



Cohomologie des algèbres de Krönecker générales

Belkacem Bendiffalah, Daniel Guin

► To cite this version:

| Belkacem Bendiffalah, Daniel Guin. Cohomologie des algèbres de Krönecker générales. 2005. <hal-00009012>

HAL Id: hal-00009012

<https://hal.science/hal-00009012v1>

Preprint submitted on 23 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Cohomologie des algèbres de Krøenecker générales

B. Bendiffalah (ben@math.univ-montp2.fr)

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier (UMR CNRS 5149)
Département de Mathématiques, Case 051
Université de Montpellier II, Place Eugène Bataillon
MONTPELLIER 34095 Cedex 5, FRANCE

D. Guin (dguin@math.univ-montp2.fr)

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier (UMR CNRS 5149)
Département de Mathématiques, Case 051
Université de Montpellier II, Place Eugène Bataillon
MONTPELLIER 34095 Cedex 5, FRANCE

Abstract for “Cohomology of General Krøenecker Algebras”.

The computation of the Hochschild cohomology $HH^*T = H^*(T, T)$ of a triangular algebra $T = \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ was performed in [BG2], by the means of a certain triangular complex. We use this result here to show how HH^*T splits in little pieces whenever the bimodule M is decomposable. As an example, we express the Hilbert-Poincaré serie $\sum_{i=0}^{\infty} \dim_K(HH^i T_m) t^i$ of the “general” Krøenecker algebra $T_m = \begin{bmatrix} A & M^m \\ 0 & B \end{bmatrix}$ as a function of $m \geq 1$ and those of T (here the ground ring K is a field and $\dim_K T < +\infty$). The Lie algebra structure of $HH^1 T$ is also considered.

Sommaire.

1. Introduction
 - 1.1 Cohomologie des algèbres triangulaires.
 - 1.2 Réductions.
 - 1.3 Algèbres de Krøenecker d’un bimodule.
2. Premier Théorème de Réduction
 - 2.1 Cohomologie triangulaire.
 - 2.2 Preuve du Lemme 1.
 - 2.3 Preuve du Théorème 1 (cf. 1.2.3).
3. Second Théorème de Réduction
 - 3.1 Cohomologie modifiée.
 - 3.2 Suite exacte de Mayer-Vietoris.
4. L’Algèbre de Lie $HH^1 T$
 - 4.1 Preuve du Théorème 3.
 - 4.2 Scindage de $HH^1 T$.
5. Références Bibliographiques

Mots clefs : algèbres triangulaires, cohomologie de Hochschild, suite exacte de Mayer-Vietoris, algèbres de Krøenecker généralisées, série de Hilbert-Poincaré.

Class. AMS : 13D40, 16G60, 16E05, 16E30, 16E40, 16E45, 20G05, 20F40, 13J05.

COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE KRÖNECKER GÉNÉRALES

B. Bendiffalah (Montpellier II) et **D. Guin** (Montpellier II)

1. Introduction

De nombreux travaux ont montré l'importance du calcul de la cohomologie de Hochschild des algèbres associatives. Il existe cependant peu de résultats généraux concernant les algèbres triangulaires (*cf.* §1.1). Pourtant, la connaissance de leur cohomologie est suffisante (par des procédés de récurrence) pour obtenir le calcul de la cohomologie d'algèbres très générales, comme les algèbres de poset (e.g. [M]) ou les algèbres héréditaires artiniennes (e.g. [Har]). L'objectif de ce travail est d'étudier l'incidence de la décomposabilité du bi-module M sur la cohomologie de Hochschild de l'algèbre triangulaire. En particulier, nous étudierons la série de Hilbert-Poincaré des algèbres de Kronecker "générales" (*cf.* §1.3).

Un anneau commutatif K est fixé et $\otimes = \otimes_K$; nous dirons "module" pour tout module sur K . À l'exception notable de la section §4, où il est question d'algèbres de Lie, toutes nos algèbres sont des K -algèbres associatives unitaires. Pour toute algèbre T , les " T -modules" sont des modules (unitaires) à gauche sur T . Pour les T -modules-à-droite, nous utiliserons plutôt l'algèbre opposée T^o .

§1.1 Cohomologie des algèbres triangulaires.

Nous renvoyons à [CE] pour toutes les questions basiques sur la cohomologie de Hochschild. Fixant deux algèbres A et B et un $A \otimes B^o$ -module M (un "bimodule"), on s'intéresse à l'algèbre "triangulaire" (*e.g.* [ARS,III.§2]) :

$$(1.1.1) \quad T = \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & m \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & m' \\ 0 & b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & am' + mb' \\ 0 & bb' \end{bmatrix}.$$

Sa cohomologie, $HH^*T := H^*(T, T)$, n'est pas connue dans le cas général alors que son homologie (de Hochschild) est "triviale" : $H_*(T, T) = H_*(A, A) \oplus H_*(B, B)$ ([Lo]).

Hormis la section §4, nous supposons systématiquement que le K -module T est projectif (donc aussi A , B et M) et nous nous intéressons au cas où $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i^{m_i}$ ($m_i \geq 1$), sans aucune hypothèse sur la famille de $A \otimes B^o$ -modules $E = \{M_1, \dots, M_n\}$ (autre que les M_i soient K -projectifs). Nous montrons comment le calcul de la cohomologie de l'algèbre $\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ se déduit de ceux des algèbres $\begin{bmatrix} A & M_i \\ 0 & B \end{bmatrix}$, à l'aide de deux sortes de réductions (*cf.* §1.2). La première (Théorème 1) ramène le calcul de $HH^*\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ à celui de $HH^*\begin{bmatrix} A & M' \\ 0 & B \end{bmatrix}$, où $M' = \bigoplus_i M_i$: nous en déduisons la cohomologie des algèbres de Kronecker générales (*cf.* §1.3). La seconde réduction (Théorème 2) est une famille de suites exactes longues de type Mayer-Vietoris ramenant le calcul de $HH^*\begin{bmatrix} A & M' \\ 0 & B \end{bmatrix}$ à ceux des $HH^*\begin{bmatrix} A & M_i \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $1 \leq i \leq n$.

Ce travail fait suite à [BG2], où la cohomologie de T est exprimée à l'aide d'un certain complexe "triangulaire" (M est supposé K -projectif). Ce résultat, que nous rappelons dans §2.1 pour le confort du lecteur, avait permis entre autres choses de retrouver

la généralisation de [Ci] et [MP] de la suite exacte longue de D. Happel [Hap] (cf. aussi [GMS],[GS],[GG],[K]) :

$$(1.1.2) \quad \cdots \longrightarrow Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, M) \xrightarrow{l_M^*} HH^*[{}^A_M] \xrightarrow{r_M^*} \frac{HH^*A}{HH^*B} \xrightarrow{d_M^*} Ext_{A \otimes B^o}^*(M, M) \longrightarrow \cdots$$

où r_M^* est un morphisme d'algèbres graduées (la superposition signifie un produit direct). Incidemment (cf. 1.2.15, avec $N = 0$), nous retrouvons que r_M^1 est un morphisme d'algèbres de Lie (sans hypothèse sur T).

§1.2 Réductions.

Le résultat suivant, démontré dans §2.2, est une généralisation de 1.1.2 ($l_{0,M}^* = l_M^*$ et $r_{0,M}^* = r_M^*$).

1.2.1 Lemme 1. *Pour tout $A \otimes B^o$ -module N (K -projectif), on a une suite exacte longue :*

$$(1.2.2) \quad \cdots \longrightarrow HH^*[{}^A_N] \xrightarrow{d_{N,M}^{*-1}} Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, M) \xrightarrow{l_{N,M}^*} HH^*[{}^A_{M \oplus N}] \xrightarrow{r_{N,M}^*} HH^*[{}^A_N] \longrightarrow \cdots$$

$$Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, N)$$

où $l_{N,M}^*$ est induit par $l_{M \oplus N}^*$ (cf. 1.1.2) et $r_{L,N}^* \circ r_{N \oplus L,M}^* = r_{L,N \oplus M}^*$.

Ce lemme permet un premier dévissage de $HH^*[{}^A_M]$ si $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i^{m_i}$, pour une famille de $A \otimes B^o$ -modules K -projectifs $E = \{M_1, \dots, M_n\}$ et $m_i \geq 1$. Posant $M' = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, le théorème suivant (démontré dans §2.3) nous autorise à faire abstraction des multiplicités m_i .

1.2.3 Théorème 1. *Nous avons une suite exacte courte graduée scindée de modules :*

$$(1.2.4) \quad 0 \longrightarrow \prod_{i,j} Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M_i, M_j)^{m_i m_j - 1} \xrightarrow{l^*} HH^*[{}^A_M] \xrightarrow{r^*} HH^*[{}^A_{M'}] \longrightarrow 0,$$

où les morphismes l^* et r^* sont définis par le Lemme 1.

Pour compléter notre programme, il nous reste à exprimer $HH^*[{}^A_{M'}]$ en fonction des $HH^*[{}^A_{M_i}]$. C'est un objectif que nous réalisons au moyen de suites exactes longues qui s'apparentent à celle de Mayer-Vietoris (Théorème 2). Pour les décrire, il sera utile, au regard du résultat suivant, de modifier la cohomologie employée.

