



**HAL**  
open science

## Complexe canonique d'une algèbre de Lie réductive.

Jean-Yves Charbonnel

► **To cite this version:**

| Jean-Yves Charbonnel. Complexe canonique d'une algèbre de Lie réductive.. 2004. hal-00008622

**HAL Id: hal-00008622**

**<https://hal.science/hal-00008622>**

Preprint submitted on 12 Sep 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Complexe canonique d'une algèbre de Lie réductive.

Jean-Yves CHARBONNEL

UNIVERSITÉ PARIS 7 - CNRS

**Abstract.** Let  $\mathfrak{g}$  be a finite dimensional complex reductive Lie algebra and  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  an invariant non degenerated bilinear form on  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  which extends the Killing form of  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . We define the homology complex  $C_{\bullet}(\mathfrak{g})$ . Its space is the algebra  $S(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} S(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(\mathfrak{g})$  where  $S(\mathfrak{g})$  and  $\wedge(\mathfrak{g})$  are the symmetric and exterior algebras of  $\mathfrak{g}$ . The differential of  $C_{\bullet}(\mathfrak{g})$  is the  $S(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} S(\mathfrak{g})$ -derivation which associates to the element  $v$  of  $\mathfrak{g}$  the function  $(x, y) \mapsto \langle v, [x, y] \rangle$  on  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ . Then the complex  $C_{\bullet}(\mathfrak{g})$  has no homology in degree strictly bigger than  $\text{rk } \mathfrak{g}$ .

## 1. Introduction.

Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réductive complexe de dimension finie,  $S(\mathfrak{g})$  et  $\wedge(\mathfrak{g})$  les algèbres symétrique et extérieure de  $\mathfrak{g}$ . La représentation coadjointe de  $\mathfrak{g}$  s'identifie à sa représentation adjointe au moyen d'une forme bilinéaire symétrique invariante, non dégénérée,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , qui prolonge la forme de Killing de  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . On appelle *complexe canonique* de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  le complexe d'homologie  $C_{\bullet}(\mathfrak{g})$  d'espace  $S(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} S(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(\mathfrak{g})$  dont la différentielle est la  $S(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} S(\mathfrak{g})$ -dérivation qui à l'élément  $v$  de  $\mathfrak{g}$  associe la fonction  $(x, y) \mapsto -\langle v, [x, y] \rangle$ . La variété commutante de  $\mathfrak{g}$  est la sous-variété  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$  des points  $(x, y)$  de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  tels que  $[x, y]$  soit nul. Il est facile de voir que le support dans  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  de l'homologie du complexe canonique de  $\mathfrak{g}$  est contenu dans la variété commutante de  $\mathfrak{g}$ . Le résultat principal de ce mémoire est le théorème :

**Théorème.** *Le complexe  $C_{\bullet}(\mathfrak{g})$  n'a pas d'homologie en degré strictement supérieur au rang  $\text{rk } \mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{g}$ . En outre, pour tout entier  $i$  inférieur à  $\text{rk } \mathfrak{g}$ , le complexe  $C_{\bullet}(\mathfrak{g})$  a de l'homologie en degré  $i$ .*

On montrera dans un prochain article qu'un certain sous-complexe de  $C_{\bullet}(\mathfrak{g})$  joue un rôle important dans l'étude de la variété commutante de  $\mathfrak{g}$ . Dans ce mémoire, le corps de base est le corps des nombres complexes, les espaces vectoriels et les algèbres de Lie considérés sont de dimension finie. On désigne par  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réductive, par  $G$  son groupe adjoint, par  $\text{rk } \mathfrak{g}$  son rang et par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée  $\mathfrak{g}$ -invariante sur  $\mathfrak{g}$  qui prolonge la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . On identifie  $\mathfrak{g}$  à son dual au moyen de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Si  $V$  est un espace vectoriel,  $V^*$  désigne son dual. Si  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie et si  $\mathfrak{m}$  est un sous-espace de  $\mathfrak{g}$ , on note  $\mathfrak{m}(x)$  le sous-espace des éléments de  $\mathfrak{m}$  qui centralisent l'élément  $x$  de  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{m}(x')$  le sous-espace des éléments de  $\mathfrak{m}$  qui stabilisent la forme linéaire  $x'$  sur  $\mathfrak{a}$  pour l'action coadjointe de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{a}^*$ . On utilise la topologie de

Zariski sur les variétés algébriques considérées. Si  $X$  est une variété algébrique,  $\mathcal{O}_X$  désigne le faisceau structural de  $X$  et  $\mathcal{O}_{X,x}$  l'anneau local au point  $x$  de  $X$ . Sauf mention contraire, un point de  $X$  est un point fermé. Conformément à l'usage, pour tout ouvert  $Y$  de  $X$  et pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$ ,  $\Gamma(Y, \mathcal{F})$  désigne l'espace des sections de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $Y$ . La suite de ce mémoire se divise en 3 sections :

- 2) dimension projective et cohomologie,
- 3) exemple de complexe,
- 4) complexe canonique d'une algèbre de Lie réductive.

