



HAL
open science

Homéomorphismes de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 2$) du cercle conjugués à des rotations et régularité des mesures invariantes

Abdelhamid Adouani, Habib Marzougui

► **To cite this version:**

Abdelhamid Adouani, Habib Marzougui. Homéomorphismes de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 2$) du cercle conjugués à des rotations et régularité des mesures invariantes. 2005. hal-00007995v2

HAL Id: hal-00007995

<https://hal.science/hal-00007995v2>

Preprint submitted on 9 Sep 2005 (v2), last revised 22 Aug 2006 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HOMÉOMORPHISMES DE CLASSE P , C^r PAR MORÇEAUX ($r \geq 2$) DU CERCLE CONJUGUÉS À DES ROTATIONS ET RÉGULARITÉ DES MESURES INVARIANTES

ABDELHAMID ADOUANI ET HABIB MARZOUGUI

ABSTRACT. On donne une caractérisation des homéomorphismes f de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) du cercle ayant un nombre fini de points de coupure et de nombre de rotation irrationnel qui sont conjugués différentiablement à des C^r -difféomorphismes, ceci conduit à la conjugaison d'une classe de tels homéomorphismes à des rotations d'après [6]. Cette caractérisation étend celle obtenue par I. Lioussse pour les homéomorphismes affines par morceaux du cercle ([10]). On montre que les propriétés suivantes sont équivalentes:

- i) f est conjugué à un C^r -difféomorphisme du cercle par un homéomorphisme de classe P quadratique par morceaux.
- ii) Le nombre de points de coupure de f^n est borné par une constante indépendante de n .
- iii) le produit des sauts de f aux points de coupures situés sur une même orbite vaut 1.

Nous obtenons aussi que si f est de classe P , $C^{2+\varepsilon}$ par morceaux ($\varepsilon > 0$) de nombre de rotation irrationnel et si les points de coupure de f sont sur une même orbite dont le produit des sauts de f en ces points n'est pas égal à 1 alors la mesure invariante μ_f est singulière par rapport à la mesure de Haar. Ce résultat généralise le théorème de Dzhililov et Khanin ([3]).

1. INTRODUCTION

1.1. Préliminaire. On note $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ le cercle et $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ la projection canonique. Soit f un homéomorphisme de S^1 qui préserve l'orientation. f se relève en un homéomorphisme $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissant de \mathbb{R} tel que $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$. Réciproquement, un tel homéomorphisme de \mathbb{R} se projette en un homéomorphisme de S^1 qui préserve l'orientation.

Soit $x \in S^1$. On appelle :

- *orbite* de x par f le sous-ensemble $O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$
- *orbite positive* issue de x par f le sous-ensemble $O_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$
- *orbite négative* issue de x par f le sous-ensemble $O_f^-(x) = \{f^n(x) : n \in -\mathbb{N}\}$

Un *segment* de l'orbite $O_f(d)$, contenant d est un sous-ensemble de la forme $\{f^s(d) : -k \leq s \leq n - k\}$, noté $[f^{-k}(d), \dots, f^{n-k}(d)]$, $k, n \in \mathbb{N}$.

Historiquement, l'étude dynamique des homéomorphismes du cercle est initiée par H. Poincaré ([13], 1886), il introduit le nombre de rotation d'un homéomorphisme

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 37C15, 37E10

Mots-clés : homéomorphisme de classe P , C^r par morceaux, affine, nombre de rotation, conjugaison, point de coupure, saut, mesure invariante, mesure équivalente, mesure singulière.

du cercle. Il est définie par

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}^n(x) - x}{n} \pmod{1}$$

Poincaré montre que cette limite existe et ne dépend pas du choix du point x , ni du choix du relevé de f .

Lorsque f est un C^r -difféomorphisme avec ($r \geq 2$) et de nombre de rotation irrationnel, A. Denjoy ([2]) montre:

Théorème 1.1. (Denjoy)([2]). *Tout C^r -difféomorphisme f avec ($r \geq 2$) et de nombre de rotation $\rho(f)$ irrationnel est topologiquement conjugué à la rotation $R_{\rho(f)}$.*

Cela signifie qu'il existe un homéomorphisme croissant h de S^1 tel que $f = h^{-1} \circ R_{\rho(f)} \circ h$.

Denjoy note que ce résultat s'étend (avec la même preuve) à une classe plus large d'homéomorphismes du cercle : *la classe P* .

1.2. Classe P

Définition 1.2. Soit f un homéomorphisme préservant l'orientation et de classe C^r ($r \geq 1$) par morceaux du cercle.

On appelle *point de coupure* de f un point de discontinuité de sa dérivée Df .

f est dite de *classe P* si elle est de classe C^r sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de points de coupure qui admettent des dérivées à droite et à gauche, et sa dérivée $Df : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ a les propriétés suivantes :

- il existe deux constantes $0 < a < b < +\infty$ telles que :

$$a < Df(x) < b,$$

pour tout x où Df est définie,

$$a < Df_+(c) < b, \text{ et } a < Df_-(c) < b \text{ en les points } c \text{ de coupure,}$$

- $\log Df$ est à variation bornée sur S^1

Le rapport $\sigma_f(c) := \frac{Df_+(c)}{Df_-(c)}$ est appelée *saut de f au point c* .

Notons que les homéomorphismes de classe P forment un sous-groupe du groupe des homéomorphismes préservant l'orientation du cercle.

Comme exemple d'homéomorphismes de classe P , citons :

- les C^2 -difféomorphismes,
- les homéomorphismes affines par morceaux (qui ne sont pas des C^2 -difféomorphismes).

Un homéomorphisme f du cercle, préservant l'orientation, est dit *affine par morceaux* si f est dérivable sauf en un nombre fini de points de coupure $(c_i)_{1 \leq i \leq p}$ de S^1 et tel que Df est constante sur chaque $]c_i, c_{i+1}[$.

