HAL open science

Complexe canonique de deuxième espèce, variété commutante et bicône nilpotent d'une algèbre de Lie réductive.

Jean-Yves Charbonnel

To cite this version:

Jean-Yves Charbonnel. Complexe canonique de deuxième espèce, variété commutante et bicône nilpotent d'une algèbre de Lie réductive.. 2005. hal-00008623

HAL Id: hal-00008623

https://hal.science/hal-00008623

Preprint submitted on 12 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Version révisée le 13 Septembre 2005

ccsd-00008623, version 1 - 12 Sep 2005

Complexe canonique de deuxième espèce, variété commutante et bicône nilpotent d'une algèbre de Lie réductive.

Jean-Yves CHARBONNEL

Université Paris 7 - CNRS

Abstract. Let $\mathfrak{g}$ be a finite dimensional complex reductive Lie algebra and $\langle .,. \rangle$ an invariant non degenerated bilinear form on $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ which extends the Killing form of $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. We define a subcomplex $E_\bullet(\mathfrak{g})$ of the canonical complex $C_\bullet(\mathfrak{g})$ of $\mathfrak{g}$. The space of $C_\bullet(\mathfrak{g})$ is the algebra $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge(\mathfrak{g})$ where $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ and $\bigwedge(\mathfrak{g})$ are the symmetric and exterior algebras of $\mathfrak{g}$ and its differential is the $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$-derivation which associates to the element v of $\mathfrak{g}$ the function $(x, y) \mapsto \langle v, [x, y] \rangle$ on $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. There exists a well defined sub-$\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module $B_\mathfrak{g}$ of $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ which is free of rank equal to the dimension $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ of the borel subalgebras of $\mathfrak{g}$. Moreover, $B_\mathfrak{g}$ is contained in the space of cycles of $C_\bullet(\mathfrak{g})$. The complex $E_\bullet(\mathfrak{g})$ is the ideal of $C_\bullet(\mathfrak{g})$ generated by $\bigwedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(B_\mathfrak{g})$. We denote by $\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ the set of elements in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ whose components generate a subsbspace contained in the nilpotent cone of $\mathfrak{g}$ and we say that $\mathfrak{g}$ has property $(\mathbf{N})$ if the codimension of $\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ is strictly bigger than $\mathrm{b}_\mathfrak{g} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$. Let $I_\mathfrak{g}$ be the ideal in $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ generated by the functions $(x, y) \mapsto \langle v, [x, y] \rangle$ where v is in $\mathfrak{g}$ and $\sqrt{I_\mathfrak{g}}$ its radical. The main result is the theorem:

Let us suppose that for any semi-simple element in $\mathfrak{g}$, the simple factors of its centralizer in $\mathfrak{g}$ have the property $(\mathbf{N})$. Then the complex $E_\bullet(\mathfrak{g})$ has no homology in degree different from $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ and $\sqrt{I_\mathfrak{g}} \bigwedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(B_\mathfrak{g})$ is contained in the space of boundaries of degree $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ of $E_\bullet(\mathfrak{g})$. In particular, $I_\mathfrak{g}$ is a prime ideal whose set of zeros in $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ is the commuting variety of $\mathfrak{g}$.

1. Introduction.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive complexe de dimension finie, $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ et $\bigwedge(\mathfrak{g})$ les algèbres symétrique et extérieure de $\mathfrak{g}$. La représentation coadjointe de $\mathfrak{g}$ s'identifie à sa représentation adjointe au moyen d'une forme bilinéaire symétrique invariante, non dégénérée, $\langle .,. \rangle$ qui prolonge la forme de Killing de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. On appelle variété commutante de $\mathfrak{g}$ la sous-variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ des points (x, y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tels que $[x, y]$ soit nul. La variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ est alors la variété des zéros de l'idéal $I_\mathfrak{g}$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ engendré par les fonctions $(x, y) \mapsto \langle v, [x, y] \rangle$ où v est dans $\mathfrak{g}$. D'après [17], la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ est irréductible. La question de savoir si $I_\mathfrak{g}$ est un idéal premier s'était posée depuis plusieurs années. Elle est la principale motivation de ce mémoire. D'après le résultat de R. W. Richardson, il s'agit en fait de savoir si l'idéal $I_\mathfrak{g}$ est radiciel. Une réponse partielle avait été donnée par J. Dixmier dans [6]. Il y démontre qu'un champ de vecteurs polynomial sur $\mathfrak{g}$, tangent aux orbites adjointes, est du type $x \mapsto [x, \varphi(x)]$ où φ est une application polynomiale de $\mathfrak{g}$

dans $\mathfrak{g}$. Cela revient à dire que l'égalité de $I_{\mathfrak{g}}$ et de son radical $\sqrt{I_{\mathfrak{g}}}$ est satisfaite en degré 1. Très récemment, W. L. Gan et V. Ginzburg ont montré dans [7] que le sous-espace des éléments $\mathfrak{g}$-invariants de $I_{\mathfrak{g}}$ est un idéal radiciel de l'algèbre des éléments $\mathfrak{g}$-invariants de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}$ simple de type A. En s'inspirant de la méthode utilisée par J. Dixmier dans [6], on introduit dans [4] le complexe canonique $C_\bullet(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et on montre qu'il n'a pas d'homologie en degré strictement supérieur au rang $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$. L'espace sous-jacent à $C_\bullet(\mathfrak{g})$ est l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(\mathfrak{g})$ et sa différentielle est la dérivation $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$-linéaire qui à l'élément v de $\mathfrak{g}$ associe la fonction $(x, y) \mapsto \langle v, [x, y]\rangle$ sur $\mathfrak{g}$.

On appelle *sous-module caractéristique* pour $\mathfrak{g}$ le sous-module $B_{\mathfrak{g}}$ des éléments φ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ qui ont la propriété suivante : pour tout (x, y) dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, $\varphi(x, y)$ appartient à la somme des centralisateurs dans $\mathfrak{g}$ des éléments non nuls du sous-espace engendré par x et y. Le module $B_{\mathfrak{g}}$ a trois propriétés remarquables :

1) $B_{\mathfrak{g}}$ est un module libre de rang $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ égal à la dimension des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$,

2) $B_{\mathfrak{g}}$ est contenu dans l'espace des cycles du complexe $C_\bullet(\mathfrak{g})$,

3) pour toute sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ et pour tout φ dans $B_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{p}$ contient $\varphi(x, y)$ pour tout (x, y) dans $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$.

Ce module avait été étudié en [5] mais introduit de façon différente. En particulier, on doit à M. Raïs le fait que $B_{\mathfrak{g}}$ est libre de rang $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$. Il résulte de la propriété (2) que l'idéal $E_\bullet(\mathfrak{g})$ de $C_\bullet(\mathfrak{g})$, engendré par $\wedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$, est un sous-complexe de $C_\bullet(\mathfrak{g})$. On l'appelle *complexe canonique de deuxième espèce* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $X_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tels que l'image de $B_{\mathfrak{g}}$ par l'application $\varphi \mapsto \varphi(x, y)$ soit de dimension strictement inférieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$.

Définition. Soit $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tels que le sous-espace engendré par x et y soit contenu dans le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. On dira que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{N})$ si la codimension de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est strictement supérieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.

Le sous-ensemble $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est la variété des zéros communs à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}} + \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$; donc la codimension de chacune de ses composantes irréductibles est inférieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}+\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$. Le résultat principal de ce mémoire est le théorème :

Théorème. *On suppose que les facteurs simples du centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de tout élément semi-simple de $\mathfrak{g}$ ont la propriété $(\mathbf{N})$. Soient $J_{\mathfrak{g}}$ le radical de $I_{\mathfrak{g}}$ et $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ le sous-complexe de $E_\bullet(\mathfrak{g})$ tel que $E_j(\mathfrak{g})$ soit égal à $\overline{E}_j(\mathfrak{g})$ pour j différent de $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ et tel que $\overline{E}_{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{g})$ soit égal à $J_{\mathfrak{g}} \wedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$.*

i) *Le complexe $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ est acyclique.*

ii) *L'idéal $I_{\mathfrak{g}}$ est premier.*

iii) *Le complexe $E_\bullet(\mathfrak{g})$ n'a pas d'homologie en degré différent de $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ et son homologie est isomorphe à l'algèbre des fonctions régulières sur la variété commutante de $\mathfrak{g}$.*

Puisque la variété commutante $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ est irréductible, les assertions (ii) et (iii) résultent de l'assertion (i) car $I_{\mathfrak{g}} \wedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$ est l'espace des bords de degré $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ de $E_\bullet(\mathfrak{g})$ et de $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$. En utilisant les résultats de cohomologie à support qui sont rappelés dans [4], il résulte du théorème suivant :

Théorème. *On suppose que les facteurs simples de $\mathfrak{g}$ ont la propriété* (**N**). *Alors pour tout entier naturel k, la dimension projective de $\wedge^k(\mathfrak{g}) \wedge \wedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$ est inférieure à k.*

que le complexe $E_\bullet(\mathfrak{g})$ n'a pas d'homologie en degré différent de $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$. On précise à ce propos que cette argumentation généralise l'argumentation de J. Dixmier dans [6]. Un raisonnement par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ montre que la projection sur $\mathfrak{g}$ du support dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ du quotient $J_{\mathfrak{g}}/I_{\mathfrak{g}}$ ne contient pas d'élément semi-simple non central. Il en résulte que la dimension de ce support est inférieure à $\dim \mathfrak{g}$; donc par les arguments ci-dessus, $J_{\mathfrak{g}}$ est égal à $I_{\mathfrak{g}}$. Le deuxième théorème est une conséquence simple du cas des algèbres de Lie simples. Pour $\mathfrak{g}$ simple, on introduit un complexe de cohomologie $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ dont le terme de plus haut degré est le module $\wedge^k(\mathfrak{g}) \wedge \wedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$. Un raisonnement par récurrence sur k montre que l'exactitude de ces complexes pour $k = 0, \ldots, \mathrm{b}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ donne le théorème ci-dessus. Il est facile de voir que $X_{\mathfrak{g}}$ contient le support de la cohomologie de ces complexes. En outre, d'après la propriété (3) pour le module $B_{\mathfrak{g}}$, le support de la cohomologie de ces complexes ne rencontre pas une partie $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ définie au moyen des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ dont les facteurs réductifs ont une algèbre de Lie dérivée simple.

Définition. Pour $\mathfrak{g}$ simple, on dira que $\mathfrak{g}$ a la propriété (**D**) si toute partie fermée irréductible de $X_{\mathfrak{g}}$, invariante pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, de codimension inférieure à $\dim \mathfrak{g} - 4$, qui ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$, est contenue dans la réunion de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ et de la sous-variété $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ des éléments (x, y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tels que x et y appartiennent à une même sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$.

Par définition, la variété d'incidence de $\mathfrak{g}$ est la sous-variété des éléments (u, x, y) où u est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et où (x, y) est un élément de $u \times u$. La variété d'incidence est introduite dans [9]. On rappelle que dans [9] est donnée une démonstration simple de l'irréductibilité de la variété commutante de $\mathfrak{g}$. Par des arguments de cohomologie à support, l'exactitude des complexes $D_k^\bullet(\mathfrak{g})$ résulte des propriétés (**D**) et (**N**) pour $\mathfrak{g}$. En remarquant que $X_{\mathfrak{g}}$ ne contient pas d'élément (x, y) de $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ tel que x et y soient des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$, respectivement nilpotent et semi-simple, on montre la propriété (**D**).

Dans ce mémoire, le corps de base est le corps des nombres complexes, les espaces vectoriels et les algèbres de Lie considérés sont de dimension finie. On désigne par $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive, par G son groupe adjoint, par $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ son rang, par $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ la dimension des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ et par $\langle .,. \rangle$ une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée $\mathfrak{g}$-invariante sur $\mathfrak{g}$ qui prolonge la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On identifie $\mathfrak{g}$ à son dual au moyen de $\langle .,. \rangle$. Si V est un espace vectoriel, V^* désigne son dual. Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie et si $\mathfrak{m}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{m}(x)$ le sous-espace des éléments de $\mathfrak{m}$ qui centralisent l'élément x de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}(x')$ le sous-espace des éléments de $\mathfrak{m}$ qui stabilisent la forme linéaire x' sur $\mathfrak{a}$ pour l'action coadjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}^*$. On utilise la topologie de Zariski sur les variétés algébriques considérées. Si X est une variété algébrique,

$\mathcal{O}_X$ désigne le faisceau structural de X et $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local au point x de X. Sauf mention contraire, un point de X est un point fermé. On appelle *grand ouvert* de X, tout ouvert dont le complémentaire est de codimension supérieure à 2. Conformément à l'usage, pour tout ouvert Y de X et pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X, $\Gamma(Y,\mathcal{F})$ désigne l'espace des sections de $\mathcal{F}$ au dessus de Y. La suite de ce mémoire se divise en 10 sections :

2) dimension projective et cohomologie,

3) sur les idéaux,

4) exemples de complexes,

5) sous-module caractéristique,

6) complexes canoniques d'une algèbre de Lie,

7) au voisinage d'un élément semi-simple,

8) sur certaines sous-variétés de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$,

9) définition de la propriété $(\mathbf{D})$,

10) théorème d'exactitude et idéaux premiers,

11) la propriété $(\mathbf{D})$ pour les algèbres de Lie simples.

2. Dimension projective et cohomologie.

On rappelle dans cette section quelques résultats classiques. Soient X une variété algébrique affine, de Cohen-Macaulay et $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des fonctions régulières sur X. On note U un ouvert de X, S le complémentaire de U dans X et p la codimension de S dans X. Soient $P_\bullet$ un complexe de $\mathbb{C}[X]$-modules projectifs de type fini, de longueur finie l, et ε un morphisme d'augmentation du complexe $P_\bullet$ d'image R, d'où un complexe augmenté de modules :

$$0 \xrightarrow{\mathrm{d}} P_l \xrightarrow{\mathrm{d}} P_{l-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \to 0 \ .$$

Proposition 2.1. *Soient P un module projectif et R' un sous-module de P. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *p est strictement supérieur à $l+1$,*

2) *X est normal,*

3) *S contient le support de l'homologie du complexe augmenté $P_\bullet$,*

4) *R' contient R et S contient le support dans X du quotient des modules R' et R.*

Alors R' est égal à R et $P_\bullet$ est une résolution projective de R de longueur l.

Corollaire 2.2. *Soient d un entier naturel et $\mathcal{C}_\bullet$ un complexe d'homologie de $\mathbb{C}[X]$-modules de type fini de longueur l. On suppose que les trois conditions suivantes sont réalisées :*

1) *X est normal et S contient le support de l'homologie du complexe $C_\bullet$,*

2) *pour tout entier naturel i, C_i est un sous-module d'un module libre,*

3) *pour tout entier strictement positif i, la dimension projective de C_i est inférieure à $i+d$.*

Pour j entier naturel inférieur à l, on désigne par Z_j l'espace des cycles de degré j du complexe $C_\bullet$. Si p est strictement supérieur à $2l+d$, alors le complexe $C_\bullet$ est acyclique. En outre, la dimension projective de Z_j est inférieure à $2l+d-j-1$.

Des démonstrations de ces énoncés sont données dans [4](Section 2).

Lemme 2.3. i) *Soit*

$$0 \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathbb{C}[X]$-modules. On suppose que la dimension projective des modules E_0 et E_1 est inférieure à l'entier naturel d. Alors la dimension projective de E_2 est inférieure à $d+1$.

ii) *Soit*

$$0 \to E_{-1} \to E_0 \to \cdots \to E_{l+1} \to 0$$

une suite exacte de $\mathbb{C}[X]$-modules. On suppose que E_{-1} est un module libre et que pour $i = 0, \ldots, l$, la dimension projective de E_i est inférieure à i. Alors la dimension projective de E_{l+1} est inférieure à $l+1$.

Démonstration. i) Soit M un $\mathbb{C}[X]$-module. Il s'agit de montrer que le groupe $\mathrm{Ext}^j(E_2, M)$ est nul pour j strictement supérieur à $d+1$. De la suite exacte courte, on déduit la longue suite exacte

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^j(E_1, M) \to \mathrm{Ext}^j(E_0, M) \to \mathrm{Ext}^{j+1}(E_2, M) \to \mathrm{Ext}^{j+1}(E_1, M) \to \cdots .$$

D'après l'hypothèse, les groupes $\mathrm{Ext}^j(E_1, M)$, $\mathrm{Ext}^j(E_0, M)$, $\mathrm{Ext}^{j+1}(E_1, M)$ sont nuls pour j strictement supérieur à d ; donc $\mathrm{Ext}^{j+1}(E_2, M)$ est nul pour j strictement supérieur à d, d'où l'assertion.

ii) Pour $i = 0, \ldots, l$, on note Z_i l'image de E_{i-1} dans E_i. On montre en raisonnant par récurrence sur i que la dimension projective de Z_i est inférieure à i. Pour $i = 0$, Z_i est isomorphe à E_{-1}. On suppose l'assertion vraie pour i. D'après l'exactitude de la suite, on a la suite exacte courte

$$0 \to Z_i \to E_i \to Z_{i+1} \to 0\,;$$

or par hypothèse, la dimension projective de E_i est inférieure à i ; donc d'après l'hypothèse de récurrence et l'assertion (i), la dimension projective de Z_{i+1} est inférieure à $i+1$. D'après l'exactitude de la suite, on a la suite exacte courte

$$0 \to Z_l \to E_l \to E_{l+1} \to 0\,;$$

or par hypothèse, la dimension projective de E_l est inférieure à l ; donc d'après l'assertion (i), la dimension projective de E_{l+1} est inférieure à $l+1$. ■

Corollaire 2.4. *Soit $\mathcal{C}^\bullet$ un complexe de cohomologie de $\mathbb{C}[X]$-modules de type fini,*

$$0 \to C^{-1} \to C^0 \to \cdots \to C^l \to 0 \ .$$

On suppose que les trois conditions suivantes sont réalisées :

1) *X est normal et S contient le support de la cohomologie du complexe $C^\bullet$,*

2) *pour tout entier naturel i, C^i est un sous-module d'un module libre,*

3) *C^{-1} est un module libre,*

3) *pour tout entier i strictement inférieur à l, la dimension projective de C^i est inférieure à i.*

Pour j entier naturel inférieur à l, on désigne par Z^j l'espace des cocycles de degré j du complexe $C^\bullet$. Si p est strictement supérieur à $l+1$, alors le complexe $C^\bullet$ est acyclique. En outre, la dimension projective de Z^j est inférieure à j.

Démonstration. D'après le lemme 2.3, il s'agit de montrer que le complexe $C^\bullet$ est acyclique. On montre en raisonnant par récurrence sur j que pour $j = 0, \ldots, l$, Z^j est l'espace des cobords de degré j du complexe $C^\bullet$. L'espace B^0 des cobords de degré 0 de $C^\bullet$ étant isomorphe à C^{-1}, B^0 est égal à Z^0 car C^0 est un module sans torsion et U est partout dense dans X comme grand ouvert de la variété de Cohen-Macaulay X. En outre, toute section au dessus de U de la localisation sur X d'un $\mathbb{C}[X]$-module libre est la restriction à U d'un élément de ce module car X est une variété normale. On suppose que Z^j est l'espace des cobords de degré j du complexe $C^\bullet$. Alors la dimension projective de Z^j est inférieure à j ; or par hypothèse, la dimension projective de C^j est inférieure à j ; donc en désignant par B^{j+1} l'espace des cobords de degré $j+1$ du complexe $C^\bullet$, on a un complexe acyclique

$$0 \to P_j \to P_{j-1} \oplus Q_j \to \cdots \to P_0 \oplus Q_1 \to Q_0 \to B^{j+1} \to 0 \ ,$$

où les complexes

$$0 \to P_j \to P_{j-1} \to \cdots \to P_0 \to Z^j \to 0 \ ,$$

$$0 \to Q_j \to \cdots \to Q_0 \to C^j \to 0 \ ,$$

sont des résolutions projectives. Puisque $j+1$ est strictement inférieur à p, il résulte de la proposition 2.1 que Z^{j+1} est égal à B^{j+1} car d'après la condition (1), S contient le support du quotient des modules Z^{j+1} et B^{j+1}. ■

3. Sur les idéaux.

Soient X une variété algébrique affine lisse, Y une variété algébrique lisse et π un morphisme lisse de Y sur X.

Lemme 3.1. *Soit I un idéal de $\mathbb{C}[X]$ et J son radical. On désigne par $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ les localisations respectives sur X de I et de J.*

i) *L'idéal $\pi^*(\mathcal{J})$ de $\mathcal{O}_Y$ est le radical de $\pi^*(\mathcal{I})$.*

ii) *Si $\pi^*(\mathcal{I})$ est un idéal radiciel, alors I est un idéal radiciel.*

Démonstration. i) Le morphisme π étant lisse, les morphismes canoniques de $\pi^*(\mathcal{I})$ et de $\pi^*(\mathcal{J})$ dans $\mathcal{O}_Y$ sont des plongements ; donc $\pi^*(\mathcal{I})$ et $\pi^*(\mathcal{J})$ s'identifient à des idéaux de $\mathcal{O}_Y$. Soient x un point de X et y un point de la préimage de x dans Y. On note respectivement $\mathcal{I}_x$, $\mathcal{J}_x$ les fibres de $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ en x et $\pi^*(\mathcal{I})_y$, $\pi^*(\mathcal{J})_y$ les fibres de $\pi^*(\mathcal{I})$, $\pi^*(\mathcal{J})$ en y. Soit $x_1,\ldots,x_m$ un système de coordonnées de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. On identifie l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ à un sous-anneau de l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$ au moyen du comorphisme de π. Puisque π est un morphisme lisse, le système de coordonnées $x_1,\ldots,x_m$ se complète en un système $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n$ de coordonnées de l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$. On note $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ le complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ pour la topologie $\mathfrak{m}_x$-adique, $\mathfrak{m}_y$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,y}$, $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ le complété de $\mathcal{O}_{Y,y}$ pour la topologie $\mathfrak{m}_y$-adique. Puisque Y est lisse en y, le morphisme canonique de l'anneau de séries formelles $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n]]$ dans $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ est un isomorphisme. En outre, l'image du sous-anneau $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_m]]$ est égale à $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$.

Puisque J est le radical de I, $\pi^*(\mathcal{J})$ est contenu dans le radical de $\pi^*(\mathcal{I})$. Vu l'arbitraire du point x de X et du point y de la fibre de π en x, il s'agit de montrer que $\pi^*(\mathcal{J})_y$ contient le radical de $\pi^*(\mathcal{I})_y$. Puisque $\pi^*(\mathcal{J})_y$ est contenu dans le radical de $\pi^*(\mathcal{I})_y$, il suffit de montrer que $\widehat{\pi^*(\mathcal{J})_y}$ contient le radical de $\widehat{\pi^*(\mathcal{I})_y}$ car $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{Y,y}$. D'après ce qui précède, on a

$$\widehat{\pi^*(\mathcal{I})_y} = \mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n]] \otimes_{\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_m]]} \widehat{\mathcal{I}_x}$$

$$\text{et } \widehat{\pi^*(\mathcal{J})_y} = \mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n]] \otimes_{\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_m]]} \widehat{\mathcal{J}_x}\ .$$

Puisque J est le radical de I, $\mathcal{J}_x$ est le radical de $\mathcal{I}_x$. Soient $P_1,\ldots,P_m$ les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ qui contiennent $\mathcal{J}_x$. Puisque $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est une extension plate de $\mathcal{O}_{X,x}$, $\widehat{\mathcal{J}_x}$ est l'intersection des adhérences dans $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ des idéaux premiers $P_1,\ldots,P_m$; or d'après [14](Theorem 36.4 and Theorem 36.5), pour $i=1,\ldots,m$, l'adhérence de P_i dans $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est un idéal radiciel ; donc $\widehat{\mathcal{J}_x}$ est le radical de $\widehat{\mathcal{I}_x}$. Soit a un élément du radical de $\widehat{\pi^*(\mathcal{I})_y}$. Notant $a_{i_1,\ldots,i_n}$ le coefficient de $y_1^{i_1}\cdots y_n^{i_n}$ dans le développement de a suivant les puissances de $y_1,\ldots,y_n$, on montre en raisonnant par récurrence sur le n-uplet $(i_1,\ldots,i_n)$ que $\widehat{\mathcal{J}_x}$ contient $a_{i_1,\ldots,i_n}$; donc $\widehat{\pi^*(\mathcal{J})_y}$ contient a, d'où l'assertion.

ii) On suppose que $\pi^*(\mathcal{I})$ est un idéal radiciel. D'après l'assertion (i), cela revient à dire que les idéaux $\pi^*(\mathcal{I})$ et $\pi^*(\mathcal{J})$ sont égaux. Il résulte alors de (i) que $\widehat{\mathcal{I}_x}$ est égal à $\widehat{\mathcal{J}_x}$ car $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ est une extension fidèlement plate de $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Par suite, $\mathcal{I}_x$ et $\mathcal{J}_x$ sont égaux car $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est une extension fidèlement plate de $\mathcal{O}_{X,x}$. Vu l'arbitraire de x, I est égal à J car X est affine, d'où l'assertion. ■

4. Exemples de complexes.

Dans cette section, on donne des exemples de complexes qui seront utilisés dans la suite de ce mémoire. Soient X une variété algébrique affine, irréductible et $\mathbb{C}[X]$ l'algèbre des fonctions régulières sur X. Dans ce qui suit, on désigne par V un espace vectoriel. On note respectivement $\mathrm{S}(V)$ et $\wedge(V)$ les algèbres symétrique et extérieure de V. Pour tout entier i, $\mathrm{S}^i(V)$ et $\wedge^i(V)$ désignent respectivement

les sous-espaces de degré i pour les graduations usuelles des algèbres $\mathrm{S}(V)$ et $\wedge(V)$. En particulier, pour i strictement négatif, $\mathrm{S}^i(V)$ et $\wedge^i(V)$ sont nuls.