1.2.5 Lemme 2. *Le module $\prod_{i \neq j} Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M_i, M_j)$ est (isomorphe par $l_{M'}^*$ à) un sous-module de $HH^*[{}^A_{M'}]$.*

En fait (cf. §3.1), le sous-module de $HH^*[{}^A_{M'}]$ précisé au Lemme 2 est en facteur direct et possède un supplémentaire particulier, dont on donnera une définition intrinsèque avec 3.1.5.

1.2.6 Définition 1. *Nous notons \mathcal{H}^*E ce supplémentaire canonique (de l'image par $l_{M'}^*$) de $\prod_{i \neq j} Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M_i, M_j)$ dans $HH^*[{}^A_{M'}]$. Par convention, $\mathcal{H}^*(\phi) = HH^*[{}^A_0]$.*

Dans la suite, nous aurons à considérer des sous-familles F de la famille E et nous noterons \bar{F} la somme directe de ses éléments ; on pose $\bar{\phi} = 0$. Avec cette notation, on a $M' = \bar{E}$. Ceci permet de formuler immédiatement la généralisation suivante de 1.2.2 (cf. §3.1).

1.2.7 Lemme 3. *Pour toute partie $F \subset E$, nous avons une suite exacte longue :*

$$(1.2.8) \quad \cdots \longrightarrow \prod_{L \in E \setminus F} \text{Ext}_{A \otimes B^o}^{*-1}(L, L) \xrightarrow{\ell_{F,E}^*} \mathcal{H}^* E \xrightarrow{\rho_{F,E}^*} \mathcal{H}^* F \xrightarrow{\delta_{F,E}^*} \prod_{L \in E \setminus F} \text{Ext}_{A \otimes B^o}^*(L, L) \longrightarrow \cdots$$

où $\ell_{F,E}^*$, $\rho_{F,E}^*$ et $\delta_{F,E}^*$ sont induits par $l_{\bar{F},\bar{E}}^*$, $r_{\bar{F},\bar{E}}^*$ et $d_{\bar{F},\bar{E}}^*$ (cf. 1.2.2).

En particulier, pour $G \subset F \subset E$, nous avons $\rho_{G,F}^* \circ \rho_{F,E}^* = \rho_{G,E}^*$ (fonctorialité).

On retrouve 1.2.2 avec $E = \{M, N\}$ et $F = \{N\}$; de même 1.1.2 s'obtient avec $E = \{M\}$ et $F = \phi$. Le théorème suivant découle du Théorème 4, §3.2.

1.2.9 Théorème 2. *Pour toutes parties $F, G \subset E$, nous avons une suite exacte longue*

$$(1.2.10) \quad \cdots \longrightarrow \mathcal{H}^*(F \cup G) \xrightarrow[\rho_{G,F \cup G}^*]{\rho_{F,F \cup G}^*} \mathcal{H}^* F \xrightarrow[\mathcal{H}^* G]{\rho_{F \cap G, F}^* - \rho_{F \cap G, G}^*} \mathcal{H}^*(F \cap G) \longrightarrow \mathcal{H}^{*+1}(F \cup G) \longrightarrow \cdots$$

Dorénavant, le calcul de $HH^* \left[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right]$ se ramène, dans les bons cas de décomposabilité de M (e.g. longueur finie), à ceux des $A \otimes B^o$ -modules indécomposables. Pour être vraiment complet, il faudrait aussi pouvoir suivre toute la structure algébrique de $HH^* \left[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right]$ dans nos réductions. À ce propos, nous savons que $\mathcal{H}^* E$ est muni d'une structure d'algèbre (isomorphe à une algèbre quotient de $HH^* \left[\begin{smallmatrix} A & \bar{E} \\ 0 & \bar{B} \end{smallmatrix} \right]$, cf. [GMS] et [GS]). De là, notre première question :

(1.2.11) *Les morphismes $\rho_{F,E}^*$ sont-ils des morphismes d'algèbres ?*

Question que nous laissons sans réponse ; cependant, nous ne pensons pas que cela soit vrai pour le morphisme $r_{N,M}^*$ de 1.2.2 ; le cas $r_M^* = r_{0,M}^*$ de 1.1.2 serait donc très exceptionnel.

Dans le cas d'une algèbre quelconque T , la structure d'algèbre de Lie de $HH^1 T$ est extrêmement difficile à élucider ; si T est une algèbre monomiale de dimension finie (K est un corps algébriquement clos), l'on dispose d'une très jolie interprétation géométrique associée au groupe de Lie $\text{Aut}(T)$ (les automorphismes de T) et la situation s'en trouve mieux comprise (e.g. [GAS], [S]). Dans le cadre des algèbres triangulaires, il se trouve que le module $\mathcal{H}^1 E$ défini en 1.2.6 est une sous-algèbre de Lie de $HH^1 \left[\begin{smallmatrix} A & \bar{E} \\ 0 & \bar{B} \end{smallmatrix} \right]$. De là une seconde question, aussi naturelle, à laquelle nous répondons positivement :

(1.2.12) *Les morphismes $\rho_{F,E}^1$ de 1.2.8 sont-ils des morphismes d'algèbres de Lie ?*

(Nous ne pensons pas que cela soit généralement vrai pour $r_{N,M}^1$.) Par fonctorialité de ρ^1 , il suffit de répondre à 1.2.12 dans le cas particulier de l'algèbre de Lie $HH^1 \left[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right]$:

1.2.13 Théorème 3. *Il existe deux sous-algèbres de Lie, $\mathcal{H}^1(M, N)$ et $\mathcal{H}^1(N, M)$, vérifiant*

$$(1.2.14) \quad \mathcal{H}^1(M, N) + \mathcal{H}^1(N, M) = HH^1 \left[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right] \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^1(M, N) \cap \mathcal{H}^1(N, M) = \mathcal{H}^1\{M, N\}.$$

Par restriction, $r_{M,N}^1$ induit des morphismes d'algèbres de Lie de même image que $r_{M,N}^1$:

$$(1.2.15) \quad \begin{aligned} \rho_{M,(M,N)}^1 &: \mathcal{H}^1(M, N) \longrightarrow HH^1 \left[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right], \\ \rho_{M,(N,M)}^1 &: \mathcal{H}^1(N, M) \longrightarrow HH^1 \left[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right], \\ \rho_{M,\{M,N\}}^1 &: \mathcal{H}^1\{M, N\} \longrightarrow HH^1 \left[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Dans la section §4, nous donnons une condition nécessaire et suffisante (Théorème 5), portant sur N , pour avoir la surjectivité du morphisme $r_{M,N}^1$, donc des morphismes d'algèbres de Lie 1.2.15. En particulier, nous en déduisons une suite exacte :

$$(1.2.16) \quad 0 \longrightarrow Z \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{M,N}^0} Z \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow \text{End}_{A \otimes B^o} N \longrightarrow \mathcal{H}^1\{M, N\} \xrightarrow{\rho_{M,\{M,N\}}^1} HH^1 \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow 0.$$

Dans le paragraphe suivant nous appliquons nos résultats à une généralisation des algèbres de Krøenecker.

§1.3 Algèbres de Krøenecker d'un bimodule.

L'algèbre de Krøenecker \mathbf{K}_2 est l'algèbre du carquois $\bullet \rightrightarrows \bullet$ (deux sommets et deux flèches) et nous avons un isomorphisme d'algèbres $\mathbf{K}_2 \cong \begin{bmatrix} K & K^2 \\ 0 & K \end{bmatrix}$. Si K est un corps, c'est l'exemple le plus simple (et le plus étudié) d'algèbre dont le type de représentation n'est pas fini et qui ne soit pas sauvage (e.g. [ARS, VIII. §7]) ; pour $m \geq 3$, l'algèbre de Krøenecker "généralisée" $\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} K & K^m \\ 0 & K \end{bmatrix}$ est sauvage.

Pour $m \geq 1$, on sait que le K -module $HH^* \begin{bmatrix} K & K^m \\ 0 & K \end{bmatrix}$ est libre et l'on a

$$(1.3.1) \quad \text{rang}_K(HH^i \begin{bmatrix} K & K^m \\ 0 & K \end{bmatrix}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 ; \\ m^2 - 1 & \text{si } i = 1 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(e.g. [BG1], l'étude y est faite pour un cardinal m quelconque, même infini, en connection avec les catégories "musclées" ; cf. aussi 4.2.10). Nous désirons généraliser la formule 1.3.1 en associant à tout $A \otimes B^o$ -module M (avec A, M et B, K -projectifs), des "algèbre de Krøenecker générales" $\begin{bmatrix} A & M^m \\ 0 & B \end{bmatrix}$ (algèbres triangulaires), $m \geq 1$. D'après le Théorème 1, nous avons une suite exacte courte graduée scindée :

$$(1.3.2) \quad 0 \longrightarrow \text{Ext}_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, M)^{m^2-1} \longrightarrow HH^* \begin{bmatrix} A & M^m \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow HH^* \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow 0.$$

Pour $M \neq 0$ et $m \geq 2$, ce résultat prouve, par exemple, que nous avons toujours $HH^1 \begin{bmatrix} A & M^m \\ 0 & B \end{bmatrix} \neq 0$. Si K est un corps et A, B et N sont des K -espaces vectoriels de dimensions finies, nous avons la série de Hilbert-Poincaré^(†) :

$$(1.3.3) \quad \chi \begin{bmatrix} A & M^m \\ 0 & B \end{bmatrix} = \chi \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} + t(m^2 - 1)\Xi,$$

où $\Xi = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \dim_K \text{Ext}_{A \otimes B^o}^i(M, M)$. Si $\text{car}(K) = p > 0$, nous en déduisons la p -périodicité de l'application $m \mapsto \chi'(m)$, où $\chi'(m) \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[[t]] \subset K[[t]]$ est la classe de $\chi \begin{bmatrix} A & M^m \\ 0 & B \end{bmatrix}$ modulo p ; $\chi'(m)$ ne dépend que de la classe de m^2 modulo p et en particulier :

$$(1.3.4) \quad \chi'(p-1) = \chi'(1) = \chi'(p+1).$$

Le corollaire suivant généralise un résultat de [BG2], rappelé dans §2.1 (cf. 2.1.11).

