



HAL
open science

Modifications et cycles proches sur une base générale

Fabrice Orgogozo

► **To cite this version:**

Fabrice Orgogozo. Modifications et cycles proches sur une base générale. International Mathematics Research Notices, 2006, 2006, Article ID 25315, 38 p. 10.1155/IMRN/2006/25315 . hal-00007633

HAL Id: hal-00007633

<https://hal.science/hal-00007633v1>

Submitted on 22 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MODIFICATIONS ET CYCLES ÉVANESCENTS SUR UNE BASE DE DIMENSION SUPÉRIEURE À UN.

par

Fabrice Orgogozo

Introduction

On se propose de démontrer l’analogie en cohomologie étale du théorème principal de [Sab83], conjecturé par Pierre Deligne, selon lequel tout morphisme de schémas acquiert un comportement de « morphisme sans éclatement », quitte à effectuer une modification de la base. Nous renvoyons à 1.1 pour un énoncé précis en termes de cycles évanescents (ou plutôt « proches ») — dont la définition est rappelée dans la section §1 — sur une base de dimension quelconque. Pour un exemple d’éclatement « avec éclatement » (sic!), voir §9.

Le théorème principal entraîne en particulier que sur une telle base, si les cycles évanescents ne commutent plus nécessairement aux changements de base (même si celle-ci est régulière), cela est malgré tout vrai *localement pour la topologie de la descente effective universelle*.

Ces résultats généralisent également ceux de Roland Huber [Hub96], §4.2, sur la cohomologie des cycles proches quand la base est le spectre d’un anneau valuatif (cf. 4.4). Ces derniers sont une étape importante dans la démonstration des théorèmes de commutation au changement de base et constructibilité de *op. cit.*

Les « cycles évanescents » dont il est question ont été introduits par P. Deligne à l’occasion d’un séminaire à l’IHÉS sur les fonctions L il y a une vingtaine d’années et généralisent ceux définis par Alexandre Grothendieck dans [SGA₇ I]. C’est un moyen commode de regrouper la cohomologie des différents « tubes de Milnor » $X(x) \times_{S(s)} S(t)$ où t est une généralisation de $s = f(x)$ (les points sont géométriques), lorsque que l’on se donne un morphisme de schémas $X \xrightarrow{f} S$ et un faisceau étale \mathcal{F} sur X . Ces tubes apparaissent naturellement quand on calcule la fibre en t d’un faisceau $R^i f_{x*} \mathcal{F}$, où f_x est le morphisme local $X(x) \rightarrow S(s)$ induit par f entre les hensélisés stricts en x et s (les « petites boules » centrées en ces points). Dans ce langage, le théorème principal affirme qu’après modification de la base, les morphismes f_x se comportent cohomologiquement comme des morphismes propres.

L’ingrédient essentiel de notre démonstration est un théorème sur les fibrations plurinodales dû à A. Johan de Jong ([dJ97]).

Ce travail a été effectué à l’université de Princeton (É.-U.A) ; l’auteur a bénéficié de l’excellent accueil de son département de mathématique et en particulier de son directeur de l’époque, Nick Katz.

Enfin, en guise d'application de ces topos exotiques, mais dans le cas beaucoup plus simple des singularités isolées, nous donnons une démonstration de la conjugaison des cycles évanescents associés à un pinceau de Lefschetz, plus proche de l'intuition topologique et également valable en caractéristique deux. L'ingrédient clé est ici dû à Ofer Gabber.

Je remercie très chaleureusement OFER GABBER et LUC ILLUSIE de m'avoir suggéré ce problème ainsi que d'en avoir discuté avec moi. C'est également avec plaisir que je remercie JÁNOS KOLLÁR d'avoir gentiment répondu à quelques questions naïves et le rapporteur pour sa relecture extrêmement attentive et ses commentaires utiles et détaillés. Enfin, je suis spécialement reconnaissant envers OFER GABBER de m'avoir expliqué la proposition **3.2.1** à un moment critique, ainsi que de m'avoir fait part de ses précieuses remarques à l'origine de nombreuses améliorations.

Partie I. COMMUTATION AUX CHANGEMENTS DE BASE

1. Rappels sur les cycles évanescents sur une base de dimension supérieure à 1 et énoncé du théorème

On reprend brièvement les définitions de [Lau83], auquel on renvoie le lecteur pour plus de détails. Pour tout morphisme de topos $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{S}$, on peut définir un troisième topos $\mathbf{X} \overleftarrow{\times}_{\mathbf{S}} \mathbf{S}$ (*loc. cit.*, § 3 ou [MV00], Chap. V, § 1) solution d'un problème universel 2-catégorique, dont les points sont les paires (\mathbf{x}, \mathbf{t}) où \mathbf{x} est un point de \mathbf{X} et \mathbf{t} une générisation de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Ce topos est naturellement équipé d'un morphisme $\Psi_{\mathbf{f}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} \overleftarrow{\times}_{\mathbf{S}} \mathbf{S}$, correspondant sur les points à $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{id}} \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ ainsi que de deux projections $p : \mathbf{X} \overleftarrow{\times}_{\mathbf{S}} \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{X}$ et $q : \mathbf{X} \overleftarrow{\times}_{\mathbf{S}} \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$.

Si l'on suppose maintenant que \mathbf{X} (resp. \mathbf{S}) est le topos étale associé à un schéma X (resp. S), et \mathbf{f} induit par un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$, on montre que pour tout faisceau \mathcal{F} sur \mathbf{X} , la fibre de $R\Psi_{\mathbf{f}*}\mathcal{F}$ en un point (\mathbf{x}, \mathbf{t}) est isomorphe à $R\Gamma(X(\mathbf{x}) \times_{S(\mathbf{f}(\mathbf{x}))} S(\mathbf{t}), \mathcal{F})$.

Dorénavant, on confondra X avec le topos étale associé, afin d'alléger les notations.

Un anneau commutatif Λ étant donné, le foncteur « cycles proches » de f est le foncteur dérivé

$$R\Psi_{f*}^{\Lambda} : D^{+}(X, \Lambda) \rightarrow D^{+}(X \overleftarrow{\times}_{S} S, \Lambda).$$

On le notera généralement Ψ_f , l'anneau Λ étant sous-entendu.

Avant d'énoncer le théorème principal rappelons qu'une *modification* (resp. une *altération*) $S' \rightarrow S$ est un morphisme propre surjectif induisant un isomorphisme (resp. un morphisme fini) au-dessus d'un ouvert partout dense de S , tel que tout point maximal de S' s'envoie sur un point maximal de S . Enfin on rappelle que l'on abrège « quasi-compact et quasi-séparé » en *cohérent*.

1.1 Théorème. — *Soient S un schéma cohérent irréductible, $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, n un entier inversible sur S et $\mathcal{F} \in \text{Ob } D_c^b(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Alors, le complexe $\Psi_f(\mathcal{F})$ n'a pas de cohomologie en grand degré et il existe une modification $S' \rightarrow S$ telle que l'on ait la propriété suivante : notant $f_{S'}$ (resp. $\mathcal{F}_{S'}$) le morphisme $f \times_S S' : X' \rightarrow S'$ (resp. le complexe $\mathcal{F}|_{X'}$), la formation de $\Psi_{f_{S'}}\mathcal{F}_{S'}$ commute à tous les changements de base $g : T \rightarrow S'$.*

Plus précisément, le morphisme de changement de base ([SGA 4] XII.4 et XVII.2.1)

$$(1.1.a) \quad c_{f, \mathcal{F}, T/S'} : \overleftarrow{g}^*(\Psi_{f_{S'}}\mathcal{F}_{S'}) \rightarrow \Psi_{f_T}\mathcal{F}_T$$

associé au diagramme essentiellement commutatif de topos :

$$\begin{array}{ccc}
 X_{S'} & \xleftarrow{g} & X_T \\
 \downarrow \Psi_{f_{S'}} & & \downarrow \Psi_{f_T} \\
 X_{S'} \times_{S'} S' & \xleftarrow{\bar{g}} & X_T \times_T T
 \end{array}$$

est un isomorphisme.

Nous verrons dans la seconde partie que l'on peut améliorer cet énoncé (comparaison entre la cohomologie des tubes de Milnor et celle des fibres de Milnor (5.1); constructibilité (6.1)).

Insistons sur le fait que le morphisme S'/S dépend de \mathcal{F} .