4.1 Pour tout entier naturel d inférieur à la dimension de V, on désigne par $\mathrm{Gr}_d(V)$ la grassmannienne de degré d de V. Pour tout sous-module L de rang d de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}} V$, on note $\overline{\wedge^d(L)}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^d(V)$ dont le produit par un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ appartient à $\wedge^d(L)$.

Lemme 4.1. *On suppose X lisse et factorielle. Soient d un entier naturel, α une application régulière d'un ouvert non vide Y de X dans $\mathrm{Gr}_d(V)$ et L l'ensemble des éléments φ de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}} V$ tels que $\alpha(x)$ contienne $\varphi(x)$ pour tout x dans un ouvert non vide de U.*

i) *Il existe un grand ouvert $\tilde{Y}$ de X contenant Y et une application régulière β de $\tilde{Y}$ dans $\mathrm{Gr}_d(V)$ qui prolonge α.*

ii) *L'élément φ de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}} V$ appartient à L si et seulement si $\beta(x)$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans $\tilde{Y}$.*

iii) *Soit $\mathcal{L}$ la localisation de L sur X. Alors la restriction de $\mathcal{L}$ à $\tilde{Y}$ est un module localement libre de rang d.*

iv) *Le module $\overline{\wedge^d(L)}$ est libre de rang 1.*

v) *Soient $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d$ des éléments de L. Alors $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d$ est une base du $\mathbb{C}[X]$-module L si et seulement si $\varepsilon_1(x),\ldots,\varepsilon_d(x)$ est une base de $\beta(x)$ pour tout x dans $\tilde{Y}$.*

vi) *Si L est un module libre, alors les modules $\wedge^d(L)$ et $\overline{\wedge^d(L)}$ sont égaux.*

Démonstration. i) L'assertion (i) résulte de [18](Ch. VI, Theorem 1).

ii) Soit φ dans $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}} V$. Si $\alpha(x)$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans un ouvert non vide de U, $\beta(x)$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans $\tilde{Y}$ car tout ouvert non vide de $\tilde{Y}$ est partout dense dans $\tilde{Y}$, d'où l'assertion.

iii) Puisque β est une application régulière, $\tilde{Y}$ est recouvert par des ouvert affines Z qui ont la propriété suivante : il existe des applications régulières $\eta_1,\ldots,\eta_d$ de Z dans V telles que $\eta_1(x),\ldots,\eta_d(x)$ soit une base de $\beta(x)$ pour tout x dans Z. Pour $i=1,\ldots,d$, η_i est une section locale de $\mathcal{L}$. D'après (ii), toute section de $\mathcal{L}$ au dessus de Z est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}[Z]$ des applications $\eta_1,\ldots,\eta_d$; or $\eta_1,\ldots,\eta_d$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}[Z]$; donc la restriction de $\mathcal{L}$ à Z est un $\mathcal{O}_Z$-module libre de rang d car Z est un ouvert affine.

iv) D'après (iii), L est un module de rang d ; donc $\wedge^d(L)$ et $\overline{\wedge^d(L)}$ sont des modules de rang 1. Soit ε' un élément non nul de $\wedge^d(L)$. Puisque $\mathbb{C}[X]$ est un anneau factoriel, ε' est le produit d'un élément de $\mathbb{C}[X]$ et d'un élément de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^d(V)$ dont la variété des zéros est de codimension supérieure à 2 dans X. Par définition, $\overline{\wedge^d(L)}$ contient cet élément. Soit ε un élément de $\overline{\wedge^d(L)}$ dont la variété des zéros dans X est de codimension supérieure à 2. Pour tout φ dans $\overline{\wedge^d(L)}$, il existe des éléments p et q de $\mathbb{C}[X]$ tels que $p\varepsilon$ soit égal à $q\varphi$. Puisque la variété des zéros de ε est de codimension supérieure à 2, la variété des zéros de q est contenue dans la variété des zéros de p ; donc q divise p et φ appartient au $\mathbb{C}[X]$-module engendré par ε, d'où l'assertion.

v) On suppose que $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d$ est une base de L. Soient Z un ouvert affine de $\tilde{Y}$ et $\eta_1,\ldots,\eta_d$ des applications régulières de Z dans V telles que $\eta_1(x),\ldots,\eta_d(x)$

soit une base de $\beta(x)$ pour tout x dans Z. Pour $i = 1, \ldots, d$, η_i est une section locale de $\mathcal{L}$; donc $\eta_1, \ldots, \eta_d$ sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}[Z]$ des applications $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$. Il en résulte que pour tout x dans Z, $\eta_1(x), \ldots, \eta_d(x)$ sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}$ de $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_d(x)$; donc pour tout x dans $\tilde{Y}$, $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_d(x)$ est une base de $\beta(x)$. Réciproquement, on suppose que $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_d(x)$ est une base de $\beta(x)$ pour tout x dans $\tilde{Y}$. D'après l'assertion (ii), pour tout φ dans L, il existe des fonctions régulières $a_1, \ldots, a_d$ sur $\tilde{Y}$ qui satisfont l'égalité

$$\varphi(x) = a_1(x)\varepsilon_1(x) + \cdots + a_d(x)\varepsilon_d(x) \ ,$$

pour tout x dans $\tilde{Y}$. Puisque $\tilde{Y}$ est un grand ouvert de X, ces fonctions ont un prolongement régulier à X car X est une variété lisse ; donc $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ engendrent le module L. Puisque $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_d(x)$ sont linéairement indépendants pour tout x dans $\tilde{Y}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}[X]$; donc $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ est une base de L.

vi) On suppose que L est un module libre. Alors $\wedge^d(L)$ est un module libre de rang 1. Soient ε un générateur de $\overline{\wedge^d(L)}$, η un générateur de $\wedge^d(L)$, Z un ouvert affine de $\tilde{Y}$ et $\eta_1, \ldots, \eta_d$ des applications régulières de Z dans V telles que $\eta_1(x), \ldots, \eta_d(x)$ soit une base de $\beta(x)$ pour tout x dans Z. Puisque $\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_d$ est une section au dessus Z de la localisation sur X du module $\wedge^d(L)$, il est le produit de η et d'une fonction sur Z ; donc η ne s'annule pas sur Z. D'après (iii), $\tilde{Y}$ est recouvert par des ouverts Z qui ont la propriété ci-dessus ; donc η ne s'annule pas sur $\tilde{Y}$. Puisque $\overline{\wedge^d(L)}$ contient η, η est le produit de ε et d'un élément p de $\mathbb{C}[X]$. Alors la variété des zéros de p dans X ne rencontre pas $\tilde{Y}$; or $\tilde{Y}$ est un grand ouvert de X ; donc p est inversible dans $\mathbb{C}[X]$ et $\wedge^d(L)$ contient ε, d'où l'assertion. ■

4.2 Soient λ une application linéaire de V dans $\mathbb{C}[X]$ et θ_λ l'application linéaire

$$\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} V \xrightarrow{\theta_\lambda} \mathbb{C}[X] \ , \ a \otimes v \mapsto a\lambda(v) \ ,$$

où a est dans $\mathbb{C}[X]$ et où v est dans V.

Définition 4.2. On appelle complexe canonique associé à λ et on le note $C_\bullet(\lambda)$ le complexe d'espace $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$ dont la différentielle est la $\mathbb{C}[X]$-dérivation de l'algèbre $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$ qui prolonge θ_λ. La graduation naturelle de $\wedge(V)$ induit sur $C_\bullet(\lambda)$ une structure de complexe gradué.

Soient K_λ et I_λ le noyau et l'image de θ_λ. Soit L un sous-module de rang r de K_λ. On appelle espace canonique associé à λ et à L, l'idéal $C_\bullet(\lambda, L)$ de $C_\bullet(\lambda)$ engendré par $\overline{\wedge^r(L)}$.

Pour π automorphisme de la variété X, on désigne par $\pi^\#$ l'automorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$ qui à l'application φ de X dans $\wedge(V)$ associe $\varphi \circ \pi$ et λ_π l'application de V dans $\mathbb{C}[X]$ qui à l'élément v associe la fonction $\lambda(v) \circ \pi$ sur X.

Lemme 4.3. *Soient π un automorphisme de X,* d *la différentielle du complexe $C_\bullet(\lambda)$ et L un sous-module de rang r de K_λ.*

i) *Le module K_{λ_π} et l'idéal I_{λ_π} sont les images respectives de K_λ et de I_λ par $\pi^\#$.*

ii) *La différentielle du complexe* $C_\bullet(\lambda_\pi)$ *est l'application* $\pi^\# \circ \mathrm{d} \circ (\pi^\#)^{-1}$.

iii) *L'espace* $C_\bullet(\lambda, L)$ *est un sous-complexe de* $C_\bullet(\lambda)$. *En outre, l'image par* $\pi^\#$ *du complexe* $C_\bullet(\lambda, L)$ *est le sous-complexe* $C_\bullet(\lambda_\pi, \pi^\#(L))$ *de* $C_\bullet(\lambda_\pi)$.

Démonstration. Les démonstrations des assertions (i) et (ii) sont données dans [4](2.1).

iii) Puisque L est contenu dans K_λ, $\wedge^r(L)$ est un sous-espace du noyau de d ; or $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^r(V)$ est un module sans torsion ; donc $\overline{\wedge^r(L)}$ est un sous-espace du noyau de d. Il en résulte que $C_\bullet(\lambda, L)$ est stable par d car d est une dérivation de l'algèbre $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$. Puisque $\wedge^r(\pi^\#(L))$ est l'image de $\overline{\wedge^r(L)}$ par $\pi^\#$, $\overline{\wedge^r(\pi^\#(L))}$ et $C_\bullet(\lambda_\pi, \pi^\#(L))$ sont les images respectives de $\overline{\wedge^r(L)}$ et de $C_\bullet(\lambda, L)$ par $\pi^\#$ car $\pi^\#$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$ et $\pi^\#(L)$ est un module de rang r. ■

4.3 Soient W un espace vectoriel et τ une application régulière de X dans l'espace des applications linéaires de V dans W.

Définition 4.4. On appelle complexe canonique associé à τ et on le note $C_\bullet(\tau)$ le complexe $C_\bullet(\lambda)$, défini en 4.2, où λ est l'application linéaire de V dans $\mathbb{C}[X \times W^*]$ qui à v associe la fonction $(x, w') \mapsto \langle w', \tau(x)(v)\rangle$.

Si L est un sous-module de K_λ, on note $C_\bullet(\tau, L)$ le complexe $C_\bullet(\lambda, L)$ défini en 4.2.

On rappelle que W^* est le dual de W et que l'algèbre $\mathbb{C}[X \times W^*]$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(W)$.

Lemme 4.5. *On note* $\mathfrak{C}_\tau$ *la variété des zéros de* I_λ.

i) *La variété* $\mathfrak{C}_\tau$ *est l'ensemble des éléments* (x, w') *de* $X \times W^*$ *qui satisfont la condition suivante :* w' *est orthogonal à l'image de* $\tau(x)$.

ii) *Le radical de* I_λ *est l'ensemble des éléments* φ *de* $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(W)$ *qui satisfont la condition suivante : pour tout* x *dans* X, $\varphi(x)$ *appartient à l'idéal de* $\mathrm{S}(W)$ *engendré par l'image de* $\tau(x)$.

iii) *Pour tout sous-module* L *de* K_λ, *le support de l'homologie du complexe* $C_\bullet(\tau, L)$ *est contenu dans* $\mathfrak{C}_\tau$.

Démonstration. Les démonstrations des assertions (i) et (ii) sont données dans [4](3.2).

iii) On note respectivement $\mathcal{C}_\bullet(\tau)$ et $\mathcal{C}_\bullet(\tau, L)$ les localisations sur $X \times W^*$ des complexes $C_\bullet(\tau)$ et $C_\bullet(\tau, L)$. Soit (x, w') un point de $X \times W^*$ qui n'est pas dans $\mathfrak{C}_\tau$. Puisque la forme linéaire $w' \circ \tau(x)$ n'est pas nulle, il existe un ouvert affine U de $X \times W^*$ qui contient (x, w') et des applications régulières $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de U dans V qui satisfont les conditions suivantes : pour tout (z, z') dans U, $\langle z', \tau(z)(\varphi_n(z, z'))\rangle$ est égal à 1 et $\varphi_1(z, z'), \ldots, \varphi_{n-1}(z, z')$ est une base du noyau de $z' \circ \tau(z)$. On désigne respectivement par $C_\bullet$ et $C_\bullet(L)$ les espaces des sections au dessus de U des complexes $\mathcal{C}_\bullet(\tau)$ et $\mathcal{C}_\bullet(\tau, L)$. Puisque le bord de φ_n est égal à 1, c est le bord de $\varphi_n \wedge c$ pour tout cycle c de $C_\bullet$; or $C_\bullet(L)$ contient $\varphi_n \wedge c$ s'il contient c ; donc $C_\bullet(L)$ est acyclique. Vu l'arbitraire de (x, w'), $\mathfrak{C}_\tau$ contient le support de l'homologie du complexe $C_\bullet(\tau, L)$. ■

4.4 L'injection canonique de V dans $\wedge(V)$ s'étend de manière unique en une dérivation de l'algèbre $\mathrm{S}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge(V)$ qui est nulle sur la sous-algèbre $1\otimes_{\mathbb{C}}\wedge(V)$. On désigne par $D^\bullet(V)$ le complexe d'espace $\mathrm{S}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge(V)$ dont la différentielle est la dérivation ainsi définie. La graduation naturelle de $\wedge(V)$ induit sur $D^\bullet(V)$ une structure de complexe gradué.

Définition 4.6. Soit L un sous-module de rang r de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}}V$. Pour k entier naturel, on pose :

$$D_k^j(V,L)=\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{S}^k(L)\otimes_{\mathbb{C}[X]}\wedge^r(L) & \text{si} & j=r-1\\ \mathrm{S}^{k-j}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^r(L)\wedge\wedge^j(V) & \text{si} & j\geq r\\ 0 & \text{si} & j<r-1\end{array}\right. ,$$

et on note $D_k^\bullet(V,L)$ la somme directe des sous-espaces $D_k^j(V,L)$ où $j=0,1,\ldots$ et d_k l'endomorphisme $\mathbb{C}[X]$-linéaire de $D_k^\bullet(V,L)$ qui prolonge l'injection canonique de $\mathrm{S}^k(L)\otimes_{\mathbb{C}[X]}\wedge^r(L)$ dans $\mathrm{S}^k(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^r(L)$ et la restriction à $\mathrm{S}^{k-i}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^r(L)\wedge\wedge^i(V)$ de la différentielle de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}}D^\bullet(V)$ pour i entier naturel.

Lemme 4.7. *Soit k un entier naturel.*

i) *L'endomorphisme d_k est une structure de complexe de cohomologie sur $D_k^\bullet(V,L)$.*

ii) *La cohomologie du complexe $D^\bullet(V)$ est égale à $\mathbb{C}$.*

iii) *Pour tout sous-espace E de V, $D_k^\bullet(V,E)$ est un complexe acyclique.*

iv) *La cohomologie du complexe $D_k^\bullet(V,L)$ est un $\mathbb{C}[X]$-module gradué de type fini.*

Démonstration. i) Pour tout couple (i,j) d'entiers naturels, l'image de $\mathrm{S}^{i+1}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^r(L)\wedge\wedge^j(V)$ par la différentielle du complexe $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}}D^\bullet(V)$ est contenue dans $\mathrm{S}^i(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^r(L)\wedge\wedge^{j+1}(V)$. En outre, $\mathrm{S}^k(L)\otimes_{\mathbb{C}[X]}\wedge^r(L)$ est contenu dans le noyau de la restriction de d_k à $\mathrm{S}^k(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^r(L)$; donc d_k est une structure de complexe.

ii) On montre l'assertion en raisonnant par récurrence sur la dimension de V. Pour V nul, le complexe $D^\bullet(V)$ est le complexe d'espace $\mathbb{C}$ et de différentielle nulle. On suppose l'assertion vraie pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à celle de V. Soient d la différentielle du complexe $D^\bullet(V)$, W un sous-espace de codimension 1 de V et v un élément de V qui n'est pas dans W. Soit a un cocycle homogène de $D^\bullet(V)$. Alors a a un unique développement

$$a=v^m a_m+\cdots+a_0\ ,$$

où pour tout entier naturel i, a_i est un élément de $\mathrm{S}(W)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge(V)$. Si a est de degré nul, alors on a

$$mv^{m-1}a_m\otimes v+\cdots+a_1\otimes v=0\,;$$

donc dans ce cas, $\mathbb{C}$ contient a. On suppose a de degré strictement positif d. Alors pour tout entier naturel i, on a

$$a_i=a_i'+a_i''\wedge v\ ,$$

où a'_i et a''_i sont respectivement dans $\mathrm{S}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^d(W)$ et $\mathrm{S}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^{d-1}(W)$. De l'égalité

$$0=\sum_{i=0}^{m}v^i\mathrm{d}a'_i+\sum_{i=1}^{m}iv^{i-1}a'_i\wedge v+\sum_{i=0}^{m}v^i\mathrm{d}a''_i\wedge v\ ,$$

on déduit que $a'_0,\dots,a'_m$ sont des cocycles ; donc d'après l'hypothèse de récurrence, pour $i=0,\dots,m$, a'_i est le cobord d'un élément b_i de $\mathrm{S}(W)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^{d-1}(W)$. Par suite, il vient

$$a-\mathrm{d}(\sum_{i=0}^{m}v^ib_i)=v^ma''_m\wedge v+\sum_{i=0}^{m-1}v^i((-1)^{d-1}(i+1)b_{i+1}+a''_i)\wedge v\,;$$

donc a''_m et $(-1)^{d-1}(i+1)b_{i+1}+a''_i$ sont des cocycles de degré $d-1$ pour $i=0,\dots,m-1$. Pour $d=1$, il vient

$$a=\mathrm{d}(\sum_{i=0}^{m}v^ib_i+\frac{1}{m+1}v^{m+1}a''_m+\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i+1}v^{i+1}((i+1)b_{i+1}+a''_i))\,;$$

donc on peut supposer d supérieur à 2. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence que a''_m est le cobord d'un élément c_m de $\mathrm{S}(W)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^{d-2}(W)$. De même, pour $i=0,\dots,m-1$, $(-1)^{d-1}(i+1)b_{i+1}+a''_i$ est le cobord d'un élément c_i de $\mathrm{S}(W)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^{d-2}(V)$; donc il vient

$$a=\mathrm{d}(\sum_{i=0}^{m}v^ib_i+\sum_{i=0}^{m}v^ic_i\wedge v)\ ,$$

d'où l'assertion.

iii) On montre en raisonnant par récurrence sur la codimension δ de E dans V que pour tout entier naturel k, le complexe $D^\bullet_k(V,E)$ est acyclique. Le complexe $D^\bullet_k(V,V)$ est acyclique par définition. On suppose l'assertion vraie pour $\delta-1$ et δ strictement positif. Soient W un sous-espace de codimension 1 de V qui contient E et v un élément de V qui n'est pas dans W. Soit a un cocycle de degré d du complexe $D^\bullet_k(V,E)$. Alors a a un unique développement

$$a=\sum_{i=0}^{m}v^i(a'_i+a''_i\wedge v)\ ,$$

où pour $i=0,\dots,m$, a'_i et a''_i sont respectivement dans $D^d_{k-i}(W,E)$ et $D^{d-1}_{k-i-1}(W,E)$; or d'après l'hypothèse de récurrence, le complexe $D^\bullet_j(W,E)$ est acyclique pour tout entier naturel j ; donc par un raisonnement analogue à celui de (ii), a est un cobord du complexe $D^\bullet_k(V,E)$, d'où l'assertion.

iv) La différentielle du complexe $D^\bullet_k(V,L)$ est $\mathbb{C}[X]$-linéaire ; donc la cohomologie de $D^\bullet_k(V,L)$ est un sous-quotient du $\mathbb{C}[X]$-module $D^\bullet_k(V,L)$. En outre, la cohomologie de $D^\bullet_k(V,L)$ a une structure naturelle d'espace gradué qui est stable par la structure de $\mathbb{C}[X]$-module. Par définition, $D^\bullet_k(V,L)$ est somme directe d'un nombre fini de modules de type fini ; donc la cohomologie de $D^\bullet_k(V,L)$ est un $\mathbb{C}[X]$-module de type fini. ■

Pour tout x dans X, on note $L(x)$ l'image de L par l'application $\varphi\mapsto\varphi(x)$.

Lemme 4.8. *Soit X' l'ensemble des éléments x de X tels que $L(x)$ soit de dimension r.*

i) *La partie X' de X est ouverte et non vide. En outre, pour tout x dans X', il existe un sous-espace E de V et un ouvert Y_x de X qui contient x tels que E soit un supplémentaire de $L(y)$ dans V pour tout y dans Y_x.*

ii) *Pour tout entier naturel k, le support dans X de la cohomologie du complexe $D_k^\bullet(V,L)$ ne rencontre pas X'.*

iii) *On suppose que X est une variété normale, que X' est un grand ouvert de X et que L est un module libre. Alors le complexe $D_k^\bullet(V,L)$ n'a pas de cohomologie en degré r.*

Démonstration. i) Puisque L est de rang r, X contient des éléments x tels que $L(x)$ soit de dimension r. Soit x dans X'. Alors il existe des éléments $\eta_1,\dots,\eta_r$ de L tels que la famille $\eta_1(x),\dots,\eta_r(x)$ soit linéairement libre. Il en résulte qu'il existe un sous-espace E de V et un ouvert Y_x de X qui contient x tels que E soit un supplémentaire dans V du sous-espace engendré par $\eta_1(y),\dots,\eta_r(y)$ pour tout y dans Y_x. Puisque L est de rang r, pour tout y dans un ouvert non vide de X, $L(y)$ est de dimension inférieure à r ; or X est irréductible ; donc pour tout y dans un ouvert non vide de Y_x, $L(y)$ est le sous-espace engendré par $\eta_1(y),\dots,\eta_r(y)$. Il en résulte que pour tout φ dans L, le sous-module de L engendré par $\eta_1,\dots,\eta_r$ contient le produit de φ par un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$. Par suite, il vient

$$\varphi(y)\wedge\eta_1(y)\wedge\cdots\wedge\eta_r(y)=0\ ,$$

pour tout y dans Y_x et pour tout φ dans L ; donc $L(y)$ est le sous-espace engendré par $\eta_1(y),\dots,\eta_r(y)$ pour tout y dans Y_x. Par suite, X' contient Y_x. En outre, E et Y_x satisfont la condition de l'assertion. Il en résulte que X' est recouvert par des ouverts affines Y qui ont les propriétés suivantes :

1) la restriction de $\mathcal{L}$ à Y est libre,

2) il existe un sous-espace E de V qui est un supplémentaire de $L(x)$ dans V pour tout x dans Y,

en désignant par $\mathcal{L}$ la localisation de L sur X.

ii) Soient k un entier naturel et Y un ouvert affine de X' qui satisfait les conditions (1) et (2). On note L_Y l'espace des sections de $\mathcal{L}$ au dessus de Y. Alors $D_k^\bullet(V,L_Y)$ est l'espace des sections au dessus de Y de la localisation sur X de $D_k^\bullet(V,L)$. Vu l'arbitraire de Y, il s'agit de montrer que $D_k^\bullet(V,L_Y)$ est un complexe acyclique.

Soit x_0 dans Y. De la condition (2), on déduit qu'il existe une application régulière de Y dans $\mathrm{GL}(V)$ qui à l'élément x associe l'automorphisme linéaire qui prolonge l'identité de E et la restriction à $L_Y(x)$ de la projection linéaire de V sur $L_Y(x_0)$ de noyau E. Soit $\overline{\tau}$ l'automorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[Y]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\bigwedge(V)$ qui à l'élément φ associe l'application $x\mapsto\tau(x)(\varphi(x))$ de Y dans $\mathrm{S}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\bigwedge(V)$. Les images de L_Y et de $D_k^\bullet(V,L_Y)$ sont respectivement égales à $\mathbb{C}[Y]\otimes_{\mathbb{C}}L_Y(x_0)$ et à $\mathbb{C}[Y]\otimes_{\mathbb{C}}D_k^\bullet(V,L_Y(x_0))$. En outre, la restriction de $\overline{\tau}$ à $D_k^\bullet(V,L_Y)$ est un isomorphisme du complexe $D_k^\bullet(V,L_Y)$ sur le complexe $\mathbb{C}[Y]\otimes_{\mathbb{C}}D_k^\bullet(V,L_Y(x_0))$; donc d'après l'assertion (iii) du lemme 4.7, le complexe $D_k^\bullet(V,L_Y)$ est acyclique.

iii) On note d_k la différentielle du complexe $D_k^\bullet(V,L)$. Soit a un cocycle de degré r du complexe $D_k^\bullet(V,L)$. D'après l'assertion (ii), la restriction de a à Y est l'image d'un unique élément φ de $\mathrm{S}^k(L_Y)\otimes_{\mathbb{C}[Y]}\wedge^r(L_Y)$ par d_k. Vu l'arbitraire de l'ouvert Y de X' satisfaisant les conditions (1) et (2) de (i), la restriction de a à X' est l'image par d_k d'une section au dessus de X' de la localisation sur X de $\mathrm{S}^k(L)\otimes_{\mathbb{C}[X]}\wedge^r(L)$. Puisque L est un module libre, $\mathrm{S}^k(L)\otimes_{\mathbb{C}[X]}\wedge^r(L)$ est un module libre et toute section au dessus de X' de la localisation sur X de $\mathrm{S}^k(L)\otimes_{\mathbb{C}[X]}\wedge^r(L)$ est la restriction à X' d'un élément b de $\mathrm{S}^k(L)\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^r(L)$ car X' est un grand ouvert de la variété normale X ; donc a est égal à $\mathrm{d}b$. ■

Corollaire 4.9. *Soient k un entier naturel et L' un sous-module de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}}V$. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *pour tout x dans X, $L'(x)$ est de dimension r,*

2) *pour tout x dans un ouvert non vide de X, $L(x)$ est égal à $L'(x)$,*

3) *les modules $\wedge^r(L)$ et $\wedge^r(L')$ sont libres.*

Alors le complexe $D_k^\bullet(V,L)$ n'a pas de cohomologie en degré différent de r.