## 2. Dimension projective et cohomologie.

Soient  $X$  une variété algébrique affine, de Cohen-Macaulay et  $\mathbb{C}[X]$  l'anneau des fonctions régulières sur  $X$ . On note  $U$  un ouvert de  $X$ ,  $S$  le complémentaire de  $U$  dans  $X$  et  $p$  la codimension de  $S$  dans  $X$ . On désigne par  $P_\bullet$  un complexe de  $\mathbb{C}[X]$ -modules projectifs de type fini, de longueur finie  $l$ , et par  $\varepsilon$  un morphisme d'augmentation du complexe  $P_\bullet$  d'image  $K$ , d'où un complexe augmenté de modules

$$0 \xrightarrow{d} P_l \xrightarrow{d} P_{l-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} K \rightarrow 0 .$$

On note  $\mathcal{P}_\bullet$  la localisation sur  $X$  du complexe  $P_\bullet$ ,  $\mathcal{K}_0$  la localisation sur  $X$  du noyau de  $\varepsilon$ ,  $\mathcal{K}$  la localisation sur  $X$  de  $K$  et  $\mathcal{K}_i$  le noyau du morphisme  $\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_{i-1}$  pour  $i$  entier strictement positif.

**Lemme 2.1.** *On suppose que  $S$  contient le support de l'homologie du complexe augmenté  $P_\bullet$ .*

i) *Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module projectif  $\mathcal{P}$ , le groupe de cohomologie  $H^i(U, \mathcal{P})$  est nul pour tout entier  $i$  strictement positif et strictement inférieur à  $p - 1$ .*

ii) *Pour tout entier naturel  $j$  inférieur à  $l$ , le groupe de cohomologie  $H^i(U, \mathcal{K}_{l-j})$  est nul si  $i$  est un entier strictement positif et strictement inférieur à  $p - j$ .*

iii) *Le groupe de cohomologie  $H^i(U, \mathcal{K})$  est nul pour tout entier  $i$  strictement positif et strictement inférieur à  $p - l - 1$ .*

**Démonstration.** i) Soit  $i$  un entier positif strictement inférieur à  $p - 1$ . Puisque le foncteur  $H^i(U, \bullet)$  commute à la somme directe, il suffit de montrer que  $H^i(U, \mathcal{O}_X)$  est nul. Puisque  $S$  est un fermé de  $X$ , on a la suite exacte longue de cohomologie relative

$$\cdots \rightarrow H_S^i(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^i(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow H_S^{i+1}(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \cdots ;$$

or  $H^i(X, \mathcal{O}_X)$  est nul car  $X$  est affine ; donc  $H^i(U, \mathcal{O}_X)$  est isomorphe au groupe de cohomologie relative  $H_S^{i+1}(X, \mathcal{O}_X)$  pour tout entier strictement positif  $i$ . La variété  $X$  étant de Cohen-Macaulay, la codimension  $p$  de  $S$  est égale à la profondeur de son idéal de définition dans  $\mathbb{C}[X]$  ; or  $i + 1$  est strictement inférieur à  $p$  ; donc  $H_S^{i+1}(X, \mathcal{O}_X)$  est nul. Il en résulte que  $H^i(U, \mathcal{O}_X)$  est nul.

ii) Puisque  $S$  contient le support de l'homologie du complexe  $P_\bullet$ , pour tout entier naturel  $j$ , on a la suite exacte courte de  $\mathcal{O}_U$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_{j+1}|_U \rightarrow \mathcal{P}_{j+1}|_U \rightarrow \mathcal{K}_j|_U \rightarrow 0 .$$