^(†) $\chi_A = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \dim_K(HH^i A) \in \mathbf{Z}[[t]]$

1.3.5 Corollaire 1. *Soit une algèbre A dont le module sous-jacent est projectif. Pour tout A -module projectif M , de type fini (sauf si K est semi-simple) et pour tout entier $m \geq 1$, nous avons une suite exacte courte scindée graduée :*

$$(1.3.6) \quad 0 \longrightarrow (HH^{*-1}B)^{m^2-1} \longrightarrow HH^*[{}^A_M{}^B_m] \xrightarrow{r^*} HH^*A \longrightarrow 0 ,$$

où $B = (End_A M)^o$ (ainsi M est un $A \otimes B^o$ -module) et r^* est un morphisme d'algèbres.

En particulier (mêmes hypothèses) : si K est un corps et si les K -espaces vectoriels A et N sont de dimension finie, nous avons $\chi[{}^A_M{}^B_m] = \chi_A + t(m^2 - 1)\chi_B$ et la série $\chi[{}^A_M{}^B_m]$ est polynomiale (resp. rationnelle) si χ_A et χ_B le sont.

2. Premier Théorème de Réduction

Dans le paragraphe §2.2, nous explicitons des sous-modules canoniques de la cohomologie d'une algèbre triangulaire dont le bimodule est décomposable ; la suite exacte longue 1.2.2 est démontrée. On obtient ensuite le Théorème 1 de §1.2 en scindant cette suite exacte longue, grâce au critère défini par la Proposition 4 (ou 4 *bis*) de §2.3.

Commençons par rappeler la définition de la cohomologie de Hochschild et la construction du complexe triangulaire introduit dans [BG2].

§2.1 Cohomologie triangulaire.

Pour toute algèbre T , nous avons un “bar-complexe” (cf. [Lo]) $C_*^T = \bigoplus_{n \geq 0} C_n^T$, avec $C_n^T = T \otimes \cdots \otimes T$ ($n + 2$ facteurs T) et de différentielle

$$(2.1.1) \quad a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} .$$

C'est un complexe de $T \otimes T^o$ -modules que nous pouvons augmenter en un complexe acyclique C_*^{T+} avec la multiplication $T \otimes T \longrightarrow T$, $C_{-1}^{T+} = T$. Le bar-complexe permet de définir, pour tout $T \otimes T^o$ -module Λ , le complexe (croissant) de Hochschild $C^*(T, \Lambda) = Hom_{T \otimes T^o}(C_*^T, \Lambda)$ et, donc, la cohomologie de Hochschild $H^*(T, \Lambda)$. La cohomologie de $C^*(T) = C^*(T, T)$, notée $HH^*T = H^*(T, T)$, est une algèbre associative graduée et HH^1T est naturellement munie une structure d'algèbre de Lie dont nous reparlerons dans §4.1. Si T est un K -module projectif, il existe un isomorphisme $H^*(T, \Lambda) \cong Ext_{T \otimes T^o}^*(T, \Lambda)$ qui, pour $\Lambda = T$, est un isomorphisme d'algèbres graduées (produit de Yoneda).

Soient à présent deux algèbres A et B et un $A \otimes B^o$ -module M , tous K -projectifs. Le quotient de $(C_*^{A+} \otimes C_*^{B^o+})[-1]$ (suspension du produit des complexes) par son sous-complexe ponctuel $A \otimes B[-1]$ (concentré en degré -1) est un complexe positif de $A \otimes A^o \otimes B \otimes B^o$ -modules, noté C_*^{A, B^o} , et nous définissons $C_*^{A, B^o} M = C_*^{A, B^o} \otimes_{A \otimes B^o} M$. En particulier : $C_*^A M = C_*^A \otimes_A M$ et $C_*^{B^o} M = M \otimes_B C_*^{B^o}$ sont des sous-complexes disjoints de $C_*^{A, B^o} M$: nous notons $i_{M, N}^A$ et $i_{M, N}^{B^o}$ ces injections. Les morphismes canoniques d'algèbres induits par la structure de $A \otimes B^o$ -module de M , $\alpha_M : A \longrightarrow End_{B^o} M$ et $\beta_M : B \longrightarrow (End_A M)^o$, induisent des morphismes de complexes $\alpha_M^* : C^*(A) \longrightarrow C^*(A, End_{B^o} M)$ et $\beta_M^* : C^*(B) \longrightarrow C^*(B, End_A M)$.

2.1.2 Définition 2. Pour tout $A \otimes B^o$ -module N , le complexe “triangulaire de M à coefficient dans N ” est $C_{tri}^*(M, N) = Hom_{A \otimes B^o}(C_*^{A, B^o} M, N)$, noté $C_{tri}^*(M)$ si $M = N$.

Avec les isomorphismes d’adjonction $C^*(A, Hom_{B^o}(M, N)) \cong Hom_{A \otimes B^o}(C_*^A M, N)$ et $C^*(B, Hom_A(M, N)) \cong Hom_{A \otimes B^o}(C_*^{B^o} M, N)$, nous déduisons un morphisme surjectif :

(2.1.3) $i_{M, N}^* = (i_{M, N}^{A*}, i_{M, N}^{B^o*}) : C_{tri}^*(M, N) \longrightarrow C^*(A, Hom_{B^o}(M, N)) \times C^*(B, Hom_A(M, N)).$

2.1.4 Remarque. Le complexe $\Sigma_{M, N}^*$, cône du morphisme $i_{M, N}^*$, est quasi-isomorphe au complexe $Ker i_{M, N}^*$, dont l’homologie est isomorphe au module gradué $Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, N)$.

2.1.5 Définition 3. Pour $T = \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$, on note $\mathcal{C}^*\{M\}$ le cône du morphisme de complexes^(†)

$$(2.1.6) \quad \lambda_M^* : C^*(A) \times C_{tri}^*(M) \times C^*(B) \longrightarrow C^*(A, End_{B^o} M) \times C^*(B, End_A M),$$

dont les composantes éventuellement non nulles sont α_M^* , $i_M^{A*} = i_{M, M}^{A*}$, $i_M^{B^o*} = i_{M, M}^{B^o*}$ et β_M^* .

Nous en déduisons une suite exacte courte de complexes ($\Sigma_M^* = \Sigma_{M, M}^*$) :

$$(2.1.7) \quad 0 \longrightarrow \Sigma_M^* \xrightarrow{l_M} \mathcal{C}^*\{M\} \xrightarrow{r_M} C^*(A) \times C^*(B) \longrightarrow 0.$$

2.1.8 Théorème [BG2, 3.4.4]. Nous avons une équivalence homotopique de complexes :

$$(2.1.9) \quad C^*(T) \sim \mathcal{C}^*\{M\}$$

et la suite exacte longue 1.1.2 provient de la suite exacte courte de complexes 2.1.7.

Exemple d’application : si M est un A -module projectif, nous avons une suite exacte longue

$$(2.1.10) \quad \dots \longrightarrow HH^{*-1} A \longrightarrow H(\text{cône } \beta_M^*) \longrightarrow HH^* \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \xrightarrow{r^*} HH^* A \longrightarrow \dots$$

où r^* est un morphisme d’algèbres graduées et $H(\text{cône } \beta_M^*)$ est l’homologie du cône du morphisme $C^*(B, B) \longrightarrow C^*(B, End_A M)$ que β_M induit. En particulier, nous avons :

2.1.11 Corollaire [BG2, 1.3.7]. Si A est une algèbre K -module projectif et M est un A -module projectif de type fini, nous avons des isomorphismes d’algèbres graduées :

$$(2.1.12) \quad HH^* \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \cong HH^* A \quad (\text{induit par } r_M^*) \text{ et } HH^* B \cong Ext_{A \otimes B^o}^*(M, M),$$

où $B = (End_A M)^o$ (ainsi M est bien un $A \otimes B^o$ -module).

En fait l’hypothèse de finitude sur M n’est là que pour assurer que l’algèbre B est un module K -projectif : elle est redondante si, par exemple, l’anneau K est semi-simple.

Clairement, le Corollaire 1 de §1.3 s’obtient en mettant ensemble la suite scindée 1.3.2 avec les isomorphismes 2.1.12. La suite exacte courte graduée 1.3.6 provient de la suite exacte longue 2.1.10 : $H(\text{cône } \beta_{M^m}^*) \cong H^{*-1}(B, End_A M)^{m^2-1} \cong (HH^{*-1} B)^{m^2-1}$.