Démonstration. D'après la condition (1) et la démonstration de l'assertion (ii) du lemme 4.1, l'élément φ de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}}V$ appartient à L' si et seulement si $L'(x)$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans un ouvert non vide de X car X est une variété affine. En particulier, L est un sous-module de L' d'après la condition (2). D'après la condition (1) et l'assertion (ii) du lemme 4.8, le complexe $D_k^\bullet(V,L')$ est acyclique. Par définition, le complexe $D_k^\bullet(V,L)$ n'a pas de cohomologie en degré inférieur à $r-1$. D'après la condition (2), L' et L sont des sous-modules de rang r ; donc d'après la condition (3), il existe un élément non nul p de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\wedge^r(L)$ soit égal à $p\wedge^r(L')$. Soit a un cocycle de degré i, strictement supérieur à r, du complexe $D_k^\bullet(V,L)$. Alors on a $a=pb$ où b est un cocycle de degré i du complexe $D_k^\bullet(V,L')$. Soit c un élément de $D_k^{i-1}(V,L')$ dont le cobord est égal à b. Alors $D_k^{i-1}(V,L)$ contient pc car i est strictement supérieur à r ; or a est le cobord de pc ; donc a est un cobord du complexe $D_k^\bullet(V,L)$. ■

4.5 Pour tout point x de X, on note $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ le complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ pour la topologie $\mathfrak{m}_x$-adique. Soit Y une sous-variété fermée de codimension m de X qui a les propriétés suivantes : pour tout x dans Y, l'idéal de définition de Y dans $\mathcal{O}_{X,x}$ est engendré par m coordonnées $y_1,\ldots,y_m$, $\mathcal{O}_{X,x}$ contient $\mathcal{O}_{Y,x}$ et l'application canonique de l'anneau de séries formelles $\mathcal{O}_{Y,x}[[y_1,\ldots,y_m]]$ dans $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est un plongement dont l'image contient $\mathcal{O}_{X,x}$. On note $\mathfrak{m}_{x,Y}$ l'idéal de définition de Y dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Pour tout espace vectoriel E, pour tout m-uplet μ d'entiers naturels $l_1,\ldots,l_m$ et pour tout élément ψ de $\mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}E$, on désigne par ψ_μ le coefficient de $y_1^{l_1}\cdots y_m^{l_m}$ dans le développement de ψ suivant les puissances de $y_1,\ldots,y_m$. Alors ψ_μ appartient à $\mathcal{O}_{Y,x}\otimes_{\mathbb{C}}E$ pour tout μ.

Lemme 4.10. *Soient L un sous-module de $\mathbb{C}[X]\otimes_{\mathbb{C}}V$ et L_Y le module des restrictions à Y des éléments de L. Soient l un entier naturel et j un entier supérieur au rang de L. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *le* $\mathbb{C}[X]$*-module* L *et le* $\mathbb{C}[Y]$*-module* L_Y *sont des modules libres de rang* r*,*

2) *le complexe* $D_l^\bullet(V, L_Y)$ *n'a pas de cohomologie en degré* j*.*

Alors le support dans X *du* j*-ième groupe de cohomologie du complexe* $D_l^\bullet(V, L)$ *ne rencontre pas* Y*.*

Démonstration. Soient M un $\mathbb{C}[X]$-module de type fini, N et N' deux sous-modules de M tels que N contienne N'. Dire que le support dans X du quotient des modules N et N' ne rencontre pas Y revient à dire que pour tout x dans Y, les deux modules $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} N$ et $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} N'$ sont égaux. Dans ce qui suit, on fixe un point x de Y et des générateurs $y_1, \ldots, y_m$ de $\mathfrak{m}_{x,Y}$. Désignant par $M_0, M_1, \ldots$ la suite décroissante de sous-modules de $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} M$ telle que $\mathfrak{m}_{x,Y}^k \otimes_{\mathbb{C}[X]} M$ soit égale à M_k pour tout k, l'égalité des modules $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} N$ et $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} N'$ est équivalente à l'inclusion

$$N \cap M_k \subset \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[Y]} N' + M_{k+1} \ ,$$

pour tout entier naturel k. On note $\eta_1, \ldots, \eta_r$ une base de L. Alors d'après la condition (1), la suite $\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_r$ des restrictions à Y des éléments de la suite $\eta_1, \ldots, \eta_r$ est une base du module L_Y.

Soient M le module $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} D_l^j(V, L)$, $Z^j(V, L)$ l'espace des cocycles de degré j du complexe $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} D_l^\bullet(V, L)$ et $B^j(V, L)$ l'espace des cobords de degré j du complexe $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} D_l^\bullet(V, L)$. Soient k un entier naturel et ψ dans l'intersection de $Z^j(V, L)$ et de M_k. D'après la remarque préliminaire, il s'agit de montrer que ψ est la somme d'un élément de $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} B^j(V, L)$ et d'un élément de M_{k+1}. Soit κ un m-uplet d'entiers naturels de somme k. Puisque $\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_r$ est une base de L_Y, ψ_κ est un cocycle de degré j du complexe $D_l^\bullet(V, L_Y)$ car j est supérieur à r ; donc d'après la condition (2), ψ_κ est le cobord d'un élément φ_κ de $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} D_l^{j-1}(V, L_Y)$. Désignant par $\tilde{\varphi}_\kappa$ un élément de $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}[X]} D_l^{j-1}(V, L)$ qui prolonge φ_κ et posant :

$$\varphi = \sum_{\substack{\kappa=(k_1,\ldots,k_m) \\ k_1+\cdots+k_m=k}} y_1^{k_1} \cdots y_m^{k_m} \tilde{\varphi}_\kappa \ ,$$

ψ est la somme du cobord de φ et d'un élément de M_{k+1}, d'où le lemme. ■

5. Sous-module caractéristique.

Soi $L_\mathfrak{g}$ le sous-module des éléments φ du $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_\mathbb{C} \mathfrak{g}$ qui satisfont la condition suivante : pour tout x dans $\mathfrak{g}$, $\varphi(x)$ centralise x. D'après [6](§2), $L_\mathfrak{g}$ est un module libre de rang $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{g}_\mathrm{r}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$. Par définition, x est dans $\mathfrak{g}_\mathrm{r}$ si et seulement si $\mathfrak{g}(x)$ est de dimension $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$. On introduit dans cette section un sous-module $B_\mathfrak{g}$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_\mathbb{C} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_\mathbb{C} \mathfrak{g}$, appelé sous-module caractéristique pour $\mathfrak{g}$, et on en donne quelques propriétés. On rappelle que $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ désigne la dimension des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$.

5.1 Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ des automorphismes de $\mathfrak{g}$ opère dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ par l'action diagonale. Pour tout élément g de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on note κ_g l'automorphisme linéaire de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$,

$$(x,y)\mapsto(ax+by,cx+dy) \text{ où } g=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .$$

On définit ainsi une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, on désigne par $\mathfrak{V}'(x,y)$ la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}(ax+by)$ où (a,b) est dans $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$. Alors pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, on a

$$g^{-1}(\mathfrak{V}'(g(x),g(y)))=\mathfrak{V}'(\kappa_h(x,y))=\mathfrak{V}'(x,y) ,$$

pour tout g dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et pour tout h dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Lemme 5.1. *Soit $\Omega_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x,y) de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ contienne $ax+by$ pour tout (a,b) dans $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$.*

i) *Le sous-ensemble $\Omega_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est un grand ouvert.*

ii) *Soit $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x,y) de $\Omega_{\mathfrak{g}}$ tels que $\mathfrak{V}'(x,y)$ soit de dimension maximale. Alors $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ est un ouvert de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$.*

iii) *Les sous-ensembles $\Omega_{\mathfrak{g}}$ et $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ sont invariants pour les actions de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.*

Démonstration. i) Soient τ l'application

$$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})\to\mathfrak{g} ,\ (x,y,a,b)\mapsto ax+by ,$$

et X l'image réciproque de $\mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ par τ. On désigne par Y l'image de X par la projection canonique de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})$ sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. La partie X de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})$ est fermée car $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ est un ouvert de $\mathfrak{g}$. On note $\tilde{X}$ l'image de X par l'application canonique de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})$ sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Puisque $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ est un cône, X est l'image réciproque de $\tilde{X}$; donc $\tilde{X}$ est fermé dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Il en résulte que Y est fermé dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Par définition, $\Omega_{\mathfrak{g}}$ est le complémentaire de Y dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$; donc $\Omega_{\mathfrak{g}}$ est ouvert dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$.

On suppose que Y a une composante irréductible Y_1 de codimension 1 dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Puisque Y_1 est une composante irréductible de Y, Y_1 est l'image d'une composante irréductible X_1 de X. Le morphisme τ est une submersion en tout point ; donc τ est un morphisme lisse et la codimension de X dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ est égale à la codimension de $\mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ dans $\mathfrak{g}$. D'après [19](Theorem 4.12), la codimension de $\mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ est égale à 3 ; donc la dimension de X_1 est égale à $2\dim\mathfrak{g}-1$. Il en résulte que pour tout (x,y) dans un ouvert non vide de Y_1, l'ensemble des éléments (a,b) de $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ tels que X_1 contienne (x,y,a,b), est fini. Si X_1 contient (x,y,a,b), alors X_1 contient (x,y,ta,tb) pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$ car $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ est un cône et X_1 est une composante irréductible de X, d'où la contradiction.

ii) Soit (x,y) un élément de $\Omega_{\mathfrak{g}}$ tel que $\mathfrak{V}'(x,y)$ soit de dimension maximale. Puisque $\mathfrak{V}'(x,y)$ est de dimension finie, il existe un nombre fini $(a_1,b_1),\dots,(a_k,b_k)$ d'éléments de $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ tels que $\mathfrak{V}'(x,y)$ soit la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}(a_1x+b_1y),\dots,\mathfrak{g}(a_kx+b_ky)$. Soit $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ une base de $L_{\mathfrak{g}}$. D'après l'assertion (v) du lemme 4.1, pour tout élément régulier v de $\mathfrak{g}$, $\varepsilon_1(v),\dots,\varepsilon_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}(v)$

est une base de $\mathfrak{g}(v)$; donc il existe des suites d'entiers $i_{1,1},\dots,i_{l_1,1},\dots,i_{1,k},\dots,i_{l_k,k}$ dans $\{1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}\}$ telles que la suite

$$\varepsilon_{i_{1,1}}(a_1x+b_1y)\ ,\dots,\ \varepsilon_{i_{l_1,1}}(a_1x+b_1y)\ ,\dots$$

$$\dots,\ \varepsilon_{i_{1,k}}(a_kx+b_ky)\ ,\dots,\ \varepsilon_{i_{l_k,k}}(a_kx+b_ky)\ ,$$

soit une base de $\mathfrak{V}'(x,y)$. Pour tout (x',y') dans un ouvert de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ contenant (x,y), l'ensemble des éléments

$$\varepsilon_{i_{1,1}}(a_1x'+b_1y')\ ,\dots,\ \varepsilon_{i_{l_1,1}}(a_1x'+b_1y')\ ,\dots$$

$$\dots,\ \varepsilon_{i_{1,k}}(a_kx'+b_ky')\ ,\dots,\ \varepsilon_{i_{l_k,k}}(a_kx'+b_ky')\ ,$$

est une partie libre de $\mathfrak{V}'(x',y')$; donc pour tout (x',y') dans un ouvert de $\Omega_{\mathfrak{g}}$ contenant (x,y), $\mathfrak{V}'(x,y)$ et $\mathfrak{V}'(x',y')$ ont même dimension d'après la maximalité de la dimension de $\mathfrak{V}'(x,y)$, d'où l'assertion.

iii) Soit (x,y) dans $\Omega_{\mathfrak{g}}$. Puisque $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-invariant, $\Omega_{\mathfrak{g}}$ contient l'orbite de (x,y) pour l'action de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Le plan $P_{x,y}$ de $\mathfrak{g}$, engendré par x et y, ne dépendant que de l'orbite de (x,y) sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $\Omega_{\mathfrak{g}}$ contient l'orbite de (x,y) pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. D'après les égalités

$$g^{-1}(\mathfrak{V}'(g(x),g(y)))=\mathfrak{V}'(\kappa_h(x,y))=\mathfrak{V}'(x,y)\ ,$$

pour tout g dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et pour tout h dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ contient les orbites de ses éléments sous les actions de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, d'où l'assertion. ■

Corollaire 5.2. *Soit d la dimension de $\mathfrak{V}'(x,y)$ pour (x,y) dans $\Omega'_{\mathfrak{g}}$. Alors l'application $(x,y)\mapsto\mathfrak{V}'(x,y)$ de $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{Gr}_d(\mathfrak{g})$ est régulière.*

Démonstration. Soit (x,y) dans $\Omega'_{\mathfrak{g}}$. Selon les notations de la démonstration de l'assertion (ii) du lemme 5.1, pour tout (x',y') dans un ouvert de $\Omega_{\mathfrak{g}}$ contenant (x,y), la famille

$$\varepsilon_{i_{1,1}}(a_1x'+b_1y')\ ,\dots,\ \varepsilon_{i_{l_1,1}}(a_1x'+b_1y')\ ,\dots$$

$$\dots,\ \varepsilon_{i_{1,k}}(a_kx'+b_ky')\ ,\dots,\ \varepsilon_{i_{l_k,k}}(a_kx'+b_ky')\ ,$$

est une base de $\mathfrak{V}'(x',y')$. L'application $(x',y')\mapsto\varepsilon_{i,j}(a_jx'+b_jy')$ étant régulière pour tout (i,j), l'application $(x',y')\mapsto\mathfrak{V}'(x',y')$ est régulière en (x,y), d'où l'assertion. ■

5.2 Soient $p_1,\dots,p_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ des éléments homogènes de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui engendrent la sous-algèbre des éléments G-invariants de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Pour $i=1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, pour (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ et pour (a,b) dans $\mathbb{C}^2$, on a un unique développement

$$p_i(ax+by)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}a^mb^np_{i,m,n}(x,y)\ ,$$

où $p_{i,m,n}$ est un élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui est nul dès que m ou n est assez grand. Puisque p_i est G-invariant, les éléments $p_{i,m,n}$ sont G-invariants pour l'action de G dans l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui prolonge l'action diagonale de G dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Pour

$i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ et pour (m,n) dans $\mathbb{N}^2$, on note ε_i l'élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ et $\varepsilon_{i,m,n}$ l'élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ qui sont définis par la condition suivante : pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, les formes linéaires sur $\mathfrak{g}$, $v \mapsto \langle \varepsilon_i(x), v\rangle$ et $v \mapsto \langle \varepsilon_{i,m,n}(x,y), v\rangle$ sont respectivement les différentielles en x des fonctions p_i et $x \mapsto p_{i,m,n}(x,y)$ sur $\mathfrak{g}$. D'après [6](§2), $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ est une base de $L_{\mathfrak{g}}$. On note $\underline{E}$ le sous-ensemble de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$,

$$\underline{E} = \{\varepsilon_{i,m,n}\,;\, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,\ m+n = d_i\ ,\ i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}\}\ ,$$

où d_i est le degré de p_i pour $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, et $\underline{e}(x,y)$ l'image de $\underline{E}$ par l'application $\varphi \mapsto \varphi(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Lemme 5.3. i) *Pour $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ et pour tout (m,n) dans $\mathbb{N}^2$, $p_{i,m,n}$ est homogène de degré m en la première composante sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et homogène de degré n en la deuxième composante sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. En outre, $p_{i,m,n}$ est nul si $m+n$ est différent de d_i.*

ii) *Pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et pour $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, on a*

$$\varepsilon_i(ax+by) = \sum_{m=1}^{d_i} a^{m-1} b^{d_i - m} \varepsilon_{i,m,d_i-m}(x,y)\ ,$$

pour tout (a,b) dans $\mathbb{C}^2$.

iii) *Pour tout (x,y) dans $\Omega_{\mathfrak{g}}$, $\underline{e}(x,y)$ engendre le sous-espace $\mathfrak{V}'(x,y)$.*

iv) *Pour $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ et pour tout (m,n) dans $\mathbb{N}^2$, $\varepsilon_{i,m,n}(x,y)$ est orthogonal à $[x,y]$ pour tout (x,y) dans $\mathbb{N}^2$.*

v) *Pour $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ et pour tout (g,m,n) dans $G \times \mathbb{N}^2$, $\varepsilon_{i,m,n}(g(x), g(y))$ est égal à $g(\varepsilon_{i,m,n}(x,y))$.*

Démonstration. i) Soient $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ et (x,y) dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Pour tout (a,b,t) dans $\mathbb{C}^3$, on a

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a^m b^n p_{i,m,n}(tx,y) = p_i(atx+by) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a^m b^n t^m p_{i,m,n}(x,y)\,;$$

donc pour tout (m,n) dans $\mathbb{N}^2$, $p_{i,m,n}(tx,y)$ est égal à $t^m p_{i,m,n}(x,y)$ pour tout t dans $\mathbb{C}$. On montre de même que $p_{i,m,n}$ est homogène de degré n en la deuxième composante sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Puisque p_i est homogène de degré d_i, le degré total de $p_{i,m,n}$ est égal à d_i pour tout (m,n) ; donc $p_{i,m,n}$ est nul si $m+n$ est différent de d_i.

ii) Soient $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, (x,y) dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et v un élément de $\mathfrak{g}$. Pour tout élément (a,b) de $\mathbb{C}^2$ tel que a soit non nul, on a

$$\langle \varepsilon_i(ax+by), v\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i(ax+by+tv)\,|_{t=0}$$

$$= \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a^m b^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_{i,m,n}(x+ta^{-1}v, y)\,|_{t=0} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a^m b^n \langle \varepsilon_{i,m,n}(x,y), a^{-1}v\rangle\ .$$

L'assertion résulte alors de l'assertion (i).

iii) Soient (x,y) dans $\Omega_{\mathfrak{g}}$ et v un élément de $\mathfrak{g}$. D'après l'assertion (ii), v est orthogonal à $\varepsilon_{i,m,n}(x,y)$ pour tout (m,n) dans $(\mathbb{N}\backslash\{0\})\times\mathbb{N}$ si et seulement si v est orthogonal à $\varepsilon_i(ax+by)$ pour tout (a,b) dans $\mathbb{C}^2$; donc v est orthogonal à $\underline{e}(x,y)$ si et seulement si v est orthogonal à $\varepsilon_1(ax+by),\ldots,\varepsilon_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}(ax+by)$ pour tout (a,b) dans $\mathbb{C}^2$. Pour tout élément non nul (a,b) de $\mathbb{C}^2$, $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ contient $ax+by$; donc d'après l'assertion (v) du lemme 4.1, $\varepsilon_1(ax+by),\ldots,\varepsilon_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}(ax+by)$ est une base de $\mathfrak{g}(ax+by)$. Il en résulte que v est orhogonal à $\mathfrak{V}'(x,y)$ si et seulement si v est orthogonal à $\underline{e}(x,y)$, d'où l'assertion.

iv) Soient $i=1,\ldots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ et (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. D'après la propriété d'invariance de $\langle .,.\rangle$, pour tout élément (a,b) de $\mathbb{C}^2$ tel que a soit non nul, on a

$$\langle\varepsilon_i(ax+by),[x,y]\rangle = a^{-1}\langle\varepsilon_i(ax+by),[ax+by,y]\rangle$$

$$= a^{-1}\langle[\varepsilon_i(ax+by),ax+by],y\rangle = 0\ ,$$

car $\mathfrak{g}(ax+by)$ contient $\varepsilon_i(ax+by)$. Il résulte alors de l'assertion (ii) que $\varepsilon_{i,m,n}(x,y)$ est orthogonal à $[x,y]$ pour tout couple (m,n) d'entiers naturels tels que m soit non nul ; or par définition, $\varepsilon_{i,0,n}(x,y)$ est nul pour tout n ; donc $\varepsilon_{i,m,n}(x,y)$ est orthogonal à $[x,y]$ pour tout (m,n) dans $\mathbb{N}^2$.

v) Soient $i=1,\ldots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ et (m,n) dans $\mathbb{N}^2$. Puisque p_i est G-invariant, $p_{i,m,n}$ est G-invariant ; donc pour tout g dans G et pour tout v dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\langle\varepsilon_{i,m,n}(g(x),g(y)),v\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{i,m,n}(x+tg^{-1}(v),y)\,|_{t=0} = \langle\varepsilon_{i,m,n}(x,y),g^{-1}(v)\rangle\ ,$$

pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, d'où l'assertion. ■

Corollaire 5.4. *Soit $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x,y) de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ tels que $\underline{e}(x,y)$ soit de rang maximum.*

i) *Le cardinal de $\underline{E}$ est inférieur à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$.*

ii) *Pour tout (x,y) dans $\Omega_{\mathfrak{g}}$, la dimension de $\mathfrak{V}'(x,y)$ est inférieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$.*

iii) *La partie $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est un ouvert G-invariant qui contient $\Omega'_{\mathfrak{g}}$.*

Démonstration. i) Par définition, $\underline{E}$ a au plus $d_1+\cdots+d_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ éléments distincts ; or d'après [1](Ch. V, §5, Proposition 3), cette somme est égale à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$; donc le cardinal de $\underline{E}$ est inférieur à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$.

ii) D'après (i), pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, le cardinal de $\underline{e}(x,y)$ est inférieur à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$; donc d'après l'assertion (iii) du lemme 5.3, pour tout (x,y) dans $\Omega_{\mathfrak{g}}$, la dimension de $\mathfrak{V}'(x,y)$ est inférieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$.

iii) Par définition, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est ouvert dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Cet ouvert est G-invariant d'après l'assertion (v) du lemme 5.3. En outre, d'après l'assertion (iii) du lemme 5.3, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ car $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ est l'ensemble des éléments (x,y) de $\Omega_{\mathfrak{g}}$ tels que $\mathfrak{V}'(x,y)$ soit de dimension maximale. ■

5.3 On suppose que $\mathfrak{g}$ n'est pas une algèbre de Lie commutative. Soient (ξ,ρ,η) un $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal de l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$. Par définition, on a

$$[\xi,\eta]=\rho\ ,\ [\rho,\xi]=2\xi\ ,\ [\rho,\eta]=-2\eta\ .$$

Puisque ξ est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}$, il existe une unique sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ qui contient ξ. En outre, le centralisateur $\mathfrak{h}$ de ρ dans $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui est contenue dans $\mathfrak{b}$. On désigne par R le système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et par R_+ le système de racines positives de R défini par $\mathfrak{b}$. Pour tout α dans R, $\mathfrak{g}^\alpha$ désigne le sous-espace radiciel de racine α.

Lemme 5.5. i) *L'ouvert* $\Omega_\mathfrak{g}$ *contient* (ρ,ξ).

ii) *L'espace* $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)$ *est égal à la somme des sous-espaces* $\mathfrak{h}, [\xi,\mathfrak{h}], (\mathrm{ad}\,\xi)^2(\mathfrak{h}), \ldots$.

iii) *L'espace* $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)$ *est égal à* $\mathfrak{b}$.

Démonstration. i) Pour tout t dans $\mathbb{C}$, $\rho+2t\xi$ est égal à $\exp(-t\mathrm{ad}\,\xi)(\rho)$; donc $\rho+2t\xi$ est un élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$. En outre, ξ est régulier ; donc $\Omega_\mathfrak{g}$ contient (ρ,ξ) car $\mathfrak{g}_\mathrm{r}$ est un cône.

ii) Soit V la somme des sous-espaces $\mathfrak{h}, [\xi,\mathfrak{h}], (\mathrm{ad}\,\xi)^2(\mathfrak{h}), \ldots$. Puisque $\mathfrak{g}(\rho)$ est égal à $\mathfrak{h}$, pour tout t dans $\mathbb{C}$, le centralisateur de $\rho+2t\xi$ dans $\mathfrak{g}$ est égal à $\exp(-t\mathrm{ad}\,\xi)(\mathfrak{h})$. Si φ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ qui est nulle sur $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)$, alors pour tout v dans $\mathfrak{h}$, φ est nul en $(\mathrm{ad}\,\xi)^i(v)$ pour tout entier naturel i ; donc $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)$ contient V. Réciproquement, V contient $\mathfrak{g}(\rho+2t\xi)$ pour tout t dans $\mathbb{C}$. Pour tout a dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\mathfrak{g}(a\rho+b\xi)$ est égal à $\mathfrak{g}(\rho+a^{-1}b\xi)$; donc V contient $\mathfrak{g}(a\rho+b\xi)$ pour tout a dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Puisque ξ est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(\xi)$ est la limite dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}(a\rho+\xi)$ quand a tend vers 0 ; donc V contient $\mathfrak{g}(\xi)$, d'où l'assertion.

iii) Soient $\mathfrak{u}$ le sous-espace des éléments nilpotents de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{u}_-$ la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ où α est dans $-R_+$. D'après l'assertion (ii), $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)$. On suppose que $\mathfrak{b}$ contient strictement $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Soit $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)^\perp$ contient strictement $\mathfrak{u}$. Puisque $[\rho,\xi]$ est égal à 2ξ, $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)$ et $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)^\perp$ sont stables par $\mathrm{ad}\,\rho$ et $\mathrm{ad}\,\xi$ d'après l'assertion (ii). Le sous-espace $\mathfrak{u}$ étant la somme des sous-espaces propres de $\mathrm{ad}\,\rho$ pour les valeurs propres strictement positives, la restriction de $\mathrm{ad}\,\rho$ à $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)^\perp$ a une valeur propre négative. Soient i la plus grande valeur propre négative de la restriction de $\mathrm{ad}\,\rho$ à $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)^\perp$ et v un vecteur propre non nul de cet endomorphisme pour la valeur propre i. Alors $[\xi,v]$ est un vecteur propre de la restriction de $\mathrm{ad}\,\rho$ à $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)^\perp$ pour la valeur propre $i+2$ car $[\rho,\xi]$ est égal à 2ξ ; or $[\xi,v]$ n'est pas nul car $\mathfrak{u}$ contient $\mathfrak{g}(\xi)$; donc d'après la maximalité de i, i est nul et v appartient à $\mathfrak{h}$ car $\mathfrak{g}(\rho)$ est égal à $\mathfrak{h}$. Ceci est absurde car $\mathfrak{h}$ est un sous-espace de $\mathfrak{V}'(\rho,\xi)$ dont l'orthogonal dans $\mathfrak{g}$ a une intersection nulle avec $\mathfrak{h}$. ■

Corollaire 5.6. i) *Pour tout* (x,y) *dans* $\Omega'_\mathfrak{g}$, $\mathfrak{V}'(x,y)$ *est de dimension* $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$.

ii) *Pour tout* (x,y) *dans* $\Omega'_\mathfrak{g}$, *le sous-ensemble* $\underline{e}(x,y)$ *est une partie libre de* $\mathfrak{g}$, *de cardinal* $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$.

iii) *Le sous-ensemble* $\underline{E}$ *de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_\mathbb{C}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_\mathbb{C}\mathfrak{g}$ *est une partie libre de cardinal* $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$.

