ce qui termine la preuve.

5.3 Une conjecture de Serre

On montre dans ce paragraphe comment la thorie dveloppe au long de cet article permet de rsoudre compltement la conjecture de l'inertie modre de Serre formule dans le paragraphe 1.13 de [Ser72].

Avant de rappeler l'nonc de la conjecture, faisons quelques prliminaires et profitons-en pour fixer les notations (pour plus de prcisions, voir le paragraphe 1 de [Ser72]). Soit V une \mathbb{F}_p -reprsentation de dimension finie irrductible du sous-groupe d'inertie I de groupe de Galois absolu de K . Par un rsultat classique de thorie des groupes, du fait que V a pour cardinal un multiple de p , le sous-groupe d'inertie sauvage (qui est un pro- p -groupe distingu) agit trivialement. Ainsi l'action de I se factorise travers une action du groupe d'inertie modre I_t .

Par ailleurs, puisque V est suppose irrductible, l'anneau E des endomorphismes quivariants de V est un corps fini et V hrite d'une structure d'espace vectoriel de dimension 1 sur ce corps. La reprsentation de dpart fournit un caractre $\rho : I_t \rightarrow E^*$. Notons $q = p^h$ le cardinal de E et \mathbb{F}_q le sous-corps de \bar{k} form des solutions de l'quation $x^q = x$. On dispose de l'application suivante appele *caractre fondamental de niveau h* :

$$\begin{aligned} \theta_h : \quad I_t &\rightarrow \mu_{q-1}(\bar{K}) \simeq \mathbb{F}_q^* \\ g &\mapsto \frac{g(\eta)}{\eta} \end{aligned}$$

o η dsigne une racine $(q-1)$ -ime de l'uniformisante π .

Les corps E et \mathbb{F}_q sont finis de mme cardinal et donc isomorphes (non canoniquement). Si l'on compose θ_h par un tel isomorphisme f , on obtient une application $\theta_{h,f} : I_t \rightarrow E^*$ et on montre facilement (voir la proposition 5 du paragraphe 1 de [Ser72]), que $\rho = \theta_{h,f}^n$ pour un certain entier n compris entre 0 et $q-2$. L'entier n dpend de l'isomorphisme f choisi mais les chiffres de son criture en base p , eux, n'en dpendent pas. Ce sont par dfinition les *exposants de l'inertie modre* de la reprsentation V .

La conjecture de Serre s'nonce alors comme suit :

Thorme 5.3.1. *Soit X un schma propre et lisse sur K rduction semi-stable sur \mathcal{O}_K et soit r un entier. Les exposants de l'inertie modre sur un quotient de Jordan-Hlder de la restriction au groupe d'inertie de la reprsentation galoisienne $H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee$ (o « \vee » dsigne le dual) sont compris entre 0 et r .*

Dmonstration. On remarque dans un premier temps que le rsultat est vident si $r \geq p-1$ (des chiffres en base p sont ncessairement infrieurs ou gaux $p-1$). On peut donc supposer $r < p-1$ et appliquer les rsultats de cet article.

Par le thorme 1.1, la reprsentation galoisienne $V = H_t^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est dans l'image essentielle du foncteur $T_{\text{st}\star}$. Puisque cette image essentielle est stable par sous-objets et quotients (thorme 2.3.1), tout quotient de Jordan-Hlder de V est galement dans l'image essentielle de $T_{\text{st}\star}$. Par ailleurs, un tel quotient de Jordan-Hlder est par dfinition irrductible et donc ne peut tre l'image par $T_{\text{st}\star}$ que d'un objet simple.

Le thorme rsulte ce niveau du thorme 5.2.2 de [Car]. □

Remarque. On a un rsultat quivalent avec les groupes de cohomologie $H_t^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\vee$ lorsque $i < r$ et $er < p - 1$ (ou autrement dit lorsque $i < E((p - 2)/e)$, $E(\cdot)$ dsignant la partie entiere).

Bibliographie

- [Ber74] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schmas de caractristique p*, Lecture notes in math. **407** (1974)
- [BM02] C. Breuil et W. Messing, *Torsion tale and crystalline cohomologies*, Astrisque **279**, Soc. math. France (2002), 81–124
- [BO78] P. Berthelot et A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology* PUBLISHER = Princeton University Press, Princeton (1978)
- [Bre96] C. Breuil, *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline, et cohomologie de Cech*, Bull. **124**, Soc. math. France (1996), 587–647
- [Bre97a] ———, *Construction de representations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327
- [Bre97b] ———, *Representations p-adiques semi-stables et transversalit de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224
- [Bre98] ———, *Cohomologie tale de p-torsion et cohomologie cristalline en rduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620
- [Bre99] ———, *Representation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122
- [Car] X. Caruso, *Rpresentations p-adiques semi-stables dans le cas $er < p - 1$* , soumis
- [Fal92] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Journal of algebraic geometry **1** (1992), 61–82
- [Fal99] ———, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuations rings*, J. Amer. Math. Soc **12** (1999), 117–144
- [FL82] J.M. Fontaine et G. Laffaille, *Construction de representations p-adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608
- [FM87] J.M. Fontaine et W. Messing, *p-adic periods and p-adic tale cohomology*, Contemporary math. **67** (1987), 179–207
- [Fon94a] J.M. Fontaine, *Le corps des priodes p-adiques*, Astrisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111
- [Fon94b] ———, *Representations p-adiques semi-stables*, Astrisque **223**, Soc. math. France (1994), 113–184
- [Kat87] K. Kato, *On p-adic vanishing cycles*, Advanced Study in Pure Math. **10** (1987), 207–251
- [Kat89] ———, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Geometry and Number Theory , John Hopkins University Press (1989), 191–224
- [Ser72] J.P. Serre, *Propriets galoisiennes des points d’ordre fini des courbes elliptiques*, Inventiones math. **15** (1972), 259–331
- [Tsu99] T. Tsuji, *p-adic tale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Inventiones math. **137** (1999), 233–411