La démonstration se fait par une triple récurrence sur un indice de troncation, la dimension de S (que l'on peut supposer finie comme expliqué plus bas) et la « dimension relative générique » de f . On procède par réduction au cas des courbes semi-stables et des faisceaux constants. L'entier n étant choisi une fois pour toute, on écrira souvent Λ pour $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Le morphisme $f : X \rightarrow S$ étant sous-entendu, pour chaque point (x, t) de $X \times_S S$, c'est-à-dire la donnée un point géométrique x de X et une généralisation géométrique t du point géométrique image de x dans S , on désignera par $X_{x,t}$ le schéma produit fibré $X(x) \times_{S(f(x))} S(t)$; c'est le *tube de Milnor* (de f) en (x, t) .

La démonstration de 1.1 occupe les trois sections suivantes. Le schéma de la démonstration est expliqué dans le paragraphe 3.4, qui conclut les dévissages linéaires et détaille la récurrence.

Notation : pour m un morphisme de topos, on écrira principalement m_* pour l'image directe dérivée Rm_* .

2. Premières réductions

2.1. Passage à la limite. — Soit $(S_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert affine de S ; par quasi-compacité de S , on peut supposer I fini. Procédant comme en [RG71], première partie, § 5.3.3, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour S affine. Le morphisme f étant de présentation finie, il existe d'après [ÉGA IV 8.9.1], un $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ -schéma affine de type fini S_0 , un morphisme de type fini $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$, un morphisme dominant $S \rightarrow S_0$ et un S -isomorphisme $X_0 \times_{S_0} S \xrightarrow{\sim} X$.

De même, on peut supposer que le complexe borné Λ -constructible \mathcal{F} est isomorphe à l'image inverse d'un tel complexe sur X_0 .

Pour cette raison, les dévissages qui vont suivre concernent une base noethérienne.

2.2. Un résultat d'annulation. — Le fait que le complexe $\Psi_f \mathcal{F}$, a priori dans $D^+(X \times_S S, \Lambda)$, soit dans $D^b(X \times_S S, \Lambda)$ résulte de la proposition suivante :

2.3 Proposition. — Soient N un entier, S un schéma et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, dont les fibres sont de dimension inférieure ou égale à N . Si \mathcal{F} est un faisceau abélien de torsion sur X , pour tout point (x, t) de $X \times_S S$,

$$H^i \Psi_f \mathcal{F}_{(x,t)} \simeq H^i(X(x) \times_{S(f(x))} S(t), \mathcal{F}) = 0$$

dès que $i > 2N$.

Faute de référence, voici une démonstration, qui m'a été communiquée par O. Gabber, évitant ainsi d'avoir recours à une variante tronquée des énoncés principaux.

Démonstration. — La question étant locale au voisinage de chaque point de X , on peut supposer X affine et même quasi-fini sur le S -espace affine \mathbf{A}_S^N , avec S également affine. Appliquant le Main Theorem de Zariski et prolongeant le faisceau \mathcal{F} par zéro, on peut supposer X fini sur \mathbf{A}_S^n puis finalement X/S *projectif* à fibres de dimension inférieure à N . Soit (x, t) un couple de points géométriques comme dans l'énoncé ; notons $s = f(x)$ et supposons pour simplifier les notations que $S(s) \xrightarrow{\sim} S$. Notons τ le morphisme essentiellement étale $X(x) \times_S S(t) \rightarrow X \times_S S(t)$. On a $\mathrm{R}\Gamma(X(x) \times_S S(t), \mathcal{F}) \simeq \mathrm{R}\Gamma(X \times_S S(t), \mathrm{R}\tau_*\mathcal{F})$. De plus, d'après le théorème de changement de base propre, $\mathrm{R}\Gamma(X \times_S S(t), \mathrm{R}\tau_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(X_t, (\mathrm{R}\tau_*\mathcal{F})_{X_t})$. Comme X_t est de n -dimension cohomologique étale $\leq 2N$, il suffit de montrer que $\mathrm{H}^i((\mathrm{R}\tau_*\mathcal{F})_{X_t}) = 0$ pour $i > 0$. Cela signifie que pour tout point géométrique u de X_t , $(\mathrm{R}^i\tau_*\mathcal{F})_u = 0$ pour $i > 0$ (on identifie u et son image par le morphisme $X_t \rightarrow X \times_S S(t)$). Cette fibre est isomorphe à $\mathrm{H}^i(X(x) \times_X X(u), \mathcal{F})$; d'après [Art71], 3.4, les composantes connexes de $X(x) \times_X X(u)$ sont strictement locales. Le résultat en découle. L'hypothèse de projectivité est là pour nous assurer que u et x sont contenus dans un même ouvert affine. \square

2.4. Réduction au cas d'un faisceau constant. — Notons que l'on peut supposer dans la démonstration de 1.1 que \mathcal{F} est un faisceau concentré en degré 0. Comme \mathcal{F} est constructible, il existe un nombre fini de morphismes finis $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, tels que \mathcal{F} s'injecte dans le faisceau $\prod_{i \in I} p_{i*}C_i$, où chaque C_i est un faisceau *constant* constructible de

Λ -modules sur X_i . Par commodité nous dirons dans ce paragraphe que ces faisceaux sont *très constructibles* sur X . Supposons 1.1 démontré pour les faisceaux très constructibles. Remarquons que l'image inverse d'un faisceau très constructible est très constructible (changement de base pour les morphismes finis). Une récurrence immédiate sur les entiers k tels qu'après modification les cônes des morphismes (1.1.a) n'aient pas de cohomologie en degré inférieur ou égal à k , montre qu'il suffit, pour un faisceau \mathcal{F} donné, de démontrer 1.1 pour un nombre fini de faisceaux très constructibles (cogénérateurs de la catégorie des faisceaux constructibles). Cela découle de la proposition précédente car il suffit donc de démontrer le résultat pour un nombre fini d'entiers k . Ainsi, on s'est ramené au cas où $\mathcal{F} = p_*C$, pour un morphisme fini $p : X' \rightarrow X$ et un faisceau C constant Λ -constructible sur X' . Si la commutation aux changements de base est démontrée pour $(X'/S, C)$, elle l'est aussi pour $(X/S, p_*C)$. En effet, pour tout point (x, t) de $\overline{X \times_S S}$,

$$\mathrm{R}\Gamma(X_{x,t}, p_*C) = \prod_{x_i \mapsto x} \mathrm{R}\Gamma(X'_{x_i,t}, C),$$

et ce universellement sur S , puisque p_*C commute aux changements de base.

Il est utile de remarquer pour la suite de la démonstration que quand S est irréductible, passer de X/S à X'/S n'augmente pas la dimension de la fibre générique.

2.5. Des altérations aux modifications. — Il suffit de montrer qu'il existe une *altération* $S' \rightarrow S$ telle que les conclusions de 1.1 soient satisfaites. Cela résulte immédiatement des deux lemmes suivants.

2.6 Lemme. — Soit $S' \rightarrow S$ une altération entre schémas noethériens. Il existe deux modifications $\tilde{S} \rightarrow S'$, $S'' \rightarrow S$ et un morphisme fini surjectif $\tilde{S} \rightarrow S''$ tels que le carré

$$\begin{array}{ccc} S' & \xleftarrow{\text{modif.}} & \tilde{S} \\ \downarrow \text{alt.} & & \downarrow \text{fini} \\ S & \xleftarrow{\text{modif.}} & S'' \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. — C'est un corollaire immédiat de [RG71], I 5.2.2, compte tenu du fait qu'un morphisme propre, plat, génériquement fini est fini et que le transformé propre de S'/S via $S'' \rightarrow S$ domine S' . \square

Je remercie O. Gabber de m'avoir appris ce fait.

2.7 Lemme. — Sous les hypothèses 1.1, s'il existe S'/S fini surjectif tel que la formation de $\Psi_{f_{S'}} \mathcal{F}'$ commute aux changements de base $T' \rightarrow S'$, alors la formation du complexe $\Psi_f \mathcal{F}$ commute à tous les changements de base $T \rightarrow S$.