Démonstration. i) D'après l'assertion (i) du lemme 5.5, $\Omega_\mathfrak{g}$ contient (ρ,ξ) ; donc d'après l'assertion (iii) du lemme 5.5 et le corollaire 5.4, $\Omega'_\mathfrak{g}$ contient (ρ,ξ).

Il en résulte que pour tout (x,y) dans $\Omega'_{\mathfrak{g}}$, les dimensions de $\mathfrak{V}'(x,y)$ et de $\mathfrak{b}$ sont égales.

ii) D'après l'assertion (iii) du lemme 5.3, $\underline{e}(x,y)$ engendre $\mathfrak{V}'(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\Omega_{\mathfrak{g}}$; or $\underline{e}(x,y)$ a au plus $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ éléments d'après l'assertion (i) du corollaire 5.4 ; donc pour tout (x,y) dans $\Omega'_{\mathfrak{g}}$, $\underline{e}(x,y)$ est une partie libre de $\mathfrak{g}$, de cardinal $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$, d'après l'assertion (i).

iii) Pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, $\underline{e}(x,y)$ est l'image de $\underline{E}$ par l'application $\varphi\mapsto\varphi(x,y)$; or d'après l'assertion (ii) du lemme 5.1, $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ est un ouvert de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$; donc d'après l'assertion (ii), $\underline{E}$ est une partie libre de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$. D'après l'assertion (i) du corollaire 5.4, le cardinal de $\underline{E}$ est inférieur à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$; donc d'après l'assertion (ii), le cardinal de $\underline{E}$ est égal à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$. ■

Corollaire 5.7. *Pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie réductive quelconque, l'ouvert $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est un grand ouvert.*

Démonstration. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie commutative, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est égal à $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. On peut donc supposer que $\mathfrak{g}$ n'est pas une algèbre de Lie commutative. D'après l'assertion (iii) du corollaire 5.4, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. On suppose que $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ n'est pas un grand ouvert de $\mathfrak{g}$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Alors le complémentaire de $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ a une composante irréductible Σ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. D'après l'assertion (i) du lemme 5.1, Σ rencontre $\Omega_{\mathfrak{g}}$. En outre, d'après le corollaire 5.4, l'intersection Σ' de Σ et de $\Omega_{\mathfrak{g}}$ est une composante irréductible du complémentaire de $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ dans $\Omega_{\mathfrak{g}}$; or d'après l'assertion (iii) du lemme 5.3, pour tout (x,y) dans $\Omega_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{V}'(x,y)$ ne dépend que du sous-espace engendré par x et y ; donc Σ' et Σ sont stables pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. En outre, Σ est G-invariant car $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est G-invariant. Soient $\mathfrak{s}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par ξ, ρ, η, $\mathbf{S}$ le sous-groupe fermé connexe de G dont l'algèbre de Lie est l'image de $\mathfrak{s}$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{s}$ et T l'intersection de Σ et de $\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}$. Puisque Σ est une hypersurface de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, la codimension de T dans $\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}$ est inférieure à 1. En outre, T est invariant pour les actions de $\mathbf{S}$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$; donc d'après le lemme 8.1, T contient (ρ,ξ). Ceci est absurde car $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient (ρ,ξ) d'après l'assertion (iii) du lemme 5.5. ■

Pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{V}(x,y)$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par $\underline{e}(x,y)$.

Proposition 5.8. *Soit $B_{\mathfrak{g}}$ le sous-module des éléments φ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{V}'(x,y)$ contienne $\varphi(x,y)$ pour tout (x,y) dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$.*

i) *L'élément φ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ appartient à $B_{\mathfrak{g}}$ si et seulement si $\mathfrak{V}'(x,y)$ contient $\varphi(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\Omega'_{\mathfrak{g}}$.*

ii) *L'élément φ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ appartient à $B_{\mathfrak{g}}$ si et seulement si $\mathfrak{V}(x,y)$ contient $\varphi(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\Lambda_{\mathfrak{g}}$.*

iii) *Le module $B_{\mathfrak{g}}$ est un module libre de rang égal à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$. En outre, $\underline{E}$ est une partie libre et génératrice de $B_{\mathfrak{g}}$.*

iv) *Pour tout g dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et pour tout φ dans $B_{\mathfrak{g}}$, $B_{\mathfrak{g}}$ contient l'application $(x,y)\mapsto g^{-1}\circ\varphi(g(x),g(y))$.*

v) *Pour tout g dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et pour tout φ dans $B_{\mathfrak{g}}$, $B_{\mathfrak{g}}$ contient $\varphi\circ\kappa_g$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie commutative, $B_{\mathfrak{g}}$ est égal à $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ car $\mathfrak{V}(x,y)$ est égal à $\mathfrak{g}$ pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. On peut donc supposer que $\mathfrak{g}$ n'est pas une algèbre de Lie commutative.

i) Soit φ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$. D'après l'assertion (ii) du lemme 5.1, $B_{\mathfrak{g}}$ contient φ si et seulement si $\mathfrak{V}'(x,y)$ contient $\varphi(x,y)$ pour tout (x,y) dans un ouvert non vide de $\Omega'_{\mathfrak{g}}$; donc d'après le corollaire 5.2 et par un argument de continuité, $B_{\mathfrak{g}}$ contient φ si et seulement si $\mathfrak{V}'(x,y)$ contient $\varphi(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\Omega'_{\mathfrak{g}}$.

ii) Soit φ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$. L'application $(x,y) \mapsto \mathfrak{V}(x,y)$ est une application régulière de $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{g})$. En outre, sa restriction à $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ est l'application $(x,y) \mapsto \mathfrak{V}'(x,y)$ d'après l'assertion (iii) du lemme 5.3 ; donc $B_{\mathfrak{g}}$ contient φ si et seulement si $\mathfrak{V}(x,y)$ contient $\varphi(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\Lambda_{\mathfrak{g}}$.

iii) D'après l'assertion (ii), $B_{\mathfrak{g}}$ contient $\underline{E}$ et d'après l'assertion (iii) du corollaire 5.6, $\underline{E}$ est une partie libre de cardinal $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}$ les éléments de $\underline{E}$. Par définition, pour tout (x,y) dans $\Lambda_{\mathfrak{g}}$, $\varphi_1(x,y), \ldots, \varphi_{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(x,y)$ est une base de $\mathfrak{V}(x,y)$; donc d'après l'assertion (ii), pour tout φ dans $B_{\mathfrak{g}}$, il existe des fonctions régulières $\psi_1, \ldots, \psi_{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}$ sur $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ qui satisfont l'égalité

$$\varphi(x,y) = \psi_1(x,y)\varphi_1(x,y) + \cdots + \psi_{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(x,y)\varphi_{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(x,y) \ ,$$

pour tout (x,y) dans $\Lambda_{\mathfrak{g}}$. D'après le corollaire 5.7, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est un grand ouvert de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$; donc les fonctions régulières $\psi_1, \ldots, \psi_{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}$ ont un prolongement régulier à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ car $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est une variété normale. Il en résulte que $B_{\mathfrak{g}}$ est engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}$, d'où l'assertion.

iv) Pour tout g dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et pour tout (x,y) dans $\Omega'_{\mathfrak{g}}$, $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ contient $(g(x), g(y))$ et $\mathfrak{V}'(g(x), g(y))$ est égal à $g(\mathfrak{V}'(x,y))$; donc d'après l'assertion (i), $B_{\mathfrak{g}}$ contient φ si et seulement si $B_{\mathfrak{g}}$ contient l'application $(x,y) \mapsto g^{-1} \circ \varphi(g(x), g(y))$.

v) Soit g dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Pour tout (x,y) dans $\Omega'_{\mathfrak{g}}$, $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ contient $\kappa_g(x,y)$ et $\mathfrak{V}(\kappa_g(x,y))$ est égal $\mathfrak{V}(x,y)$ car le sous-espace engendré par x et y ne dépend que de l'orbite de (x,y) sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. L'assertion résulte alors de l'assertion (i). ■

Corollaire 5.9. *L'ouvert $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est invariant pour les actions de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.*

Démonstration. D'après l'assertion (iii) de la proposition 5.8, pour tout (x,y) dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, $\mathfrak{V}(x,y)$ est l'image de $B_{\mathfrak{g}}$ par l'application $\varphi \mapsto \varphi(x,y)$; or $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est l'ensemble des éléments (x,y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{V}(x,y)$ soit de dimension maximale ; donc d'après l'assertion (iv) de la proposition 5.8, pour tout g dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(g(x), g(y))$ s'il contient (x,y). De même, d'après l'assertion (v) de la proposition 5.8, pour tout h dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(g(x), g(y))$ s'il contient (x,y). ■

5.4 On rappelle que l'ouvert $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est introduit au lemme 5.1.

Lemme 5.10. *Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$.*

i) *L'intersection de $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ et de $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ est non vide.*

ii) *Pour tout x dans l'intersection de $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ et de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{g}(x)$.*

iii) *Pour tout (x,y) dans $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$, $\mathfrak{V}(x,y)$ est un sous-espace de $\mathfrak{p}$.*

Démonstration. i) Puisque $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$ contient une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$; or $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ rencontre $\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}$ d'après le lemme 5.5 ; donc $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ rencontre $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$.

ii) Puisque $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{b}$, l'intersection de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ est un ouvert non vide de $\mathfrak{p}$; or l'application $x\mapsto\mathfrak{g}(x)$ est une application régulière de $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$; donc il suffit de montrer que $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{g}(x)$ pour tout x dans un ouvert non vide de $\mathfrak{p}$. Soient $\mathfrak{l}$ un facteur réductif de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ l'ensemble des éléments nilpotents du radical de $\mathfrak{p}$ et P_{u} le sous-groupe fermé, irréductible de G dont l'algèbre de Lie est l'image de $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{l}$ est une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{g}$ de rang $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}$ contient $\mathfrak{g}(x)$ pour tout élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{l}$; or $\mathfrak{l}$ rencontre la classe de conjugaison sous P_{u} de tout élément semi-simple de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{p}$; donc $\mathfrak{p}$ contient le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de tout élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{p}$. L'assertion résulte alors de ce que l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$ est un ouvert qui rencontre $\mathfrak{p}$.

iii) D'après l'assertion (ii) et l'assertion (i) de la proposition 5.8, $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{V}(x,y)$ pour tout (x,y) dans l'intersection de $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ et de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$; or d'après l'assertion (i), l'intersection de $\Omega'_{\mathfrak{g}}$ et de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ est partout dense dans $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$; donc $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{V}(x,y)$ pour tout (x,y) dans $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$, d'où l'assertion. ■

Soient $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ le sous-espace des éléments nilpotents du radical de $\mathfrak{p}$ et ϖ l'application canonique de $\mathfrak{p}$ sur le quotient $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$.

Lemme 5.11. *Soit U l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ qui appartiennent à $\mathfrak{p}$ et dont l'image par ϖ est élément régulier de $\mathfrak{l}$.*

i) *Pour tout x dans U, $\mathfrak{l}(\varpi(x))$ est l'image de $\mathfrak{g}(x)$ par ϖ si et seulement si l'intersection de $\mathfrak{g}(x)$ et de $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ est nulle.*

ii) *Soit U' l'ensemble des éléments x de U tels que l'intersection de $\mathfrak{g}(x)$ et de $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ soit nulle. Alors U' est un ouvert non vide de $\mathfrak{p}$.*

iii) *Pour tout (x,y) dans $\mathfrak{p}\times U'$, l'image de $\mathfrak{V}(x,y)$ par ϖ est l'image de $B_{\mathfrak{l}}$ par l'application $\varphi\mapsto\varphi(\varpi(x),\varpi(y))$.*

iv) *Soient x dans $\mathfrak{p}$ et y dans U'. Alors $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient (x,y) si et seulement si $\Lambda_{\mathfrak{l}}$ contient $(\varpi(x),\varpi(y))$ et $\mathfrak{V}(x,y)$ contient $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$.*

Démonstration. i) Soit x dans U. D'après l'assertion (ii) du lemme 5.10, $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{g}(x)$. Puisque ϖ est un morphisme d'algèbres de Lie, l'image de $\mathfrak{g}(x)$ par ϖ est contenue dans $\mathfrak{l}(\varpi(x))$; or $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{l}$ sont des algèbres de Lie réductives de même rang ; donc $\mathfrak{l}(\varpi(x))$ est l'image de $\mathfrak{g}(x)$ par ϖ si et seulement si l'intersection de $\mathfrak{g}(x)$ et de $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ est nulle car les dimensions de $\mathfrak{g}(x)$ et de $\mathfrak{l}(\varpi(x))$ sont égales à $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.

ii) Si x est un élément régulier de $\mathfrak{g}$ qui appartient à une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, contenue dans $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}(x)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$; donc son intersection avec $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ est nulle. Il en résulte que U et U' contiennent x car $\varpi(x)$ est un élément semi-simple régulier de $\mathfrak{l}$. L'application $x\mapsto\mathfrak{g}(x)$ étant une application régulière de U dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}(\mathfrak{p})$, U' est un ouvert de U.

iii) Soit (x,y) dans $\mathfrak{p}\times U'$. On note $\mathfrak{V}_{\mathfrak{l}}(\varpi(x),\varpi(y))$ l'image de $B_{\mathfrak{l}}$ par l'application $\varphi\mapsto\varphi(\varpi(x),\varpi(y))$. Pour tout z dans un ouvert non vide du sous-espace engendré par x et y, U' contient z car U' contient y ; donc d'après

l'assertion (i), pour tout z dans un ouvert non vide du sous-espace engendré par x et y, $\mathfrak{l}(\varpi(z))$ est contenu dans l'image de $\mathfrak{V}(x,y)$ par ϖ et l'image de $\mathfrak{g}(z)$ par ϖ est contenue dans $\mathfrak{V}_{\mathfrak{l}}(\varpi(x),\varpi(y))$. Il en résulte que pour tout φ dans $L_{\mathfrak{l}}$ et pour tout (a,b) dans $\mathbb{C}^2$, $\varphi(a\varpi(x)+b\varpi(y))$ appartient à l'image de $\mathfrak{V}(x,y)$ par ϖ. En outre, pour tout φ dans $L_{\mathfrak{g}}$ et pour tout (a,b) dans $\mathbb{C}^2$, $\varpi\circ\varphi(ax+by)$ appartient $\mathfrak{V}_{\mathfrak{l}}(\varpi(x),\varpi(y))$, d'où l'assertion.

iv) Soit (x,y) dans $\mathfrak{p}\times U'$. Puisque $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ est la somme des entiers $\mathrm{b}_{\mathfrak{l}}$ et $\dim\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$, il résulte de l'assertion (iii) que $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient (x,y) si et seulement si $\mathfrak{V}(x,y)$ contient $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ et $\Lambda_{\mathfrak{l}}$ contient $(\varpi(x),\varpi(y))$. ■

On didentifie $\mathfrak{l}$ à un facteur réductif de $\mathfrak{p}$.

Corollaire 5.12. *On note $\Sigma_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ l'ensemble des éléments (x,y) de $\mathfrak{p}\times U'$ qui n'appartiennent pas à $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ et tels que la dimension de $\mathfrak{V}_{\mathfrak{l}}(\varpi(x),\varpi(y))$ soit égale à $\mathrm{b}_{\mathfrak{l}}$. Soit (x,y) dans $\Sigma_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$. Alors il existe un ouvert affine V de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ et un sous-module L de $\mathbb{C}[V]\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{p}$ qui satisfont les conditions suivantes :*

1) *V contient (x,y),*

2) *le module L est engendré par $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ et les applications $(x',y')\mapsto\varphi(\varpi(x'),\varpi(y'))$ où φ est dans $B_{\mathfrak{l}}$,*

3) *pour tout (x',y') dans V, l'image de L par l'application $\varphi\mapsto\varphi(x',y')$ est la somme de $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ et de $\mathfrak{V}_{\mathfrak{l}}(\varpi(x'),\varpi(y'))$.*

En outre, L est un module libre de rang $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ et pour tout (x',y') dans un ouvert non vide de V, $\mathfrak{V}(x',y')$ est l'image de L par l'application $\varphi\mapsto\varphi(x',y')$.

Démonstration. Puisque la dimension de $\mathfrak{V}_{\mathfrak{l}}(\varpi(x),\varpi(y))$ est égale à $\mathrm{b}_{\mathfrak{l}}$, il existe un ouvert V' de $\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}$ qui satisfait les conditions suivantes : V' contient $(\varpi(x),\varpi(y))$ et pour tout (x',y') dans V', $\mathfrak{V}_{\mathfrak{l}}(x',y')$ est de dimension $\mathrm{b}_{\mathfrak{l}}$. Soit V un ouvert affine de $\mathfrak{p}\times U'$ qui contient (x,y) et dont l'image par l'application $(x',y')\mapsto(\varpi(x'),\varpi(y'))$ est contenue dans V'. Alors d'après l'assertion (iii) du lemme 5.11, le module L défini par la condition (2) satisfait la condition (3). En outre, L est un module libre de rang $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ car $B_{\mathfrak{l}}$ est un module libre de rang $\mathrm{b}_{\mathfrak{l}}$ et $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ est la somme des entiers $\mathrm{b}_{\mathfrak{l}}$ et $\dim\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$. Il résulte de l'assertion (iv) du lemme 5.11 que pour tout (x',y') dans l'intersection de $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ et de V, $\mathfrak{V}(x',y')$ est l'image de L par l'application $\varphi\mapsto\varphi(x',y')$. ■

5.5 On suppose $\mathfrak{g}$ simple. On rappelle que (ξ,ρ,η) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{b}$ est la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contient ξ. On note $\mathfrak{h}$ le centralisateur de ρ dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{u}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{u}_{+,+}$ la somme des noyaux des endomorphismes $\mathrm{ad}\,\rho-i$ où i est entier supérieur à 4, $\mathfrak{b}_-$ la somme des noyaux des endomorphismes $\mathrm{ad}\,\rho+i$ où i est entier naturel, $\mathbf{B}$ le normalisateur de $\mathfrak{b}$ dans G, $\mathbf{H}$ le centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathbf{B}$. Alors $\mathfrak{b}_-$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}$.

Lemme 5.13. *Soit h un élément régulier de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{h}$.*

i) *L'ouvert $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient (h,ξ).*

ii) *Pour tout x dans $\mathfrak{u}_{+,+}$, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h,\xi+x)$.*

iii) *Pour tout x dans $\mathfrak{u}$, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h+x,\xi)$.*

iv) *L'ouvert $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $\{h\}\times\mathbf{B}.\xi$.*

v) *Pour tout x dans $\mathfrak{b}_-$ et pour tout y dans $\mathbf{H}.\xi$, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h,x+y)$.*

Démonstration. i) On pose $\xi_1=\xi$. Soient $\xi_2,\dots,\xi_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ des éléments de $\mathfrak{g}(\xi)$ qui ont les propriétés suivantes :

1) la suite $\xi_1,\dots,\xi_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ est une base de $\mathfrak{g}(\xi)$,

2) pour $i=1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, ξ_i est vecteur propre de $\mathrm{ad}\,\rho$ relativement à la valeur propre a_i,

3) la suite $a_1,\dots,a_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ est croissante.

Selon ces notations, a_1 est égal à 2. Puisque ξ est élément régulier de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(\xi)$ est l'image de $L_{\mathfrak{g}}$ par l'application $\varphi\mapsto\varphi(\xi)$; donc il existe une base $\varphi_1,\dots,\varphi_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ de $L_{\mathfrak{g}}$ telle que $\xi_1,\dots,\xi_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ soient respectivement égaux à $\varphi_1(\xi),\dots,\varphi_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}(\xi)$. Pour $i=1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, l'application ν_i, $t\mapsto\varphi_i(h+t\xi)$, est une application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$ dont le terme constant centralise h et dont le terme de plus haut degré est égal à ξ_i. On note $v_{i,j}$ le terme de degré j de ν_i. On a alors les égalités

$$[h,v_{i,0}]=0\ ,\ [h,v_{i,j}]+[\xi,v_{i,j-1}]=0\ , \qquad (\star)$$

pour j entier strictement positif, inférieur au degré de ν_i. Puisque h est élément régulier de $\mathfrak{g}$, il en résulte que $v_{i,j}$ est vecteur propre de $\mathrm{ad}\,\rho$ pour la valeur propre $2j$ et que $a_i/2$ est le degré de ν_i. En outre, $\mathfrak{b}$ contient $v_{i,j}$ pour $i=1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ et $j=0,\dots,a_i/2$. D'après l'assertion (iii) de la proposition 5.8, le sous-espace $\mathfrak{V}(h,\xi)$ est engendré par les coefficients des applications polynomiales $\nu_1,\dots,\nu_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$; or la dimension de $\mathfrak{g}$ est égale à la somme des entiers $a_1+1,\dots,a_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}+1$; donc le nombre de ces coefficients est égal à

$$\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}+\frac{\dim\mathfrak{g}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}{2}=\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}\ .$$

Il s'agit alors de montrer que ces coefficients sont linéairement indépendants.

Puisque pour j entier naturel, le noyau de $\mathrm{ad}\,\rho-j$ contient $v_{1,j},\dots,v_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g},j}$, il suffit de montrer que pour j entier naturel, les éléments non nuls de la suite $v_{1,j},\dots,v_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g},j}$ sont linéairement indépendants car d'après les égalités $(\star)$, $v_{i,j}$ n'est pas nul si j est inférieur au degré de ν_i. On montre cette assertion en raisonnant par récurrence sur $a_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}/2-j$. Puisque $\mathfrak{g}$ est simple, $\nu_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ est la seule application de degré $a_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}/2$; donc l'assertion est vraie pour j égal à $a_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}/2$ car $\xi_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ est égal à $v_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g},j}$. On suppose j strictement positif et l'assertion vraie pour $j+1$. Soient $b_1,\dots,b_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ des éléments de $\mathbb{C}$ tels que

$$b_1v_{1,j}+\cdots+a_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}v_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g},j}=0\ .$$

On note I l'ensemble des entiers i de $\{1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}\}$ tels que j soit strictement inférieur au degré de ν_i. Alors il vient

$$\sum_{i\in I}b_iv_{i,j}\in\mathfrak{g}(\xi)\ ,$$

car $\mathfrak{g}(\xi)$ contient $v_{i,j}$ si j n'est pas dans I ; or $\mathfrak{u}$ contient $v_{1,j+1},\ldots,v_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g},j+1}$; donc d'après les égalités $(\star)$, on a

$$\sum_{i\in I} b_i v_{i,j+1} = 0 \ ,$$

car h est un élément régulier de $\mathfrak{g}$. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence que b_i est nul si i est dans I. Par suite, il vient

$$\sum_{i\notin I} b_i v_{i,j} = 0 \, ;$$

or pour i dans $\{1,\ldots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}\}\backslash I$, $v_{i,j}$ est égal à ξ_i s'il n'est pas nul ; donc b_i est nul si $v_{i,j}$ n'est pas nul, d'où l'assertion pour j. Puisque h est élément régulier de $\mathfrak{g}$, la suite $\varphi_1(h),\ldots,\varphi_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}(h)$ est une base de $\mathfrak{h}$ car la suite $\varphi_1,\ldots,\varphi_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ est une base de $L_{\mathfrak{g}}$; donc l'assertion est vraie pour j nul, d'où l'assertion pour tout j.

ii) On note $t\mapsto g(t)$ le sous-groupe à un paramètre de $\mathbf{H}$ dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\mathrm{ad}\,\rho$. Soient x dans $\mathfrak{u}_{+,+}$. Puisque $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est un ouvert de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ qui contient (h,ξ), $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h,\xi+t^{-2}g(t)(x))$ pour tout élément non nul t d'un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient 0 ; donc il existe un élément non nul t de $\mathbb{C}$ tel que $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contienne $(h,t^2\xi+g(t)(x))$ car $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est invariant pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Puisque $g(t)(h)$ et $g(t)(\xi+h)$ sont respectivement égaux à h et à $t^2\xi+g(t)(h)$, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h,\xi+x)$ car $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est invariant pour l'action de G.

iii) Soient x dans $\mathfrak{u}$. Puisque x est dans $\mathfrak{u}$, $g(t)(x)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ; or $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est un ouvert qui contient (h,ξ) d'après l'assertion (i) ; donc $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h+g(t)(x),\xi)$ pour tout t dans un ouvert non vide de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Puisque $g(t)(h)$ et $g(t)(\xi)$ sont respectivement égaux à h et à $t^2\xi$, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h+x,\xi)$ car $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est invariant pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

iv) Soit $\mathbf{U}$ le sous-groupe connexe fermé de G dont l'algèbre de Lie est l'image de $\mathfrak{u}$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Alors l'orbite de $\mathbf{U}.\xi$ est égale à $\xi+\mathfrak{u}_{+,+}$; or $\mathbf{B}$ est égal à $\mathbf{HU}$; donc $\mathbf{B}.\xi$ est égal à $\mathbf{H}.\xi+\mathfrak{u}_{+,+}$. Soient x dans $\mathfrak{u}_{+,+}$ et g dans $\mathbf{H}$. Puisque $\mathfrak{u}_{+,+}$ est stable par $\mathbf{H}$, $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h,\xi+g^{-1}(x))$ d'après l'assertion (ii) ; or $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est invariant pour l'action de G ; donc $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h,g(\xi)+x)$ car $g(h)$ est égal à h, d'où l'assertion.

vi) Soient x dans $\mathfrak{b}_-$ et k dans $\mathbf{H}$. Puisque $k^{-1}(x)$ est dans $\mathfrak{b}_-$, $t^{-2}g(t)\circ k^{-1}(x)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini ; donc $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h,\xi+t^{-2}g(t)\circ k^{-1}(x))$ pour tout t dans un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Puisque $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est invariant pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, il contient $(h,g(t)(\xi+k^{-1}(x)))$ pour tout t dans un ouvert non vide de $\mathbb{C}$; donc $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ contient $(h,\xi+k^{-1}(x))$ et $(h,k(\xi)+x)$ car $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est $\mathbf{H}$-invariant. ■

5.6 Soit B la base du système de racines positives R_+. Pour tout β dans B, on désigne par $\mathfrak{u}_\beta$ la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ où α est dans $R_+\backslash\{\beta\}$.