L'ensemble des homéomorphismes affines par morceaux est un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de classe P et contient les rotations.

Cette classe a été bien étudié par Lioussé dans [10], [11], [12].

Les homéomorphismes analytiques ne sont pas de classe P et ne constituent pas un groupe. D'après J.C. Yoccoz ([15]) ils vérifient la conclusion du théorème de Denjoy mais pas la théorie de Denjoy.

Définition 1.3. Un homéomorphisme B de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) de S^1 avec exactement deux points de coupure x_0 et $B(x_0)$ est appelé un *Boshernitzan général* de S^1 . Le point $B(x_0)$ est appelé *point de coupure final*. Lorsque $B(x_0) = 0$, on dit que B est un *Boshernitzan standard de point de coupure final 0*.

En conjuguant un Boshernitzan standard B_0 de point de coupure final 0 par la rotation R_{x_0} , l'homéomorphisme $R_{x_0} \circ B_0 \circ R_{x_0}^{-1}$ serait un Boshernitzan général de point de coupure final $B(x_0)$ et inversement.

Le relevé $\tilde{B}_0 \pmod{1}$ de B_0 sur $[0, 1[$ est un échange général de 2 intervalles de $[0, 1[$.

Les Boshernitzan affines correspondent à des échanges affines de 2 intervalles de $[0, 1[$ et ont été considéré par exemple dans [9].

Notons que Boshernitzan fut le premier qui a étudié ces exemples dans le but d'exhiber des homéomorphismes affines par morceaux dont les données sont rationnelles mais pas le nombre de rotation (cf. [1]).

On désigne par $C(f)$ l'ensemble des points de coupure de f . Dans toute la suite, on suppose que f n'a qu'un nombre fini de points de coupure.

Définition 1.4. On appelle *connexion maximale* de c un segment $M = [f^{-p}(c), \dots, f^q(c)]$ de l'orbite $O_f(c)$ qui contient tous les points de coupure de f sur $O_f(c)$ et tel que $f^{-p}(c)$ (resp. $f^q(c)$) est le premier (resp. dernier) point de coupure de f sur $O_f(c)$.

L'orbite négative $O_f^-(f^{-p}(c))$ (resp. positive $O_f^+(f^q(c))$) issue de $f^{-p}(c)$ (resp. de $f^q(c)$) ne contient alors aucun point de coupure de f .

Les propriétés suivantes sont triviales :

- Deux points de coupure de f sont sur la même connexion maximale, si et seulement si, ils sont sur la même orbite.
- Deux connexions maximales distinctes sont disjointes.

Il y a un nombre fini de connexions maximales; notées

$$M_1 = [f^{-N_1}(c_1), \dots, c_1], \dots, M_p = [f^{-N_p}(c_p), \dots, c_p] \text{ où } c_1, \dots, c_p \in C(f).$$

On a alors la décomposition :

$$C(f) = \coprod_{i=1}^p C_i$$

où $C_i = C(f) \cap M_i$, $i = 1, \dots, p$.

Définition 1.5. ([10]) On dit qu'un homéomorphisme f de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) du cercle a la *propriété D* si le produit des sauts de f aux points de coupure de f situés sur une même orbite vaut 1.

Cela signifie que pour tout $i = 1, \dots, p$, le produit des sauts de f en les points de C_i vaut 1 (i.e. $\prod_{d \in C_i} \sigma_f(d) = 1$). On a aussi $\prod_{d \in C_i} \sigma_f(d) = \prod_{d \in M_i} \sigma_f(d)$.

A un homéomorphisme f de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) du cercle ayant la propriété D on lui associe l'invariant :

$$\pi(f) = \prod_{i=1}^p \prod_{k=0}^{N_i-1} \sigma_{f^{N_i+1}}(f^{-k}(c_i))$$

où $N = \max_{1 \leq i \leq p} (N_i)$.

Lorsque tous les points de coupure se trouvent sur une même orbite, alors le produit des sauts de f en ses points de coupure : $\prod_{c \in C(f)} \sigma_f(c) = \pi(f)$

Si f est un homéomorphisme affine par morceaux, le produit des sauts de f en tous ses points de coupure vaut 1. Par conséquent, il satisfait la propriété D si tous ses points de coupure sont sur une même orbite.

On se propose d'étendre les résultats obtenus par Lioussé dans [10] pour les homéomorphismes affines par morceaux au cas des homéomorphismes de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) du cercle.

2. ENONCÉ DES RÉSULTATS

Théorème 2.1. *Soit f un homéomorphisme de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) du cercle ayant un nombre fini de points de coupure. Si f possède la propriété D alors :*

i) si $\pi(f) = 1$ alors f est conjugué à un C^r -difféomorphisme du cercle par un homéomorphisme affine par morceaux.

ii) si $\pi(f) \neq 1$ alors f est conjugué à un Boshernitzan général B (de point de coupure final $B(x_0)$ tel que $\sigma_B(x_0) \times \sigma_B[B(x_0)] = 1$) par un homéomorphisme affine par morceaux.

Corollaire 2.2. *Soit f un homéomorphisme de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) du cercle ayant un nombre fini de points de coupure. Si les points de coupure de f sont sur la même orbite avec $\pi(f) = 1$ alors f est conjugué à un C^r -difféomorphisme du cercle par un homéomorphisme affine par morceaux.*

Corollaire 2.3. *Soit f un homéomorphisme de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) du cercle ayant un nombre fini de points de coupure et de nombre de rotation irrationnel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) f est conjugué à un C^r -difféomorphisme du cercle par un homéomorphisme C^1 par morceaux.

ii) Le nombre de points de coupure de f^n est borné par une constante indépendante de n .

iii) f possède la propriété D .

iv) f est conjugué à un Boshernitzan général (de point de coupure final $B(x_0)$ tel que $\sigma_B(x_0) \times \sigma_B[B(x_0)] = 1$) ou un C^r -difféomorphisme du cercle par un homéomorphisme affine par morceaux.

v) f est conjugué à un C^r -difféomorphisme du cercle par un homéomorphisme quadratique par morceaux.