Démonstration. — Soient $T \rightarrow S$ un morphisme et (x_T, b_T) un point de $X_T \overleftarrow{\times}_T T$ s'envoyant sur le point (x, b) de $X \overleftarrow{\times}_S S$. Il s'agit de montrer que le morphisme canonique $\mathrm{R}\Gamma(X_{x,b}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X_{T x_T, b_T}, \mathcal{F})$ est un isomorphisme, sachant que cette propriété est vraie après changement de base par S'/S , fini surjectif. On peut supposer T et S strictement locaux, de points fermés les images de x et x_T . Pour chaque entier $q \geq 0$, notons $S^{(q)} = (S'/S)^{q+1}$ le produit fibré itéré (resp. $T^{(q)} = (T \times_S S'/T)^{q+1}$, $X^{(q)} = X \times_S S^{(q)}$, $X_T^{(q)} = X_T \times_T T^{(q)}$). Ils définissent naturellement des hyperrecouvrements propres⁽ⁱ⁾ (« cosq_0 ») de S , T et des différents schémas au-dessus de ceux-ci. Le produit fibré $X_{x,b} \times_S S^{(q)}$ (resp. $X_{T x_T, b_T} \times_T T^{(q)}$) se décompose en une somme disjointe $\coprod_{I_q} X_{x_i, b_j}^{(q)}$ (resp. $\coprod_{J_q} X_{T x_i, b_{T_j}}^{(q)}$), où I_q (resp. J_q) est naturellement en bijection avec l'ensemble des points (x_i, b_j) de $X^{(q)} \overleftarrow{\times}_{S^{(q)}} S^{(q)}$ (resp. $X_T^{(q)} \overleftarrow{\times}_{T^{(q)}} T^{(q)}$) au-dessus de (x, b) (resp. (x_T, b_T)). L'ensemble I_q (resp. J_q) est donc canoniquement en bijection avec $\pi_0(S_b^{(q)})$ (resp. $\pi_0(T_{b_T}^{(q)})$), où les indices désignent ici les fibres des morphismes évidents. (Par exemple $S_b^{(q)}$ est le produit fibré $b \times_S S^{(q)}$, etc.) Ainsi, les suites spectrales de descente associées à $X_{x,b}$ et $X_{T x_T, b_T}$ se réécrivent :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(\coprod_{I_q} X_{x_i, b_j}^{(q)}, \mathcal{F}) & \Longrightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(X_{x,b}, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^p(\coprod_{J_q} X_{T x_i, b_{T_j}}^{(q)}, \mathcal{F}) & \Longrightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(X_{T x_T, b_T}, \mathcal{F}) \end{array}$$

Commençons par remarquer que pour chaque q , les ensembles I_q et J_q sont canoniquement en bijection. C'est un cas particulier du lemme suivant :

⁽ⁱ⁾Rappelons brièvement (cf. [Del74], § 5) qu'un *hyperrecouvrement propre* d'un schéma S est un objet simplicial S_\bullet de la catégorie des S -schémas (*i.e.* un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Sch}_S$) tel que pour chaque entier $n \geq 0$, le morphisme canonique $S_{n+1} \rightarrow (\mathrm{cosq}_n^S(S_\bullet))_{n+1}$ soit propre et surjectif.

2.7.1 Lemme. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} T & \longleftarrow & T' \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

un carré cartésien avec $S' \rightarrow S$ fini. Alors, pour tout point géométrique t dans T d'image s , $\pi_0(T'_t) \xrightarrow{\sim} \pi_0(S'_s)$.

(Cela résulte par exemple du théorème de changement de base propre ensembliste pour le morphisme fini S'/S et le faisceau $\{0, 1\}$.)

Comme pour chaque q , les $S^{(q)}$ sont des S' -schémas, l'hypothèse entraîne que pour chaque choix de points de $X^{(q)} \overleftarrow{\times}_{S^{(q)}} S^{(q)}$ et $X_T^{(q)} \overleftarrow{\times}_{T^{(q)}} T^{(q)}$ se correspondant, la flèche verticale de gauche induite sur le facteur direct correspondant est un isomorphisme pour chaque p . \square

3. Réduction au cas « plurinodal »

Supposons S noethérien. Quitte à l'altérer S , on peut le supposer également intègre. Le problème étant local en haut, on peut supposer f séparé donc f compactifiable d'après un théorème de Nagata [Lüt93] (S est noethérien et f est séparé de type fini). Ainsi, on se ramène au cas où f est propre, quitte à prolonger \mathcal{F} par zéro.

3.1. Avant d'énoncer le lemme de descente dont nous aurons besoin, introduisons une terminologie utile ici : on dira, $f : X \rightarrow S$, \mathcal{F} et $r \in \mathbf{Z}$ étant donnés, que la formation de $\Psi_f(\mathcal{F})$ r -commute aux changements de base si les cônes des morphismes (1.1.a) n'ont pas de cohomologie en degré inférieur ou égal à r , pour tous les morphismes $T \rightarrow S$.

3.1.1 Lemme. — *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, $\Lambda = \mathbf{Z}/n$ pour un entier n et r un entier. Supposons qu'il existe un S -hyperrecouvrement propre tronqué à un ordre $M \geq r$, $X_{\bullet \leq M} \rightarrow X$, tel que la formation des cycles proches $\Psi_{X_i/S}(\Lambda)$ ($r - i$)-commute aux changements de base, pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$. Sous ces hypothèses, la formation de $\Psi_f(\Lambda)$ r -commute aux changements de base.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que l'on peut étendre $X_{\bullet \leq M} \rightarrow X$ en un hyperrecouvrement propre (non tronqué) $\varepsilon : X_{\bullet} \rightarrow X$. Nous le faisons par commodité d'écriture. Soient $T \rightarrow S$ un morphisme et (a_T, b_T) un point de $T \overleftarrow{\times}_T T$ s'envoyant sur (a_S, b_S) dans $S \overleftarrow{\times}_S S$. Notons $i_{a_S}^X : X_{a_S} \hookrightarrow X_{S(a_S)}$ l'immersion fermée, $j_{b_S}^X : X_{S(b_S)} \rightarrow X_{S(a_S)}$ le morphisme induit par localisation étale en bas, et de la même façon les variantes pour X_{\bullet} . La commutation aux changements de base revient à démontrer que pour tout tel choix le cône du morphisme de changement de base (où l'on note j_* pour Rj_*)

$$i_{a_S}^X * j_{b_S^*}^X \Lambda|_{X_{a_T}} \rightarrow i_{a_T}^X * j_{b_T^*}^X \Lambda$$

n'a pas de cohomologie en degré inférieur ou égal à r . En effet, la fibre en x_T à gauche est isomorphe à $\Psi_f(\Lambda)_{(x_S, a_S)}$ si x_S est l'image de x_T dans X_{a_S} , tandis que celle de droite est isomorphe à $\Psi_{f_T}(\Lambda)_{(x_T, b_T)}$. Pour tout S -schéma Z , notons ε_Z l'hyperrecouvrement propre $\varepsilon \times_S Z$ de $X \times_S Z$. Par descente cohomologique les morphismes $\text{Id} \rightarrow \varepsilon_* \varepsilon^*$ sont des isomorphismes ; compte tenu également du théorème de changement de base propre pour les ε , on dispose donc d'un isomorphisme canonique :

$$i_{a_S}^X * j_{b_S^*}^X \Lambda \xrightarrow{\sim} i_{a_S}^X * j_{b_S^*}^X (\varepsilon_{b_S^*} \varepsilon_{b_S^*}^* \Lambda) \simeq \varepsilon_{a_S^*} (i_{a_S}^X * j_{b_S^*}^X \Lambda).$$

Le même résultat étant valable sur T , on a un diagramme commutatif dont les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 (i_{a_S}^X * j_{b_S}^X \Lambda)_{|X_{a_T}} & \longrightarrow & (\varepsilon_{a_S} * (i_{a_S}^{X_\bullet} * j_{b_S}^{X_\bullet} \Lambda))_{|X_{a_T}} \xrightarrow{\sim} \varepsilon_{a_T} * ((i_{a_S}^{X_\bullet} * j_{b_S}^{X_\bullet} \Lambda)_{|X_{a_T}}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 i_{a_T}^{X_T} * j_{b_T}^{X_T} \Lambda & \longrightarrow & \varepsilon_{a_T} * (i_{a_T}^{X_T} * j_{b_T}^{X_T} \Lambda)
 \end{array}$$

L'isomorphisme « en haut à droite » résulte une fois encore du théorème de changement de base propre et de la propriété de ε .

La conclusion résulte alors du lemme général suivant (appliqué au cône des morphismes de changements de base sur les schémas simpliciaux) :

3.1.2 Lemme. — Soient $\varepsilon : X_\bullet \rightarrow X$ un topos simplicial augmenté, K_\bullet un complexe de faisceaux de Λ -modules sur X_\bullet et r un entier tel que $\tau_{\leq r-i}(K_\bullet|_{X_i}) = 0$ pour tout $i \in [0, r]$. Supposons que les topos X_i aient suffisamment de points. Alors, sur X , le complexe de faisceaux $\tau_{\leq r} \varepsilon_* K_\bullet$ est trivial.