§2.2 Preuve du Lemme 1 (§1.2).

Soient deux algèbres A et B et soient deux $A \otimes B^o$ -modules M et N (tous supposés K -projectifs). Le résultat suivant est un cas particulier du Lemme 2 de §1.2 (prendre $n = 2$).

^(†) $\mathcal{C}^*\{M\}$ est noté $\tilde{C}^*(T, T)$ dans [BG2]

2.2.1 Proposition 1. *Le morphisme $l_{M \oplus N}^*$ (cf. 1.1.2) est injectif sur le sous-module*

$$(2.2.2) \quad Ext_{A \otimes B^\circ}^{*-1}(M, N) \times Ext_{A \otimes B^\circ}^{*-1}(N, M) \subset Ext_{A \otimes B^\circ}^{*-1}(M \oplus N, M \oplus N)$$

et son image est un facteur direct de $HH^[{}_0^A M \oplus N]$.*

Autrement dit : il existe un sous-module gradué $\mathcal{H}^*\{M, N\} \subset HH^*[{}_0^A M \oplus N]$ (défini dans la preuve ci-dessous) et un isomorphisme

$$(2.2.3) \quad HH^*[{}_0^A M \oplus N] \cong \mathcal{H}^*\{M, N\} \times Ext_{A \otimes B^\circ}^{*-1}(M, N) \times Ext_{A \otimes B^\circ}^{*-1}(N, M) .$$

2.2.4 Preuve. Considérons le complexe $\mathcal{C}^*\{M \oplus N\}$ (cône du morphisme $\lambda_{M \oplus N}^*$). Dans la décomposition de Peirce

$$End_A(M \oplus N) \cong \begin{bmatrix} End_A M & Hom_A(N, M) \\ Hom_A(M, N) & End_A N \end{bmatrix} ,$$

ainsi que celle de l'algèbre $End_{B^\circ}(M \oplus N)$, il est essentiel de noter que l'image de $\alpha_{M \oplus N}^*$ (resp. $\beta_{M \oplus N}^*$) est contenue dans le sous-complexe

$$(2.2.5) \quad C^*(A, End_{B^\circ} M) \times C^*(A, End_{B^\circ} N) \quad (\text{resp. } C^*(B, End_{A^\circ} M) \times C^*(B, End_{A^\circ} N))$$

du complexe $C^*(A, End_{B^\circ}(M \oplus N))$ (resp. $C^*(B, End_{A^\circ}(M \oplus N))$). Nous en déduisons une décomposition en somme directe de complexes :

$$(2.2.6) \quad \mathcal{C}^*\{M \oplus N\} = \mathcal{C}^*\{M, N\} \oplus \Sigma^*\{M, N\} ,$$

où $\Sigma^*\{M, N\} = \Sigma_{M, N}^* \times \Sigma_{N, M}^*$ et $\mathcal{C}^*\{M, N\}$ est le complexe cône du morphisme de complexes :

$$(2.2.7) \quad \lambda_{M, N}^* : \begin{array}{c} C^*(A) \\ C_{tri}^*(M, M) \\ C_{tri}^*(N, N) \\ C^*(B) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^*(A, End_{B^\circ} M) \\ C^*(A, End_{B^\circ} N) \\ C^*(B, End_{A^\circ} M) \\ C^*(B, End_{A^\circ} N) \end{array}$$

(la superposition encode une somme directe de complexes) ayant pour seules composantes éventuellement non nulles : α_M^* , α_N^* , β_M^* , β_N^* , $i_M^{A^*}$, $i_M^{B^\circ}$, $i_N^{A^*}$ et $i_N^{B^\circ}$. Notant $\mathcal{H}^*\{M, N\}$ la cohomologie du complexe $\mathcal{C}^*\{M, N\}$, nous obtenons la Proposition 1 avec 2.1.4. ■

La Proposition 2 suivante, alliée à la Proposition 1, prouve le Lemme 1 de §1.2.

2.2.8 Proposition 2. *Nous avons une suite exacte longue :*

$$(2.2.9) \quad \cdots \longrightarrow Ext_{A \otimes B^\circ}^{*-1}(M, M) \xrightarrow{\ell_{N, M}^*} \mathcal{H}^*\{M, N\} \xrightarrow{\rho_{N, M}^*} HH^*[{}_0^A N] \xrightarrow{\delta_{N, M}^*} Ext_{A \otimes B^\circ}^*(M, M) \longrightarrow \cdots$$

où $\ell_{N, M}^*$ est induit par $l_{M \oplus N}^*$ et $\rho_{N, M}^*$ (induit par $r_{M \oplus N}^*$) vérifie : $r_N^* \circ \rho_{N, M}^* = r_M^* \circ \rho_{M, N}^*$.

2.2.10 Preuve. Reprenons les notations de 2.2.4. Nous avons un morphisme de complexes $\rho_{N, M} : \mathcal{C}^*\{M, N\} \longrightarrow \mathcal{C}^*\{N\}$, défini de manière évidente en envoyant toutes les composantes décrites en 2.2.7 sur elles-mêmes, exceptées $C_{tri}^*(M)$, $C^*(A, End_{B^\circ} M)$ et $C^*(B, End_{A^\circ} M)$ sur lesquelles $\rho_{N, M}$ est nulle. Il s'agit d'un morphisme surjectif, de noyau Σ_M^* . De la suite exacte courte de complexes

$$(2.2.11) \quad 0 \longrightarrow \Sigma_M^* \xrightarrow{\ell_{N, M}^*} \mathcal{C}^*\{M, N\} \xrightarrow{\rho_{N, M}^*} \mathcal{C}^*\{N\} \longrightarrow 0 ,$$

on déduit la suite exacte longue 2.2.9 en homologie : $\delta_{N, M}^*$ est le connectant de 2.2.11. ■

L'intérêt essentiel des suites exactes longues 1.2.2 et 2.2.9 par rapport à 1.1.2 est que sous des hypothèses très naturelles, elles ont la vertu de se scinder en suites exactes courtes graduées.

§2.3 Preuve du Théorème 1 (cf. 1.2.3).

Donnons d'abord des critères (nécessaires à la preuve du Théorème 1) pour casser les suites exactes longues 1.2.2 et 2.2.9 en suites exactes courtes graduées.

2.3.1 Proposition 3. *Si M est (isomorphe à) un $A \otimes B^o$ -facteur direct de N , nous avons un isomorphisme de modules gradués :*

$$(2.3.2) \quad HH^* \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix} \cong HH^* \begin{bmatrix} A & N \\ 0 & B \end{bmatrix} \times Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(N, M) \times Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, M) \times Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, N) .$$

2.3.3 Preuve. Supposons que l'on ait $M = M' \oplus N$, pour des $A \otimes B^o$ -modules M' et N : nous avons une décomposition en somme directe de complexes

$$(2.3.4) \quad C^*\{M' \oplus N, N\} = \Sigma^*\{M', N\} \oplus C^*\{M', N, N\}$$

(même démonstration que celle pour la décomposition 2.2.6) où $C^*\{M', N, N\}$ est le cône du morphisme de complexes :

$$(2.3.5) \quad \begin{array}{ccc} C^*(A) & & C^*(A, End_{B^o} M') \\ C_{tri}^*(M', M') & \lambda_{M', N, N}^* \longrightarrow & C^*(A, End_{B^o} N) \\ C_{tri}^*(N, N) & & C^*(A, End_{B^o} N) \\ C_{tri}^*(N, N) & & C^*(B, End_A M') \\ C^*(B) & & C^*(B, End_A N) \\ & & C^*(B, End_A N) \end{array} ,$$

dont les composantes éventuellement non nulles sont les 12 morphismes naturels : $\alpha_{M'}^*$, 2 fois α_N^* (il y a 2 fois $C^*(A, End_{B^o} N)$), $i_{M'}^* = (i_{M'}^{A^*}, i_{M'}^{B^o*})$, 2 fois $i_N^* = (i_N^{A^*}, i_N^{B^o*})$ et, enfin, $\beta_{M'}^*$ et 2 fois β_N^* . La remarque que nous faisons est que la restriction $\rho_{M', N, N}^*$ du morphisme $\rho_{N, M' \oplus N}^*$ à $C^*\{M', N, N\}$ est encore surjectif (évident) et, plus encore, il existe un morphisme de complexes $\sigma_{M', N, N}^* : C^*\{M', N\} \longrightarrow C^*\{M', N, N\}$ tel que $\rho_{M', N, N}^* \circ \sigma_{M', N, N}^* = 1$, *i.e.* une section, définie de manière évidente (cf. 2.2.7 en remplaçant M par M') en envoyant sur eux-mêmes $C^*(A)$, $C^*(B)$, $C_{tri}^*(M', M')$, $C^*(A, End_{B^o} M')$ et $C^*(B, End_A M')$ et en envoyant $C_{tri}^*(N, N)$ (ainsi que $C^*(A, End_{B^o} N)$ et $C^*(B, End_A N)$) sur ses deux copies à l'aide du morphisme diagonal. ■

La Proposition 3 exprime l'exactitude et le scindage de la suite graduée (cf. 1.2.2) :

$$(2.3.6) \quad 0 \longrightarrow \begin{array}{c} Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(N, M) \\ Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, M) \\ Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, N) \end{array} \xrightarrow{l_{N, M}^*} HH^* \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{N, M}^*} HH^* \begin{bmatrix} A & N \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow 0 ,$$

impossible à obtenir avec 1.1.2 ($N=0$), à moins d'avoir la situation triviale ($M=0$).