Il en résulte la suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \rightarrow H^i(U, \mathcal{P}_{j+1}) \rightarrow H^i(U, \mathcal{K}_j) \rightarrow H^{i+1}(U, \mathcal{K}_{j+1}) \rightarrow H^{i+1}(U, \mathcal{P}_{j+1}) \rightarrow \cdots ;$$

donc d'après (i), pour  $i$  entier strictement positif et strictement inférieur à  $p - 2$ , les groupes de cohomologie  $H^i(U, \mathcal{K}_j)$  et  $H^{i+1}(U, \mathcal{K}_{j+1})$  sont isomorphes car  $P_{j+1}$  est un module projectif. Puisque  $\mathcal{P}_i$  est nul pour  $i$  strictement supérieur à  $l$ ,  $\mathcal{K}_{l-1}$  et  $\mathcal{P}_l$  ont des restrictions à  $U$  isomorphes. En particulier,  $H^i(U, \mathcal{K}_{l-1})$  est nul pour  $i$  strictement inférieur à  $p - 1$  d'après (i). Un raisonnement par récurrence sur  $j$  montre alors que le groupe de cohomologie  $H^i(U, \mathcal{K}_{l-j})$  est nul pour  $i$  strictement inférieur à  $p - j$ .

iii) Soit  $i$  un entier strictement positif et strictement inférieur à  $p - l - 1$ . De la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_0|_U \rightarrow \mathcal{P}_0|_U \rightarrow \mathcal{K}|_U \rightarrow 0 ,$$

on tire la suite exacte

$$H^i(U, \mathcal{P}_0) \rightarrow H^i(U, \mathcal{K}) \rightarrow H^{i+1}(U, \mathcal{K}_0) \rightarrow H^{i+1}(U, \mathcal{P}_0) ;$$

or d'après (i), les groupes  $H^i(U, \mathcal{P}_0)$  et  $H^{i+1}(U, \mathcal{P}_0)$  sont nuls ; donc d'après (ii),  $H^i(U, \mathcal{K})$  est nul. ■

On suppose que  $K$  est le noyau d'un morphisme  $\theta$  du module projectif de type fini  $P$  dans le module projectif de type fini  $P'$ . Soient  $R$  l'image de  $\theta$  et  $R'$  un sous-module de  $P'$  qui contient  $R$ . On désigne respectivement par  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$ ,  $\theta$  les localisations respectives sur  $X$  de  $P$ ,  $P'$ ,  $R$ ,  $R'$ ,  $\theta$ .

**Proposition 2.2.** *On suppose que  $p$  est strictement supérieur à  $l + 2$ , que  $X$  est normal et que  $S$  contient le support de l'homologie du complexe augmenté  $P_\bullet$ .*

- i) *Si  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ont même restriction à  $U$ , alors  $R$  est égal à  $R'$ .*
- ii) *Le complexe  $P_\bullet$  est une résolution de  $K$ .*
- iii) *Si  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ont même restriction à  $U$ , le complexe augmenté*

$$0 \rightarrow P_l \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow P \rightarrow R' \rightarrow 0 ,$$

*est une résolution projective de  $R'$  de longueur  $l + 1$ .*

**Démonstration.** i) On suppose que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ont même restriction à  $U$ . Alors on a la suite exacte courte de  $\mathcal{O}_U$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{K}|_U \rightarrow \mathcal{P}|_U \rightarrow \mathcal{R}'|_U \rightarrow 0 ,$$

d'où la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{K}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{R}') \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}) \rightarrow \cdots .$$

D'après l'assertion (iii) du lemme 2.1,  $H^1(U, \mathcal{K})$  est nul car 1 est strictement inférieur à  $p - l - 1$  ; donc on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{K}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{R}') \rightarrow 0 .$$

Puisque le complémentaire de  $U$  dans  $X$  est de codimension supérieure à 2,  $U$  est partout dense dans  $X$  car  $X$  est une variété de Cohen-Macaulay. En outre, la restriction de  $X$  à  $U$  est un isomorphisme de  $P$  sur  $\Gamma(U, \mathcal{P})$  car  $X$  est une variété normale. Soit  $\varphi$  dans  $R'$ . Alors il existe un élément  $\psi$  de  $P$  dont l'image par  $\theta$  a même restriction à  $U$  que  $\varphi$ . Il en résulte que  $\varphi - \theta(\psi)$  est un élément de torsion de  $P'$  ; donc  $\varphi$  est égal à  $\theta(\psi)$ . Par suite,  $R$  est égal à  $R'$  car  $R'$  contient l'image  $R$  de  $\theta$ .