Démonstration. — La suite spectrale ([Del74], § 5.2.7.1)

$$E_1^{p,q} = H^q \varepsilon_{p*}(K_\bullet|_{X_p}) \Rightarrow H^{p+q}(\varepsilon_* K_\bullet),$$

nous ramène à montrer que si K' est un complexe de faisceaux sur X' tel que $\tau_{\leq n} K' = 0$ alors, pour tout morphisme de topos $e : X' \rightarrow X$, le tronqué $\tau_{\leq n} e_* K'$ est également nul. Ce dernier point est trivial. \square

\square

3.1.3. On utilisera ce lemme dans le cas où $M = r$ est strictement supérieur au double de la dimension des fibres de f ; en vertu de l'annulation de la cohomologie en degré $> 2M$ (2.3), la conclusion du lemme est alors aussi forte que le théorème 1.1.

Remarquons également qu'il est donc loisible de supposer le schéma X intègre.

3.2. Ramenons nous maintenant au cas où le morphisme f est propre et *surjectif*. On a déjà vu que l'on peut supposer f propre et S intègre. Supposons donc $f : X \rightarrow S$ propre et notons F le fermé $f(X) \subset S$, que l'on suppose strict. Admettons l'existence d'une modification $F' \rightarrow F$ de F telle que la conclusion de 1.1 soit valable pour $f_F : X \rightarrow F, \mathcal{F}$, après changement de base à $F' \rightarrow F$ (cela résultera de l'étude du cas où f est dominant). Il nous reste à définir une modification de la base S , partant de celle de son sous-schéma fermé F .

Nous allons appliquer le lemme suivant, dont l'énoncé et la démonstration (un peu plus bas) sont dus à O. Gabber, au morphisme composé $g : F' \rightarrow F \rightarrow S$.

3.2.1 Lemme. — Soit $g : F' \rightarrow S$ un morphisme propre de schémas noethériens réduits, et posons $F = g(F')$. Il existe un éclatement de centre nulle part dense $p : S' \rightarrow S$ et un F -schéma G s'envoyant par un morphisme fini et surjectif sur $p^{-1}(F) = F_{S'}$ et s'envoyant également sur F' .

Soit $S' \rightarrow S$ comme dans le lemme. Montrons que $\Psi_{f_{S'}} \mathcal{F}$ commute aux changements de base $T \rightarrow S'$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_{F'} & \longleftarrow & X_G \\
 & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longleftarrow & X_{S'} & \longleftarrow & X_T \\
 \downarrow f_F & & \downarrow f_{F'} & & \downarrow f_G \\
 F & \longleftarrow & F' & \longleftarrow & G \\
 \downarrow f & \swarrow & \downarrow f_{S'} & \swarrow \text{fini} & \downarrow f_T \\
 S & \longleftarrow & S' & \longleftarrow & T \\
 & \swarrow & \downarrow p & & \downarrow \\
 & & & &
 \end{array}$$

où les rectangles et les deux parallélogrammes verticaux sont cartésiens. La formation des cycles proches $\Psi_{f_{F'}} \mathcal{F}$ commute aux changements de base sur F' . On en déduit immédiatement qu'il en est de même pour la formation du complexe $\Psi_{f_G} \mathcal{F}$ relativement aux changements de base sur G . D'après le lemme 2.7, et puisque le morphisme $G \rightarrow F_{S'}$ est fini et surjectif, la formation de $\Psi_{f_{F_{S'}}} \mathcal{F}$ commute également aux changements de base sur $F_{S'}$ et donc en particulier à $F_T \rightarrow F_{S'}$.

Il nous suffit donc d'appliquer le lemme suivant à $f_{S'}$:

3.2.2 Lemme. — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, d'image F , n un entier et $\mathcal{F} \in \text{Ob } \mathbf{D}_c^b(X, \mathbf{Z}/n)$. Si la formation des cycles proches du couple $(X \rightarrow F, \mathcal{F})$ commute aux changements de base relativement à F , il en est de même pour le couple $(f : X \rightarrow S, \mathcal{F})$ (relativement à S).

Démonstration. — Soient T un S -schéma et (x_T, b_T) un point de $X_T \overleftarrow{\times}_T T$ d'image (x, b) dans $X \overleftarrow{\times}_S S$. Il s'agit de montrer que le morphisme $\text{R}\Gamma(X_{x,b}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{R}\Gamma(X_{T x_T, b_T}, \mathcal{F})$ est un isomorphisme. Deux cas se présentent : soit b_T est localisé en l'ouvert complémentaire de $F_T := F \times_S T$, auquel cas les schémas $X_{x,b}$ et $X_{T x_T, b_T}$ sont vides (et l'isomorphisme est évident), soit b_T est localisé en F_T . Dans ce dernier cas, le morphisme $X_F(x) \times_{F(a)} F(b) \rightarrow X(x) \times_{S(a)} S(b)$ (resp. variante sur T) est un isomorphisme. (En effet, $X_F = X$ et $F \times_S S(a) = F(a)$ etc.) \square

Il nous reste donc à démontrer le lemme 3.2.1 pour conclure la démonstration de la réduction 3.2.

Démonstration du lemme 3.2.1. — Pour chaque sous-schéma fermé intègre Z du sous-schéma fermé F de S , il existe un sous-schéma fermé intègre W_Z de F' qui est une altération de Z . (Il suffit en effet de prendre l'adhérence d'un point fermé de la fibre de $F' \rightarrow F$ au-dessus du point générique de Z .) D'après 2.6, il existe un sous-schéma fermé strict R_Z de Z tel que si l'on note \tilde{Z} et \widetilde{W}_Z les éclatés correspondants, le morphisme induit $\widetilde{W}_Z \rightarrow \tilde{Z}$ devienne fini surjectif. Pour Z variable, les ensembles localement fermés $Z - R_Z$ recouvrent F . Le schéma F étant noethérien, donc compact pour la topologie constructible, il existe un nombre fini de Z_i, W_{Z_i} et R_{Z_i} tels que les $Z_i - R_{Z_i}$ recouvrent F . Soient maintenant, pour chaque tel indice i , S'_i l'éclatement de S de centre R_{Z_i} , et enfin S' l'éclatement de centre défini par le produit des Idéaux $\mathcal{J}_{R_{Z_i}}$, c'est-à-dire le « plus petit » éclatement dominant tous les S_i . Soient $(T_j)_j$ les composantes irréductibles de $F \times_S S'$. Pour chaque indice j , choisissons un indice i_j tel

que le point générique de T_j s'envoie sur un point de $Z_{i_j} - R_{i_j}$. Le schéma T_j s'envoie sur le sous-schéma \widetilde{Z}_{i_j} de S'_{i_j} . Soit G_j le produit fibré $T_j \times_{\widetilde{Z}_{i_j}} \widetilde{W}_{i_j}$; il s'envoie par un morphisme fini et surjectif sur T_j et s'envoie également sur F' . L'union disjointe $G := \coprod G_j$ répond donc à la question.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & F' & \xleftarrow{\mathcal{O}_{W_{Z_{i_j}}}} & \widetilde{W}_{Z_{i_j}} & \xleftarrow{\dots\dots\dots} & G_j \\
 & & \downarrow & \swarrow \text{altération} & \downarrow \text{fini surj.} & & \downarrow \text{fini surj.} \\
 R_{i_j} \hookrightarrow & F & \xleftarrow{\mathcal{O}_{Z_{i_j}}} & Z_{i_j} & \xleftarrow{\dots\dots\dots} & T_j & \\
 & \downarrow & & \swarrow & & \downarrow & \\
 & S & & & & \text{Écl}_{\cup R_i}(S) & \\
 & & & & & \longleftarrow &
 \end{array}$$

□

3.2.3 Remarque. — Les modifications de F provenant de S par restriction ne sont pas cofinales parmi les modifications de F . Il est donc nécessaire d'avoir recourt à un morphisme intermédiaire (ici fini et surjectif) pour palier cet inconvénient. Voici un exemple dû à János Kollár : soit $E \hookrightarrow \mathbf{A}_{\mathbb{C}}^2$ une courbe elliptique époincée et $F \hookrightarrow \mathbf{A}_{\mathbb{C}}^3 = S$ le cône construit sur E . Soit $F' \rightarrow F$ l'éclatement du sommet du cône. La fibre exceptionnelle de $F' \rightarrow F$ est non rationnellement connexe alors que les fibres de n'importe quel éclatement de $S' \rightarrow S$ le sont. En particulier, S'_F ne peut pas s'envoyer par un S -morphisme sur F' .