Corollaire 2.4. *Sous les hypothèses du corollaire 2.3, si le nombre de points de coupure de f^n est borné par une constante indépendante de n alors f est conjugué à un C^r -difféomorphisme du cercle par un homéomorphisme quadratique par morceaux.*

Il résulte du théorème 2.1 :

Corollaire 2.5. ([11]) *Soit f un homéomorphisme affine par morceaux du cercle de nombre de rotation irrationnel α . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme C^1 par morceaux,*
- ii) Le nombre de points de coupure de f^n est borné par une constante indépendante de n .*
- iii) f est conjugué à un Boshernitzan affine de point de coupure final 0 ou une rotation de nombre de rotation α par un homéomorphisme affine par morceaux,*
- iv) f est conjugué à R_α par un homéomorphisme C^∞ (analytique) par morceaux.*

On rappelle qu'étant donné α irrationnel et $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que α est diophantien d'ordre $\tau \geq 0$ s'il existe une constante $C > 0$ tel que $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^{2+\tau}}$, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Si α est diophantien d'ordre 0, α est dit *du type constant*; c'est équivalent à dire que dans le développement en fractions continues de α :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}},$$

la suite $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Notons que l'ensemble des nombres réels de type constant est de mesure de Lebesgue nulle bien que sa dimension d'Hausdorff vaut 1 alors que l'ensemble des nombres α qui sont diophantien d'ordre τ pour tout $\tau > 0$ est de mesure pleine.

Nous obtenons du corollaire 2.3 et d'après le théorème de Katznelson et Ornstein ([6]) le théorème qui suit :

Théorème 2.6. *Soit α un nombre irrationnel diophantien d'ordre $\tau \geq 0$ et $r > \tau + 2$ un réel. Soit f un homéomorphisme de classe P , C^r par morceaux du cercle ayant un nombre fini de points de coupure et de nombre de rotation α irrationnel. Si le nombre de points de coupure de f^n est borné par une constante indépendante de n alors f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme de classe $C^{r-1-\tau-\epsilon}$ par morceaux pour tout $\epsilon > 0$.*

Notons que la conjugaison est ici C^1 par morceaux.

Corollaire 2.7. *Sous les hypothèses du Théorème 2.6, si les points de coupure de f sont sur la même orbite et $\pi(f) = 1$ alors f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme de classe $C^{r-1-\tau-\epsilon}$ par morceaux pour tout $\epsilon > 0$.*

Le corollaire 2.7 généralise un résultat antérieur de Dzhililov et Khanin :

Théorème 2.8. [3] *Soit α un irrationnel de type constant et f un homéomorphisme de classe P , $C^{2+\epsilon}$ par morceaux ($\epsilon > 0$) du cercle de nombre de rotation α dont les points de coupure de f sont sur une même orbite avec $\pi(f) = 1$. Alors f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme de classe $C^{1+\epsilon}$ par morceaux.*

D'autre part, on sait qu'un homéomorphisme f de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) du cercle de nombre de rotation α irrationnel préserve une unique mesure f -invariante sur S^1 , notée μ_f , qui est de plus sans atome et à support total. Désignons

par m la mesure de Haar sur S^1 (i.e. projetée de la mesure de Lebesgue). Comme μ_f est l'unique mesure f -invariante, elle est soit singulière, soit absolument continue par rapport à m . En fait, lorsque μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Haar m , elle est nécessairement équivalente à m comme conséquence de l'ergodicité.

Alors que certains résultats sur les C^2 difféomorphismes du cercle (théorème de Denjoy, ergodicité par rapport à la mesure de Haar) sont valables pour la classe P , d'autres ne le sont pas. Ainsi le théorème d'Herman [5] (voir aussi, [7], [8] et [14]) affirmant qu'un C^2 -difféomorphisme du cercle préservant l'orientation de nombre de rotation irrationnel *de type constant* préserve une mesure équivalente à la mesure de Haar, ne l'est plus en classe P :

- Pour les homéomorphismes affines par morceaux, I. Lioussse a montré :

Théorème 2.9. ([11]) *Soit f un homéomorphisme affine par morceaux du cercle de nombre de rotation irrationnel α .*

i) Si les points de coupure de f sont sur la même orbite alors la mesure μ_f est équivalente à la mesure de Haar.

ii) Si les points de coupure de f ne sont pas sur la même orbite avec α de type constant et les logarithmes des pentes de f sont rationnellement indépendants alors la mesure μ_f est singulière par rapport à la mesure de Haar.

- Pour les homéomorphismes de classe P ayant un seul point de coupure, Dzhaliilov et Khanin ont montré :

Théorème 2.10. ([3]) *Soit f un homéomorphisme de classe P , $C^{2+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) par morceaux du cercle de nombre de rotation irrationnel.*

Si f a un seul point de coupure alors la mesure μ_f est singulière par rapport à la mesure de Haar.

- Pour les homéomorphismes de classe P ayant plus d'un point de coupure, nous obtenons comme conséquence du corollaire 2.7:

Corollaire 2.11. *Soit α un nombre irrationnel diophantien d'ordre $\tau \geq 0$ et $r > \tau + 2$ un réel. Soit f un homéomorphisme de classe P , C^r par morceaux du cercle de nombre de rotation α ayant un nombre fini de points de coupure.*

Si les points de coupure de f sont sur une même orbite avec $\pi(f) = 1$ alors la mesure de probabilité f -invariante μ_f est équivalente à la mesure de Haar m .

Lorsque les points de coupure de f sont sur une même orbite avec $\pi(f) \neq 1$; le théorème qui suit complète le corollaire 2.11 (mais sans la condition diophantienne du nombre de rotation) et généralise le théorème 2.10.