L'énoncé suivant est un renforcement de la Proposition 3.

2.3.7 Proposition 4. *Si M est (isomorphe à) un $A \otimes B^o$ -facteur direct de N^m , pour un certain $m \in \mathbb{N}$, la suite graduée 2.3.6 est exacte et scindée.*

Une autre façon d'énoncer ce résultat est la suivante. Posons $A' = End_{A \otimes B^o} N$, ainsi N est un $A \otimes B^o \otimes A'$ -module. L'hypothèse sur M implique que $Hom_{A \otimes B^o}(N, M)$ est un $(A')^o$ -module projectif de type fini et, donc, que $M' = Hom_{A \otimes B^o}(N, M) \oplus A'$ est un $(A')^o$ -progénératuer. Réciproquement, tout $(A')^o$ -progénératuer de la forme $M' = M'' \oplus A'$, vérifie $M'' = Hom_{A \otimes B^o}(N, M)$ pour un certain facteur direct M de N^n (en fait, $M = M'' \otimes_{A'} N$, cf. [La], p.500). De là, la reformulation suivante de la Proposition 4, plus conceptuelle.

2.3.8 Proposition 4 (bis). *Pour tout $(A')^o$ -progénérateur de la forme $M' = M'' \oplus A'$, nous avons un isomorphisme gradué :*

$$(2.3.9) \quad \begin{aligned} HH^* \begin{bmatrix} A & M' \otimes_{A'} N \\ 0 & B \end{bmatrix} &\cong HH^* \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \times Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(N, N) \\ &\times Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(N, M'' \otimes_{A'} N) \times Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M'' \otimes_{A'} N, N) . \end{aligned}$$

2.3.10 Preuve de la Proposition 4. Nous avons un diagramme commutatif :

$$(2.3.11) \quad \begin{array}{ccc} HH^* \begin{bmatrix} A & M \oplus N^m \\ 0 & B \end{bmatrix} & \xrightarrow{r_{M \oplus N, N^{m-1}}^*} & HH^* \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix} \\ r_{N^m, M}^* \downarrow & & \downarrow r_{N, M}^* \\ HH^* \begin{bmatrix} A & N^m \\ 0 & B \end{bmatrix} & \xrightarrow{r_{N, N^{m-1}}^*} & HH^* \begin{bmatrix} A & N \\ 0 & B \end{bmatrix} \end{array} .$$

D'après 2.3.6, les morphismes $r_{N^m, M}^*$, $r_{M \oplus N, N^{m-1}}^*$ et $r_{N, N^{m-1}}^*$ sont surjectifs et admettent des sections. Nous en déduisons la même chose pour le morphisme $r_{N, M}^*$. ■

2.3.12 Preuve du Théorème 1. Avec les notations du Théorème 1, posons $M = \tilde{M} \oplus \tilde{N}$, avec $\tilde{M} = \oplus_i M_i^{m_i-1}$ et $\tilde{N} = \oplus_i M_i$ (possible si $m_i \geq 1$) ; ainsi \tilde{M} est un facteur direct de $\tilde{N}^{\tilde{m}}$ pour $\tilde{m} = \max_i \{m_i - 1\}$. Ainsi, la Proposition 4 assure l'exactitude et le scindage de 2.3.6 avec \tilde{M} et \tilde{N} à la place de M et N , c'est-à-dire l'exactitude et le scindage de 1.2.4. ■

Nous terminons ce paragraphe avec une “formule d'échange”, conséquence directe de la Proposition 4.

2.3.13 Proposition 5. *Pour deux $A \otimes B^o$ -modules M et N (K -projectifs), tels que M soit un facteur direct d'un N^m et N soit un facteur direct d'un M^n ($m, n \in \mathbf{N}$), nous avons :*

$$(2.3.14) \quad HH^* \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \times Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(N, N) \cong HH^* \begin{bmatrix} A & N \\ 0 & B \end{bmatrix} \times Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M, M) .$$

3. Second Théorème de Réduction

Dans cette section, nous montrons la suite exacte de Mayer-Vietoris (le Théorème 2 de §1.2). Dans §3.1, nous explicitons le complexe définissant la cohomologie modifiée \mathcal{H}^* et nous montrons le Lemme 2 et le Lemme 3 de §1.2. La suite exacte de mayer-Vietoris est obtenue dans §3.2, comme cas particulier d'un résultat plus général (Théorème 4), dont nous tirons d'autres conclusions intéressantes, telles les suites exactes 3.2.3 et 3.2.5.

§3.1 Cohomologie modifiée.

Soient deux algèbres A et B (K -modules projectifs) et soit une famille de $A \otimes B^o$ -modules (K -projectifs) $E = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ ($n \geq 0$) : nous leur associons une algèbre triangulaire $T_E = \begin{bmatrix} A & \bar{E} \\ 0 & B \end{bmatrix}$ ($\bar{E} = \oplus_i M_i$). Avec les notations de §2.1, introduisons le complexe

$$(3.1.1) \quad \Sigma^* E = \prod_{i \neq j} \Sigma_{M_i, M_j}^* .$$

($\Sigma^* \phi = 0$, par convention). Le module de cohomologie de $\Sigma^* E$ est donné en 2.1.4 :

$$(3.1.2) \quad H(\Sigma^* E) \cong \prod_{i \neq j} Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M_i, M_j) .$$

Aussi important est le morphisme de complexes :

$$(3.1.3) \quad C^*(A) \oplus \bigoplus_i C_{tri}^*(M_i) \oplus C^*(B) \xrightarrow{\lambda_E^*} \bigoplus_i C^*(A, End_{B^o} M_i) \oplus \bigoplus_i C^*(B, End_A M_i),$$

dont les seules composantes éventuellement non nulles sont représentées ci-dessous

$$(3.1.4) \quad \begin{array}{ccc} C^*(A) & \xrightarrow{\quad} & C^*(A, End_{B^o} M_1) \\ C_{tri}^*(M_1) & \xrightarrow{\quad} & C^*(A, End_{B^o} M_2) \\ C_{tri}^*(M_2) & \xrightarrow{\quad} & \vdots \\ \vdots & \xrightarrow{\quad} & C^*(A, End_{B^o} M_n) \\ \vdots & \xrightarrow{\quad} & C^*(B, End_A M_1) \\ C_{tri}^*(M_{n-1}) & \xrightarrow{\quad} & \vdots \\ C_{tri}^*(M_n) & \xrightarrow{\quad} & C^*(B, End_A M_{n-1}) \\ C^*(B) & \xrightarrow{\quad} & C^*(B, End_A M_n) \end{array}$$

Ce qui constitue un ensemble de $4n$ flèches : les n morphismes $\alpha_{M_i}^*$, les n morphismes $\beta_{M_i}^*$ et les n morphismes $i_{M_i}^* = (i_{M_i}^{A*}, i_{M_i}^{B^o*})$ (2 flèches par morphisme). Le morphisme λ_E^* généralise la Définition 3 ($E = \{M\}$ dans 2.1.6) et l'on retrouve 2.2.7 (*resp.* 2.3.5) comme cas particulier : $E = \{M, N\}$ (*resp.* $E = \{M', N, N\}$). La définition suivante est donc attendue.

3.1.5 Définition 4. Nous posons $\mathcal{C}^* E = \text{cône}(\lambda_E^*)$ et la cohomologie modifiée de T_E , notée $\mathcal{H}^* E$, est la cohomologie de cohomologie de $\mathcal{C}^* E$.

3.1.6 Preuve du Lemme 2 (cf. 1.2.5). Montrons que nous avons un isomorphisme de complexes $\mathcal{C}^* \{\bar{E}\} = \mathcal{C}^* E \oplus \Sigma^* E$; nous aurons ainsi, d'après 3.1.1, l'isomorphisme gradué du Lemme 2 :

$$(3.1.7) \quad HH^*(T_E) \cong \mathcal{H}^* E \oplus \prod_{i \neq j} Ext_{A \otimes B^o}^{*-1}(M_i, M_j) ,$$

ce qui assure la compatibilité des deux définitions, celle ci-dessus et la Définition 1 donnée dans §1.2. D'après 2.1.5, le complexe $\mathcal{C}^* \{\bar{E}\}$ est le cône du morphisme $\lambda_{\bar{E}}^*$ et nous avons des isomorphismes (décompositions de Peirce avec n idempotents) :

$$End_{B^o} \bar{E} = \prod_{i,j} Hom_{B^o}(M_i, M_j) \quad \text{et} \quad End_A \bar{E} = \prod_{i,j} Hom_A(M_i, M_j) .$$

Dans ces décompositions, les morphismes canoniques d'algèbres $\alpha_{\bar{E}}$ et $\beta_{\bar{E}}$ vérifient

$$Im \alpha_{\bar{E}} \subset \prod_i Hom_{B^o}(M_i, M_i) \quad \text{et} \quad Im \beta_{\bar{E}} \subset \prod_i Hom_A(M_i, M_i) .$$