3.3. L'utilité de la réduction 3.2 pour notre problème provient du fait suivant :

3.3.1 Proposition. — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre surjectif entre schémas intègres excellents, et M un entier. Il existe un schéma intègre S' , une altération $S' \rightarrow S$ et un S' -hyperrecouvrement propre tronqué $X'_{\bullet \leq M} \rightarrow X' = X \times_S S'$ tel que pour chaque $i \in [0, M]$, chaque composante connexe du S' -schéma X'_i soit ou bien intègre et plurinodale sur S' ou bien d'image un fermé strict de S' . De plus, on peut supposer la dimension relative générique de X'_0/S' inférieure ou égale à celle de X/S .

Rappelons qu'un morphisme est dit *plurinodal* (cf. [dJ97], 5.8) s'il est le composé de morphismes projectifs et plats dont les fibres géométriques sont des courbes connexes ayant au pire des singularités quadratiques ordinaires.

Par commodité, nous dirons qu'un morphisme de schémas est *presque plurinodal* s'il est somme d'un morphisme plurinodal et d'un morphisme non dominant.

Démonstration. — D'après *loc. cit.* 5.10, quitte à altérer S , il existe une altération $X_0 \rightarrow X$ telle que X_0/S soit presque plurinodal, nécessairement de dimension relative égale à la dimension de la fibre générique de X/S . Le produit fibré $X_0 \times_X X_0$ n'est pas nécessairement plurinodal sur S ni nécessairement intègre. Soit Y le coproduit des composantes irréductibles réduites de $X_0 \times_X X_0$; chaque composante connexe Y_i de Y est donc intègre et $Y \rightarrow X_0 \times_X X_0$ est propre et surjectif. Si Y_i/S est dominant, quitte à altérer S une fois de plus, on peut altérer Y_i en un S -schéma presque plurinodal Y'_i . Dans le cas contraire, *i.e.* si Y_i/S n'est pas dominant (*i.e.* surjectif), on pose $Y'_i = Y_i$. Le S -schéma $X_1 := \coprod Y'_i$ s'envoie par un morphisme propre et surjectif sur X_0 et ses composantes connexes satisfont aux conditions de la proposition. On démontre alors la proposition en itérant ce procédé et de façon répétée [Del74] § 6.2.5 pour faire du schéma simplicial *strict* (X_i) , un vrai schéma simplicial (en

particulier on veut une flèche $X_0 \rightarrow X_1$ section de $X_1 \rightrightarrows X_0$ etc.). (On utilise implicitement le fait que la plurinodalité est une propriété stable par changement de base.) \square

3.3.2 Remarque. — Dans l'application que nous en ferons, seule l'hypothèse sur X'_0/S' nous importe. On aurait donc pu simplement considérer $\text{cosq}_0^{S'}(X'_0)$, mais il n'est pas exclu que l'énoncé ci-dessus puisse servir dans d'autres contextes. Nous n'utiliserons donc pas le fait que les X'_i/S' , pour $i > 0$ soient (presque) plurinodaux. Il serait cependant intéressant et, comme l'a observé le rapporteur, non évident que l'on puisse supposer ces derniers de dimension relative générique inférieure à celle du morphisme initial f ; cela suggère d'aborder cette question, qui permettrait d'éviter une récurrence indésirée à venir (cf. l'introduction du paramètre auxiliaire r), par des techniques d'hypperrésolutions cubiques [GNAPGP88]. Rappelons que celles-ci ont l'avantage, dans le cas classique de la théorie de Hodge, de faire intervenir des schémas (en nombre fini) de dimensions de plus en plus petites (inférieures ou égales à celle du schéma de départ).

3.4. Reprenons dans ce paragraphe les différentes réductions effectuées jusqu'à présent pour voir ce qu'il reste encore à démontrer.

3.4.1. D'après **2.1**, il suffit de démontrer le théorème dans le cas où S est un \mathbf{Z} -schéma de type fini; en particulier S est noethérien, excellent, de dimension finie.

De plus, on peut supposer f propre; supposition qui n'est pas altérée par les réductions faites en § 2 et que nous ferons donc dorénavant. Montrons alors *par récurrence* sur l'entier relatif $r \geq -2$, et réduction au cas plurinodal et des coefficients constants, que pour tout (f, \mathcal{F}) comme dans **1.1**, où \mathcal{F} est un *faisceau* constructible, il existe une modification S'/S telle que les cônes des morphismes **(1.1.a)** n'aient pas de cohomologie en degré inférieur ou égal à r ; cela suffit pour notre propos compte tenu de **2.3** (voir aussi **3.1.3**). C'est évident pour $r = -2$. Soit donc $r \geq -1$ et supposons le résultat démontré pour les valeurs inférieures ou égales à $r - 1$.

Pour un tel r , la démonstration se fait par récurrence sur la dimension δ_S de S et la dimension relative d_f de la fibre générique de f (prise au-dessus de l'anneau total des fractions si S n'est pas irréductible — ce que l'on pourrait supposer en vertu de **2.7**). Amorçons la récurrence :

- Si S est de dimension 0, d'après [SGA4.5 TH FINITUDE 2.13] $f : X \rightarrow S = s$ est universellement localement acyclique (relativement à tout faisceau constructible sur X); si T est un s -schéma strictement local, x_T un point géométrique de la fibre spéciale de $X_T \rightarrow T$ d'image x dans X et enfin, b un point géométrique de T , on a donc :

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \text{R}\Gamma(X(x), \mathcal{F}) \longrightarrow \text{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_T T(b), \mathcal{F}) \xleftarrow{\sim} \text{R}\Gamma(X_T(x_T), \mathcal{F}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{F}_{x_T},$$

d'où la commutation aux changements de base dans ce cas⁽ⁱⁱ⁾.

- Si la fibre générique de f est vide, f est d'image un fermé strict de S de dimension inférieure et la conclusion résulte de l'hypothèse de récurrence sur δ_S et de **3.2** appliqué à $f(F) \subset S$.

Soient donc f, \mathcal{F}, n , comme dans **1.1** avec S de dimension δ_S et f de dimension relative générique d_f , toujours supposé propre. On peut également supposer les schémas X et S intègres, et $\mathcal{F} = \mathbf{Z}/n$ sans augmenter δ_S ou d_f . Nous laissons le soin au lecteur de vérifier

⁽ⁱⁱ⁾ Remarquons que la définition de la locale acyclicité donnée dans *loc. cit.* affirme que les morphismes $\text{R}\Gamma(X_T(x_T), \mathcal{F}) \rightarrow \text{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_T b, \mathcal{F})$ sont des isomorphismes. On s'intéresse ici à la cohomologie du *tube* de Milnor $X_T(x_T) \times_T T(b)$. Malgré tout, la démonstration donnée dans *loc. cit.* montre également l'acyclicité des tubes de Milnor (on peut également procéder par réduction au cas lisse, par un autre théorème de A.J. de Jong).

que ces réductions sont compatibles avec l'indice de récurrence r (cf. *e.g.* **2.4** pour la dernière). Si f n'est pas surjectif, on utilise **3.2** comme plus haut.

Si f est surjectif, il résulte de **3.3.1** et **3.1.1**, appliqués à $M = r$, et de l'hypothèse de récurrence sur r appliquée aux X'_i/S' pour $i > 0$ que les r -tronqués des morphismes de changement de base (**1.1.a**), sont nuls au-dessus d'une altération de S convenable pourvu qu'il en soit ainsi pour une fibration plurinodale de dimension relative égale à d_f , et des coefficients constants.

3.4.2. Supposons donc de plus que l'on ait démontré le théorème, au cran r , pour tout morphisme plurinodal $X \rightarrow S$ de dimension relative d et pour le faisceau constant $\Lambda = \mathbf{Z}/n$. Montrons que la conclusion est encore valable pour *tout* faisceau Λ -constructible \mathcal{F} sur de tels S -schémas X et donc pour tout *complexe* de faisceaux concentré en degrés positifs. D'après les dévissages de la seconde section, il suffit de montrer qu'après altération, les cycles proches de $(X' \rightarrow X \rightarrow S, \Lambda)$ commutent aux changements de base, au sens r -tronqué indiqué ci-dessus, où $X' \rightarrow X$ est fini, et X' est intègre. Ici encore, deux cas se présentent : soit X'/S est non surjectif (S est intègre) et l'on applique alors l'hypothèse de récurrence sur la dimension de S , soit X'/S est dominant et la dimension de sa fibre générique est inférieure ou égale à d . Dans ce cas, on conclut, grâce à l'hypothèse de récurrence sur r , comme plus haut.