Lemme 5.14. *Soient β dans B et $\mathfrak{b}_\beta$ la somme des sous-espaces $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{u}_\beta$. On note $\mathbf{U}_\beta$ le sous-groupe fermé connexe de G dont l'algèbre de Lie est l'image de $\mathfrak{u}_\beta$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.*

i) *Le sous-espace $\mathfrak{b}_\beta$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{b}$.*

ii) *L'image de* $\mathbf{U}_\beta \times \mathfrak{h}$ *par l'application* $(g,x) \mapsto g(x)$ *est l'ensemble des éléments semi-simples de* $\mathfrak{g}$ *qui appartiennent à* $\mathfrak{b}_\beta$.

iii) *La sous-algèbre* $\mathfrak{b}_\beta$ *contient les composantes nilpotente et semi-simple de ses éléments.*

iv) *Si* x *est un élément régulier de* $\mathfrak{g}$ *qui appartient à* $\mathfrak{b}_\beta$, *alors* $\mathfrak{b}_\beta$ *contient* $\mathfrak{g}(x)$.

v) *Pour tout couple* (x,y) *d'éléments de* $\mathfrak{b}_\beta$, $\mathfrak{b}_\beta$ *contient* $\mathfrak{V}(x,y)$.

Démonstration. i) Puisque β est dans B, $\mathfrak{u}_\beta$ est un idéal de $\mathfrak{b}$; donc $\mathfrak{b}_\beta$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{b}$.

ii) Puisque tout élément de $\mathfrak{h}$ est élément semi-simple de $\mathfrak{g}$, l'image de $\mathbf{U}_\beta \times \mathfrak{h}$ par l'application $(g,x) \mapsto g(x)$ est contenue dans l'ensemble des éléments semi-simples de $\mathfrak{g}$. Soit x un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{b}_\beta$. Puisque $\mathfrak{b}_\beta$ est contenu dans $\mathfrak{b}$, il existe un élément g de $\mathbf{U}$ tel que $\mathfrak{h}$ contienne $g(x)$ car $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, contenue dans $\mathfrak{b}$. Le sous-groupe $\mathbf{U}_\beta$ de $\mathbf{U}$ étant un sous-groupe invariant de codimension 1 de $\mathbf{U}$, il existe un élément y de $\mathfrak{g}^\beta$ tel que $\mathbf{U}_\beta$ contienne $\exp(\mathrm{ad}\, y)\circ g$. Il en résulte que $\mathfrak{b}_\beta$ contient $\exp(\mathrm{ad}\, y)\circ g(x)$; donc $\exp(\mathrm{ad}\, y)\circ g(x)$ est égal à $g(x)$, d'où l'assertion.

iii) Soient x dans $\mathfrak{b}_\beta$, x_{n} et x_{s} les composantes nilpotente et semi-simple de x. Alors x_{s} est somme de trois éléments x_1, x_2, x_3 qui sont respectivement dans $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}^\beta$, $\mathfrak{u}_\beta$. Puisque x est dans $\mathfrak{b}_\beta$, il existe un élément x_4 de $\mathfrak{u}_\beta$ tel que x_{n} soit égal à $-x_2 + x_4$. Des égalités :

$$0 = [x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}}] = -[x_1,x_2] + [x_2,x_3] + [x_1,x_4] + [x_2,x_4] + [x_3,x_4] \ ,$$

on déduit que $[x_1,x_2]$ est nul car $\mathfrak{u}_\beta$ est un idéal de $\mathfrak{b}$. Soit g un élément de $\mathbf{U}$ tel que $\mathfrak{h}$ contienne $g(x_{\mathrm{s}})$. Alors il existe un élément t de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbf{U}_\beta$ contienne $g\circ \exp(t\mathrm{ad}\, x_2)$ et on a

$$g(x_{\mathrm{s}}) - g(x_1+x_2) \in \mathfrak{u}_\beta \ , \ g(x_1+x_2) = g\circ \exp(t\mathrm{ad}\, x_2)(x_1+x_2) \ ,$$

$$g\circ \exp(t\mathrm{ad}\, x_2)(x_1+x_2) - x_1 - x_2 \in \mathfrak{u}_\beta \, ;$$

donc x_2 est nul et $\mathfrak{b}_\beta$ contient x_{s} et x_{n}.

iv) Soient x un élément régulier de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{b}_\beta$, x_{n} et x_{s} les composantes nilpotente et semi-simple de x. D'après l'assertion (iii), $\mathfrak{b}_\beta$ contient x_{s} et x_{n}. D'après l'assertion (ii), on peut supposer que $\mathfrak{h}$ contient x_{s}. Alors le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$ est contenu dans $\mathfrak{h}$ car toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$ contient $\mathfrak{z}$. Puisque x est un élément régulier de $\mathfrak{g}$, x_{n} est un élément régulier de l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$; or l'intersection de $\mathfrak{b}_\beta$ et de l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$ contient x_{n} ; donc $\mathfrak{u}_\beta$ contient l'ensemble des éléments nilpotents de la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$ qui contient x_{n}. Il en résulte que $\mathfrak{g}(x)$ est contenu dans la somme de $\mathfrak{u}_\beta$ et de $\mathfrak{z}$. Par suite, $\mathfrak{b}_\beta$ contient $\mathfrak{g}(x)$.

v) Puisque $\mathfrak{h}$ est contenu dans $\mathfrak{b}_\beta$, l'intersection de $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ et de $\mathfrak{b}_\beta$ est un ouvert partout dense de $\mathfrak{b}_\beta$. D'après l'assertion (iv), pour tout φ dans $L_{\mathfrak{g}}$ et pour tout x dans l'intersection de $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$ et de $\mathfrak{b}_\beta$, $\mathfrak{b}_\beta$ contient $\varphi(x)$; donc $\mathfrak{b}_\beta$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans $\mathfrak{b}_\beta$. Il en résulte que pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathfrak{b}_\beta$ et pour tout φ dans $L_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{b}_\beta$ contient $\varphi(ax+by)$ pour tout (a,b) dans $\mathbb{C}^2$, d'où l'assertion d'après l'assertion (iii) de la proposition 5.8. ∎

6. Complexes canoniques d'une algèbre de Lie réductive.

Le complexe canonique $C_\bullet(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$ est défini en [4](Définition 4.1). L'espace sous-jacent à $C_\bullet(\mathfrak{g})$ est l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\wedge(\mathfrak{g})$ et sa différentielle est la $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-dérivation qui à l'élément v de $\mathfrak{g}$ associe la fonction $(x,y)\mapsto\langle v,[x,y]\rangle$ sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. On désigne par $I_\mathfrak{g}$ l'espace des bords de degré 0 du complexe $C_\bullet(\mathfrak{g})$. Selon les notations de 4.2, $C_\bullet(\mathfrak{g})$ est le complexe $C_\bullet(\lambda_\mathfrak{g})$ où $\lambda_\mathfrak{g}$ est l'application qui à l'élément v de $\mathfrak{g}$ associe la fonction $(x,y)\mapsto\langle v,[x,y]\rangle$ sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. En outre, $I_\mathfrak{g}$ est égal à $I_{\lambda_\mathfrak{g}}$. On désigne par $J_\mathfrak{g}$ le radical de $I_\mathfrak{g}$. On rappelle que $K_{\lambda_\mathfrak{g}}$ désigne le noyau du morphisme $\theta_{\lambda_\mathfrak{g}}$. On utilise le sous-module $B_\mathfrak{g}$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ introduit dans la proposition 5.8. D'après la proposition 5.8, $B_\mathfrak{g}$ est un module libre de rang $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$. En outre, $K_{\lambda_\mathfrak{g}}$ contient $B_\mathfrak{g}$ d'après l'assertion (iii) de la proposition 5.8 et l'assertion (iv) du lemme 5.3.

Définition 6.1. On appelle complexe canonique de deuxième espèce de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ le complexe canonique associé à $\lambda_\mathfrak{g}$ et à $B_\mathfrak{g}$ et on le note $E_\bullet(\mathfrak{g})$. On appelle complexe réduit de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et on le note $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ le sous-complexe de $E_\bullet(\mathfrak{g})$ dont l'espace des éléments de degré j est égal à $E_j(\mathfrak{g})$ pour j différent de $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ et à $J_\mathfrak{g}E_{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ pour j égal à $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$.

6.1 Soient $Y_+(\mathfrak{g})$ la réunion des supports dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ des groupes d'homologie en degré différent de $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ du complexe $E_\bullet(\mathfrak{g})$, $Y_0(\mathfrak{g})$ le support dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ du module $J_\mathfrak{g}/I_\mathfrak{g}$, et $X_0(\mathfrak{g})$ l'image de $Y_0(\mathfrak{g})$ par la première projection de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$. Pour tout g dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et pour tout h dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on note respectivement $g^\#$ et $\kappa_h^\#$ les automorphismes de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\wedge(\mathfrak{g})$ qui à l'application φ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ dans $\wedge(\mathfrak{g})$ associent les applications $(x,y)\mapsto\varphi(g(x),g(y))$ et $(x,y)\mapsto\varphi(\kappa_h(x,y))$. On rappelle que l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est définie au lemme 5.1. Pour g dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, on note $\overline{g}$ l'automorphisme linéaire $(x,y)\mapsto(g(x),g(y))$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$.

Lemme 6.2. *Soient g un automorphisme de $\mathfrak{g}$ et h un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.*

i) *Les idéaux $I_\mathfrak{g}$ et $J_\mathfrak{g}$ sont stables par $g^\#$, $\kappa_h^\#$.*

ii) *La partie $Y_0(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est fermée et stable par $\overline{g}$.*

iii) *La partie $Y_0(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est stable par κ_h.*

Démonstration. i) Pour tout v dans $\mathfrak{g}$, les images respectives de $\lambda_\mathfrak{g}(v)$ par $g^\#$ et $\kappa_h^\#$ sont respectivement égales à $\lambda_\mathfrak{g}(g^{-1}(v))$ et $\det h\lambda_\mathfrak{g}(v)$; donc $I_\mathfrak{g}$ est stable par $g^\#$ et $\kappa_h^\#$. Il en résulte que $J_\mathfrak{g}$ est stable par $g^\#$ et $\kappa_h^\#$.

Les assertions (ii) et (iii) résultent de l'assertion (i) car $J_\mathfrak{g}$ est un $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module de type fini. ■

Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels. Pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$, on note ρ_t l'automorphisme linéaire $(x',x)\mapsto(x',tx)$ de $V_1\times V_2$.

Lemme 6.3. *Soient T une partie fermée de $V_1\times V_2$ et S l'image de T par la projection canonique de $V_1\times V_2$ sur V_1. On suppose que pour tout nombre complexe non nul t, T est stable par ρ_t. Soient T^* l'intersection de T avec $V_1\times(V_2\backslash\{0\})$ et S^* l'image de T^* par la projection de $V_1\times V_2$ sur V_1.*

i) *La partie S^* de V_1 est fermée.*

ii) *La partie S de V_1 est fermée.*

Démonstration. i) Soit $\mathbb{P}(V_2)$ l'espace projectif de V_2 et ϖ l'application canonique de $V_2\backslash\{0\}$ sur $\mathbb{P}(V_2)$. On note $\tilde{T}$ l'image de T^* par l'application $(x', x) \mapsto (x', \varpi(x))$ de $V_1 \times (V_2\backslash\{0\})$ dans $V_1 \times \mathbb{P}(V_2)$. Puisque T^* est invariant par les automorphismes linéaires ρ_t, T^* est l'image réciproque de $\tilde{T}$ par cette application ; or T^* est fermé dans $V_1 \times (V_2\backslash\{0\})$; donc $\tilde{T}$ est fermé dans $V_1 \times \mathbb{P}(V_2)$. En outre, S^* est la projection de $\tilde{T}$ sur V_1 ; donc S^* est fermé dans V_1 car $\mathbb{P}(V_2)$ est une variété projective.

ii) Puisque l'image de $\mathbb{C}^*$ par l'application $t \mapsto \rho_t$ est un sous-groupe irréductible du groupe des automorphismes linéaires de $V_1 \times V_2$ qui laissent stable T, chacune des composantes irréductibles de T est stable par l'action de ce sous-groupe ; donc il suffit de montrer l'assertion dans le cas où T est irréductible. On suppose alors T irréductible. Si T^* est non vide, T est l'adhérence de T^* dans $V_1 \times V_2$; donc S est égal à S^* car S^* est fermé d'après l'assertion (i). Il en résulte que S est fermé dans V_1 dans ce cas. Dans le cas contraire, T est égal à $S \times \{0\}$ et S est fermé dans V_1 car T est fermé dans $V_1 \times V_2$. ■

Corollaire 6.4. *La partie $X_0(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est un cône fermé,* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$*-invariant.*

Démonstration. D'après l'assertion (iii) du lemme 6.2, $Y_0(\mathfrak{g})$ est stable par l'automorphisme linéaire $(x, y) \mapsto (x, ty)$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$; donc le corollaire résulte du lemme 6.3 et des assertions (ii) et (iii) du lemme 6.2. ■

6.2 On note $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ la variété commutante de $\mathfrak{g}$. Par définition, $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ est la variété des zéros dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ de l'idéal $I_\mathfrak{g}$.

Lemme 6.5. *L'idéal $I_\mathfrak{g}$ est premier si et seulement si le complexe réduit $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ n'a pas d'homologie en degré $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$. En outre, le $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$-ième groupe d'homologie du complexe $E_\bullet(\mathfrak{g})$ est isomorphe au quotient de l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_\mathbb{C} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ par l'idéal $I_\mathfrak{g}$.*

Démonstration. D'après l'assertion (iii) de la proposition 5.8 et l'assertion (vi) du lemme 4.1, $E_{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ est égal à $\wedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(B_\mathfrak{g})$. Il en résulte que $E_{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ est un module libre de rang 1. Si ε est un générateur de $E_{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$, $I_\mathfrak{g}\varepsilon$ est l'espace des bords de degré $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ du complexe $E_\bullet(\mathfrak{g})$; donc les groupes d'homologie en degré $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ des complexes $E_\bullet(\mathfrak{g})$ et $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ sont respectivement isomorphes à $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes_\mathbb{C} \mathrm{S}(\mathfrak{g})/I_\mathfrak{g}$ et $J_\mathfrak{g}/I_\mathfrak{g}$. Par suite, $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ n'a pas d'homologie en degré $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ si et seulement si $I_\mathfrak{g}$ est un idéal radiciel. D'après [17], la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ est irréductible ; or $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ est la variété des zéros de $I_\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$; donc $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ n'a pas d'homologie en degré $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ si et seulement si $I_\mathfrak{g}$ est un idéal premier. ■

7. Au voisinage d'un élément semi-simple.

On fixe un élément semi-simple non central ρ de $\mathfrak{g}$. Soit π_ρ l'application $(g, x) \mapsto g(x)$ de $G \times \mathfrak{g}(\rho)$ dans $\mathfrak{g}$. On a alors le lemme bien connu dont la démonstration est rappelée brièvement.

Lemme 7.1. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est somme directe des sous-espaces $\mathfrak{g}(\rho)$ et $[\rho,\mathfrak{g}]$ qui sont orthogonaux. En outre, il existe un ouvert affine W de $\mathfrak{g}(\rho)$ qui contient ρ et qui satisfait les conditions suivantes :*

1) *la restriction de π_ρ à $G\times W$ est un morphisme lisse de $G\times W$ sur un ouvert de $\mathfrak{g}$ qui contient ρ,*

2) *pour tout x dans W, la restriction de $\mathrm{ad}\,x$ à $[\rho,\mathfrak{g}]$ est un automorphisme linéaire de $[\rho,\mathfrak{g}]$.*

Démonstration. D'après la propriété d'invariance de la forme de Killing, les sous-espaces $\mathfrak{g}(\rho)$ et $[\rho,\mathfrak{g}]$ sont orthogonaux. Puisque ρ est semi-simple, $\mathfrak{g}$ est somme directe des sous-espaces propres de $\mathrm{ad}\,\rho$ et $[\rho,\mathfrak{g}]$ est somme des sous-espaces propres de $\mathrm{ad}\,\rho$, relatifs aux valeurs propres non nulles ; donc $\mathfrak{g}$ est somme directe des sous-espaces $\mathfrak{g}(\rho)$ et $[\rho,\mathfrak{g}]$.

Pour tout x dans $\mathfrak{g}(\rho)$, le sous-espace $[\rho,\mathfrak{g}]$ est stable par $\mathrm{ad}\,x$. Puisque la restriction de $\mathrm{ad}\,\rho$ à $[\rho,\mathfrak{g}]$ est bijective, il existe un ouvert affine W de $\mathfrak{g}(\rho)$ qui contient ρ et qui satisfait la condition (2) du lemme. Alors π_ρ est une submersion en $(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}},x)$ pour tout x dans W. Puisque l'ensemble des points de $G\times\mathfrak{g}(\rho)$ en lesquels π_ρ est une submersion, est stable pour la multiplication à gauche sur G, π_ρ est une submersion en tout point de $G\times W$. Par suite, la restriction de π_ρ à $G\times W$ est un morphisme lisse de $G\times W$ sur un ouvert de $\mathfrak{g}$ qui contient ρ. ■

Dans ce qui suit, on fixe un ouvert affine W de $\mathfrak{g}(\rho)$ qui contient ρ et qui satisfait les conditions (1) et (2) du lemme. L'image U de $G\times W$ par π_ρ est alors un ouvert G-invariant qui contient ρ. On rappelle que $X_0(\mathfrak{g})$ est la première projection sur $\mathfrak{g}$ du support dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ du quotient $J_{\mathfrak{g}}/I_{\mathfrak{g}}$. On choisit W assez petit pour satisfaire la condition suivante : $X_0(\mathfrak{g}(\rho))$ ne rencontre pas W s'il ne contient pas ρ. Ce choix est possible car $X_0(\mathfrak{g}(\rho))$ est fermé dans $\mathfrak{g}(\rho)$ d'après le corollaire 6.4. Soient λ l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui à v associe la fonction $(x,y)\mapsto\langle v,[x,y]\rangle$ et λ_ρ la restriction de λ à $\mathfrak{g}(\rho)$. On note I_W l'idéal de $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ engendré par $\lambda(\mathfrak{g})$.

Lemme 7.2. *Si $X_0(\mathfrak{g}(\rho))$ ne contient pas ρ, alors l'idéal I_W est radiciel.*

Démonstration. On suppose que $X_0(\mathfrak{g}(\rho))$ ne contient pas ρ. Soit I'_W l'espace des sections au dessus de $W\times\mathfrak{g}(\rho)$ de la localisation sur $\mathfrak{g}(\rho)\times\mathfrak{g}(\rho)$ de $I_{\mathfrak{g}(\rho)}$. Alors I'_W est un idéal radiciel. D'après le lemme 4.5, le radical J_W de I_W est l'ensemble des éléments φ de $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui satisfont la condition suivante : pour tout x dans W, $\varphi(x)$ appartient à l'idéal de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ engendré par l'image de $\mathrm{ad}\,x$. Soient $v_1,\ldots,v_m$ une base de $[\rho,\mathfrak{g}]$ et J l'idéal $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})[\rho,\mathfrak{g}]$ de $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. D'après la condition (2) du lemme 7.1, pour tout w dans $[\rho,\mathfrak{g}]$, il existe des éléments $a_1,\ldots,a_m$ de $\mathbb{C}[W]$ tels que

$$w=\sum_{i=1}^m a_i(x)[x,v_i]\ ,$$

pour tout x dans W ; donc pour tout (x,y) dans $W\times\mathfrak{g}$, on a

$$\langle w,y\rangle=\sum_{i=1}^m a_i(x)\langle[x,v_i],y\rangle=-\sum_{i=1}^m a_i(x)\langle v_i,[x,y]\rangle\ .$$

Il en résulte que I_W contient J ; or $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ est somme directe de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}(\rho))$ et de l'idéal de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ engendré par $[\rho,\mathfrak{g}]$ car $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{g}(\rho)$ et de $[\rho,\mathfrak{g}]$; donc J_W est somme directe de J et de l'ensemble J'_W des éléments φ de $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g}(\rho))$ qui satisfont la condition suivante : pour tout x dans W, $\varphi(x)$ appartient à l'idéal de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}(\rho))$ engendré par l'image de la restriction de $\mathrm{ad}\,x$ à $\mathfrak{g}(\rho)$ car $[\rho,\mathfrak{g}]$ est contenu dans l'image de $\mathrm{ad}\,x$. En outre, I'_W est contenu dans I_W car $\mathfrak{g}(\rho)$ et $[\rho,\mathfrak{g}]$ sont orthogonaux ; or d'après le lemme 4.5, J'_W est le radical de I'_W ; donc I_W contient J'_W et J_W. ■

On note $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ les restrictions à $U\times\mathfrak{g}$ des localisations respectives sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ de $I_{\mathfrak{g}}$ et $J_{\mathfrak{g}}$, et on pose :

$$I^{(G)}=\Gamma(G\times W\times\mathfrak{g},(\pi_\rho\times\mathrm{id})^*(\mathcal{I}))\ ,\ J^{(G)}=\Gamma(G\times W\times\mathfrak{g},(\pi_\rho\times\mathrm{id})^*(\mathcal{J}))\ .$$

Soit α l'automorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui à l'application φ de $G\times W$ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ associe l'application $(g,x)\mapsto g.\varphi(g,x)$ où $(g,p)\mapsto g.p$ désigne le prolongement canonique de l'action de G dans $\mathfrak{g}$ à l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$.

Lemme 7.3. *L'idéal $I^{(G)}$ est l'image par α de l'idéal $\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}}I_W$.*

Démonstration. Soit $v_1,\dots,v_n$ une base de $\mathfrak{g}$. Pour $i=1,\dots,n$, il existe des fonctions régulières $a_{i,1},\dots,a_{i,n}$ sur G qui sont définies par l'égalité :

$$g(v_i)=a_{i,1}(g)v_1+\cdots+a_{i,n}(g)v_n\ .$$

Pour $i=1,\dots,n$, l'image de $\lambda(v_i)$ par α est la fonction sur $G\times W\times\mathfrak{g}$,

$$(g,x,y)\mapsto\langle v_i,[x,g^{-1}(y)]\rangle\ .$$

Il résulte alors des égalités :

$$\langle v_i,[x,g^{-1}(y)]\rangle=\langle g(v_i),[g(x),y]\rangle=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}(g)\langle v_j,[g(x),y]\rangle\ ,$$

que $I^{(G)}$ contient $\alpha\circ\lambda(v_i)$. Réciproquement, l'image par α^{-1} de $\lambda_{\mathfrak{g}}(v_i)\circ(\pi_\rho\times\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$ est la fonction sur $G\times W\times\mathfrak{g}$,

$$(g,x,y)\mapsto\langle v_i,[g(x),g(y)]\rangle\ .$$

Il résulte alors de l'égalité :

$$\langle v_i,[g(x),g(y)]\rangle=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}(g^{-1})\langle v_j,[x,y]\rangle\ ,$$

que $\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}}I_W$ contient la fonction $\alpha^{-1}(\lambda_{\mathfrak{g}}(v_i)\circ(\pi_\rho\times\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}))$, d'où le lemme. ■

Proposition 7.4. *Si $X_0(\mathfrak{g}(\rho))$ ne contient pas ρ, alors $X_0(\mathfrak{g})$ ne contient pas ρ.*

Démonstration. On suppose que $X_0(\mathfrak{g}(\rho))$ ne contient pas ρ. D'après le lemme 7.2, I_W est un idéal radiciel ; donc d'après le lemme 7.3, $I^{(G)}$ est un idéal radiciel. D'après l'assertion (i) du lemme 3.1, $J^{(G)}$ est le radical de $I^{(G)}$ car $G\times W\times\mathfrak{g}$ est une variété affine ; donc $I^{(G)}$ est égal à $J^{(G)}$. Il résulte alors de l'assertion (ii) du lemme 3.1 que $\mathcal{I}$ est égal à $\mathcal{J}$; donc $\{\rho\}\times\mathfrak{g}$ ne rencontre pas le support de $J_{\mathfrak{g}}/I_{\mathfrak{g}}$, d'où l'assertion. ■

8. Sur certaines sous-variétés de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Dans cette section, on suppose $\mathfrak{g}$ simple, de dimension strictement supérieure à 3. On rappelle que (ξ, ρ, η) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal de $\mathfrak{g}$, que $\mathfrak{b}$ est l'unique sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contient ξ et que $\mathfrak{h}$ est le centralisateur de ρ dans $\mathfrak{g}$. On désigne par $\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}$ le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$ et par $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tels que x et y appartiennent à une même sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. D'après le lemme 9.4, $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ est fermé dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

8.1 Soit $\mathfrak{s}$ le sous-espace engendré par ξ, ρ, η. Alors $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre simple de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}}$ le cône nilpotent de $\mathfrak{s}$, T_5 l'intersection de $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ avec $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ et $\mathbf{S}$ le sous-groupe fermé connexe de G dont l'algèbre de Lie est l'image de $\mathfrak{s}$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{s}$.