Théorème 2.12. *Soit f un homéomorphisme de classe P , $C^{2+\varepsilon}$ par morceaux ($\varepsilon > 0$) du cercle de nombre de rotation irrationnel ayant un nombre fini de points de coupure.*

Si les points de coupure de f sont sur une même orbite avec $\pi(f) \neq 1$ alors la mesure μ_f est singulière par rapport à la mesure de Haar.

3. HOMÉOMORPHISMES DE CLASSE P AYANT LA PROPRIÉTÉ D

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $C(f^n)$ l'ensemble des points de coupure de f^n . On a $C(f^n) = \{f^{-k}(c), k = 0, 1, \dots, n-1; c \in C(f)\}$.

Si $x \notin C(f^n)$, on a :

$$Df^n(x) = Df(x) \times Df(f(x)) \times \dots \times Df(f^{n-1}(x)).$$

Le saut de f^n en x est :

$$\sigma_{f^n}(x) = \sigma_f(x) \times \sigma_f(f(x)) \times \dots \times \sigma_f(f^{n-1}(x)).$$

Proposition 3.1. *Soit f un homéomorphisme de classe P du cercle de nombre de rotation α irrationnel ayant un nombre fini de points de coupure. Alors f possède la propriété D si et seulement si le nombre de point de coupure de f^n est borné par une constante N_0 indépendante de n .*

Proof. On suppose que le nombre de point de coupure de f^n est borné par une constante N_0 indépendante de n . Soit d un point de coupure de f et $M = [f^{-p}(d), \dots, f^q(d)]$ la connexion maximale de d . Montrons que $\prod_{d \in M} \sigma_f(d) = 1$:

On a :

$$C(f^{n+1}) \subset \{f^{-k}(c) : c \in C(f), 0 \leq k \leq n\},$$

et

$$\sigma_{f^{n+1}}[f^{-k}(d)] = \sigma_f[f^{-k}(d)] \times \dots \times \sigma_f[f^{n-k-1}(d)]$$

On pose : $J_n := \{0 \leq k \leq n : \sigma_{f^{n+1}}[f^{-k}(d)] = 1\}$.

Par hypothèse :

$$\text{card}(\{0 \leq k \leq n ; \sigma_{f^{n+1}}[f^{-k}(d)] \neq 1\}) \leq N_0.$$

D'où

$$\text{card}(J_n) \geq n + 1 - N_0.$$

Pour $n > N_0 + p$, on a $\text{card}(J_n) > p + 1 \geq \text{card}(J)$ où $J = \{0 \leq k \leq p : \sigma_{f^{n+1}}[f^{-k}(d)] = 1\}$. Par suite, J_p est strictement contenu dans J_n . Soit $K_n := J_n - J$ et k_n le plus petit élément de K_n . Puisque $n - k_n + 1 \geq \text{card}(K_n)$ et $\text{card}(K_n) \geq n - (N_0 + p)$ alors $p + 1 \leq k_n \leq p + N_0 + 1$ pour $n > p + N_0$.

Comme $\sigma_{f^{n+1}}[f^{-k_n}(d)] = \sigma_f[f^{-p}(d)] \times \dots \times \sigma_f[f^{n-k_n}(d)]$ alors

$$\sigma_f[f^{-p}(d)] \times \sigma_f[f^{-p+1}(d)] \times \dots \times \sigma_f[f^q(d)] = \sigma_{f^{n+1}}[f^{-k_n}(d)]$$

pour tout $n > p + q + N_0$. Par suite,

$$\sigma_f[f^{-p}(d)] \times \sigma_f[f^{-p+1}(d)] \times \dots \times \sigma_f[f^q(d)] = 1.$$

Réciproquement, on suppose que pour tout point de coupure $d \in C(f)$, le produit des sauts de f en les points de coupure de la connexion maximale de d vaut 1. Montrons que le nombre de points de coupure de f^n est bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les discontinuités de Df^n sont les $f^{-k}(c_i)$, $k = 0, 1, \dots, n + N_i - 1$, $i = 1, \dots, p$. Les sauts de f^n en ces points sont :

$$\sigma_{f^n} f^{-k}(c_i) = \sigma_f[f^{-k}(c_i)] \times \dots \times \sigma_f(c_i) \times \dots \times \sigma_f[f^{n-k-1}(c_i)].$$

Si $k \geq N_i$ et $n - k - 1 \geq 0$ alors le segment d'orbite $[f^{-k}(c_i), \dots, f^{n-k-1}(c_i)]$ contient la connexion maximale de c_i . Donc, $\sigma_{f^n} f^{-k}(c_i) = 1$. Ainsi, pour que $f^{-k}(c_i)$ soit une discontinuité de Df^n , il faut que : $0 \leq k < N_i$ ou $n - 1 < k \leq$

$n + N_i + 1$. Par conséquent le nombre de discontinuité de Df^n qui proviennent de l'orbite de c_i est au plus $2N_i$. On en déduit que le nombre de discontinuité de Df^n est borné par $2(N_1 + \dots + N_p)$. \square

4. PREUVE DU THÉORÈME 2.1

Reprenons les notations concernant la partition de $C(f)$ donnée dans la section 1.2 :

$$C(f) = \coprod_{i=1}^p C_i$$

où $C_i = C(f) \cap M_i$, $i = 1, \dots, p$ et $M_i = [f^{-N_i}(c_i), \dots, c_i]$ est la connexion maximale de c_i , $c_i \in C(f)$.

Dire que f satisfait la propriété D signifie que $\prod_{d \in C_i} \sigma_f(d) = 1$.

Case i) : $\pi(f) = 1$.

Soit H l'homéomorphisme affine par morceaux ayant les propriétés suivantes :

- i) $H(0) = 0$,
- ii) les points $f^{-k}(c_i)$, $i = 1, \dots, p$; $k = 0, \dots, N_i - 1$ sont les points de coupure de H ,
- iii) les sauts de H sont données par :
 $\sigma_H(f^{-k}(c_i)) = \sigma_{f^{N+1}}(f^{-k}(c_i))$ où $N = \max_{1 \leq i \leq p} N_i$.