ii) Pour  $j$  entier naturel, on note  $Z_j$  l'espace des cycles de degré  $j$  du complexe  $P_\bullet$  et pour  $j = -1$ , on pose  $K = Z_{-1}$ . Par hypothèse, pour tout entier  $j$  supérieur à  $-1$ ,  $S$  contient le support de l'homologie du complexe augmenté

$$0 \rightarrow P_l \rightarrow \cdots \rightarrow P_{j+1} \rightarrow Z_j \rightarrow 0 ;$$

or pour tout  $j$  supérieur à  $-1$ ,  $p$  est strictement supérieur à  $l - j$  ; donc d'après l'assertion (i),  $Z_j$  est l'image de  $P_{j+1}$  dans  $P_j$  pour tout entier naturel  $j$  et  $Z_{-1}$  est l'image de  $P_0$ . Cela revient à dire que le complexe  $P_\bullet$  est une résolution de  $K$ .

iii) L'assertion résulte des assertions (i) et (ii). ■

**Corollaire 2.3.** *Soient  $C_\bullet$  un complexe de  $\mathbb{C}[X]$ -modules de type fini de longueur strictement positive  $l$  et  $d$  un entier naturel. On suppose que les trois conditions suivantes sont réalisées :*

- 1)  $X$  est normal et  $S$  contient le support de l'homologie du complexe  $C_\bullet$ ,
- 2) pour tout entier naturel  $i$ ,  $C_i$  est un sous-module d'un module libre,
- 3) pour tout entier strictement positif  $i$ , la dimension projective de  $C_i$  est inférieure à  $i + d$ .

*Pour  $j$  entier naturel inférieur à  $l$ , on désigne par  $Z_j$  l'espace des cycles de degré  $j$  du complexe  $C_\bullet$ . Si  $p$  est strictement supérieur à  $2l + d$ , alors le complexe  $C_\bullet$  est acyclique. En outre, la dimension projective de  $Z_j$  est inférieure à  $2l + d - j - 1$ .*

**Démonstration.** On suppose  $p$  strictement supérieur à  $2l + d$ . On montre en raisonnant par récurrence sur  $l - j$  que le complexe

$$0 \rightarrow C_l \rightarrow \cdots \rightarrow C_{j+1} \rightarrow Z_j \rightarrow 0 ,$$

est acyclique et que la dimension projective de  $Z_j$  est inférieure à  $2l + d - j - 1$ . Pour  $j = l$ , le support de  $Z_j$  est contenu dans  $S$  ; or  $C_l$  est un sous-module d'un module libre ; donc  $Z_l$  est nul. Puisque  $Z_{l-1}$  est un sous-module d'un module libre,  $Z_{l-1}$  est l'espace des bords de degré  $l - 1$  du complexe  $C_\bullet$  d'après l'assertion (iii) de la proposition 2.2 car  $l + d + 1$  est strictement inférieur à  $p$ . Il en résulte que la dimension projective de  $Z_{l-1}$  est inférieure à  $l + d$ . On suppose  $j$  inférieur à  $l - 2$  et l'assertion vraie pour  $j + 1$ . Par hypothèse,  $C_{j+1}$  a une résolution

projective  $P_\bullet$  de longueur au plus  $j + d + 1$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $Z_{j+1}$  a une résolution projective  $Q_\bullet$  de longueur au plus  $2l + d - j - 2$ . On en déduit un complexe augmenté  $R_\bullet$  de modules projectifs de longueur inférieure à  $2l + d - j - 1$ ,

$$0 \rightarrow Q_{2l+d-j-2} \oplus P_{2l+d-j-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0 \oplus P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow Z_j \rightarrow 0 .$$

Désignant par  $d$  les différentielles des complexes  $Q_\bullet$  et  $P_\bullet$ , la restriction à  $Q_i \oplus P_{i+1}$  de la différentielle de  $R_\bullet$  est l'application

$$(x, y) \mapsto (dx, dy + (-1)^i \delta(x)) ,$$

où  $\delta$  est l'application de  $Q_i$  dans  $P_i$  qui résulte de l'injection de  $Z_{j+1}$  dans  $C_{j+1}$ . Puisque  $P_\bullet$  et  $Q_\bullet$  sont des résolutions projectives, le complexe  $R_\bullet$  est un complexe de modules projectifs qui n'a pas d'homologie en degré positif; donc le support de l'homologie du complexe augmenté  $R_\bullet$  est contenu dans  $S$ . Il résulte alors de l'assertion (iii) de la proposition 2.2 que  $R_\bullet$  est une résolution projective de longueur  $2l + d - j - 1$  de  $Z_j$  car  $Z_j$  est un sous-module d'un module libre, d'où le corollaire.  $\blacksquare$