Lemme 8.1. *Soient T_3 et T_4 les images respectives de $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}} \times \mathbb{C}$ et de $\mathfrak{s} \times \mathbb{C}$ par l'application $(x, t) \mapsto (x, tx)$ de $\mathfrak{s} \times \mathbb{C}$ dans $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$.*

i) *Les parties T_3, T_4, T_5 de $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ sont fermées, irréductibles, invariantes pour les actions de $\mathbf{S}$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. En outre, leurs dimensions sont respectivement égales à 3, 4, 5.*

ii) *Soit T une partie fermée irréductible de $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ qui est non vide et invariante pour les actions de $\mathbf{S}$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Alors T est l'une des parties suivantes : $\{0\}$, T_3, T_4, T_5, $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$.*

Démonstration. i) Par définition, T_5 est égal à $\mathcal{X}_{\mathfrak{s}}$; donc d'après l'assertion (i) du lemme 9.4, T_5 est une partie fermée irréductible de dimension 5 de $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ qui est invariante pour les actions de $\mathbf{S}$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Par définition, T_3 est l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}} \times \mathfrak{N}_{\mathfrak{s}}$ tels que x et y soient colinéaires ; donc T_3 est fermé dans $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ car $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}}$ est fermé dans $\mathfrak{s}$. En outre, T_3 est de dimension 3 et invariant pour l'action de $\mathbf{S}$ car $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}}$ est de dimension 2 et $\mathbf{S}$-invariant. Puisque $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}}$ est un cône, T_3 est invariant pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. De même, T_4 est une partie fermée de dimension 4 de $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ qui est invariante pour les actions de $\mathbf{S}$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Les parties T_3 et T_4 sont irréductibles comme images de variétés irréductibles.

ii) La partie T étant invariante pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, T est invariant par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$. En outre, pour tout (x, y) dans T et pour toute combinaison linéaire v de x et de y, T contient (x, v) et (v, y). Il résulte alors du lemme 6.3 que l'image T' de T par la première projection de $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ sur $\mathfrak{s}$ est un cône fermé $\mathbf{S}$-invariant de $\mathfrak{s}$ car T est non vide et invariant pour l'action de $\mathbf{S}$. Si T est de dimension nulle, T est alors égal à $\{0\}$. On suppose T de dimension strictement positive et inférieure à 3. Alors T' est de dimension inférieure à 2 ; or les $\mathbf{S}$-orbites non nulles dans $\mathfrak{s}$ sont de dimension 2 ; donc T' est égal à $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}}$ car la $\mathbf{S}$-orbite d'un élément semi-simple non nul de $\mathfrak{s}$ n'est pas un cône. Il en résulte que T contient T_3 ; or T est irréductible et de dimension 3 ; donc T est égal à T_3.

On suppose T de dimension supérieure à 4 et T' contenu dans $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}}$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Alors T' est égal à $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}}$ car T' n'est pas nul et $\mathbf{S}$-invariant. En outre, T étant de dimension supérieure à 4, il existe des éléments a, b, c de $\mathbb{C}$ qui ont les propriétés suivantes : T contient $(\xi, a\xi + b\eta + c\rho)$ et b et c ne sont pas tous deux nuls ; donc T contient $(\xi, b\eta + c\rho)$. Puisque $b\eta + c\rho$

est semi-simple pour c non nul, c est nul et T contient (ξ, η). Ceci est absurde car $\xi + \eta$ est semi-simple ; donc T' n'est pas contenu dans $\mathfrak{N}_{\mathfrak{s}}$. Puisque le cône engendré par la $\mathbf{S}$-orbite d'un élément semi-simple non nul est de dimension 3, T' est égal à $\mathfrak{s}$ car T' est fermé dans $\mathfrak{s}$. Par suite, T contient T_4. La partie T étant irréductible, T est égale à T_4 si T est de dimension 4.

On suppose T de dimension supérieure à 5 et T différent de T_5. Puisque T_5 est fermé dans $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$, pour tout x dans un ouvert non vide de $\mathfrak{s}$, il existe un élément y de $\mathfrak{s}$ qui a les deux propriétés suivantes : T contient (x, y) et il n'existe pas de sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{s}$ qui contient x et y. La partie T étant invariante pour les actions de $\mathbf{S}$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, il en est de même pour tout x dans un cône ouvert $\mathbf{S}$-invariant ; donc il existe des éléments non nuls a et b de $\mathbb{C}$ tels que T contienne $(\rho, a\xi + b\eta)$. Puisque T est invariant pour l'action du sous-groupe à un paramètre de $\mathbf{S}$ engendré par $\mathrm{ad}\,\rho$, T contient $(\rho, at\xi + bt^{-1}\eta)$ pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$; donc T contient $(\rho, sta\xi + bs\eta)$ pour tout couple (s, t) d'éléments non nuls de $\mathbb{C}$. Il en résulte que T contient $(\rho, u\xi + v\eta)$ pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathbb{C}$ car T est fermé. Par suite, T contient $\{x\} \times \mathfrak{s}$ pour tout x dans le cône engendré par l'orbite de ρ ; donc T est égal à $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$, d'où l'assertion. ■

8.2 La sous-algèbre $\mathfrak{g}$ est somme directe de sous-$\mathfrak{s}$-modules simples, deux à deux orthogonaux, $V_1, \ldots, V_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ tels que V_1 soit égal à $\mathfrak{s}$. On désigne par V la somme des sous-espaces $V_2, \ldots, V_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$, par Δ_V la sous-variété $T_4 \oplus V \times V$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et par $\mathfrak{g}_2$ l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tels que x et y soient colinéaires.

Lemme 8.2. *Soit X une partie fermée, irréductible de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui est invariante pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.*

i) *Soient x dans $\mathfrak{s}$, v et w dans V tels que $x+v$ et $x+w$ soient linéairement indépendants. Si X contient $(x + v, x + w)$, alors pour tout (a, b, c, d, r, t) dans $\mathbb{C}^6$, X contient $(rx + av + bw, tx + cv + dw)$.*

ii) *L'intersection de X et de $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ est invariante pour les actions de $\mathbf{S}$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.*

iii) *Soit X_1 l'image de X par la première projection de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$. Alors l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$ est l'image de $X_1 \times \mathbb{C}^2$ par l'application $(x, s, t) \mapsto (sx, tx)$.*

iv) *Soit Y l'intersection de X et de Δ_V. Alors X contient T_3 si l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$ est strictement contenue dans une composante irréductible de Y.*

Démonstration. i) On suppose que X contient $(x + v, x + w)$. Soient Ω l'ensemble des éléments (a, b, c, d) de $\mathbb{C}^4$ tels que $(a + b)(c + d)$ soit non nul. On note $P_{v,w}$ le sous-espace engendré par v et w et δ l'application

$$\Omega \to P^2_{v,w}\ ,\ (a, b, c, d) \mapsto \left(\frac{av + bw}{a + b}, \frac{cv + dw}{c + d}\right)\ .$$

Si v et w ne sont pas colinéaires, alors δ est une submersion en tout point (a, b, c, d) de Ω tels que $a + b$ et $c + d$ soient différents de 1. Dans le cas où v et w sont colinéaires, il existe un élément z de $\mathbb{C}$ qui est différent de 1 et qui satisfait une des deux égalités $w = zv$ et $v = zw$ car $x+v$ et $x+w$ sont linéairement indépendants.

Alors dans ce cas, δ est une submersion en tout point (a,b,c,d) de Ω tels que $abcd$ soit non nul. En particulier, l'image de δ est partout dense dans $P^2_{v,w}$. Puisque X est invariant pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, X contient

$$(x+\frac{av+bw}{a+b}, x+\frac{cv+dw}{c+d})\ ,$$

pour tout (a,b,c,d) dans Ω ; donc X contient $(x+v', x+w')$ pour tout (v',w') dans $P^2_{v,w}$ car X est fermé $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Par suite, pour tout (v',w') dans $P^2_{v,w}$ et pour tout couple (r,t) d'éléments non nuls de $\mathbb{C}$, X contient $(x+rv', x+tw')$ et $(r^{-1}x+v', t^{-1}x+w')$, d'où l'assertion car X est fermé dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$.

ii) Puisque X et $\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}$ sont invariants pour les actions de $\mathbf{S}$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, il en est de même de leur intersection.

iii) Soit (x,y) dans X. Puisque X est invariant pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, X contient (x,ty) pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$; donc X contient $(x,0)$ car X est fermé dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Il en résulte que l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$ contient l'image de $X_1\times\mathbb{C}^2$ par l'application $(x,s,t)\mapsto(sx,tx)$. Réciproquement, si X contient (sx,tx) alors X_1 contient sx et tx car X est stable par l'involution $(x,y)\mapsto(y,x)$; donc X_1 contient x si sx et tx ne sont pas tous deux nuls, d'où l'assertion.

iv) On suppose que l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$ est strictement contenue dans une composante irréductible de Y. Soit Y' une composante irréductible de Y qui contient strictement l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$. Puisque X est invariant pour l'action de G, X_1 est G-invariant ; donc X_1 n'est pas contenu dans V car $\mathfrak{g}$ est simple. Alors Y' contient un élément qui n'est pas dans $\mathfrak{g}_2$ et dans $V\times V$. Puisque Δ_V et X sont stables pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, Y et Y' sont stables pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$; donc il existe un élément non nul x de $\mathfrak{s}$ et des éléments v et w de V tels que $(x+v, x+w)$ soit un élément de X qui n'appartient pas à $\mathfrak{g}_2$. Il résulte alors de l'assertion (i) que X contient (x,x) ; donc d'après l'assertion (ii) et le lemme 8.1, X contient T_3. ■

On rappelle que $\mathfrak{g}(\rho)$ est la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.

Lemme 8.3. *Soient x dans $\mathfrak{g}$, x_{n} et x_{s} les composantes nilpotente et semi-simple de x. On note C le cône G-invariant fermé engendré par x.*

i) *Le cône C contient x_{n} et x_{s}.*

ii) *Si x est semi-simple et non nul, alors C contient $\rho+v$ où v est un élément non nul de l'intersection de $\mathfrak{h}$ et de V.*

iii) *Si x est un élément régulier de $\mathfrak{g}$, alors C contient le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. i) Soient h et u des éléments de $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$ tels que (x_{n},h,u) soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$. Puisque C est stable par le sous-groupe connexe fermé de G dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\mathrm{ad}\,h$, C contient $x_{\mathrm{s}}+tx_{\mathrm{n}}$ pour tout t dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Il en résulte que C contient $x_{\mathrm{n}}+tx_{\mathrm{s}}$ pour tout t dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ car C est un cône ; donc C contient x_{s} et x_{n} car C est fermé.

ii) On suppose x semi-simple et non nul. Puisque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, l'orbite $G.x$ de x rencontre $\mathfrak{h}$. On peut donc supposer x contenu dans $\mathfrak{h}$. Soient $W_{\mathfrak{h}}$ le groupe de Weyl de $\mathfrak{h}$ et $V_{\mathfrak{h}}$ l'intersection de V et de $\mathfrak{h}$.

Puisque $\mathfrak{g}$ est simple, l'action de $W_{\mathfrak{h}}$ dans $\mathfrak{h}$ est irréductible ; donc l'orbite de x sous l'action de $W_{\mathfrak{h}}$ n'est pas contenue dans $V_{\mathfrak{h}}$ et la droite engendrée par ρ. Les sous-espaces $V_1, \ldots, V_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ étant deux à deux orthogonaux, $V_{\mathfrak{h}}$ est l'orthogonal de ρ dans $\mathfrak{h}$. Il en résulte que l'orbite $G.x$ contient la somme d'un élément non nul de $V_{\mathfrak{h}}$ et d'un multiple non nul de ρ ; donc C contient la somme de ρ et d'un élément non nul de $V_{\mathfrak{h}}$.

iii) Soient $p_1, \ldots, p_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ des éléments homogènes et G-invariants de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, de degré respectif $d_1, \ldots, d_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$, qui engendrent l'algèbre des éléments G-invariants de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Alors le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$ est la variété des zéros communs aux fonctions $p_1, \ldots, p_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$. Pour $i = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, on note a_i la valeur de p_i en x. Si x est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}$, alors l'orbite $G.x$ est partout dense dans le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. On suppose que x est un élément régulier, non nilpotent de $\mathfrak{g}$. Alors il existe un entier i tel que a_i soit non nul ; donc l'orbite $G.x$ n'est pas un cône et la codimension de C dans $\mathfrak{g}$ est égale à $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} - 1$. En outre, C est contenu dans la variété des zéros communs aux fonctions $a_i^{d_j} p_j^{d_i} - a_j^{d_i} p_i^{d_j}$ où j est dans $\{1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}\}$. Il en résulte que la variété des zéros de p_i dans C est contenue dans le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$; or la variété des zéros de p_i dans C est de codimension $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ car C est de codimension $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} - 1$ dans $\mathfrak{g}$; donc C contient le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$ car il est irréductible et de codimension $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$. ■

Lemme 8.4. *Soit X une partie fermée, irréductible de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui est invariante pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, X_1 l'image de X par la première projection de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$, Y l'intersection de X et de Δ_V. On suppose que X_1 n'est pas contenu dans le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$ et que l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$ est strictement contenue dans une composante irréductible de Y. Alors X contient T_4.*

Démonstration. Soit Y' une composante irréductible de Y qui contient l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$. Puisque X est fermé et invariant pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, X_1 est un cône fermé, G-invariant de $\mathfrak{g}$ d'après l'assertion (iii) du lemme 8.2. Par hypothèse, X_1 n'est pas contenu dans le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$; donc d'après les assertions (i) et (ii) du lemme 8.3, X_1 contient des éléments dont la composante sur $\mathfrak{s}$ est semi-simple et non nulle. Puisque Y' est irréductible et n'est pas contenu dans $\mathfrak{g}_2$, il existe un élément (x, y) de Y' qui n'est pas dans $\mathfrak{g}_2$ et tel que la composante x' de x sur $\mathfrak{s}$ soit semi-simple non nulle car l'ensemble des éléments semi-simples non nuls de $\mathfrak{s}$ est ouvert. Il résulte alors de l'assertion (i) du lemme 8.2 que X contient (x', x'). Par suite, l'intersection de X et de $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ n'est pas contenue dans T_3 ; donc d'après le lemme 8.1 et l'assertion (ii) du lemme 8.2, X contient T_4. ■

8.3 On note $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tels que le sous-espace engendré par x et y soit contenu dans le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$.

Lemme 8.5. *La partie $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est invariante pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. En outre, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ est fermé dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et chacune de ses composantes irréductibles est de codimension inférieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}} + \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Puisque le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$ est G-invariant pour l'action de G, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ est invariant pour l'action de G dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Pour (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par x et y ne dépend que de l'orbite de (x,y) pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$; donc $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ est invariant pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Soient $p_1,\ldots,p_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ des éléments homogènes de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui engendrent la sous-algèbre des éléments G-invariants de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Pour $i=1,\ldots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, pour (a,b) dans $\mathbb{C}^2$ et pour (x,y) dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, on a

$$p_i(ax+by)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a^m b^n p_{i,m,n}(ax+by)\ ,$$

où $p_{i,m,n}$ sont des éléments G-invariants de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui sont nuls si $m+n$ est différent du degré de p_i. Puisque la somme des degrés de $p_1,\ldots,p_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$ est égale à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$, il y au plus $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}+\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ éléments non nuls parmi les $p_{i,m,n}$. Le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$ étant la variété des zéros communs aux fonctions $p_1,\ldots,p_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ est la variété des zéros communs aux fonctions $p_{i,m,n}$ où $i=1,\ldots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ et où (m,n) est dans $\mathbb{N}^2$; donc $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ est une partie fermée de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ dont les composantes irréductibles sont de codimension inférieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}+\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$. ■

Proposition 8.6. *Soit X une partie fermée, irréductible de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ qui est invariante pour les actions de G et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.*

i) *Si X est de codimension inférieure à $\dim\mathfrak{g}-4$, alors X contient T_3.*

ii) *Si X est de codimension inférieure à $\dim\mathfrak{g}-4$ et si X n'est pas contenu dans $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$, alors X contient T_4.*

Démonstration. i) On suppose X de codimension inférieure à $\dim\mathfrak{g}-4$. Puisque X et Δ_V sont des cônes, leur intersection Y est un cône. Par hypothèse, la dimension de X est supérieure à $\dim\mathfrak{g}+4$; donc d'après un théorème de Bezout [8](Ch.I, Theorem 7.2), les dimensions des composantes irréductibles de Y sont supérieures à $\dim\mathfrak{g}+2$ car la dimension de Δ_V est égale à $2\dim\mathfrak{g}-2$. D'après l'assertion (iii) du lemme 8.2, l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$ est irréductible car X est irréductible ; or la dimension de $\mathfrak{g}_2$ est égale à $\dim\mathfrak{g}+1$; donc il existe une composante irréductible Y' de Y qui contient strictement l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$. Il résulte alors de l'assertion (iv) du lemme 8.2 que X contient T_3.

ii) On suppose que la codimension de X est inférieure à $\dim\mathfrak{g}-4$ et que X n'est pas contenu dans $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$. Soit X_1 l'image de X par la première projection de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$. D'après l'assertion (i), X_1 contient ξ ; or X_1 est G-invariant et fermé dans $\mathfrak{g}$ d'après l'assertion (iii) du lemme 8.2 ; donc X_1 contient le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. Si X_1 est contenu dans le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$, alors X est contenu dans $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ car X est invariant pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$; donc d'après l'hypothèse, X_1 n'est pas contenu dans le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. Il résulte alors du lemme 8.4 que X contient T_4 car d'après (i), l'intersection de X et de $\mathfrak{g}_2$ est strictement contenue dans une composante irréductible de l'intersection de X et de Δ_V. ■

Définition 8.7. On dira que l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ a la propriété (**N**) si la codimension de chaque composante irréductible de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est strictement supérieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.

Remarque 8.8. Soit X une partie fermée, irréductible de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ qui est invariante pour les actions de G et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On suppose que la codimension de X est inférieure à $\dim\mathfrak{g}-4$ et que X n'est pas contenu dans $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$. Alors X contient T_4 d'après l'assertion (ii) de la proposition 8.6 car $\dim\mathfrak{g}-4$ est supérieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}+1$; or l'image de T_4 par la première projection de $\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}$ sur $\mathfrak{s}$ contient ρ ; donc l'image de X par la première projection de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ contient des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$.

Lemme 8.9. *On note $\mathcal{N}_{\mathfrak{g},\xi}$ l'ensemble des éléments x de $\mathfrak{g}$ tels que (x,ξ) appartiennent à $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$. Alors $\mathfrak{g}$ a la propriété* (**N**) *si et seulement si la dimension de chaque composante irréductible de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g},\xi}$ est strictement inférieure à* $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}+\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit X une composante irréductible de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$. D'après le lemme 8.5, la codimension de X est inférieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}+\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$; donc d'après la remarque 8.8, l'image de X par la deuxième projection de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ est égale au cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. Soit X_ξ l'ensemble des éléments x de $\mathfrak{g}$ tels que X contient (x,ξ). Puisque X est invariant pour l'action de G dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, la dimension de X est la somme des dimensions de X_ξ et du cône nilpotent de $\mathfrak{g}$ car l'orbite de ξ sous G est ouverte dans le cône nilpotent ; donc la codimension de X dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est stictement supérieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ si et seulement si la dimension de X_ξ est strictement inférieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}+\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, d'où le lemme. ■

9. Définition de la propriété (D).

Dans cette section, on suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple. On rappelle que $B_{\mathfrak{g}}$ est le sous-module de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ introduit par la proposition 5.8 et que $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est l'ensemble des éléments (x,y) de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ tels que l'image $\mathfrak{V}(x,y)$ de $B_{\mathfrak{g}}$ par l'application $\varphi\mapsto\varphi(x,y)$ soit de dimension $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$. On désigne par $X_{\mathfrak{g}}$ le complémentaire de $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Le but de la section est la définition de la propriété (**D**) et la proposition 9.6 qui est une conséquence simple de cette propriété. On rappelle que (ξ,ρ,η) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{b}$ est l'unique sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contient ξ.

9.1 Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{b}$. On note $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ l'orbite de $\mathfrak{p}$ pour l'action de G dans la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{\dim\mathfrak{p}}(\mathfrak{g})$. Alors $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est une variété projective. On désigne par $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ la variété $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ et par $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ la sous-variété des éléments (u,x,y) de $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ tels que u contienne x et y.

Lemme 9.1. i) *La variété $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est une sous-variété lisse de $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g}}$.*

ii) *La variété $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est fermée dans $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g}}$.*

iii) *La variété $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est irréductible et sa dimension est égale à* $\dim\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{p}$.

Démonstration. On note respectivement τ et π les projections canoniques de $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ sur $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Soit τ_1 la restriction de τ à $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$.

i) Soient $\mathfrak{p}'$ dans $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ et E un supplémentaire de $\mathfrak{p}'$ dans $\mathfrak{g}$. On note U_E l'ensemble des éléments u de $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ dont E est supplémentaire dans $\mathfrak{g}$. Alors U_E est un ouvert affine de $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$. En outre, il existe une application régulière ψ de U_E

dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{p}', E)$ telle que pour tout u dans U_E, u est l'image de l'application linéaire

$$\mathfrak{p}' \to \mathfrak{g} \ , \ x \mapsto x + \psi(u)(x) \ .$$

Alors l'application

$$U_E \times \mathfrak{p}' \times \mathfrak{p}' \to \mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}} \ , \ (u, x, y) \mapsto (u, x + \psi(u)(x), y + \psi(u)(y)) \ ,$$

est un isomorphisme de $U_E \times \mathfrak{p}' \times \mathfrak{p}'$ sur $\tau_1^{-1}(U_E)$. Puisque les ouverts U_E recouvrent $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$, les ouverts $\tau_1^{-1}(U_E)$ recouvrent $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$; or U_E est une variété lisse car $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est une variété lisse ; donc $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est une variété lisse.

ii) Soit χ l'application

$$U_E \times \mathfrak{p}' \times \mathfrak{p}' \times E \times E \to \mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}} \ ,$$

$$(u, x, y, z_1, z_2) \mapsto (u, x + \psi(u)(x) + z_1, y + \psi(u)(y) + z_2) \ .$$

Alors χ est un isomorphisme de $U_E \times \mathfrak{p}' \times \mathfrak{p}' \times E \times E$ sur $\tau^{-1}(U_E)$; or d'après (i), $\chi(U_E \times \mathfrak{p}' \times \mathfrak{p}')$ est égal à $\tau_1^{-1}(U_E)$; donc $\tau_1^{-1}(U_E)$ est fermé dans $\tau^{-1}(U_E)$. Les ouverts $\tau^{-1}(U_E)$ recouvrant $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est fermé dans $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$.

iii) Soit X l'adhérence de $\tau_1^{-1}(U_E)$ dans $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$. Alors $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ contient X d'après l'assertion (ii). En outre, X est irréductible car $\tau_1^{-1}(U_E)$ est irréductible. D'après (ii), la dimension de $\tau_1^{-1}(U_E)$ est égale à $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{p}$ car la dimension de U_E est égale à $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{p}$; donc il suffit de montrer que X est égal à $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$. Pour tout x dans U_E, la dimension de l'intersection de $\tau_1^{-1}(U_E)$ et de $\tau_1^{-1}(x)$ est égale à $2\dim \mathfrak{p}'$; donc pour tout x dans X, la dimension de l'intersection de X et de $\tau_1^{-1}(x)$ est supérieure à $2\dim \mathfrak{p}'$. Il en résulte que X contient l'intersection de $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ et de $\tau_1^{-1}(x)$ pour tout x dans $\tau_1(X)$. En particulier, X est une sous-variété fermée de $\mathfrak{B}^{(1)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ stable par les automorphismes $(u, x, y) \mapsto (u, tx, ty)$ où t est dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Il résulte alors du lemme 6.3 que $\tau_1(X)$ est fermé dans $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$. Puisque $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est irréductible, $\tau_1(X)$ est égal à $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ et X est égal à $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$, d'où l'assertion. ■

Lemme 9.2. *Soit $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tels que x et y appartiennent à un même élément de $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$.*

i) *La sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ est l'unique élément de $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ qui contient ξ.*

ii) *La partie $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est fermée, irréductible et de codimension* $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{p}$.