Un tel homéomorphisme existe car

$$\prod_{i=1}^p \prod_{k=0}^{N_i-1} \sigma_H(f^{-k}(c_i)) = \pi(f) = 1$$

Posons $G = H \circ f \circ H^{-1}$. A priori, les points de coupure de G sont :

- les points de coupure de $H^{-1} : H(f^{-k}(c_i))$, ; $k = 0, \dots, N_i - 1$, $i = 1, \dots, p$,
- les images par H des points de coupure de $f : H(f^{-k}(c_i))$, $k = 0, \dots, N_i$,
 $i = 1, \dots, p$,
- les images par $H \circ f^{-1}$ des points de coupure de $H : H \circ f^{-1}(f^{-k}(c_i)) = H(f^{-k}(c_i))$ avec $k = 1, \dots, N_i$.

Il s'ensuit que les points de coupure éventuels de G seront parmi :

$$H(f^{-k}(c_i)), \quad k = 0, \dots, N_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

Calculons les sauts de G en ces points:

$$\sigma_G[H(f^{-k}(c_i))] = \frac{\sigma_H[f(f^{-k}(c_i))] \times \sigma_f(f^{-k}(c_i))}{\sigma_H(f^{-k}(c_i))}$$

- Si $k = 1, \dots, N_i - 1$, on a :

$$\sigma_H(f^{-k}(c_i)) = \sigma_{f^{N+1}}(f^{-k}(c_i))$$

Puisque $N \geq k$ alors :

$$\sigma_{f^{N+1}}(f^{-k}(c_i)) = \prod_{s=0}^N \sigma_f(f^{s-k}(c_i)) = \prod_{s=-k}^{N-k} \sigma_f(f^s(c_i)) = \prod_{s=-k}^0 \sigma_f(f^s(c_i)).$$

Par suite :

$$\sigma_H[f(f^{-k}(c_i))] = \sigma_H[f^{-(k-1)}(c_i)] = \prod_{s=-k+1}^0 \sigma_f(f^s(c_i)).$$

D'où : $\sigma_G[H(f^{-k}(c_i))] = 1$.

• Si $k = 0$, on aura :

$$\sigma_G[H(f^{-k}(c_i))] = \sigma_G[H(c_i)] = \frac{\sigma_H[f(c_i)] \times \sigma_f(c_i)}{\sigma_H(c_i)}$$

On a $\sigma_G[H(c_i)] = 1$ car $\sigma_H(c_i) = \sigma_f(c_i)$ et $\sigma_H[f(c_i)] = 1$ (car $f(c_i)$ n'est pas un point de coupure de H)

• Si $k = N_i$, on aura :

$$\sigma_G[H(f^{-k}(c_i))] = \sigma_G[H(f^{-N_i}(c_i))] = \frac{\sigma_H[f(f^{-N_i}(c_i))] \times \sigma_f(f^{-N_i}(c_i))}{\sigma_H(f^{-N_i}(c_i))}$$

On a $\sigma_H(f^{-N_i}(c_i)) = 1$ (car $f^{-N_i}(c_i)$ n'est pas un point de coupure de H).

Aussi,

$$\sigma_H[f(f^{-N_i}(c_i))] \times \sigma_f(f^{-N_i}(c_i)) = \prod_{s=-N_i+1}^0 \sigma_f(f^s(c_i)) \times \sigma_f(f^{-N_i}(c_i)) = \prod_{s=0}^{N_i} \sigma_f(f^{-s}(c_i)) = 1$$

car

$$\sigma_H[f(f^{-N_i}(c_i))] = \sigma_H[f^{-(N_i-1)}(c_i)] = \prod_{s=-N_i+1}^0 \sigma_f(f^s(c_i))$$

il s'ensuit alors que : $\sigma_G[H(f^{-N_i}(c_i))] = 1$.

On conclut alors que G n'a pas de point de coupure, c'est donc un C^r -difféomorphisme.

Case ii): $\pi(f) \neq 1$.

On choisit un point c tel que :

- $c \neq f^{-k}(c_i)$, $c \neq f(c)$, $c \neq f^{N+1}(f^{-k}(c_i))$, $i = 1, \dots, p$, $k = 0, \dots, N_i$.

Pour obtenir l'homéomorphisme affine par morceaux H ayant les propriétés i), ii), et iii), on doit ajouter un point de coupure c à H de sorte qu'en c , on a : $\sigma_H(c) = \frac{1}{\pi(f)}$.

Les points de coupure de H sont les : $f^{-k}(c_i)$, ($i = 1, \dots, p$, $k = 0, \dots, N_i - 1$) et c , et pour sauts en ces points :

$$\sigma_H(f^{-k}(c_i)) = \sigma_{f^{N+1}}(f^{-k}(c_i)), \quad \sigma_H(c) = \frac{1}{\pi(f)}.$$

Posons $G = H \circ f \circ H^{-1}$. Les points de coupure éventuels de G seront parmi : $H(c)$, $H \circ f^{-1}(c)$, $H(f^{-k}(c_i))$, $k = 0, \dots, N_i$, $i = 1, \dots, p$.

- Saut de G en $H(c)$:

$$\sigma_G[H(c)] = \frac{\sigma_H[f(c)] \times \sigma_f(c)}{\sigma_H(c)}$$

On a : $\sigma_f(c) = 1$ car $c \neq f^{-k}(c_i)$, $i = 1, \dots, p$, $k = 0, \dots, N_i$.

On a aussi $\sigma_H[f(c)] = 1$ car $f(c)$ n'est pas un point de coupure de H ; en effet :

- $f(c) \neq c$
- $f(c) \neq f^{-k}(c_i)$, $k = 0, \dots, N_i - 1$ (sinon, $c = f^{-s}(c_i)$, $s = 1, \dots, N_i$, impossible par hypothèse.).