Nous en déduisons la même chose aux niveaux des complexes de Hochschild :

$$Im \alpha_{\bar{E}}^* \subset \prod_i C^*(A, End_{B^\circ} M_i) \quad \text{et} \quad Im \beta_{\bar{E}}^* \subset \prod_i C^*(B, End_A M_i) .$$

Le morphisme $\alpha_{\bar{E}}^*$ (*resp.* $\beta_{\bar{E}}^*$) se réduit à ses composantes diagonales $\alpha_{M_i}^*$ (*resp.* $\beta_{M_i}^*$). Nous en déduisons que le sous-complexe de $\mathcal{C}^*\{\bar{E}\}$ formé des $C_{tri}^*(M_i, M_j)$, $C^*(A, Hom_{B^\circ}(M_i, M_j))$ et $C^*(B, Hom_A(M_i, M_j))$ ($i \neq j$), qui est naturellement isomorphe à $\Sigma^* E$, est un facteur direct de $\mathcal{C}^*\{\bar{E}\}$ et admet pour complexe supplémentaire le complexe $\mathcal{C}^* E$ défini en 3.1.5. ■

3.1.9 Preuve du Lemme 3 (cf. 1.2.7). Avec les notations précédentes, considérons une partie $F \subset E$. Il lui est associé un morphisme de complexes λ_F^* (3.1.3), un complexe $\mathcal{C}^* F$ et une cohomologie $\mathcal{H}^* F$ (3.1.5). D'après 3.1.4, le complexe $\mathcal{C}^* F$ est naturellement un quotient de $\mathcal{C}^* E$ (rarement un sous-complexe). Le noyau de la projection, formé des sous-modules $C_{tri}^*(L)$, $C^*(A, End_{B^\circ} L)$ et $C^*(B, End_A L)$ avec $L \in E \setminus F$, est un sous-complexe isomorphe à $\prod_{L \in E \setminus F} \Sigma_L^*$. Nous en déduisons une suite exacte courte de complexes :

$$(3.1.10) \quad 0 \longrightarrow \prod_{L \in E \setminus F} \Sigma_L^* \xrightarrow{\ell_{F,E}} \mathcal{C}^* E \xrightarrow{\rho_{F,E}} \mathcal{C}^* F \longrightarrow 0 ,$$

à l'origine de la suite exacte longue 1.2.8 ; $\delta_{F,E}^*$ est le morphisme connectant de la suite exacte courte 3.1.10. Notant que cette dernière est une sous-suite exacte courte de 2.2.11 (où l'on prend $N = \bar{F}$ et $M = \overline{E \setminus F}$), il est à présent clair que les morphismes $\ell_{F,E}^*$, $\rho_{F,E}^*$ et $\delta_{F,E}^*$ sont induits, respectivement, par $l_{\bar{F}, \bar{E}}^*$, $r_{\bar{F}, \bar{E}}^*$ et $d_{\bar{F}, \bar{E}}^*$ de 1.2.2. ■

3.1.11 Remarque. Pour $F \subset E$, notons que la projection $\rho_{F,E}$ possède une section canonique, *a priori* seulement linéaire, $\sigma_{E,F} : \mathcal{C}^* F \longrightarrow \mathcal{C}^* E$. Elle aussi est fonctorielle : $\sigma_{E,F} \circ \sigma_{F,G} = \sigma_{E,G}$, pour $G \subset F \subset E$, et, pour $F, G \subset E$ quelconques, nous avons :

$$(3.1.12) \quad \rho_{F,E} \circ \sigma_{E,G} = \sigma_{F,F \cap G} \circ \rho_{F \cap G, G} .$$

§3.2 Suite exacte de Mayer-Vietoris.

Soit $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, \dots, U_u\}$ un recouvrement de E (*i.e.* $\bigcup_i U_i = E$).

3.2.1 Théorème 4. Supposons $U_i \cap U_j \subset U_0$ si $i \neq j$; nous avons une suite exacte longue

$$(3.2.2) \quad \dots \longrightarrow \mathcal{H}^* E \xrightarrow{\rho_+^*} \prod_{i=0}^u \mathcal{H}^* U_i \xrightarrow{\rho_-^*} \prod_{i=1}^u \mathcal{H}^*(U_0 \cap U_i) \longrightarrow \mathcal{H}^{*+1} E \longrightarrow \dots$$

où $\rho_+^* = (\rho_{U_i, E}^*)_{0 \leq i \leq u}$ et $\rho_-^* = (\rho_{U_0 \cap U_i, U_0}^* - \rho_{U_0 \cap U_i, U_i}^*)_{1 \leq i \leq u}$.

À titre d'exemple ($U_0 = \{M_1\}$ et $U_i = \{M_1, M_{i+1}\}$ si $i > 1$), nous avons la suite exacte longue :

$$(3.2.3) \quad \dots \longrightarrow \frac{\prod_{i=2}^n Ext_{A \otimes B^\circ}^{*-1}(M_1, M_i)}{\mathcal{H}^* E} \longrightarrow \prod_{i=2}^n HH^*[{}^A M_1 \oplus {}^B M_i] \longrightarrow (HH^*[{}^A M_1 \oplus {}^B M_i])^{n-2} \longrightarrow \dots$$

D'autres cas particuliers méritent notre attention : si $u = 1$ on retrouve le Théorème 2 (Mayer-Vietoris) et, d'autre part, le cas suivant est important en pratique.

3.2.4 Corollaire 2. Si \mathcal{U} est une partition de E , nous avons une suite exacte longue :

$$(3.2.5) \quad \cdots \longrightarrow \mathcal{H}^*E \longrightarrow \prod_{i=0}^u \mathcal{H}^*U_i \longrightarrow (HH^*A \times HH^*B)^u \longrightarrow \mathcal{H}^{*+1}E \longrightarrow \cdots$$

3.2.6 Preuve du Théorème 4. Considérons le complexe $\prod_{i=0}^u \mathcal{C}^*U_i$: il est muni d'un morphisme canonique $\rho_+ : \mathcal{C}^*E \longrightarrow \prod_{i=0}^u \mathcal{C}^*U_i$ avec, pour composantes, les morphismes $\rho_{U_i,E}$ ($0 \leq i \leq u$) définis par 3.1.10. Le fait que \mathcal{U} soit un recouvrement assure l'injectivité de ρ_+ . Le morphisme ρ_- est fabriqué à partir des morphismes surjectifs $\rho_{U_0 \cap U_i, U_0}$ et $-\rho_{U_0 \cap U_i, U_i}$ ($i > 0$) selon le schéma d'assemblage suivant :

$$(3.2.7) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}^*U_0 & & \mathcal{C}^*U_1 & & \mathcal{C}^*U_2 & & \cdots & & \mathcal{C}^*U_u \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \vdots & \searrow & \downarrow \\ & \mathcal{C}^*(U_0 \cap U_1) & \mathcal{C}^*(U_0 \cap U_2) & \cdots & \mathcal{C}^*(U_0 \cap U_u) \end{array}$$

Ce qui prouve que ρ_- est surjectif. Montrons que nous avons $\text{Ker} \rho_- = \text{Im} \rho_+$: nous en déduirons une suite exacte courte de complexes à l'origine de la suite exacte longue 3.2.5. L'inclusion $\text{Im} \rho_+ \subset \text{Ker} \rho_-$ étant claire avec les formules de functorialité ($\rho_{U_0 \cap U_i, U_i} \circ \rho_{U_i, E} = \rho_{U_0 \cap U_i, E}$), montrons l'autre. Le morphisme ρ_- s'annule sur $\prod_i C_i \subset \prod_i \mathcal{C}^*U_i$, avec $C_i = \text{Ker} \rho_{U_0 \cap U_i, U_i}$ si $i > 0$ et $C_0 = \text{Ker} \rho_{U'_0, U_0}$, avec $U'_0 = U_0 \cap \bigcup_{j>0} U_j$ (pour ce dernier : $\rho_-(y_0, 0, \dots, 0) = \rho'_+(\rho_{U'_0, U_0}(y_0))$, où ρ'_+ est l'injection associée au recouvrement $\{U_0 \cap U_1, \dots, U_0 \cap U_u\}$ de U'_0). Nous avons aussi $\text{Ker} \rho_- = \prod_i C_i \oplus \text{Ker} \rho'_0$, où ρ'_- est induit par ρ_- (cf. 3.1.11) :

$$(3.2.8) \quad \text{Im} \sigma_{U_0, U'_0} \times \prod_{i>0} \text{Im} \sigma_{U_i, U_0 \cap U_i} \longrightarrow \prod_i \mathcal{C}^*(U_0 \cap U_i) .$$

D'une part, les images des C_i par les sections $\sigma_{U_i, E}$ sont disjointes puisque $U_i \cap U_j \subset U_0$ pour $i \neq j$ et nous en déduisons $\prod_i C_i \subset \text{Im} \rho_+$. D'autre part la restriction de ρ'_- à $\{0\} \times \prod_{i>0} \text{Im} \sigma_{U_i, U_0 \cap U_i}$ étant un isomorphisme, tout élément de $\text{Ker} \rho'_-$ s'écrit :

$$y = (\sigma_{U_0, U'_0} x, \sigma_{U_1, U_0 \cap U_1} \rho_{U_0 \cap U_1, U'_0} x, \sigma_{U_2, U_0 \cap U_2} \rho_{U_0 \cap U_2, U'_0} x, \dots, \sigma_{U_u, U_0 \cap U_u} \rho_{U_0 \cap U_u, U'_0} x) ,$$

avec $x \in \mathcal{C}^*U'_0$. Posant $z = \sigma_{E, U'_0} x$, nous obtenons $y = \rho^+(z)$ en appliquant la formule 3.1.12 à chacune des coordonnées de y . ■

4. L'Algèbre de Lie HH^1T

Pour deux algèbres A, B et un bimodule M , non supposés K -modules projectifs, nous étudions dans cette section l'algèbre de Lie $HH^1 \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ et son comportement relativement à une décomposition de M . Nous commençons par démontrer le Théorème 3 de §1.2 et, dans §4.2, nous donnons des conditions suffisantes pour l'obtention de la suite exacte 1.2.16.