Démonstration. i) Soit g un élément de G tel que $g(\mathfrak{p})$ contienne ξ. Puisque $\mathfrak{b}$ est l'unique sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contient ξ, $g(\mathfrak{p})$ contient $\mathfrak{b}$. Soient $\mathbf{P}$ et $\mathbf{B}$ les normalisateurs respectifs de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{b}$ dans G. Puisque $\mathfrak{b}$ et $g^{-1}(\mathfrak{b})$ sont deux sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$, contenues dans $\mathfrak{p}$, il existe un élément p de $\mathbf{P}$ tel que $g^{-1}(\mathfrak{b})$ soit égal à $p(\mathfrak{b})$. Alors $\mathbf{B}$ contient gp et $\mathbf{P}$ contient g car $\mathbf{P}$ contient $\mathbf{B}$, d'où l'assertion.

ii) Par définition, $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est l'image de $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ par la projection π ; or $\mathfrak{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est une variété projective ; donc d'après les assertions (ii) et (iii) du lemme 9.1, $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est fermé dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et irréductible. La fibre en (ρ, ξ) de la restriction de π à $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est égale à $\{\mathfrak{p}\}$ d'après l'assertion (i). En particulier, elle est de dimension nulle ; donc les variétés $\mathfrak{I}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ sont de même dimension car elles sont irréductibles. La dimension de $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ est alors égale à $\dim \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{g}$ d'après l'assertion (iii) du lemme 9.1. ■

Définition 9.3. On dira que l'algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ est admissible si l'algèbre dérivée de tout facteur réductif de $\mathfrak{p}$ est simple.

9.2 On note $\mathfrak{B}_\mathfrak{g}$ la sous-variété des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{I}_\mathfrak{g}$ la variété d'incidence de $\mathfrak{g}$. Par définition, $\mathfrak{I}_\mathfrak{g}$ est la sous-variété des éléments (u,x,y) de $\mathfrak{B}_\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ tels que u contienne x et y. On désigne par $\mathfrak{B}_\mathfrak{g}^{(1)}$ la variété $\mathfrak{B}_\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ et par π la projection canonique de $\mathfrak{B}_\mathfrak{g}^{(1)}$ sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. D'après le lemme 9.1, $\mathfrak{I}_\mathfrak{g}$ est une sous-variété lisse, fermée, irréductible de $\mathfrak{B}_\mathfrak{g}^{(1)}$.

Lemme 9.4. *Soit $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ l'ensemble des éléments (x,y) de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ tels que x et y appartiennent à une même sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$.*

i) *La partie $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est fermée, irréductible et de codimension* $\mathrm{b}_\mathfrak{g}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.

ii) *L'ouvert $\Lambda_\mathfrak{g}$ rencontre $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$.*

iii) *L'intersection de $X_\mathfrak{g}$ et de $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ est de codimension* 1 *dans $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$.*

Démonstration. i) L'assertion résulte de l'assertion (ii) du lemme 9.2 et des égalités :

$$\dim\mathfrak{g}=2\mathrm{b}_\mathfrak{g}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}\ ,\ \dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{b}=\mathrm{b}_\mathfrak{g}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}\ .$$

ii) D'après les assertions (i) et (iii) du lemme 5.5, $\Lambda_\mathfrak{g}$ contient (ρ,ξ) ; donc $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ rencontre $\Lambda_\mathfrak{g}$.

iii) D'après l'assertion (ii), l'intersection de $X_\mathfrak{g}$ et de $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ est strictement contenue dans $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}$ une base de $B_\mathfrak{g}$ et ω un générateur non nul de $\wedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(\mathfrak{b})$. D'après l'assertion (iii) du lemme 5.10, pour tout (x,y) dans $\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ contient $\varphi(x,y)$ pour tout φ dans $B_\mathfrak{g}$; donc il existe un élément non nul p de $\mathrm{S}(\mathfrak{b}^*)\otimes_\mathbb{C}\mathrm{S}(\mathfrak{b}^*)$ tel que l'on ait

$$\varphi_1(x,y)\wedge\cdots\wedge\varphi_{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(x,y)=p(x,y)\omega\ ,$$

pour tout (x,y) dans $\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}$. Il en résulte que l'intersection de $\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}$ et de $X_\mathfrak{g}$ est une hypersurface de $\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}$. Par suite, l'intersection de $\mathfrak{I}_\mathfrak{g}$ et de $\pi^{-1}(X_\mathfrak{g})$ est une hypersurface de $\mathfrak{I}_\mathfrak{g}$ dont les composantes irréductibles sont toutes de codimension 1. Soit Z une composante irréductible de l'intersection de $\mathfrak{I}_\mathfrak{g}$ et de $\pi^{-1}(X_\mathfrak{g})$ telle que $\pi(Z)$ soit une composante irréductible de l'intersection de $X_\mathfrak{g}$ et de $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ qui contient (ξ,ξ). Puisque $\mathfrak{b}$ est la seule sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contient ξ, la fibre en (ξ,ξ) de la restriction de π à Z est de dimension nulle ; donc Z et $\pi(Z)$ ont même dimension car Z est irréductible. Il en résulte que $\pi(Z)$ est de codimension 1 dans $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ car $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{I}_\mathfrak{g}$ ont même dimension. Par suite, l'intersection de $X_\mathfrak{g}$ et de $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$ est de codimension 1 dans $\mathcal{X}_\mathfrak{g}$. ■

On rappelle que pour $\mathfrak{p}$ sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, la partie $\Sigma_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ est définie au corollaire 5.12. On note $\Sigma'_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ l'ensemble des éléments de $\Sigma_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ dont la deuxième composante est élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$. Pour tout élément x de $\mathfrak{g}$ qui est semi-simple et régulier, on note $G'(x)$ le sous-groupe des automorphismes linéaires de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ qui est engendré par les automorphismes $(v,w)\mapsto(tv,w)$ et $(v,w)\mapsto(g(v),g(w))$ où t et g sont respectivement dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et dans le centralisateur de x dans G.

Définition 9.5. On désigne par $\Sigma'_{\mathfrak{g}}$ la plus petite partie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui est invariante pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et qui contient la réunion des $\Sigma'_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ est sous-algèbre parabolique admissible de $\mathfrak{g}$ au sens de 9.3. Soit $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui ont les deux propriétés suivantes :

1) y est un élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$,

2) l'adhérence dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ de l'orbite de (x, y), sous l'action de $G'(x)$, rencontre $\Sigma'_{\mathfrak{g}}$.

On dira que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{D})$ si toute partie fermée irréductible de $X_{\mathfrak{g}}$, invariante pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, de codimension inférieure à $\dim \mathfrak{g} - 4$, qui ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$, est contenue dans la réunion de $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ et de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$.

Si $\mathfrak{g}$ est de rang 1, $X_{\mathfrak{g}}$ est contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$; donc d'après les assertions (i) et (iii) du lemme 9.4, $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{D})$ dans ce cas.

Proposition 9.6. *On suppose que $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{D})$ au sens de 9.5 et la propriété $(\mathbf{N})$ au sens de 8.7. Soit X une partie fermée de $X_{\mathfrak{g}}$ qui est irréductible et invariante pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Si X ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$, alors la codimension de X dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est supérieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{g} + 1$.*

Démonstration. On suppose que X ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ et que la codimension de X est inférieure à $\dim \mathfrak{g} - 4$. Alors d'après la propriété $(\mathbf{D})$, X est contenu dans la réunion de $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ et de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$; or d'après les assertions (i) et (iii) du lemme 9.4, la codimension dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ de toute composante irréductible de l'intersection de $X_{\mathfrak{g}}$ et de $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ est supérieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{g} + 1$; donc la codimension de X dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est supérieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{g} + 1$ car la codimension de chaque composante irréductible de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ est supérieure à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{g} + 1$, d'après la propriété $(\mathbf{N})$. ■

Remarque 9.7. Il résultera du théorème 11.9 qu'une algèbre de Lie simple a la propriété $(\mathbf{D})$ au sens de 9.5.

9.3 Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{b}$. On note $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ le sous-espaces des éléments nilpotents du radical de $\mathfrak{p}$ et $\mathbf{P}$ le normalisateur de $\mathfrak{p}$ dans G. On rappelle que $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ désigne l'image de $G \times \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ par l'application Ψ, $(g, x, y) \mapsto (g(x), g(y))$ de $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Lemme 9.8. *Soit X une partie constructible, irréductible de $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ qui est invariante pour l'action de G dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.*

i) *Il existe une composante irréductible Y de l'intersection de X et de $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ telle que $\Psi(G \times Y)$ soit égal à X.*

ii) *L'intersection de X et de $\mathfrak{g} \times \{\xi\}$ est contenue dans Y.*

iii) *Si l'intersection de X et de $\mathfrak{g} \times \{\xi\}$ est non vide, alors la dimension de Y est égale à $\dim X - \dim \mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$.*

iv) *Si l'image de X par la deuxième projection de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ contient un élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$, alors l'image de Y par la deuxième projection de $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ sur $\mathfrak{p}$ contient un élément de $\mathfrak{h}$ qui est élément régulier de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. i) Soient $Y_1,\ldots,Y_p$ les composantes irréductibles de l'intersection de X et de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$. Alors $Y_1,\ldots,Y_p$ sont invariants par $\mathbf{P}$ car $\mathbf{P}$ est irréductible. Puisque $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique, la variété homogène $G/\mathbf{P}$ est projective ; donc $\Psi(G\times Y_1),\ldots,\Psi(G\times Y_p)$ sont fermés dans X. En outre, X est la réunion de $\Psi(G\times Y_1),\ldots,\Psi(G\times Y_p)$ car X est contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$; donc il existe un entier j tel que $\Psi(G\times Y_j)$ soit égal à X car X est irréductible, d'où l'assertion.

ii) Soit x un élément de $\mathfrak{g}$ tel que X contienne (x,ξ). D'après l'assertion (i), il existe un élément g de G tel que Y contienne $(g(x),g(\xi))$. Puisque $\mathfrak{p}$ contient $g(\xi)$, il existe un élément h de $\mathbf{P}$ tel que $\mathfrak{b}$ contienne $hg(\xi)$ car $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{b}$. Par suite, il existe un élément k de $\mathbf{B}$ tel que $khg(\xi)$ soit égal à ξ car l'ensemble des éléments nilpotents réguliers de $\mathfrak{g}$ qui appartiennent à $\mathfrak{b}$ sont contenus dans une $\mathbf{B}$-orbite. Puisque Y est invariant pour l'action de $\mathbf{P}$, Y contient $(khg(x),khg(\xi))$ et (x,ξ) car $\mathbf{B}$ contient le centralisateur de ξ dans G, d'où l'assertion.

iii) On suppose que l'intersection de X et de $\mathfrak{g}\times\{\xi\}$ est non vide. Pour x dans $\mathfrak{p}$ et g dans G tels que X contiennent (x,ξ) et $(g(x),g(\xi))$, $\mathbf{P}$ contient g d'après (ii) ; donc la dimension de X est la somme des dimensions de Y et de $\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$ car $\dim G-\dim\mathbf{P}$ est égal à $\dim\mathfrak{p}_{\mathrm{u}}$.

iv) On suppose que l'image de X par la deuxième projection de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ contient des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$. On note Y' l'image de Y par la deuxième projection de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ sur $\mathfrak{p}$. Alors $G(Y')$ est l'image de X par la deuxième projection de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$; donc Y' contient des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$, d'où l'assertion car Y' est $\mathbf{P}$-invariant. ■

Définition 9.9. Soit X une partie de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. On dira que X a la propriété $(\mathbf{Q})$ s'il satisfait les conditions suivantes :

1) X est constructible et irréductible,

2) X est invariant pour l'action de G dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$,

3) pour tout (s,t) dans $\mathbb{C}^2$, X contient (sx,ty) s'il contient (x,y),

4) l'image de X par la deuxième projection de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ contient un élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$.

On dira que $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{D}')$ si $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ contient les parties de $X_{\mathfrak{g}}$ qui ont la propriété $(\mathbf{Q})$ et qui ne rencontrent pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$.

Proposition 9.10. *On suppose que les facteurs simples des centralisateurs des éléments semi-simples non nuls de $\mathfrak{g}$ ont la propriété $(\mathbf{D}')$ au sens de 9.9. Soit X une partie de $X_{\mathfrak{g}}$ qui a la propriété $(\mathbf{Q})$ au sens de 9.9 et qui ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$. Alors X satisfait l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :*

1) *pour toute sous-algèbre parabolique admissible de $\mathfrak{g}$ au sens de 9.3, $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ ne contient pas X,*

2) *$\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ contient X.*

Démonstration. On suppose que X ne satisfait pas la condition (1). Alors il existe une sous-algèbre parabolique admissible $\mathfrak{p}$, qui contient $\mathfrak{b}$, telle que $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ contienne X. D'après l'assertion (i) du lemme 9.8, il existe une composante irréductible Y de l'intersection de X et de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ telle que X soit égal à $\Psi(G\times Y)$. Soient $\mathfrak{l}$ un facteur réductif de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{l}$, ϖ la projection canonique de $\mathfrak{p}$ sur $\mathfrak{l}$. On note Y' l'image de Y par l'application $\varpi\times\varpi$ et Y'' l'image de Y' par la projection canonique de $\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}'\times\mathfrak{l}'$. Puisque $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique admissible de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}'$ est une algèbre simple. En outre, $\mathfrak{l}$ est le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un élément semi-simple non nul de $\mathfrak{g}$; donc $\mathfrak{l}'$ a la propriété $(\mathbf{D}')$. Si Y'' est contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{l}'}$, alors Y est contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ car pour $\mathfrak{b}'$ sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{l}'$, $\varpi^{-1}(\mathfrak{b}'+\mathfrak{z})$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$; donc il suffit de montrer que Y'' est contenue dans l'adhérence d'une partie de $\mathfrak{l}'\times\mathfrak{l}'$ qui a la propriété $(\mathbf{Q})$ et qui ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{l}'}$.

Soient π la projection canonique de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}'$ et V l'image par π de l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$ qui appartiennent à $\mathfrak{l}$. Alors V est un cône ouvert non vide de $\mathfrak{l}'$, invariant par le groupe adjoint de $\mathfrak{l}'$. On note Y_1 l'intersection de Y'' et de $\mathfrak{l}'\times V$. D'après l'assertion (iv) du lemme 9.8, l'image de Y'' par la deuxième projection de $\mathfrak{l}'\times\mathfrak{l}'$ sur $\mathfrak{l}'$ rencontre V ; donc Y_1 est une partie constructible, irréductible de $\mathfrak{l}'\times\times\mathfrak{l}'$ qui est partout dense dans Y'' car Y'' est une partie constructible, irréductible. Puisque X a la propriété $(\mathbf{Q})$, Y'' est invariant pour l'action diagonale du groupe adjoint de $\mathfrak{l}'$ dans $\mathfrak{l}'\times\mathfrak{l}'$. En outre, Y'' satisfait la condition (2) de la définition 9.9 ; donc Y_1 a la propriété $(\mathbf{Q})$ car V est un cône ouvert, invariant pour l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{l}'$. Si $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre parabolique admissible de $\mathfrak{l}'$, alors $\varpi^{-1}(\mathfrak{q}+\mathfrak{z})$ est une sous-algèbre parabolique admissible de $\mathfrak{g}$; donc $\Sigma'_{\mathfrak{l}'}$ est contenu dans $\Sigma'_{\mathfrak{g}}$ d'après l'assertion (iv) du lemme 5.10. Soient y un élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{l}$ et x un élément de $\mathfrak{l}'$ tels que Y_1 contienne $(x,\pi(y))$. On note A le sous-groupe des automorphismes linéaires de $\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}$ qui est engendré par les automorphismes $(v,w)\mapsto(tv,w)$ et $(v,w)\mapsto(g(v),g(w))$ où t et g sont respectivement dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et le centralisateur de y dans le groupe adjoint de $\mathfrak{l}$. Si x_0 est un élément de $\mathfrak{l}'$ tel que (x_0,y) soit un élément adhérent à l'orbite de (x,y) sous l'action de A, qui n'appartient pas à cette orbite, alors pour tout élément nilpotent v du radical de $\mathfrak{p}$, (x_0,y) est adhérent à l'orbite de $(x+v,y)$ sous l'action de $G'(y)$ car (x,y) est adhérent à l'orbite de $(x+v,y)$ sous l'action de $G'(y)$; donc dans ce cas, $(x_0,\pi(y))$ n'appartient pas à $\Sigma'_{\mathfrak{l}'}$ car Y ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$. Vu l'arbitraire du point $(x,\pi(y))$ de Y_1, Y_1 ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{l}'}$, d'où la proposition. ∎

10. Théorème d'exactitude et idéaux premiers.

On rappelle que $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ désigne la sous-variété des éléments (x,y) de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ tels que $[x,y]$ soit nul, que $I_{\mathfrak{g}}$ est l'idéal de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ engendré par les fonctions $(x,y)\mapsto\langle v,[x,y]\rangle$ où v est dans $\mathfrak{g}$, que les complexes $E_\bullet(\mathfrak{g})$ et $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ sont définis en 6.1.

Théorème 10.1. *On suppose que les facteurs simples de $\mathfrak{g}$ ont la propriété $(\mathbf{N})$ au sens de 8.7. Alors pour tout entier naturel k, la dimension projective du module $\bigwedge^k(\mathfrak{g})\wedge\bigwedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$ est inférieure à k.*

Démonstration. Pour k entier strictement supérieur à $\dim \mathfrak{g} - \mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$, $\bigwedge^k(\mathfrak{g}) \wedge \bigwedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$ est le module nul ; donc il s'agit de montrer que pour $k = 0, \ldots, \dim \mathfrak{g} - \mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$, la dimension projective de $\bigwedge^k(\mathfrak{g}) \wedge \bigwedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$ est inférieure à k. On considère successivement les deux cas suivants :

1) $\mathfrak{g}$ est simple,

2) $\mathfrak{g}$ n'est pas simple.

1) On montre en raisonnant par récurrence sur k que pour $k = 0, \ldots, \dim \mathfrak{g} - \mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$, la dimension projective de $\bigwedge^k(\mathfrak{g}) \wedge \bigwedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$ est inférieure à k. Puisque $B_{\mathfrak{g}}$ est un module libre, $\bigwedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$ est un module libre. Soit k un entier strictement positif, inférieur à $\dim \mathfrak{g} - \mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ et tel que pour $i = 0, \ldots, k-1$, la dimension projective de $\bigwedge^i(\mathfrak{g}) \wedge \bigwedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$ est inférieure à i. On rappelle que le complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ est défini en 4.6. D'après l'assertion (ii) du lemme 4.8, $X_{\mathfrak{g}}$ contient le support dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ de la cohomologie du complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$. Soit Y une composante irréductible du support de la cohomologie du complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$. Alors Y est invariant pour les actions de G et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ d'après les assertions (iv) et (v) de la proposition 5.8. On suppose que Y rencontre la partie $\Sigma'_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui est définie en 9.5. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Il existe une sous-algèbre parabolique admissible $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ au sens de 9.3, un élément semi-simple régulier y de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{p}$ et un élément x de $\mathfrak{p}$ tel que (x, y) appartienne à l'intersection de Y et de $\Sigma_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$. Soit V un ouvert affine de $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ qui contient (x, y) et L un sous-module de $\mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}$ qui satisfont les conditions du corollaire 5.12. Désignant par B_V le sous-module de $\mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}$ engendré par les restrictions à V des éléments de $B_{\mathfrak{g}}$, il résulte du corollaire 4.9 que le complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_V)$ n'a pas de cohomologie en degré différent de $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$. Soit W un ouvert affine de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui contient (x, y) et dont l'intersection avec $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ est contenue dans V. On note B_W le sous-module de $\mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ engendré par les restrictions à W des éléments de $B_{\mathfrak{g}}$. Puisque les modules B_V et B_W sont libres et de même rang, il résulte du lemme 4.10 que le support dans W des groupes de cohomologie en degré différent de $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ du complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_W)$ ne rencontre pas V ; or d'après l'assertion (iii) du lemme 4.8, le complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, W)$ n'a pas de cohomologie en degré $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ car $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ est un grand ouvert de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ d'après le corollaire 5.6 ; donc il existe un ouvert de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui contient (x, y) et qui ne rencontre pas le support de la cohomologie du complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$, d'où la contradiction. Puisque Y est fermé et invariant pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, il en résulte que Y ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$. Vu l'arbitraire de Y, le support de la cohomologie du complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$.

Si $\mathfrak{g}$ est de rang 1, alors $X_{\mathfrak{g}}$ est contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$. Il résulte alors de la proposition 9.6, du théorème 11.9 et de la propriété (**N**) pour $\mathfrak{g}$ que la codimension dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ du support de la cohomologie du complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ est supérieure à $k+1$ car k est inférieur à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$; donc d'après le corollaire 2.4 et l'hypothèse de récurrence, le complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ n'a pas de cohomologie en degré strictement inférieur à $k + \mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$. Par définition, le complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ n'a pas de cohomologie en degré $k + \mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$ car k est inférieur à $\dim \mathfrak{g} - \mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$; donc le complexe $D_k^\bullet(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ est acyclique. Il résulte alors de l'assertion (ii) du lemme 2.3 et de l'hypothèse de récurrence que la dimension projective du module $\bigwedge^k(\mathfrak{g}) \wedge \bigwedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}}(B_{\mathfrak{g}})$ est inférieure à k.

2) On note $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_1,\dots,\mathfrak{g}_m$ les facteurs simples de $\mathfrak{g}$. On montre alors en raisonnant par récurrence sur m que pour $k=0,\dots,\dim\mathfrak{g}-\mathrm{b}_\mathfrak{g}$, la dimension projective de $\wedge^k(\mathfrak{g})\wedge\wedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(B_\mathfrak{g})$ est inférieure à k. Pour m nul, $\dim\mathfrak{g}$ est égal à $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$. En outre, $\wedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(B_\mathfrak{g})$ est un module libre car $B_\mathfrak{g}$ est un module libre. On suppose l'assertion vraie pour $m-1$. Soit $\mathfrak{a}$ la somme de $\mathfrak{z}$ et des idéaux $\mathfrak{g}_1,\dots,\mathfrak{g}_{m-1}$. Alors $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{g}_m$; donc $B_\mathfrak{g}$ est le sous-module de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_\mathbb{C}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_\mathbb{C}\mathfrak{g}$ engendré par $B_\mathfrak{a}$ et $B_{\mathfrak{g}_m}$, et on a

$$\dim\mathfrak{g}=\dim\mathfrak{a}+\dim\mathfrak{g}_m\ ,\ \mathrm{b}_\mathfrak{g}=\mathrm{b}_\mathfrak{a}+\mathrm{b}_{\mathfrak{g}_m}\ .$$

Il en résulte que pour $k=\mathrm{b}_\mathfrak{g},\dots,\dim\mathfrak{g}$, $\wedge^{k-\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})\wedge\wedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(B_\mathfrak{g})$ est isomorphe à

$$\bigoplus_{i=\sup\{\mathrm{b}_\mathfrak{a},k-\dim\mathfrak{g}_m\}}^{\inf\{\dim\mathfrak{a},k-\mathrm{b}_{\mathfrak{g}_m}\}}\wedge^{i-\mathrm{b}_\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})\wedge\wedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{a}}(B_\mathfrak{a})\otimes_\mathbb{C}\wedge^{k-i-\mathrm{b}_{\mathfrak{g}_m}}(\mathfrak{g}_m)\wedge\wedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}_m}}(B_{\mathfrak{g}_m})\ .$$

Puisque $\mathfrak{g}_m$ est simple, la dimension projective de $\wedge^k(\mathfrak{g}_m)\wedge\wedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}_m}}(B_{\mathfrak{g}_m})$ est inférieure à k pour tout entier naturel k, d'après (1) ; donc d'après l'hypothèse de récurrence, la dimension projective du $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_\mathbb{C}\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module

$$\wedge^{i-\mathrm{b}_\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})\wedge\wedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{a}}(B_\mathfrak{a})\otimes_\mathbb{C}\wedge^{k-i-\mathrm{b}_{\mathfrak{g}_m}}(\mathfrak{g}_m)\wedge\wedge^{\mathrm{b}_{\mathfrak{g}_m}}(B_{\mathfrak{g}_m})$$

est inférieure à l'entier

$$i-\mathrm{b}_\mathfrak{a}+k-i-\mathrm{b}_{\mathfrak{g}_m}=k-\mathrm{b}_\mathfrak{g}\ ,$$

pour tout entier k supérieur à $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ et pour tout entier i supérieur à $\mathrm{b}_\mathfrak{a}$ et inférieur à $k-\mathrm{b}_{\mathfrak{g}_m}$; donc pour $k=0,\dots,\dim\mathfrak{g}-\mathrm{b}_\mathfrak{g}$, la dimension projective de $\wedge^k(\mathfrak{g})\wedge\wedge^{\mathrm{b}_\mathfrak{g}}(B_\mathfrak{g})$ est inférieure à k, d'où le théorème. ■

Théorème 10.2. *On suppose que pour tout élément semi-simple ρ de $\mathfrak{g}$, les facteurs simples de $\mathfrak{g}(\rho)$ ont la propriété* (**N**) *au sens de* 8.7.

i) *Le complexe réduit $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est acyclique.*

ii) *L'idéal $I_\mathfrak{g}$ est premier.*

iii) *Le complexe canonique de deuxième espèce $E_\bullet(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ n'a pas d'homologie en degré différent de $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$ et son homologie est isomorphe à l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$.*

Démonstration. On désigne par $J_\mathfrak{g}$ le radical de $I_\mathfrak{g}$. Par définition, les complexes $E_\bullet(\mathfrak{g})$ et $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ ont même groupe d'homologie en degré différent de $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$; donc d'après le lemme 6.5, il suffit de montrer l'assertion (i) du théorème. Pour j entier strictement supérieur à $\mathrm{b}_\mathfrak{g}$, on note Z_j l'espace des cycles de degré j du complexe $E_\bullet(\mathfrak{g})$. On a alors un complexe

$$0\to E_{\dim\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})\to\cdots\to E_{j+1}(\mathfrak{g})\to Z_j\to 0\ .$$

D'après le théorème 10.1, la dimension projective de $E_i(\mathfrak{g})$ est inférieure à $i-\mathrm{b}_\mathfrak{g}=i-j+j-\mathrm{b}_\mathfrak{g}$. En outre, $E_i(\mathfrak{g})$ est nul si $i-j$ est strictement supérieur à $\dim\mathfrak{g}-j$. La dimension de $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ étant égale à $\dim\mathfrak{g}+\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, sa codimension dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est égale $\dim\mathfrak{g}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$. Des égalités

$$\dim\mathfrak{g}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}=2(\dim\mathfrak{g}-\mathrm{b}_\mathfrak{g})\ ,\ 2\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{C}_\mathfrak{g}=\dim\mathfrak{g}-\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}\ ,$$

on déduit l'inégalité

$$2(\dim \mathfrak{g} - j) + j - \mathrm{b}_{\mathfrak{g}} < 2\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{C}_{\mathfrak{g}} \ ,$$

car j est strictement supérieur à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$; or d'après l'assertion (iii) du lemme 4.5, $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ contient le support de l'homologie du complexe ci-dessus ; donc d'après le corollaire 2.2, le complexe ci-dessus est exact. Il en résulte que le complexe $E_\bullet(\mathfrak{g})$ n'a pas d'homologie en degré strictement supérieur à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$. Puisque $\overline{E}_k(\mathfrak{g})$ est nul pour k strictement inférieur à $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$, le complexe $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ n'a pas d'homologie en degré différent de $\mathrm{b}_{\mathfrak{g}}$. D'après le lemme 6.5, il reste à montrer l'égalité des idéaux $I_{\mathfrak{g}}$ et $J_{\mathfrak{g}}$.