Il s'ensuit que : $\sigma_G[H(c)] = \frac{1}{\sigma_H(c)} \neq 1$. $H(c)$ est donc un point de coupure de G .

- Saut de G en $H \circ f^{-1}(c)$:

$$\sigma_G[H \circ f^{-1}(c)] = \frac{\sigma_H(c) \times \sigma_f[f^{-1}(c)]}{\sigma_H[f^{-1}(c)]}$$

On a : $\sigma_H[f^{-1}(c)] = 1$ car :

- $f^{-1}(c) \neq c$
- $f^{-1}(c) \neq f^{-k}(c_i)$ car :

sinon, $c = f^{1-k}(c_i)$, $k = 0, \dots, N_i - 1$. Pour $k = 1, \dots, N_i - 1$, c'est impossible par hypothèse. Pour $k = 0$, $c = f(c_i)$ est également impossible car par hypothèse, $c \neq f^{N+1}(f^{-k}(c_i))$, $i = 1, \dots, p$, $k = 0, \dots, N_i$, en particulier pour $k = N_i$, $c \neq f(c_i)$.

Il s'ensuit que $\sigma_G[H \circ f^{-1}(c)] = \sigma_H(c) \neq 1$.

$H \circ f^{-1}(c)$ est donc un point de coupure de G .

On conclut alors que G a exactement deux points de coupure :

$x_0 := H \circ f^{-1}(c)$ et $G(x_0) = H(c)$ avec $\sigma_G(x_0) \times \sigma_G[G(x_0)] = 1$. G est donc un Boshernitzan de S^1 de point de coupure final $H(c)$.

5. LEMMES DE CONJUGAISON

Lemme 5.1. *Pour tout $\delta > 0$, $\delta \neq 1$, $b \in S^1$, il existe un homéomorphisme préservant l'orientation $H_{\delta,b}$ quadratique par morceaux de S^1 de point de coupure unique b tel que : $\sigma_{H_{\delta,b}}(b) = \delta$.*

Proof. Posons

$$\tilde{H}_\delta(x) = \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)x\left(x + \frac{2\delta}{1-\delta}\right), \quad x \in [0, 1[.$$

On vérifie que $\tilde{H}_\delta(0) = 0$, $\tilde{H}_\delta(1) = 1$ et que \tilde{H}_δ est un homéomorphisme croissant de $[0, 1[$ avec $D(\tilde{H}_\delta)_+(0) = \frac{2\delta}{1+\delta}$

Soit $t \in [0, 1[$ tel que $e^{2i\pi t} = b$. Considérons l'application

$$\tilde{H}_{\delta,t}(x) = \tilde{H}_\delta(x-t) + t, \quad \text{si } x \in [t, 1+t[.$$

On l'étend à \mathbb{R} en un homéomorphisme croissant, noté encore $\tilde{H}_{\delta,t}$ en posant : $\tilde{H}_{\delta,t}(x) = \tilde{H}_{\delta,t}(x-k)$, si $x \in [t+k, t+k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$. $\tilde{H}_{\delta,t}$ est alors un homéomorphisme croissant de \mathbb{R} vérifiant :

- $\tilde{H}_{\delta,t}(x+1) = \tilde{H}_{\delta,t}(x) + 1$,
- $t+k$, $k \in \mathbb{Z}$ sont les points de coupure de $\tilde{H}_{\delta,t}$,

$$- \sigma_{\tilde{H}_{\delta,t}}(t+k) = \delta.$$

Par conséquent, $\tilde{H}_{\delta,t}$ induit par projection l'homéomorphisme $H_{\delta,t}$ quadratique par morceaux de S^1 d'unique point de coupure b tel que $\sigma_H(b) = \delta$. \square

Lemme 5.2. *Soit f un homéomorphisme de classe P , C^r par morceaux ($r \geq 1$) de S^1 de nombre de rotation irrationnel et ayant $p+1$ points de coupure x_0, x_1, \dots, x_p ($p \geq 1$) situés sur la même orbite. Alors il existe un homéomorphisme H quadratique par morceaux de point de coupure unique x_1 tel que si $F = H \circ f \circ H^{-1}$ alors :*

a) s'il existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que $f(x_{i_0}) = x_1$ alors :

a-1) $C(F) = \{y_i, i = 0, 2, \dots, p\}$ et $\pi(F) = \pi(f)$ si $\sigma_f(x_1) \times \sigma_f(x_{i_0}) \neq 1$.

a-2) $C(F) = \{y_i, i = 0, 2, \dots, p, i \neq i_0\}$ et $\pi(F) = \pi(f)$ si $\sigma_f(x_1) \times \sigma_f(x_{i_0}) = 1$.

b) Si pour tout $i = 0, 1, \dots, p$, $f(x_i) \neq x_1$ alors $C(F) = \{y_i, i = 0, 1, 2, \dots, p\}$ et $\pi(F) = \pi(f)$. De plus, si $x_1 = f^k(x_0)$, $k \geq 2$ alors $y_1 = F^{k-1}(y_0)$.

Proof. D'après le lemme 5.1, soit H l'homéomorphisme quadratique par morceaux de point de coupure unique x_1 tel que $\sigma_H(x_1) = \sigma_f(x_1)$.

Posons $F = H \circ f \circ H^{-1}$. Les points de coupure éventuels de F sont :

$H(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, p$ et $H \circ f^{-1}(x_1)$.

- Les sauts de F en ces points:

$$\sigma_F[H(x_i)] = \frac{\sigma_H[f(x_i)] \times \sigma_f(x_i)}{\sigma_H(x_i)}$$

Cas a-1): il existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que $f(x_{i_0}) = x_1$ tels que $\sigma_f(x_1) \times \sigma_f(x_{i_0}) \neq 1$.