4. Le cas plurinodal

Comme expliqué dans **3.4**, nous allons démontrer **1.1**, dans le cas des coefficients constants, pour un morphisme plurinodal, par récurrence sur sa dimension relative (notée d). On veut montrer qu'après altération les cônes de morphismes de changement de base **1.1.a** pour un tel morphisme n'ont pas de cohomologie en degré inférieur ou égal à r s'il en est ainsi pour (r, d) plus petit (au sens lexicographique). Remarquons que c'est seulement dans cette section que l'hypothèse faite sur la torsion de Λ (supposée inversible sur S) entre en jeu.

Le cas de la dimension relative 1, traité en **4.2**, est un cas particulier de la proposition bien connue suivante :

4.1 Proposition. — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme séparé de type fini, n un entier inversible sur S et $\mathcal{F} \in \mathbf{Ob} \mathbf{D}_c^b(X, \mathbf{Z}/n)$ tel que le lieu de non locale acyclicité universelle de $(f, \mathcal{F})^{(iii)}$ soit quasi-fini sur S . Alors, la formation des cycles proches commute aux changements de base $S' \rightarrow S$.

Pour la commodité du lecteur, nous reprenons l'argument maintenant classique de globalisation par compactification bête de P. Deligne (cf. [**SGA**_{4.5} TH. FINITUDE]), tel qu'expliqué dans [**Lau81**], 4.1.2.

Démonstration. — On peut supposer S et S' strictement locaux. Soit i (resp. i') l'inclusion de la fibre spéciale $X_s \rightarrow X$ (resp. $X'_{s'} \rightarrow X'$). De même on définit le morphisme j (resp. j'), $j : X_{S(t)} \hookrightarrow X$; notons $\Psi_{s,t}$ (resp. $\Psi_{s',t'}$) le foncteur i^*Rj_* (resp. $i'^*Rj'_*$) ; il s'agit d'un foncteur cycles proches « tranche par tranche ». On dispose d'une variante évanescence évidente, notée $\Phi_{s,t}$, rendue fonctorielle si on le souhaite en travaillant dans la catégorie dérivée filtrée adéquate.

⁽ⁱⁱⁱ⁾ C'est ici par définition le complémentaire du plus grand ouvert de X sur lequel (f, \mathcal{F}) soit *localement acyclique* — au sens de [**SGA**₄ XV 1.11] — et le reste après tout changement de base $T \rightarrow S$. Une variante sans doute plus naturelle est de considérer l'ensemble de points où f satisfait ce critère ; toutefois, comme le remarque le rapporteur, il n'est pas évident *a priori* (et quoiqu'il en soit inconnu de l'auteur) que cet ensemble soit constructible.

Soit g le morphisme $X'_{s'} \rightarrow X_s$. On a une flèche de changement de base

$$g^* \Psi_{s,t} \mathcal{F} \rightarrow \Psi_{s',t'} \mathcal{F}'$$

et de même pour les cycles évanescents. Remarquons qu'il suffit de démontrer l'isomorphisme pour ces derniers. À cette fin, on démontre le résultat *a priori* plus fort suivant :

Soit x' un point fermé de $X'_{s'}$, d'image x , tel que x soit un point *isolé* de la fibre en s du lieu de non locale acyclicité universelle de (X, \mathcal{F}, f) . Alors la flèche de changement de base précédente est un isomorphisme dans un voisinage de x' .

Sous cette forme assouplie, l'énoncé est local au voisinage de x , si bien que l'on peut supposer f propre. La cohomologie des $\Phi_{s,t}(\mathcal{F})$ (resp. $\Phi_{s',t'}(\mathcal{F}')$) est, au voisinage de x (resp. x'), concentré en ce point. Par propreté de f , si l'on applique le foncteur $\mathrm{R}\Gamma(X_s, -)$ au triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}|_{X_s} & \xrightarrow{\quad} & \Psi_{s,t}(\mathcal{F}|_{X_{S(t)}}), \\ & \searrow^{+1} & \swarrow \\ & \Phi_{s,t}(\mathcal{F}|_{X(s)}) & \end{array}$$

on obtient le triangle distingué :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R}\Gamma(X_s, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{R}\Gamma(X_t, \mathcal{F}) . \\ & \searrow^{+1} & \swarrow \\ & \mathrm{R}\Gamma(X_s, \Phi_{s,t} \mathcal{F}) & \end{array}$$

On a un morphisme évident entre ce triangle et son analogue sur S' ; à nouveau par changement de base propre (invariance de la cohomologie par changement de base séparablement clos) les sommets des arêtes horizontales sont isomorphes. Finalement, le morphisme canonique

$$\mathrm{R}\Gamma(X_s, \Phi_{s,t} \mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X'_{s'}, \Phi_{s',t'} \mathcal{F}')$$

est un isomorphisme.

Or, par hypothèse $(\Phi_{s,t} \mathcal{F})_x$ (resp. $(\Phi_{s',t'} \mathcal{F}')_{x'}$) est facteur direct de $\mathrm{R}\Gamma(X_s, \Phi_{s,t} \mathcal{F})$ (resp. $\mathrm{R}\Gamma(X'_{s'}, \Phi_{s',t'} \mathcal{F}')$), et ces deux facteurs se correspondent.

L'isomorphisme désiré en découle. \square

4.2. Soit f un morphisme plurinodal. Si f est de dimension relative 1, $\mathrm{Sing}(f)$ est fini sur S et (f, Λ) est donc universellement localement acyclique en dehors d'un ensemble fini sur S ; la proposition précédente traite ce cas et prouve la commutation aux changements de base sans même modifier S .

Supposons maintenant f de dimension relative $d \geq 2$. Par définition même, on peut factoriser f en

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow h \text{ courbe relative} \\ Y \\ \downarrow g \\ S \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ f \\ \curvearrowleft \end{array}$$

où h est une courbe relative semi-stable et g est plurinodal de dimension relative $d - 1$. Le complexe $h_*\Lambda \in \mathbf{Ob} D_c^{[0,2]}(Y, \Lambda)$ donc il existe une modification $S' \rightarrow S$ telle que $\Psi_{g_{S'}}(h_*\Lambda)$ commute aux changements de base $T \rightarrow S'$ au sens r -tronqué; cela résulte de l'hypothèse de récurrence telle que formulée en **3.4.2**. Pour simplifier les notations, supposons $S' = S$.

Soient $T \rightarrow S$ un morphisme, et (a_T, b_T) un point de $T \times_T T$ d'image (a, b) dans $S \times_S S$; notons $K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)$ un cône du morphisme $\Psi_{a, b}(\Lambda)|_{X_{a_T}} \rightarrow \Psi_{a_T, b_T}(\Lambda)$. Comme h est propre, l'image directe $h_{a_T*}(K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda))$ (sur Y_{a_T}) est isomorphe au cône $K_{a_T, b_T}^{g, T}(h_*\Lambda)$ du morphisme analogue sur Y (à coefficients dans $h_*\Lambda$). Cette image directe n'a donc pas de cohomologie en degré inférieur ou égal à r et il en est ainsi après tout changement de base. On veut en déduire qu'il en est de même de $K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)$; il suffit pour cela de savoir que le support de ce complexe est fini sur Y_{a_T} . Nous allons montrer que c'est le cas, éventuellement après une modification $S' \rightarrow S$.