§4.1 Preuve du Théorème 3 (cf. 1.2.13).

Pour toute K -algèbre T , nous savons qu'il y a un isomorphisme d'algèbres de Lie $HH^1T \cong \text{Der}(T)/\text{Int}(T)$, où $\text{Der}(T)$ est l'algèbre de Lie des K -dérivations D de T :

$$\forall k \in K, \forall t, t' \in T, D(tt') = D(t)t' + tD(t') \text{ et } D(kt) = kD(t)$$

et $\text{Int}(T)$ est l'idéal de Lie des "dérivations intérieures" $[t_0, \cdot]$, $t_0 \in T$ ($\forall t, [t_0, t] = t_0t - tt_0$).

Dans le cas de l'algèbre triangulaire, nous avons :

4.1.1 Lemme 4. Tout élément $D \in \text{Der} \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ est décrit par $\alpha \in \text{Der}(A)$, $\beta \in \text{Der}(B)$, $m_0 \in M$ et $\mu \in \text{End}_K(M) : \forall \begin{bmatrix} a & m \\ 0 & b \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $D \begin{bmatrix} a & m \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(a) & \mu(m) - am_0 + m_0b \\ 0 & \beta(b) \end{bmatrix}$. Ils vérifient :

$$(4.1.2) \quad \mu(am) = \alpha(a)m + a\mu(m) \quad \text{et} \quad \mu(mb) = \mu(m)b + m\beta(b) .$$

Nous noterons $D = \begin{bmatrix} \alpha & (\mu, m_0) \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.

4.1.3 Preuve. Il s'agit d'un simple (et long) calcul. Le traitement complet de l'équation $D(tt') = D(t)t' + tD(t')$ implique la résolution d'un système de 9 morphismes inconnus $D_{ij} : T_i \longrightarrow T_j$, où $T_1 = A$, $T_2 = M$, $T_3 = B$: voir, par exemple, [FM] (et aussi [Ch]). ■

Pour $\begin{bmatrix} a_0 & m_0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$, nous avons une dérivation (intérieure) $D = \begin{bmatrix} \alpha & (\mu, m_0) \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$:

$$(4.1.4) \quad D \begin{bmatrix} a & m \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_0, a] & a_0m - am_0 + m_0b - mb_0 \\ 0 & [b_0, b] \end{bmatrix} ,$$

i.e. : $\alpha = [a_0, \cdot]$ et $\beta = [b_0, \cdot]$ (dérivations intérieures) et $\mu(m) = a_0m - mb_0$, $m \in M$. Nous en déduisons une décomposition en somme directe :

$$(4.1.5) \quad \text{Int} \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \cong \left((ZA \times ZB) / \{(a, b) | \forall m \in M, am = mb\} \right) \oplus M ,$$

où M est isomorphe au sous-module $\{ \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \}$ des dérivations de la forme $\begin{bmatrix} 0 & (0, m_0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($m_0 \in M$). Le lemme suivant est le résultat d'un calcul direct.

4.1.6 Lemme 5. Pour deux dérivations $D_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & (\mu_0, m_0) \\ 0 & \beta_0 \end{bmatrix}$, $D_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & (\mu_1, m_1) \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix}$, nous avons :

$$(4.1.7) \quad [D_0, D_1] = \begin{bmatrix} [\alpha_0, \alpha_1] & ([\mu_0, \mu_1], \mu_0(m_1) - \mu_1(m_0)) \\ 0 & [\beta_0, \beta_1] \end{bmatrix} .$$

En particulier, $\{ \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \}$ est un idéal de Lie (abélien) de $\text{Der} \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$: $\text{Int}' \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} = \text{Int} \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} / \{ \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \}$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\text{Der}' \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} = \text{Der} \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} / \{ \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \}$ et nous avons un isomorphisme d'algèbres de Lie : $HH^1 \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} = \text{Der}' \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} / \text{Int}' \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$. La sous-algèbre de Lie de $\text{Der} \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ formée des éléments $D = \begin{bmatrix} \alpha & (\mu, 0) \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ est isomorphe à $\text{Der}' \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$: on écrira $D = \begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.

Soient à présent un second $A \otimes B^o$ -module N et une dérivation $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in \text{Der}' \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

4.1.8 Lemme 6. Les composantes $\mu \in \text{End}_K(M)$ et $\nu \in \text{End}_K(N)$ de γ , vérifient :

$$(4.1.9) \quad \begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in \text{Der}' \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \alpha & \nu \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in \text{Der}' \begin{bmatrix} A & N \\ 0 & B \end{bmatrix} ;$$

les composantes de γ “non diagonales” $M \rightarrow N$ et $N \rightarrow M$ sont des $A \otimes B^o$ -morphisms.

4.1.10 Preuve. C'est un simple calcul. ■

Nous en déduisons deux morphismes (non nécessairement morphismes d'algèbres de Lie) :

$$(4.1.11) \quad \begin{aligned} r'_{M,N} : \text{Der}' \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix} &\longrightarrow \text{Der}' \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} , & \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \beta \end{bmatrix} , \\ r'_{N,M} : \text{Der}' \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix} &\longrightarrow \text{Der}' \begin{bmatrix} A & N \\ 0 & B \end{bmatrix} , & \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} \alpha & \nu \\ 0 & \beta \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

vérifiant des relations de transitivité ($r'_{N,M}r'_{M \oplus N, L \oplus M \oplus N} = r'_{N, L \oplus M \oplus N} = r'_{N, L}r'_{N \oplus L, L \oplus M \oplus N}$). Puisque $r'_{M,N}(Int'[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}]) \subset Int'[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}])$ et $r'_{N,M}(Int'[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}]) \subset Int'[\begin{smallmatrix} A & N \\ 0 & B \end{smallmatrix}])$, ils définissent des morphismes (non morphismes d'algèbres de Lie *a priori*) :

$$(4.1.12) \quad r_{M,N}^1 : HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix}] \longrightarrow HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}] \quad \text{et} \quad r_{N,M}^1 : HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix}] \longrightarrow HH^1[\begin{smallmatrix} A & N \\ 0 & B \end{smallmatrix}] .$$

Du Lemme 5, nous déduisons une décomposition en somme directe :

$$Der'[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix}] = D'\{M, N\} \oplus D^o(M, N) \oplus D^o(N, M) ,$$

où $D'\{M, N\} = D'\{N, M\}$ est la sous-algèbre de Lie des éléments $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in Der'[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix}]$, tels que les composantes non diagonales de γ sont nulles et $D^o(M, N) \cong Hom_{A \otimes B^o}(M, N)$ (resp. $D^o(N, M) \cong Hom_{A \otimes B^o}(N, M)$) est l'idéal (abélien) formé des éléments $\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in Der'[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix}]$, où γ ne comporte au plus qu'une composante non nulle $M \longrightarrow N$ (resp. $N \longrightarrow M$). Notons que l'algèbre de Lie $D'\{M, N\}$ est aussi l'intersection de deux autres sous-algèbres de Lie (matrices "triangulaires" supérieures et inférieures) :

$$(4.1.13) \quad D'(M, N) = D'\{M, N\} \oplus D^o(M, N) \quad \text{et} \quad D'(N, M) = D'\{M, N\} \oplus D^o(N, M) .$$

4.1.14 Fin de la preuve du Théorème 3. Puisque $Int'[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix}] \subset D'\{M, N\}$, nous en déduisons les trois sous-algèbres de Lie de $HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix}]$ suivantes :

$$(4.1.15) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}^1\{M, N\} &= D'\{M, N\} / Int'[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix}] , \\ \mathcal{H}^1(M, N) &= \mathcal{H}^1\{M, N\} \oplus D^o(M, N) , \\ \mathcal{H}^1(N, M) &= \mathcal{H}^1\{M, N\} \oplus D^o(N, M) , \end{aligned}$$

vérifiant 1.2.14. Par restriction de $r'_{M,N}$, nous obtenons plusieurs morphismes

$$(4.1.16) \quad \begin{aligned} \rho'_{M, \{M, N\}} &: D'\{M, N\} \longrightarrow Der'[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}] , \\ \rho'_{M, (M, N)} &: D'(M, N) \longrightarrow Der'[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}] , \\ \rho'_{M, (N, M)} &: D'(N, M) \longrightarrow Der'[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}] , \end{aligned}$$

ayant même image que $r'_{M,N}$. D'après 4.1.7 et 4.1.13, il s'agit là de morphismes d'algèbres de Lie, dont nous déduisons les morphismes d'algèbres de Lie 1.2.15. ■

§4.2 Scindage de $HH^1\mathbf{T}$.