Dans ce cas, $f(x_i) \neq x_1$ pour $i \neq i_0$ et $H \circ f^{-1}(x_1) = H(x_{i_0})$. Alors

- $\sigma_F[H(x_i)] = \sigma_f(x_i) \neq 1$, pour $i \neq i_0$, i_0 :

en effet, $\sigma_H(x_i) = 1$ car x_i n'est pas un point de coupure de H , et $\sigma_H[f(x_i)] = 1$ car $f(x_i) \neq x_1$.

- $\sigma_F[H(x_1)] = 1$:

en effet, $\sigma_F[H(x_1)] = \frac{\sigma_H[f(x_1)] \times \sigma_f(x_1)}{\sigma_H(x_1)}$, $\sigma_H[f(x_1)] = 1$ car $f(x_1) \neq x_1$ (x_1 n'est pas un point périodique) et $\frac{\sigma_f(x_1)}{\sigma_H(x_1)} = 1$

- $\sigma_F[H(x_{i_0})] = \sigma_f(x_1) \times \sigma_f(x_{i_0}) \neq 1$:

en effet, $\sigma_F[H(x_{i_0})] = \frac{\sigma_H(x_1) \times \sigma_f(x_{i_0})}{\sigma_H(x_{i_0})}$, $\sigma_H(x_{i_0}) = 1$ car $x_{i_0} \neq x_1$ et $\sigma_H(x_1) = \sigma_f(x_1)$.

On conclut alors que F a p points de coupure :

$$y_i = H(x_i), i = 0, 2, \dots, p.$$

situés sur l'orbite de y_0 .

De plus,

$$\pi(F) = \prod_{0 \leq i \leq p, i \neq 1} \sigma_F(y_i) = \sigma_f(x_1) \times \sigma_f(x_{i_0}) \prod_{0 \leq i \leq p, i \neq 1, i \neq i_0} \sigma_f(x_i) = \prod_{i=0}^p \sigma_f(x_i) = \pi(f).$$

Cas a-2): il existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que $f(x_{i_0}) = x_1$ avec $\sigma_f(x_1) \times \sigma_f(x_{i_0}) = 1$.

Dans ce cas, on a comme dans le cas a-1, $\sigma_F[H(x_i)] = \sigma_f(x_i) \neq 1$, pour $i \neq 1, i_0$, $\sigma_F[H(x_1)] = 1$ et $\sigma_F[H(x_{i_0})] = \sigma_f(x_1) \times \sigma_f(x_{i_0}) = 1$.

On conclut que F a $p - 1$ points de coupure :

$$y_i = H(x_i), \quad 0 \leq i \leq p, i \neq 1, i_0$$

situés sur l'orbite de y_0 . De plus,

$$\pi(F) = \prod_{0 \leq i \leq p, i \neq 1, i \neq i_0} \sigma_F(y_i) = \prod_{0 \leq i \leq p, i \neq 1, i \neq i_0} \sigma_f(x_i) = \prod_{i=0}^p \sigma_f(x_i) = \pi(f) \text{ car } \sigma_f(x_1) \times \sigma_f(x_{i_0}) = 1.$$

Cas b): pour tout $i = 0, 1, \dots, p$, $f(x_i) \neq x_1$.

• On a $\sigma_F[H(x_i)] = \sigma_f(x_i) \neq 1$:

en effet, $\sigma_H(x_i) = 1$ car x_i n'est pas un point de coupure de H , et $\sigma_H[f(x_i)] = 1$ car $f(x_i) \neq x_1$.

• $\sigma_F[H(x_1)] = 1$:

en effet, $\sigma_F[H(x_1)] = \frac{\sigma_H[f(x_1)] \times \sigma_f(x_1)}{\sigma_H(x_1)}$, $\sigma_H[f(x_1)] = 1$ car $f(x_1) \neq x_1$ et $\frac{\sigma_f(x_1)}{\sigma_H(x_1)} = 1$

• $\sigma_F[H \circ f^{-1}(x_1)] = \sigma_H(x_1) \neq 1$:

en effet, $\sigma_F[H \circ f^{-1}(x_1)] = \frac{\sigma_H(x_1) \times \sigma_f(f^{-1}(x_1))}{\sigma_H(f^{-1}(x_1))}$, $\sigma_H(f^{-1}(x_1)) = 1$ car $f(x_1) \neq x_1$ et $\sigma_f(f^{-1}(x_1)) = 1$ car $f^{-1}(x_1) \neq x_i, i = 0, 1, \dots, p$.

On conclut alors que F a $p + 1$ points de coupure :

$$y_1 = H \circ f^{-1}(x_1), y_i = H(x_i), \quad i = 0, 2, \dots, p,$$

satisfaisant :

$$\pi(F) = \prod_{i=0}^p \sigma_F(y_i) = \sigma_H(x_1) \prod_{0 \leq i \leq p, i \neq 1} \sigma_f(x_i) = \sigma_f(x_1) \prod_{0 \leq i \leq p, i \neq 1} \sigma_f(x_i) = \prod_{i=0}^p \sigma_f(x_i) = \pi(f).$$

De plus, si $x_1 = f^k(x_0)$ ($k \geq 2$) alors $y_1 = F^{k-1}(y_0)$ car

$$y_1 = H \circ f^{-1}(x_1) = H \circ f^{k-1}(x_0) = F^{k-1}(H(x_0)) = F^{k-1}(y_0).$$

□

Corollaire 5.3. Soit B un Boshernützan général de nombre de rotation irrationnel et de point de coupure final $x_1 = B(x_0)$.

i) si $\sigma_B(x_0) \times \sigma_B(x_1) = 1$ alors B est conjugué à un C^r -difféomorphisme par un homéomorphisme quadratique par morceaux de point de coupure unique x_1 .

ii) si $\sigma_B(x_0) \times \sigma_B(x_1) \neq 1$ alors B est conjugué à un homéomorphisme de classe P ayant un unique point de coupure par un homéomorphisme H quadratique par morceaux de point de coupure unique x_1 .