### 3. Exemple de complexe.

Dans cette section, on donne un exemple de complexe d'homologie qui sera utilisé dans la suite de ce mémoire. Soient  $X$  une variété algébrique affine, irréductible et  $\mathbb{C}[X]$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $X$ . Dans ce qui suit, on désigne par  $V$  un espace vectoriel. On note respectivement  $S(V)$  et  $\wedge(V)$  les algèbres symétrique et extérieure de  $V$ . Pour tout entier  $i$ ,  $S^i(V)$  et  $\wedge^i(V)$  désignent respectivement les sous-espaces de degré  $i$  pour leurs graduations usuelles des algèbres  $S(V)$  et  $\wedge(V)$ . En particulier, pour  $i$  strictement négatif,  $S^i(V)$  et  $\wedge^i(V)$  sont nuls.

**3.1** Soient  $\lambda$  une application linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $\theta_\lambda$  l'application linéaire

$$\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} V \xrightarrow{\theta_\lambda} \mathbb{C}[X] , a \otimes v \mapsto a\lambda(v) ,$$

où  $a$  est dans  $\mathbb{C}[X]$  et où  $v$  est dans  $V$ .

**Définition 3.1.** On appelle complexe canonique associé à  $\lambda$  et on le note  $C_\bullet(\lambda)$  le complexe d'espace  $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$  dont la différentielle est la  $\mathbb{C}[X]$ -dérivation de l'algèbre  $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$  qui prolonge  $\theta_\lambda$ . La graduation naturelle de  $\wedge(V)$  induit sur  $C_\bullet(\lambda)$  une structure de complexe gradué. On désigne par  $K_\lambda$  et  $I_\lambda$  le noyau et l'image de  $\theta_\lambda$ .

Pour  $\pi$  automorphisme de la variété  $X$ , on désigne par  $\pi^\#$  l'automorphisme de l'algèbre  $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$  qui à l'application  $\varphi$  de  $X$  dans  $\wedge(V)$  associe  $\varphi \circ \pi$  et  $\lambda_\pi$  l'application de  $V$  dans  $\mathbb{C}[X]$  qui à l'élément  $v$  associe la fonction  $\lambda(v) \circ \pi$  sur  $X$ .

**Lemme 3.2.** Soient  $\pi$  un automorphisme de  $X$  et  $d$  la différentielle du complexe  $C_\bullet(\lambda)$ .

i) Le module  $K_{\lambda_\pi}$  et l'idéal  $I_{\lambda_\pi}$  sont les images respectives de  $K_\lambda$  et de  $I_\lambda$  par  $\pi^\#$ .

ii) La différentielle du complexe  $C_\bullet(\lambda_\pi)$  est l'application  $\pi^\# \circ d \circ (\pi^\#)^{-1}$ .

iii) L'homologie du complexe  $C_\bullet(\lambda)$  est un  $\mathbb{C}[X]$ -module gradué de type fini. En outre, pour tout entier naturel  $j$ , le support du  $j$ -ième groupe d'homologie de ce complexe est une partie fermée de  $X$ .

iv) Pour tout entier naturel  $j$ , l'image par  $\pi^{-1}$  du support du  $j$ -ième groupe d'homologie du complexe  $C_\bullet(\lambda)$  est le support du  $j$ -ième groupe d'homologie du complexe  $C_\bullet(\lambda_\pi)$ .

**Démonstration.** i) Soit  $\varphi$  dans  $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} V$ . L'élément  $\pi^\#(\varphi)$  appartient à  $K_{\lambda_\pi}$  si et seulement si  $\lambda(\varphi \circ \pi(x))(\pi(x))$  est nul pour tout  $x$  dans  $X$ . Puisque  $\pi$  est un automorphisme, cela revient à dire que  $K_\lambda$  contient  $\varphi$ ; donc  $K_{\lambda_\pi}$  est l'image de  $K_\lambda$  par  $\pi^\#$ . L'image de  $\varphi$  par le morphisme  $\theta_{\lambda_\pi}$  est la fonction  $x \mapsto \lambda(\varphi(x))(\pi(x))$  sur  $X$ . C'est en particulier l'image de  $\varphi \circ \pi^{-1}$  par  $\pi^\# \circ \theta_\lambda$ ; donc  $I_{\lambda_\pi}$  est égal à  $\pi^\#(I_\lambda)$ .