4.3 Lemme. — *Sous les hypothèses précédentes, si $\Psi_g(\Lambda)$ commute au changement de base $T \rightarrow S$, alors, pour tout point géométrique x_T de X_{a_T} localisé au-dessus d'un point de lissité de h , la fibre $K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)_{x_T}$ est nulle.*

On dispose également d'une variante évidente tronquée. Cette variante du lemme permet de conclure car, quitte à modifier S une fois de plus, on peut supposer, par hypothèse de récurrence, que $\tau_{\leq r} K^{g, T}(\Lambda) = 0$ pour tout T/S . Dans ce cas, pour tout choix de points (a_T, b_T) le support de $\tau_{\leq r} K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)$ est inclus dans l'image inverse de $\text{Sing}(h)$ sur X_{a_T} , qui est fini sur Y_{a_T} . Comme $h_{a_T*} K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda) = K_{a_T, b_T}^{g, T}(h_*\Lambda)$, on en conclut que $\tau_{\leq r} K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)$ est nul; ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration du lemme. — Soit x_T comme dans l'énoncé; notons x_S son image dans X et y_S l'image de x_S dans Y . Par lissité, le morphisme entre les localisés, $X(x_S) \rightarrow Y(y_S)$ est *universellement* acyclique (pour les complexes constructibles de Λ -modules). Par (universelle) locale acyclicité du morphisme h en x_S , le morphisme canonique $\mathbf{R}\Gamma(Y(y_S) \times_{S(a)} S(b), \Lambda) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(X(x_S) \times_{S(a)} S(b), \Lambda)$ est un isomorphisme; il en est de même sur T . Finalement, les fibres des cônes des flèches de changement de base sont isomorphes et l'on obtient :

$$K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)_{x_T} \xrightarrow{\sim} K_{a_T, b_T}^{g, T}(\Lambda)_{y_T} = 0.$$

□

4.4 Remarque. — Le théorème **1.1** permet de retrouver la proposition 4.2.4 de [Hub96] évoquée dans l'introduction. La raison principale en est qu'une modification d'un schéma valuatif S possède une section (cf. *e.g.* [ÉGA II 7.3.1]) si bien que l'on a commutation aux changements de base sur S . Notons à ce propos que la démonstration de Roland Huber, comme celle de P. Deligne, n'entraîne pas *a priori* la commutation aux changements de base $T \rightarrow S$ généraux mais seulement ceux où T est un schéma valuatif (dominant S). (Leurs résultats démontrent cependant l'injectivité des morphismes de changements de base pour chaque groupe de cohomologie $H^i\Psi$.)

4.5 Remarque. — Comme le remarque O. Gabber, la conclusion du théorème **1.1** vaut également si f est seulement supposé de type fini mais que l'espace topologique sous-jacent à S est noethérien. Si S est affine — cas auquel on s'est ramené en **2.1** —, cela résulte du fait que $X_{\text{réd}}$ est aussi le schéma réduit associé à un S -schéma de présentation finie. (Rappelons que l'espace topologique sous-jacent à $S = \text{Spec}(A)$ est noethérien si et seulement si le radical de tout idéal I de A est égal au radical d'un idéal de type fini; on utilise alors le fait démontré dans [OP68] que si X est affine de type fini sur un tel S , l'espace topologique sous-jacent à X est également noethérien.)

Terminons cette partie par un complément.

5. Calcul des fibres

Étant donné un morphisme $f : X \rightarrow S$ et un faisceau \mathcal{F} sur X , on considère aussi classiquement (cf. [SGA_{4.5} TH. FINITUDE 2.11] et note en bas de page (ii)) la cohomologie des fibres de Milnor $X(x) \times_{S(s)} t$ à valeur dans \mathcal{F} en plus de celle des tubes $X(x) \times_{S(s)} S(t)$, considérée dans la première partie. Il résulte immédiatement du théorème 1.1 qu'après modification de la base, elles sont canoniquement isomorphes. En fait on peut démontrer un résultat plus précis :

5.1 Théorème. — Soient $f : X \rightarrow S$ et \mathcal{F} comme en 1.1. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe une modification $S'_N \rightarrow S$ de S telle que pour tout S'_N -schéma T , et tout point géométrique x_T de X_T , le couple $(f_{T, x_T}, \mathcal{F}|_{X_T})$ soit cohomologiquement propre en degré $\leq N$.

En particulier, après modification de la base, la cohomologie des tubes de Milnor s'envoie isomorphiquement sur la cohomologie des fibres de Milnor : pour tout point (x_T, b_T) de $X_T \times_T T$, d'image (a_T, b_T) dans $T \times_T T$, le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_{T(a_T)} T(b_T), \mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_{T(a_T)} b_T, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Rappelons que la propriété cohomologique en degré $\leq N$ signifie que la formation de l'image directe tronquée $\tau_{\leq N}(\mathrm{R}f_{T, x_T*} \mathcal{F})$ commute aux changements de base $Z \rightarrow T(s_T)$, où s_T est l'image du point géométrique x_T par f_T . On conjecture (cf. remarque ci-dessous) que la variante non tronquée du théorème est également vraie. Les arguments étant les mêmes que ceux présentés dans la partie précédente, nous nous contentons d'une esquisse de démonstration.

Démonstration. — Le second énoncé (tube versus fibre) résulte du premier (ou de 1.1 comme annoncé plus haut) car on sait que ni $\mathrm{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_{T(a_T)} T(b_T), \mathcal{F})$, ni $\mathrm{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_{T(a_T)} b_T, \mathcal{F})$ n'ont de cohomologie en degré supérieur à deux fois un majorant strict de la dimension des fibres de f . (On utilise 2.3 et, en passant à la limite, la dimension cohomologique des schémas de type fini sur $\mathrm{Spec} \kappa(b_T)$.)

Soient s un point géométrique de S et $j_Z : Z \rightarrow S(s)$ un morphisme entre schémas strictement locaux. Notons z le point fermé de Z , $S(t)$ le localisé strict de $S(s)$ en $t : z \rightarrow S$ et $j_{S, z}$ le morphisme de localisation $S(t) \rightarrow S(s)$. Soit i_s (resp. i_z) l'immersion fermée $s \hookrightarrow S(s)$ (resp. $z \hookrightarrow Z$). Notons avec un X en exposant, les morphismes obtenus par produit fibré avec $X \rightarrow S$. Il s'agit donc de montrer que pour chaque entier N , quitte à modifier S , pour tout choix de s et Z comme précédemment, le morphisme d'adjonction

$$(5.1.a) \quad (i_s^{X*} j_{S, z*} \mathcal{F})|_{X_z} \rightarrow i_z^{X*} j_Z^* \mathcal{F}$$

(entre faisceaux sur X_z) est un isomorphisme en degré $\leq N$ et qu'il en est encore ainsi pour tous les S -schémas T . En effet, la fibre en un point géométrique x de X_z du morphisme 5.1.a

s'identifie au morphisme de changement de base pour le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 X_{S(s)}(x) & \xleftarrow{j_Z^X} & X_{S(s)}(x) \times_{S(s)} Z \\
 \downarrow f_x & \square & \downarrow f_x \times_{S(s)} Z \\
 S(s) & \xleftarrow{j_Z} & Z
 \end{array}$$

$$t \longleftarrow z$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{R}\Gamma(X_{S(s)}(x) \times_{S(s)} S(t), \mathcal{F}) = (f_{x*} \mathcal{F})_t \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X_{S(s)}(x) \times_{S(s)} Z, \mathcal{F}) = ((f_x \times_{S(s)} Z)_* \mathcal{F})_z.$$

Notons $K'^{f,Z}(\mathcal{F})$ un cône de **5.1.a**. Reprenant les dévissages de I.2, on vérifie sans peine que l'on peut supposer $\mathcal{F} = \Lambda$ et f plurinodal^(iv). Pour alléger l'exposition, nous omettons la récurrence sur le degré de troncation r , identique à celle effectuée pour démontrer le théorème de changement de base. Le lecteur la rétablira aisément de lui-même.

Pour pouvoir procéder par récurrence (suivant **3.4.2**) dans le cas plurinodal, comme expliqué dans la partie précédente, il nous suffit de vérifier trois propriétés de l'obstruction K' .

- L'obstruction K'^Z commute aux images directes propres. (C'est vrai d'après le théorème de changement de base propre.)
- L'obstruction K'^Z est nulle sous les hypothèses de **4.1**, c'est-à-dire lorsque le lieu de non local acyclicité est quasi-fini sur S . (En effet, en un point de lissité x de f , les morphismes $\Lambda \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(Z, \Lambda) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X(x) \times_{S(s)} Z, \Lambda)$ sont des isomorphismes, ce qui nous permet d'utiliser le même argument par compactification.)
- Avec les notations et les hypothèses de **4.3**, on a des isomorphismes $K'^{f,Z}(\Lambda)_x \xleftarrow{\sim} K'^{g,Z}(\Lambda)_y = 0$. (En un point de lissité le morphisme induit entre les localisés est *universellement* localement acyclique.)