Soient deux algèbres A et B et soit un $A \otimes B^o$ -module M (nous ne supposons pas qu'ils sont K -projectifs). Nous notons $\delta[M]$ la sous-catégorie pleine des $A \otimes B^o$ -modules N , tels que $r_{M,N}^1 : HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{smallmatrix}] \longrightarrow HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}]$ (ou, de manière équivalente, le morphisme d'algèbres de Lie $\rho_{M, \{M, N\}}^1 : \mathcal{H}^1\{M, N\} \longrightarrow HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}]$) est surjectif (cf. 4.1.12 et 4.1.16).

Notons que si $HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}] = 0$, la catégorie $\delta[M]$ est celle de tous les $A \otimes B^o$ -modules. La transitivité de r^1 , encodée par la commutativité du diagramme

$$(4.2.1) \quad \begin{array}{ccc} HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \oplus M' \oplus M'' \\ 0 & B \end{smallmatrix}] & \longrightarrow & HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \oplus M' \\ 0 & B \end{smallmatrix}] \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \oplus M'' \\ 0 & B \end{smallmatrix}] & \longrightarrow & HH^1[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}] \end{array}$$

(pour des $A \otimes B^\circ$ -modules M' et M''), montre que nous avons :

$$(4.2.2) \quad M' \oplus M'' \in \delta[M] \implies M' \in \delta[M] \text{ et } M'' \in \delta[M] ,$$

i.e. $\delta[M]$ est stable par facteur direct.

4.2.3 Théorème 5. $N \in \delta[M]$ si et seulement si, pour tous $\alpha \in \text{Der}(A)$ et $\beta \in \text{Der}(B)$, nous avons : s'il existe $\mu \in \text{End}_K(M)$ vérifiant 4.1.2, il existe $\nu \in \text{End}_K(N)$ vérifiant 4.1.2. Auquel cas, nous avons une suite exacte (dont 1.2.16 se déduit) :

$$0 \longrightarrow Z \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{M,N}^0} Z \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\text{Hom}_{A \otimes B^\circ}(M, N)}{\text{Hom}_{A \otimes B^\circ}(N, M)} \longrightarrow HH^1 \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{M,N}^1} HH^1 \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow 0.$$

Nous en déduisons les deux exemples suivants :

$$(4.2.4) \quad M \in \delta[M] \quad \text{et} \quad A \otimes B^\circ \in \delta[M] .$$

Le premier est (à présent) trivial et, pour $N = A \otimes B^\circ$ et tout $\mu, \nu = \alpha \otimes id + id \otimes \beta$ convient.

4.2.5 Preuve. D'après 4.1.5, nous avons une surjection $\tilde{\rho}_{M, \{M, N\}} : \text{Int}' \begin{bmatrix} A & M \oplus N \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Int}' \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}$ (induite par $\rho'_{M, \{M, N\}}$, cf. 4.1.16). Nous en déduisons un isomorphisme (lemme du serpent) :

$$\text{Coker } \rho'_{M, \{M, N\}} \cong \text{Coker } \rho_{M, \{M, N\}}^1 .$$

En particulier : nous avons $N \in \delta[M]$ si et seulement si $\rho'_{M, \{M, N\}}$ est surjectif. Le théorème se déduit alors de 4.1.15 (avec N à la place de M) et de la suite exacte :

$$(4.2.6) \quad 0 \longrightarrow \text{End}_{A \otimes B^\circ} N \longrightarrow D' \{M, N\} \xrightarrow{\rho'_{M, \{M, N\}}} \text{Der}' \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \\ \nu' \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & \gamma' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où $\gamma' \in \text{End}_K(M \oplus N)$ admet ν' pour seule composante éventuellement non nulle. ■

Les exemples 4.2.4 servent de briques de base pour les constructions d'objets de $\delta[M]$ plus compliqués, définies par les corollaires suivants.

4.2.7 Corollaire 3. Pour tout $A \otimes B^\circ$ -module N , nous avons :

$$(4.2.8) \quad N \in \delta[M] \implies (\delta[N] \subset \delta[M] \text{ et } \delta[M] = \delta[M \oplus N]) .$$

En particulier $\delta[0] \subset \delta[M]$ et, pour tout $N \in \delta[0]$, nous avons $\delta[N] = \delta[0]$.

4.2.9 Corollaire 4. Pour toute famille $N_\lambda \in \delta[M]$, $\lambda \in \Lambda$, nous avons :

$$(4.2.10) \quad \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \in \delta[M] \quad \text{et} \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \in \delta[M] .$$

Donc, pour tout cardinal m (même infini), nous avons $M^m \in \delta[M]$ et $M^{(m)} \in \delta[M]$: c'est une généralisation de 1.3.2 (pour $*$ = 1). Nous avons aussi $(A \otimes B^\circ)^{(m)} \in \delta[M]$: avec 4.2.2, ceci prouve que tout $A \otimes B^\circ$ -module projectif est objet de $\delta[M]$. Si nous disposions de l'hypothèse de projectivité pour A et B , alors tout $A \otimes B^\circ$ -module (K -projectif) N tel que $\text{Ext}_{A \otimes B^\circ}^1(N, N) = 0$ (en particulier un $A \otimes B^\circ$ -module injectif) vérifierait $N \in \delta[0]$ d'après 1.1.2 et, en particulier, $N \in \delta[M]$ (cf. aussi 2.2.9).

4.2.11 Corollaire 5. Soit un morphisme d'algèbres $C \longrightarrow \text{End}_{A \otimes B^o} M$ (i.e., M est muni d'une structure de $A \otimes B^o \otimes C$ -module). Pour tout C^o -module X et tout C -module Y :

$$(4.2.12) \quad X \otimes_C M \in \delta[M] \quad \text{et} \quad \text{Hom}_C(Y, M) \in \delta[M] .$$

De même, nous avons : $\text{Tor}_i^C(X, M) \in \delta[M]$ et $\text{Ext}_C^i(Y, M) \in \delta[M]$, $i > 0$.

5. Références Bibliographiques

- [ARS] M. Auslander, I. Reiten & S.O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge studies in advanced mathematics 36. Cambridge university press, 1995.
- [BG1] B. Bendiffalah & D. Guin, *Cohomologie de diagrammes d'algèbres triangulaires*. Boletín de la Academia Nacional de Ciencias. Córdoba, Argentina 65, pp.61–71, 2000.
- [BG2] B. Bendiffalah & D. Guin, *Cohomologie de l'algèbre triangulaire et applications*. Journal of Algebra 282, pp.513–537, 2004.
- [CE] H. Cartan & S. Eilenberg, *Homological Algebra*. Princeton Mathematical Series, Princeton university press, 1956.
- [Ch] W-S. Cheung, *Lie derivations of triangular algebras*. Linear and Multilinear Algebra 51-3, pp.299–310, 2003.
- [Ci] C. Cibils, *Tensor Hochschild homology and cohomology*. Lecture Notes in Applied and Pure Mathematics, Vol. 210, pp.35–51, 2000.
- [FM] B.E. Forrest & L.W. Marcoux, *Derivations of triangular Banach algebras*. Indiana Univ. Math. Jour. 45-2, pp.441–462, 1996.
- [GMS] E.L. Green, E.N. Marcos & N. Snashall, *The Hochschild cohomology ring of a one point extension*. Communication in Algebra 31-1, pp.357–379, 2003.
- [GS] E.L. Green & Ø. Solberg, *Hochschild cohomology rings and triangular rings*. Beijing Norm. Univ. Press, Representations of algebras I & II, pp.192–200, 2002.
- [GG] J.A. Guccione & J.J. Guccione, *Hochschild cohomology of triangular matrix algebras*. ArXiv : math.KT/0104068v2, 2001.
- [GAS] F. Guil-Asensio & M. Saorín, *The automorphism group and the Picard group of a monomial algebra*. Communication in Algebra 27-2, pp.857–887, 1999.
- [Hap] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite dimensional algebras*. Springer Lecture Notes in Math. 1404, pp.108–126, 1989.
- [Har] M. Harada, *Hereditary semi-primary rings and tri-angular matrix rings*. Nagoya Math. J. 27, pp.463–484, 1966.
- [K] B. Keller, *Derived invariance of higher structures on the Hochschild complex*. Preprint, 2003.
- [La] T.Y. Lam, *Lectures on modules and rings*. Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag New-York, 1999.
- [Lo] J-L. Loday, *Cyclic Homology*, Second Edition. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [MP] S. Michelena & M. I. Platzcek, *Hochschild Cohomology of Triangular Matrix Algebra*. Journal of Algebra, Vol.233, pp.502–525, 2000.
- [M] B. Mitchell, *Theory of categories*. Pure and Applied Mathematics XVII. Academic Press, New York-London, 1965.
- [S] C. Strametz, *The Lie algebra structure of the first Hochschild cohomology group for monomial algebras*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 334-9, pp.733–738, 2002.