ii) Pour tout  $v$  dans  $V$  et pour tout  $\varphi$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , on a

$$\pi^\# \circ d \circ (\pi^\#)^{-1}(\varphi \otimes v) = \varphi \lambda_\pi(v);$$

or l'application  $\pi^\# \circ d \circ (\pi^\#)^{-1}$  est une dérivation  $\mathbb{C}[X]$ -linéaire de l'algèbre  $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$ ; donc d'après l'unicité du prolongement des dérivations,  $\pi^\# \circ d \circ (\pi^\#)^{-1}$  est la différentielle du complexe  $C_\bullet(\lambda_\pi)$ .

iii) Puisque  $C_j(\lambda)$  est nul pour  $j$  strictement supérieur à  $\dim V$ ,  $C_\bullet(\lambda)$  est un  $\mathbb{C}[X]$ -module de type fini car  $C_j(\lambda)$  est un  $\mathbb{C}[X]$ -module de type fini pour tout entier  $j$ . La différentielle  $d$  étant  $\mathbb{C}[X]$ -linéaire, l'homologie du complexe  $C_\bullet(\lambda)$  est un sous-quotient du  $\mathbb{C}[X]$ -module  $C_\bullet(\lambda)$ ; donc l'homologie du complexe  $C_\bullet(\lambda)$  est un module de type fini. Par suite, pour tout entier naturel  $j$ , le  $j$ -ième groupe d'homologie  $H_j(C_\bullet(\lambda))$  du complexe  $C_\bullet(\lambda)$  est un  $\mathbb{C}[X]$ -module de type fini. Il en résulte que le support du module  $H_j(C_\bullet(\lambda))$  est fermé dans  $X$ .

iv) Soient  $j$  un entier naturel,  $J_j$  et  $J_{j,\pi}$  les idéaux de définition dans  $\mathbb{C}[X]$  des supports des  $j$ -ièmes groupes d'homologie des complexes  $C_\bullet(\lambda)$  et  $C_\bullet(\lambda_\pi)$ . Si  $a$  est un cycle de degré  $j$  de  $C_\bullet(\lambda)$  et si  $p$  est dans  $J_j$ , pour  $m$  entier naturel assez grand,  $p^m a$  est un bord de  $C_\bullet(\lambda)$ ; donc d'après l'assertion (ii),  $\pi^\#(p)^m \pi^\#(a)$  est un bord de  $C_\bullet(\lambda_\pi)$ . Il résulte alors de cette assertion que  $J_{j,\pi}$  contient  $\pi^\#(J_j)$ . De même,  $J_j$  contient  $(\pi^\#)^{-1}(J_{j,\pi})$ ; donc  $J_{j,\pi}$  est l'image par  $\pi^\#$  de  $J_j$ . Par suite, le support du  $j$ -ième groupe d'homologie de  $C_\bullet(\lambda_\pi)$  est l'image par  $\pi^{-1}$  du support du  $j$ -ième groupe d'homologie de  $C_\bullet(\lambda)$ . ■

**3.2** Soient  $W$  un espace vectoriel et  $\tau$  une application régulière de  $X$  dans l'espace des applications linéaires de  $V$  dans  $W$ .

**Définition 3.3.** On appelle complexe canonique associé à  $\tau$  et on le note  $C_\bullet(\tau)$  le complexe  $C_\bullet(\lambda)$ , défini en 3.1, où  $\lambda$  est l'application linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{C}[X \times W^*]$  qui à  $v$  associe la fonction  $(x, w') \mapsto \langle w', \tau(x)(v) \rangle$ .

On rappelle que  $W^*$  est le dual de  $W$  et que l'algèbre  $\mathbb{C}[X \times W^*]$  est canoniquement isomorphe à l'algèbre  $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} S(W)$ .

**Lemme 3.4.** On note  $\mathfrak{C}_\tau$  la variété des zéros de  $I_\lambda$ .

i) La variété  $\mathfrak{C}_\tau$  est l'ensemble des éléments  $(x, w')$  de  $X \times W^*$  qui satisfont la condition suivante :  $w'$  est orthogonal à l'image de  $\tau(x)$ .

ii) Le radical de  $I_\lambda$  est l'ensemble des éléments  $\varphi$  de  $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} S(W)$  qui satisfont la condition suivante : pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $\varphi(x)$  appartient à l'idéal de  $S(W)$  engendré par l'image de  $\tau(x)$ .

iii) Le support de l'homologie du complexe  $C_\bullet(\tau)$  est contenu dans  $\mathfrak{C}_\tau$ .

iv) Tout bord du complexe  $C_\bullet(\tau)$  est nul sur  $\mathfrak{C}_\tau$ .