Proof. Cela résulte du lemme 5.1, cas a) en prenant $p = 1$. □

Corollaire 5.4. *Soit B un Boshernitzan général de classe P , $C^{2+\varepsilon}$ par morceaux ($\varepsilon > 0$) du cercle de nombre de rotation irrationnel et de point de coupure final $x_1 = B(x_0)$. Si $\sigma_B(x_0) \times \sigma_B(x_1) \neq 1$ alors la mesure μ_B est singulière par rapport à la mesure de Haar m .*

Proof. Ceci résulte du corollaire 5.3 et du théorème 2.10. □

6. PREUVE DES COROLLAIRES 2.2, 2.3 ET THÉORÈME 2.12.

Preuve du corollaire 2.2.

Ceci résulte du fait que si tous les points de coupure de f sont sur une même orbite et que $\pi(f) = 1$ alors f satisfait la propriété D .

Preuve du corollaire 2.3.

$i) \implies ii)$. Si H est l'homéomorphisme C^1 par morceaux qui conjugue f à la rotation $R_\alpha : f = H^{-1} \circ R_\alpha \circ H$ alors $f^n = H^{-1} \circ R_{n\alpha} \circ H$. Comme H et H^{-1} ont même nombre l de points de coupure alors f^n a au plus $2l$ points de coupure pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$ii) \implies iii)$ est la proposition 3.1.

$iii) \implies iv)$ est le théorème 2.1.

$iv) \implies v)$ résulte du théorème 2.1 et du corollaire 5.3.

$v) \implies vi)$ est évident.

Preuve du théorème 2.12.

La preuve se fait par récurrence sur le nombre des points de coupure de f :

- si f a un seul point de coupure alors d'après le théorème 2.10, la mesure μ_f est singulière par rapport à m .

- On suppose que la propriété est vraie pour p points de coupure ($p \geq 2$). Soit f un homéomorphisme comme dans le théorème ayant $p + 1$ points de coupure $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$.

D'après le lemme 5.2, il existe un homéomorphisme H quadratique par morceaux de point de coupure unique x_1 tel que $F = H \circ f \circ H^{-1}$ a l'une des propriétés a) ou b) du lemme. Dans le cas a), F a alors p ou $p - 1$ points de coupure avec $\pi(F) = \pi(f) \neq 1$. Donc, par hypothèse de récurrence, la mesure μ_F est singulière par rapport à m , il en est ainsi pour μ_f .

Dans le cas b), F a $p + 1$ points de coupure y_i , $i = 0, 1, 2, \dots, p$ tels que $y_1 = F^{k-1}(y_0)$ et $\pi(F) = \pi(f) \neq 1$. En procédant comme dans le lemme 5.2, au bout d'au plus $(k - 1)$ étape, f serait conjugué par un homéomorphisme de classe P quadratique par morceaux à un homéomorphisme G de classe P , $C^{2+\varepsilon}$ par morceaux ($\varepsilon > 0$) du cercle de nombre de rotation irrationnel ayant au plus $p + 1$ points de coupure z_i , $i = 0, 1, 2, \dots, p$ tels que $z_1 = G(z_0)$ et $\pi(G) \neq 1$; auquel, G satisfait le cas a) du lemme 5.2. Par conséquent, μ_G est singulière par rapport à m , et il en est ainsi pour μ_f .

Remerciements. Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à Isabelle liousse pour ses remarques et suggestions.

REFERENCES

1. M.D. Boshernitzan, *Dense orbits of rationals*. Proc. Am. Math. Soc. 117, No.4, (1993), 1201-1203.
2. A.Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*. J. Math. Pures Appl., 11, (1932), 333-375.
3. A.Dzhalilov, K. M.Khanin, *On invariant measure for homeomorphisms of a circle with a break point*, Functional Analysis and its Applications, vol. 32, n 3, (1998), 153-161.
4. M.R. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*. Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math.No.49(1979),5-233.
5. M.R. Herman, *Sur les difféomorphismes du cercle de nombre de rotation de type constant*. Conference on harmonic analysis, Vol.I, II (Chicago, Ill.,1981), Wadsworth Math.Ser.,(1983), 708-725.
6. Y.Katznelson, D.Ornstein, *The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle*. Ergod.Th. and Dynam.Sys. 9 (1989), 4, 643-680.
7. Y.Katznelson, D.Ornstein, *The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle*. Ergodic Theory Dynam. Systems 9 (1989), no.4,681-690.
8. K.M. Khanin, Ya.G. Sinaï, *Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations*. Russian Math. Surveys 44 (1989),no.1, 69-99.
9. I.Liousse, H.Marzougui, *Échanges d'intervalles affines conjugués à des linéaires*. Ergod.Th. and Dynam.Sys. (2002), 22, 535-554.
10. I.Liousse, *PL Homeomorphisms of the circle which are piecewise C^1 conjugate to irrational rotations*, Bull Braz Math Soc, New Series 35(2) (2005), 269-280.
11. I.Liousse, *Nombre de rotation, mesures invariantes et ratio set des homéomorphismes affines par morceaux du cercle*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 55. , 2 (2005), 1001-1052.
12. I.Liousse, *Nombre de rotation dans les groupes de Thompson généralisés, automorphismes*, Preprint (2005)
13. H.Poincaré, *Oeuvres complètes*, t.1, 137-158.
14. J. Stark, *Smooth conjugacy and renormalisation for diffeomorphisms of the circle*. Nonlinearity 1, No.4,(1988),541-575.
15. J.C.Yoccoz, *Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique*. C.R.A.S., 298, série I, n 7 (1984)

HABIB MARZOUGUI, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCES OF BIZERTE 7021, ZARZOUNA. TUNISIA; ABDELHAMID ADOUANI, INST.PREP.ÉTU.D.INGEN.BIZERTE, 7021, ZARZOUNA. TUNISIA

E-mail address: `habib.marzouki@fsb.rnu.tn`