On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie commutative, $I_{\mathfrak{g}}$ est l'idéal nul. On suppose que $\mathfrak{g}$ n'est pas une algèbre de Lie commutative et que le théorème est vrai pour toute algèbre de Lie réductive de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$. On rappelle que $Y_0(\mathfrak{g})$ désigne le support dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ de $J_{\mathfrak{g}}/I_{\mathfrak{g}}$ et que $X_0(\mathfrak{g})$ est l'image de $Y_0(\mathfrak{g})$ par la première projection de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$. D'après l'hypothèse récurrence et la proposition 7.4, $X_0(\mathfrak{g})$ ne contient pas d'élément semi-simple non central car pour tout élément semi-simple ρ de $\mathfrak{g}$ et tout élément semi-simple ρ' de $\mathfrak{g}(\rho)$, le centralisateur de ρ' dans $\mathfrak{g}(\rho)$ est le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$; or $X_0(\mathfrak{g})$ est fermé et G-invariant d'après le corollaire 6.4 ; donc $X_0(\mathfrak{g})$ est contenu dans l'ensemble $\mathfrak{N}'_{\mathfrak{g}}$ des éléments de $\mathfrak{g}$ dont l'image par la représentation adjointe est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$. D'après l'assertion (iii) du lemme 6.2, $Y_0(\mathfrak{g})$ est stable par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$; donc $Y_0(\mathfrak{g})$ est contenu dans l'intersection de $\mathfrak{N}'_{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{N}'_{\mathfrak{g}}$ et de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ car $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ est la variété des zéros de $I_{\mathfrak{g}}$. D'après [16], la dimension de l'intersection de $\mathfrak{N}'_{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{N}'_{\mathfrak{g}}$ et de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ est égale à $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ en désignant par $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ le centre de $\mathfrak{g}$; donc la codimension de $Y_0(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est égale à $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$. En particulier, elle strictement supérieure à $2(\dim \mathfrak{g} - \mathrm{b}_{\mathfrak{g}})$ car $\mathfrak{g}$ n'est pas une algèbre de Lie commutative ; donc d'après ce qui précède, le support dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ de la cohomologie du complexe $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ est de codimension strictement supérieure à $2(\dim \mathfrak{g} - \mathrm{b}_{\mathfrak{g}})$. Le complexe $\overline{E}_\bullet(\mathfrak{g})$ est alors acyclique d'après le corollaire 2.2 et le théorème 10.1. ■

11. La propriété (D) pour les algèbres de Lie simples.

Dans cette section, on suppose $\mathfrak{g}$ simple de dimension strictement supérieure à 3, et on utilise les notations de 9. Le centralisateur $\mathfrak{h}$ de ρ dans $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui est contenue dans $\mathfrak{b}$. On note R le système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, R_+ le système de racines positives de R défini par $\mathfrak{b}$ et B la base de R_+. Pour tout α dans R, $\mathfrak{g}^\alpha$ désigne le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ pour la racine α. On désigne respectivement par $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ les sous-groupes fermés connexes de G dont les algèbres de Lie sont les images de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{h}$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{u}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_-$ la somme des sous-espaces $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ où α est dans R_+, $\mathfrak{u}_-$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{b}_-$, $\mathbf{H}'$ le sous-groupe des automorphismes linéaires de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui est engendré par les automorphismes $(v, w) \mapsto (tv, w)$ et $(v, w) \mapsto (g(v), g(w))$ où t et g sont respectivement dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et dans $\mathbf{H}$.

11.1 Soient τ la projection canonique de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}'_{\mathrm{r}}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ l'intersection de $\mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{g}'_{\mathrm{r}}$ et $N_G(\mathfrak{h})$ le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans G. On rappelle que la partie $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ est définie en 9.5.

Définition 11.1. On dira qu'une partie X de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ a la propriété $(\mathbf{P})$ si elle satisfait les conditions suivantes :

1) X est constructible et ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$,

2) X est invariant pour l'action de $N_G(\mathfrak{h})$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$,

3) le groupe $N_G(\mathfrak{h})$ agit transitivement sur les composantes irréductibles de X,

4) pour tout (s,t) dans $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \backslash \{0\})$, X contient (sx, ty) s'il contient (x,y).

On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ qui ont la propriété $(\mathbf{P})$.

Pour α dans B, on note R_α l'ensemble des éléments de R dont la coordonnée en α, dans la base B, est non nulle et $\mathfrak{p}_\alpha$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{g}^{-\beta}$ pour tout β dans $B \backslash \{\alpha\}$. Alors la somme $\mathfrak{p}_{\alpha,\mathrm{u}}$ des sous-espaces $\mathfrak{g}^\gamma$, où γ est dans R_α, est l'ensemble des éléments nilpotents du radical de $\mathfrak{p}_\alpha$ et la sous-algèbre $\mathfrak{l}_\alpha$, engendrée par $\mathfrak{h}$ et les sous-espaces $\mathfrak{g}^\beta$ et $\mathfrak{g}^{-\beta}$, où β est dans $B \backslash \{\alpha\}$, est un facteur réductif de $\mathfrak{p}_\alpha$. En outre, la somme $\mathfrak{p}_{\alpha,\mathrm{u},-}$ des sous-espaces $\mathfrak{g}^{-\gamma}$, où γ est dans R_α, est un supplémentaire de $\mathfrak{p}_\alpha$ dans $\mathfrak{g}$ et la somme $\mathfrak{p}_{\alpha,-}$ de $\mathfrak{l}_\alpha$ et de $\mathfrak{p}_{\alpha,\mathrm{u},-}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ qui contient la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}_-$.

Définition 11.2. On dira qu'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ est extrémale si elle est maximale et admissible au sens de 9.3.

Remarque 11.3. Pour α dans B, la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_\alpha$ est extrémale si et seulement si α est une extrémité du diagramme de Dynkin de support B. En outre, toute sous-algèbre parabolique extrémale est conjuguée par l'action de G à un $\mathfrak{p}_\alpha$, où α est une extrémité du diagramme de Dynkin de support B.

Soit α un élément de B tel que $\mathfrak{p}_\alpha$ soit une sous-algèbre parabolique extrémale. Pour toute partie I de R_α, on note $F_{\alpha,I}$ la somme de $\mathfrak{p}_\alpha$ et des sous-espaces $\mathfrak{g}^{-\beta}$ où β est dans I. On rappelle que la hauteur d'un élément de R_+ est la somme de ses coordonnées dans la base B.

Lemme 11.4. *Soient X dans $\mathcal{P}$ et Y une composante irréductible de X.*

i) *Si X est contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$, alors X a une composante irréductible qui est contenue dans $\mathfrak{b} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$.*

ii) *Il existe une unique partie minimale I de R_α telle que $F_{\alpha,I} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ contienne Y.*

iii) *Soient x, w, v des éléments respectivement dans $\mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$, $\mathfrak{p}_\alpha$, $\mathfrak{p}_{\alpha,\mathrm{u},-}$. Alors (v,x) appartient à l'adhérence dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ de l'orbite de $(v+w,x)$ sous l'action de $\mathbf{H}'$.*

iv) *Soit γ un élément de plus grande hauteur de I. Alors pour tout x dans un ouvert non vide de $\tau(Y)$, il existe un élément v de $\mathfrak{g}$ et un élément non nul w de $\mathfrak{g}^{-\gamma}$ qui satisfont les conditions suivantes : Y contient (v,x) et (w,x) appartient à l'adhérence de l'orbite de (v,x) sous l'action de $\mathbf{H}'$.*

Démonstration. i) On suppose X contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$. Pour tout g dans $N_G(\mathfrak{h})$, on désigne par Y_g l'ensemble des éléments (x, y) de Y tels que $\mathfrak{b}$ contienne $g(x)$ et $g(y)$. Puisque $N_G(\mathfrak{h})$ opère transitivement sur l'ensemble des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contiennent un élément de $\mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$, Y est réunion des parties Y_g où g est dans $N_G(\mathfrak{h})$ car X est contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$. Pour tout g dans $N_G(\mathfrak{h})$ et pour tout h dans $\mathbf{H}$, Y_g est égal à Y_{hg} car $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{h}$; or Y est irréductible et Y_g est fermé dans Y pour tout g dans $N_G(\mathfrak{h})$; donc il existe un élément g de $N_G(\mathfrak{h})$ tel que Y soit égal à Y_g car le quotient de $N_G(\mathfrak{h})$ par $\mathbf{H}$ est fini, d'où l'assertion.

ii) Puisque $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{p}_\alpha$ et de $\mathfrak{p}_{\alpha,\mathrm{u},-}$, il existe une partie I de R_α telle que $F_{\alpha,I} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ contienne Y. Si I_1 et I_2 sont deux parties de R_α telles que $F_{\alpha,I_1} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ et $F_{\alpha,I_2} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ contiennent Y, $F_{\alpha,I} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ contient Y si I est l'intersection de I_1 et de I_2, d'où l'existence d'une unique partie minimale I de R_α qui satisfait les conditions de l'assertion.

iii) On note $t \mapsto h(t)$ le sous-groupe à un paramètre de G dont l'algèbre de Lie est l'image du centre de $\mathfrak{l}_\alpha$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. On désigne par w_1 et w_2 les composantes respectives de w sur $\mathfrak{l}_\alpha$ et $\mathfrak{p}_{\alpha,\mathrm{u}}$. Puisque Y est invariant par $\mathbf{H}$, Y contient $(h(t)(v+w_1+w_2), h(t)(x))$ pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$; donc d'après la condition (3), Y contient $(v + tw_1 + t^2w_2, x)$ pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$, d'où l'assertion.

iv) Soit $E^*_{\alpha,I}$ l'ensemble des éléments de la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}^{-\beta}$, où β est dans I, qui ont une composante non nulle sur chacun de ces sous-espaces. D'après la minimalité de la partie I, Y étant irréductible, pour tout x dans un ouvert non vide T' de $\tau(Y)$, il existe un élément v de $E^*_{\alpha,I}$ et un élément w de $\mathfrak{p}_\alpha$ tel que Y contienne $(v + w, x)$. Soient x dans T' et v dans $E^*_{\alpha,I}$ tels qu'il existe un élément w de $\mathfrak{p}_\alpha$ pour lequel $(v + w, x)$ appartient à Y. D'après (iii), (v, x) appartient à l'adhérence de l'orbite de $(v + w, x)$ sous l'action de $\mathbf{H}'$. On note $t \mapsto g(t)$ le sous-groupe à un paramètre de G dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\mathrm{ad}\,\rho$. Soient J l'ensemble des éléments de plus grande hauteur de I et v_J la composante de v sur la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}^{-\beta}$, où β est dans J. Alors Y contient $(g(t)(v), x)$ pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$; or $t^{\langle\gamma,\rho\rangle}g(t)(v)$ tend vers v_J quand t tend vers 0 ; donc (v_J, x) appartient à l'adhérence de l'orbite de $(v+w, x)$ sous l'action de $\mathbf{H}'$. Les éléments de J étant linéairement indépendants, comme éléments de même hauteur, il existe un élément k de $\mathfrak{h}$ qui a les propriétés suivantes :

a) pour β dans B, $\langle\beta, k\rangle$ est entier,

b) $\langle\gamma, k\rangle$ est un entier strictement positif,

c) k appartient à l'intersection des noyaux des éléments de J, distincts de γ.

Soient $v_{-\gamma}$ la composante de v_J sur $\mathfrak{g}^{-\gamma}$ et $t \mapsto k(t)$ le sous-groupe à un paramètre de G dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\mathrm{ad}\,k$. Puisque $t^{\langle\gamma,\rho\rangle}k(t)(v_J)$ tend vers $v_{-\gamma}$ quand t tend vers 0, $(v_{-\gamma}, x)$ appartient à l'adhérence de l'orbite de $(v+w, x)$ sous l'action de $\mathbf{H}'$, d'où l'assertion. ■

11.2 On note $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ qui sont contenus dans $X_{\mathfrak{g}}$.

Lemme 11.5. *Soient h un élément de $\mathfrak{h}$ qui est élément régulier de $\mathfrak{g}$ et x un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{b}$. On suppose que (x,h) est un élément de $X_{\mathfrak{g}}$ qui n'appartient pas à la partie $\Sigma'_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ définie en 9.5. Alors pour tout α dans B, la composante de x sur $\mathfrak{g}^{\alpha}$, relativement à la décomposition de $\mathfrak{b}$,*

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\beta\in R_+} \mathfrak{g}^{\beta} \ ,$$

est nulle.

Démonstration. On suppose qu'il existe α dans B tel que la composante de x sur $\mathfrak{g}^{\alpha}$ ne soit pas nulle. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Soit I une partie connexe, non vide, du diagramme de Dynkin de support B telle que la composante de x sur $\mathfrak{g}^{\alpha}$ soit non nulle pour tout α dans I. On note $\mathfrak{p}_I$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{b}$ et les sous-espaces $\mathfrak{g}^{-\gamma}$ où γ est dans I. Alors $\mathfrak{p}_I$ est une sous-algèbre parabolique admissible de $\mathfrak{g}$ au sens de 9.3 car I est une partie connexe du diagramme de Dynkin de support B. En outre, h est un élément régulier du facteur réductif $\mathfrak{l}_I$ de $\mathfrak{p}_I$ qui est engendré par $\mathfrak{h}$ et les sous-espaces $\mathfrak{g}^{\gamma}$, $\mathfrak{g}^{-\gamma}$ où γ est dans I. Désignant par x' l'image de x par la projection canonique de $\mathfrak{p}_I$ sur $\mathfrak{l}_I$, x' est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{l}_I$ qui appartient à une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{l}_I$ qui contient l'élément semi-simple régulier h ; donc d'après l'assertion (iv) du lemme 5.13, (x',h) appartient à l'ouvert $\Lambda_{\mathfrak{l}_I}$ de $\mathfrak{l}_I\times\mathfrak{l}_I$. Il en résulte que $\Sigma_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}_I}$ contient (x,h) car $X_{\mathfrak{g}}$ contient (x,h). Ceci est absurde car $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ ne contient pas (x,h). ■

Corollaire 11.6. *Soient α dans R, h un élément régulier de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $\mathfrak{h}$ et w un élément non nul de $\mathfrak{g}^{\alpha}$. Alors $\Sigma'_{\mathfrak{g}}$ contient (w,h).*

Démonstration. Puisque $\mathfrak{g}$ est irréductible, deux racines de même longueur dans R appartiennent à une même orbite du groupe de Weyl de $\mathfrak{h}$ d'après [1](Ch. VI, §1, Proposition 11) ; donc il existe un élément g dans $N_G(\mathfrak{h})$ et un élément β de B tels que $g(\mathfrak{g}^{\beta})$ soit égal à $\mathfrak{g}^{\alpha}$. Puisque $\operatorname{rk}\mathfrak{g}$ est supérieur à 2, $X_{\mathfrak{g}}$ contient $(g^{-1}(w),g^{-1}(h))$ d'après l'assertion (v) du lemme 5.14 ; donc d'après le lemme 11.5, $(g^{-1}(w),g^{-1}(h))$ appartient à $\Sigma'_{\mathfrak{g}}$. Il en résulte que $\Sigma'_{\mathfrak{g}}$ contient (w,h) car $\Sigma'_{\mathfrak{g}}$ est invariant pour l'action de G dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. ■

On note B_{e} l'ensemble des exrémités du diagramme de Dynkin de support B.

Lemme 11.7. *On suppose que toute algèbre de Lie simple, de rang strictement inférieur à $\operatorname{rk}\mathfrak{g}$, a la propriété $(\mathbf{D}')$ au sens de 9.9.*

i) *Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique extrémale de $\mathfrak{g}$. Si X est un élément de $\mathcal{P}_0$ dont une composante irréductible est contenue dans $\mathfrak{p}\times\mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$, alors $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ contient X.*

ii) *Les éléments de $\mathcal{P}_0$ sont contenus dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$.*

Démonstration. i) Soi X un élément de $\mathcal{P}_0$ dont une composante irréductible est contenue dans $\mathfrak{p} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$. On note $\tilde{X}$ l'image de $G \times X$ par l'application $(g, x, y) \mapsto (g(x), g(y))$. Alors $\tilde{X}$ est une partie de $X_{\mathfrak{g}}$ qui a la propriété $(\mathbf{Q})$ au sens de 9.9. En outre, $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ contient $\tilde{X}$; donc d'après l'hypothèse du lemme et la proposition 9.10, $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ contient $\tilde{X}$ et X car les facteurs simples des centralisateurs des éléments semi-simples non nuls de $\mathfrak{g}$ sont de rang strictement inférieur à $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$.

ii) Pour X dans $\mathcal{P}$, on note $\nu(X)$ le plus petit entier tel qu'il existe un élément α de B_{e}, une partie I de R_α de cardinal $\nu(X)$ pour laquelle $F_{\alpha,I} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ contient une composante irréductible de X dont l'intersection avec $\mathfrak{b} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ est de dimension maximale. L'existence de l'entier $\nu(X)$ résulte de l'assertion (ii) du lemme 11.4. On suppose que $\mathcal{P}_0$ contient des éléments qui ne sont pas contenus dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. D'après la condition (2) de la définition 11.1, $N_G(\mathfrak{h})$ agit transitivement sur les composantes irréductibles de X ; donc $\nu(X)$ est nul si et seulement s'il existe une sous-algèbre parabolique extrémale $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathcal{X}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ contienne X.

Soit ν le plus petit entier tel qu'il existe un élément X de $\mathcal{P}_0$ qui n'est pas contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ et tel que $\nu(X)$ soit égal à ν. D'après l'assertion (i), ν est strictement positif. Par définition, il existe un élément α de B_{e}, une partie I de R_α, une composante irréductible Y de X qui est contenue dans $F_{\alpha,I} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ et dont l'intersection avec $\mathfrak{b} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ est de dimension maximale. Soit γ un élément de I de plus grande hauteur. D'après l'assertion (iv) du lemme 11.4, il existe un élément (v, x) de Y et un élément non nul w de $\mathfrak{g}^{-\gamma}$ tels que (w, x) appartienne à l'adhérence de l'orbite de (v, x) sous l'action de $\mathbf{H}'$. Ceci est absurde d'après le corollaire 11.6 car Y ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$, d'où l'assertion. ■

Corollaire 11.8. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{D}')$ au sens de 9.9.*

Démonstration. On rappelle que Ψ désigne l'application $(g, x, y) \mapsto (g(x), g(y))$ de $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. On raisonne par récurrence sur le rang de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est de rang 1, alors $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{D}')$ car $X_{\mathfrak{g}}$ est contenu dans $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$. On suppose que toute algèbre de Lie simple de rang strictement inférieur à $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{D}')$. Soit X une partie de $X_{\mathfrak{g}}$ qui a la propriété $(\mathbf{Q})$ au sens de 9.9 et qui ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$. D'après l'assertion (ii) du lemme 11.7, il suffit de montrer qu'il existe un élément Y de $\mathcal{P}_0$ tel que X soit contenu dans l'adhérence dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ de $\Psi(G \times Y)$.

On rappelle que $\mathfrak{g}'_{\mathrm{r}}$ désigne l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ désigne l'intersection de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{g}'_{\mathrm{r}}$. Soient $\tilde{X}$ l'intersection de X et de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$, $Y_1, \ldots, Y_m$ les composantes irréductibles de $\tilde{X}$. Pour $i = 1, \ldots, m$, on note $\overline{\Psi(G \times Y_i)}$ l'adhérence de $\Psi(G \times Y_i)$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{g}'_{\mathrm{r}}$ est un ouvert de $\mathfrak{g}$ qui rencontre l'image de X par la deuxième projection de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$, l'intersection X' de X et de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'_{\mathrm{r}}$ est partout dense dans X car X est irréductible ; or X' est égal à $\Psi(G \times \tilde{X})$ car l'orbite sous G de tout élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$ rencontre $\mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$; donc $\Psi(G \times \tilde{X})$ est partout dense dans X et X est contenu dans la réunion des parties $\overline{\Psi(G \times Y_1)}, \ldots, \overline{\Psi(G \times Y_m)}$. Par suite, il existe un entier i tel que $\overline{\Psi(G \times Y_i)}$ contienne X car X est irréductible. On note Y la réunion des $g.Y_i$ où g est dans $N_G(\mathfrak{h})$. Puisque X est invariant pour l'action de $\mathbf{H}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, $\tilde{X}$ et Y_i sont invariants pour l'action de $\mathbf{H}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$. Il en résulte que Y est une partie constructible de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{r}}$ comme réunion finie de parties constructibles. Puisque Y_i

est une composante irréductible de $\tilde{X}$, pour tout (s,t) dans $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\backslash\{0\})$, Y_i contient (sx,ty) s'il contient (x,y) ; donc pour tout (s,t) dans $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\backslash\{0\})$, Y contient (sx,ty) s'il contient (x,y). Par suite, Y est un élément de $\mathcal{P}$ car X ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$. En outre, X est contenu dans l'adhérence de $\Psi(G\times Y)$ et $\mathcal{P}_0$ contient Y car X est contenu dans $X_{\mathfrak{g}}$, d'où le corollaire. ■

Théorème 11.9. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Alors $\mathfrak{g}$ a la propriété* (**D**) *au sens de* 9.5.

Démonstration. Soit X une partie fermée, irréductible de $X_{\mathfrak{g}}$, invariante pour les actions de G et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, de codimension inférieure à $\dim\mathfrak{g}-4$, qui ne rencontre pas $\Sigma_{\mathfrak{g}}$. Alors d'après la proposition 8.6, X a la propriété (**Q**) si X n'est pas contenu dans $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$; donc d'après le corollaire 11.8, X est contenu dans la réunion de $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}$ et de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$, d'où le théorème. ■

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6*, Masson. (1981), Paris, New-York, Barcelone, Milan, Mexico, Rio de Janeiro.

[2] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie. Chapitres 7 et 8*, Diffusion CCLS. (1975), Paris.

[3] R. W. Carter, *Finite Groups of Lie Type. Conjugacy classes and complex characters*, Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs & Tracts (1985), Chichester, New-York, Brisbane, Toronto, Singapore.

[4] J-Y. Charbonnel, *Complexe canonique d'une algèbre de Lie réductive*, Preprint (2004).

[5] D. Deturck, H. Goldschmidt, J. Talvacchia, *Connections with prescribed curvature and Yang-Mills Currents: the semi-simple case*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **t. 24** (1991), p. 57–112.

[6] J. Dixmier, *Champs de vecteurs adjoints sur les groupes et algèbres de Lie semi-simples*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **Band. 309** (1979), p. 183–190.

[7] W. L. Gan and V. Ginzburg, *Almost-commuting variety, $\mathcal{D}$-modules, and Cherednik Algebras*, arXiv:math.RT/0409262.

[8] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **n° 52** (1977), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[9] R. Hotta and M. Kashiwara, *The invariant holonomic system on a semi-simple Lie algebra*, Inventiones Mathematicae **n° 75** (1984), p. 327–358.

[10] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie Group*, American Journal of Mathematics **n° 81** (1959), p. 973–1032.

[11] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, American Journal of Mathematics **n**^{circ} **85** (1963), p. 327–404.

[12] T. Levasseur and J. T. Stafford, *The Kernel of an Homomorphism of Harish-Chandra*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **t. 29** (1996), p. 385–397.

[13] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics **n° 8** (1986), Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney.

[14] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **n° 13** (1962), Interscience Publishers, New-York, London, Sydney.

[15] D. I. Panyushev, *The jacobian modules of a representation of a Lie algebra and geometry of commuting varieties*, Compositio Mathematica **n° 94** (1994), p. 181–199.

[16] A. Premet, *Nilpotent commuting varieties of reductive Lie algebras*, arXiv:math.RT/0302204.

[17] R. W. Richardson, *Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups*, Compositio Mathematica **vol. 38** (1979), p. 311–322.

[18] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 2*, (1994) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong-Kong, Barcelona, Budapest.

[19] F. D. Veldkamp, *The center of the universal enveloping algebra of a Lie algebra in characteristic p*, Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure **n° 5** (1972) , p. 217–240.

Jean-Yves CHARBONNEL
Université Paris 7 - CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des groupes
Case 7012
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05, France.
jyc@math.jussieu.fr