**Démonstration.** i) Par définition,  $\mathfrak{C}_\tau$  contient  $(x, w')$  si et seulement si  $\langle w', \tau(x)(v) \rangle$  est nul pour tout  $v$  dans  $V$ , d'où l'assertion.

ii) Pour tout  $x$  dans  $X$ , l'idéal de  $S(W)$  engendré par l'image de  $\tau(x)$  est l'idéal de définition de l'orthogonal dans  $W^*$  de l'image de  $\tau(x)$  ; donc  $\varphi$  appartient au radical de  $I_\lambda$  si et seulement si pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $\varphi(x)$  appartient à l'idéal de  $S(W)$  engendré par l'image de  $\tau(x)$ .

iii) On note  $\mathcal{C}_\bullet(\tau)$  la localisation sur  $X \times W^*$  du complexe  $C_\bullet(\tau)$ . Soit  $(x, w')$  un point de  $X \times W^*$  qui n'est pas dans  $\mathfrak{C}_\tau$ . Puisque la forme linéaire  $w' \circ \tau(x)$  n'est pas nulle, il existe un ouvert affine  $U$  de  $X \times W^*$  qui contient  $(x, w')$  et des applications régulières  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  de  $U$  dans  $V$  qui satisfont les conditions suivantes : pour tout  $(z, z')$  dans  $U$ ,  $\langle z', \tau(z)(\varphi_n(z, z')) \rangle$  est égal à 1 et  $\varphi_1(z, z'), \dots, \varphi_{n-1}(z, z')$  est une base du noyau de  $z' \circ \tau(z)$ . On désigne par  $C_\bullet$  l'espace des sections au dessus de  $U$  du complexe  $\mathcal{C}_\bullet(\tau)$ . Puisque le bord de  $\varphi_n$  est égal à 1,  $c$  est le bord de  $\varphi_n \wedge c$  pour tout cycle  $c$  de  $C_\bullet$  ; donc  $C_\bullet$  est acyclique. Vu l'arbitraire de  $(x, w')$  et de l'ouvert affine  $U$  contenant  $(x, w')$ ,  $\mathfrak{C}_\tau$  contient le support de l'homologie du complexe  $C_\bullet(\tau)$ .

iv) L'espace des bords de  $C_\bullet(\tau)$  est contenu dans l'idéal de  $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} S(W) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge(V)$  engendré par  $\lambda(V)$ , d'où l'assertion car  $\lambda(V)$  engendre l'idéal  $I_\lambda$  par définition. ■

#### 4. Complexe canonique d'une algèbre de Lie réductive.

Soit  $\lambda_{\mathfrak{g}}$  l'application linéaire de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$  qui à l'élément  $v$  associe la fonction  $(x, y) \mapsto \langle v, [x, y] \rangle$ . On utilise alors les notations de la définition 3.1. On désigne par  $I_{\mathfrak{g}}$  l'idéal de  $S(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} S(\mathfrak{g})$  engendré par  $\lambda_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ .

**Définition 4.1.** On appelle complexe canonique de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  le complexe canonique associé à  $\lambda_{\mathfrak{g}}$  au sens de 3.1.

**4.1** On note  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$  la variété commutante de  $\mathfrak{g}$ . Par définition,  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$  est la variété des zéros dans  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  de l'idéal  $I_{\mathfrak{g}}$ .

**Lemme 4.2.** i) Le support de l'homologie du complexe  $C_\bullet(\mathfrak{g})$  est contenu dans  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ .

ii) Tout bord du complexe  $C_\bullet(\mathfrak{g})$  est nul sur  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ .

**Démonstration.** Le lemme résulte des assertions (iii) et (iv) du lemme 3.4. ■

**4.2** On rappelle que d'après [9], la variété commutante  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$  de  $\mathfrak{g}$  est irréductible et de dimension  $\dim \mathfrak{g} + \text{rk } \mathfrak{g}$ .



**Théorème 4.3.** *Le complexe canonique  $C_\bullet(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  n'a pas d'homologie en degré strictement supérieur à  $\text{rk } \mathfrak{g}$ . En outre, pour tout entier  $i$ , inférieur à  $\text{rk } \mathfrak{g}$ , le complexe  $C_\bullet(\mathfrak{g})$  a de l'homologie en degré  $i$ .*

**Démonstration.** Pour  $i$  entier strictement positif, on note  $Z_i(\mathfrak{g})$  l'espace des cycles de degré  $i$  du complexe  $C_\bullet(\mathfrak{g})$ . Alors pour  $i$  entier strictement positif et strictement inférieur à  $\mathfrak{g}$ , on a un complexe augmenté

$$0 \rightarrow C_{\dim \mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \cdots \rightarrow C_{i+1}(\mathfrak{g}) \rightarrow Z_i(\mathfrak{g}) \rightarrow 0 .$$

D'après l'assertion (i) du lemme 4.2, le support de l'homologie de ce complexe est contenu dans  $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$  ; or la codimension de  $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  est égale à  $\dim \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{g}$  et pour tout entier  $i$  strictement positif,  $C_i(\mathfrak{g})$  est un module libre ; donc d'après l'assertion (iii) de la proposition 2.2, pour  $i$  strictement supérieur à  $\text{rk } \mathfrak{g}$  et strictement inférieur à  $\dim \mathfrak{g}$ , le complexe ci-dessus est acyclique. Il en résulte que le complexe  $C_\bullet(\mathfrak{g})$  n'a pas d'homologie en degré strictement supérieur à  $\text{rk } \mathfrak{g}$ .

Soit  $L_\mathfrak{g}$  le sous-module des éléments  $\varphi$  de  $S(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$  qui satisfont l'égalité  $[x, \varphi(x)] = 0$  pour tout  $x$  dans  $\mathfrak{g}$ . D'après [4](§2),  $L_\mathfrak{g}$  est un module libre de rang  $\text{rk } \mathfrak{g}$  ; donc pour tout entier naturel  $i$ , inférieur à  $\text{rk } \mathfrak{g}$ , le module  $\wedge^i(L_\mathfrak{g})$  n'est pas nul. Soient  $i$  un entier naturel, inférieur à  $\text{rk } \mathfrak{g}$  et  $\psi$  un élément non nul de  $\wedge^i(L_\mathfrak{g})$ . Pour tout  $\varphi$  dans  $L_\mathfrak{g}$ , l'application  $(x, y) \mapsto \varphi(x)$  est un cycle du complexe  $C_\bullet(\mathfrak{g})$  ; donc l'application  $(x, y) \mapsto \psi(x)$  est cycle de degré  $i$  du complexe  $C_\bullet(\mathfrak{g})$ . En outre, ce cycle ne s'annule pas sur  $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$  car  $\psi$  n'est pas nul ; donc d'après l'assertion (ii) du lemme 4.2,  $C_\bullet(\mathfrak{g})$  a de l'homologie en degré  $i$ . ■

### Bibliographie

- [1] N. BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6*, Masson. (1981), Paris, New-York, Barcelone, Milan, Mexico, Rio de Janeiro.
- [2] N. BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie. Chapitres 7 et 8*, Diffusion CCLS. (1975), Paris.
- [3] R. W. CARTER, *Finite Groups of Lie Type. Conjugacy classes and complex characters*, Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs & Tracts (1985), Chichester, New-York, Brisbane, Toronto, Singapore.
- [4] J. DIXMIER, *Champs de vecteurs adjoints sur les groupes et algèbres de Lie semi-simples*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **Band. 309** (1979), p. 178–190.
- [5] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **n° 52** (1977), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [6] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics **n° 8** (1986), Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney.
- [7] D. I. PANYUSHEV, *The jacobian modules of a representation of a Lie algebra and geometry of commuting varieties*, Compositio Mathematica **n° 94** (1994), p. 181–199.
- [8] A. PREMÉT, *Nilpotent commuting varieties of reductive Lie algebras*, arXiv:math.RT/0302204 V1.

- [9] R. W. RICHARDSON, *Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups*, *Compositio Mathematica* **vol. 38** (1979), p. 311–322.

Jean-Yves CHARBONNEL  
Université Paris 7 - CNRS  
Institut de Mathématiques de Jussieu  
Théorie des groupes  
Case 7012  
2 Place Jussieu  
75251 Paris Cedex 05, France.  
jyc@math.jussieu.fr