□

5.2 Remarques. — On devrait disposer, *après modification de la base*, d'un analogue de la proposition **2.3** pour les complexes $\mathrm{R}\Gamma(X(x) \times_{S(s)} Z, \mathcal{F})$. Alternativement, il est vraisemblable, comme le suggère O. Gabber, que l'énoncé de propriété cohomologique se ramène au cas où Z est le spectre d'un anneau de valuation dont le corps des fractions est algébriquement clos ; sous cette hypothèse, O. Gabber sait démontrer le résultat d'annulation requis. Cela permettrait donc d'éviter le recours à des énoncés tronqués.

Enfin, remarquons qu'il aurait été possible de donner une démonstration uniforme du théorème **1.1** et du théorème précédent mais l'axiomatisation qu'elle requiert ne semble pas de nature à éclaircir l'argument.

^(iv) Par exemple, on démontre l'analogue du lemme **3.2.2** en remarquant que si l'on factorise un morphisme propre $f : X \rightarrow S$ (S strictement local) en $X \xrightarrow{g} F \xrightarrow{i} S$, alors pour tout point géométrique x de la fibre spéciale, on dispose d'isomorphismes $\mathrm{R}f_{x*} \mathcal{F} \simeq i_* \mathrm{R}g_{x*} \mathcal{F}$ et $\mathrm{R}(f_x \times_S Z)_* \mathcal{F} \simeq (Z \times_S F \hookrightarrow Z)_* \mathrm{R}(g_x \times_S Z)_* \mathcal{F}$.

5.3. Soient S un schéma noethérien, a un point géométrique de S et b une généralisation géométrique de a . Il existe un trait $T_{a,b}$ strictement local et un morphisme $T_{a,b} \rightarrow S$ tel que a (resp. b) soit dominé par le point fermé (resp. l'image du point générique géométrique) de $T_{a,b}$ (cf. [ÉGA II 7.1.7]). Ainsi, on peut compléter le théorème précédent, de la façon suivante : sous les hypothèses de **1.1**, quitte à modifier la base S , chaque fibre des cycles proches $\Psi_f(\mathcal{F})$ est isomorphe à la fibre d'un complexe de cycles proches usuels. Plus précisément, étant donné (x, b) , d'image (a, b) dans $S \overleftarrow{\times}_S S$, il existe un trait $T_{a,b} \rightarrow S$ et un point géométrique \tilde{x} de $X_{T_{a,b}}$ au-dessus de x tel que l'on ait des isomorphismes :

$$\Psi_f(\mathcal{F})_{(x,b)} \simeq \mathrm{R}\Gamma(X(x) \times_{S(a)} S(b), \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(X_{T_{a,b}}(\tilde{x}) \times_{T_{a,b}} b, \mathcal{F}) \simeq \Psi_{f_{T_{a,b}}}^{\mathrm{usuel}}(\mathcal{F})_{\tilde{x}},$$

où $\Psi_{f_{T_{a,b}}}^{\mathrm{usuel}}(\mathcal{F})$ le complexe des cycles proches défini par A. Grothendieck dans [SGA₇ I].

Cela découle de **1.1**.

Partie II. CONSTRUCTIBILITÉ

6. Énoncés

Il résulte de **5.3** et du théorème de constructibilité de P. Deligne ([SGA_{4.5} TH. FINITUDE 3.2]), qu'après modification de la base, les fibres des cycles proches sont finies, et même qu'ils sont constructibles sur chaque fibre, c'est-à-dire une fois restreints à $X_s \overleftarrow{\times}_{S(s)} t$, où (s, t) est un point de $S \overleftarrow{\times}_S S$. On a en fait un résultat plus précis :

6.1 Théorème. — Soient $f : X \rightarrow S$ et \mathcal{F} comme en **1.1**. Quitte à modifier S , on peut supposer que pour tout entier naturel i , les faisceaux $H^i(\Psi_f \mathcal{F})$ sont constructibles sur $X \overleftarrow{\times}_S S$, c'est-à-dire qu'il existe des partitions finies de X et S en des parties constructibles localement fermées, $X = \bigcup X_\alpha$ et $S = \bigcup S_\beta$, telles que chaque $H^i(\Psi_f \mathcal{F})$ soit localement constant fini sur les sous-topos $X_\alpha \overleftarrow{\times}_S S_\beta$ de $X \overleftarrow{\times}_S S$.

6.2 Corollaire. — Soient $f : X \rightarrow S$ et \mathcal{F} comme en **1.1**. Il existe une modification $S' \rightarrow S$ telle que pour tout S' -schéma T , et tout point géométrique x_T de X_T , d'image a_T dans T , le complexe $f_{T, x_T} \mathcal{F}$ soit constructible sur $T(a_T)$.

6.3 Remarque. — Il résulte de [SGA₄ XVII 5.2.11] et **2.3** que le foncteur Ψ_f préserve la propriété d'être de Tor-dimension finie. Joint à **6.1**, cela entraîne, pour un f comme dans *loc. cit.* et un nombre premier ℓ inversible, qu'après modification de la base, les complexes $\Psi_f(\mathbf{Z}/\ell^{n+1})$ sont dans $\mathrm{D}_{ctf}(X \overleftarrow{\times}_S S, \mathbf{Z}/\ell^{n+1})$ pour tout $n \geq 0$.

Comme précédemment, on se ramène au cas où S est noethérien de dimension finie, excellent et intègre. On procède par récurrence sur $\dim(X/S)$ et $\dim(S)$.

La démonstration se fait en deux étapes : passer du cas plurinodal au cas général puis démontrer la constructibilité dans le cas plurinodal (et des coefficients constants). Avant cela, commençons par quelques propriétés de ces topos et des faisceaux constructibles sur eux, en suivant les suggestions du rapporteur^(v).

^(v)L'auteur reste bien sûr seul responsable des erreurs qui pourraient se trouver dans se texte.

7. Conditions de finitude dans les topos $X \overleftarrow{\times}_Y Z$

7.1. Cohérence ; rappels. — Remarquons tout d’abord que la définition donnée dans **6.1** garde un sens pour les faisceaux d’ensembles ou de Λ -modules sur des topos de la forme $E = X \overleftarrow{\times}_Y Z$, où X, Y et Z sont des schémas cohérents. Comme dans [Lau83], on définit un site pour le topos E , dont les objets sont les triplets $(U_X/V_Y \setminus W_Z)$ où U_X, V_Y, W_Z sont étales séparés de type fini sur X, Y, Z .

Un tel objet définit naturellement un faisceau d’ensembles, qui est constructible. En effet, si X' est un sous-schéma de X (resp. Z' un sous-schéma de Z) tel que la restriction de U_X à X' (resp. de W_Z à Z' , resp. l’image inverse de V_Y sur Z') soit *finie* étale, la restriction du faisceau représenté par $U_X/V_Y \setminus W_Z$ au sous-topos $X' \overleftarrow{\times}_Y Z'$ est localement fini constant.

On peut également étendre au présent cadre la proposition [SGA₄ IX 2.7], affirmant que de tels faisceaux sont des générateurs de la catégorie des faisceaux constructibles (avec une variante pour les Λ -modules). Lors de la démonstration du théorème **6.1**, une caractérisation plus maniable des faisceaux constructibles sera utile ; dans le cas de topos raisonnables, il s’agit des objets de *présentation finie* (i.e. les objets PF tels que $\text{Hom}(\text{PF}, -)$ commute aux colimites filtrantes), voire également des objets *noethériens*. Ces questions, dans le cas des topos comme E , font l’objet du reste du paragraphe.

Commençons par remarquer le topos E est *cohérent* [SGA₄ VI 2.3], car le site de définition introduit ci-dessus satisfait aux conditions de la proposition 2.1 de *loc. cit.* et possède un objet final.

De plus, un faisceau constructible d’ensembles \mathcal{F} sur E est nécessairement un objet cohérent de E (au sens de [SGA₄ VI 1.13], c’est-à-dire ici encore quasi-compact et quasi-séparé (cf. *loc. cit.*). Cela résulte d’une part du fait qu’un objet localement fini constant d’un topos cohérent est cohérent et d’autre part du fait que si l’on a un morphisme cohérent $p : E' \rightarrow E$ de topos cohérents et si p est conservatif, alors pour tout objet \mathcal{F} de E , \mathcal{F} est cohérent si et seulement si $p^* \mathcal{F}$ l’est. (On applique le deuxième point au topos E' somme disjointe (finie) des sous-topos de E sur lesquels le faisceau \mathcal{F} est localement fini constant et p le morphisme canonique correspondant.) On en déduit que tout objet de E est colimite filtrante d’objets cohérents, si bien que le topos E est *parfait*, au sens de [SGA₄ VI 2.9.1]. Les notions toposiques de constructibilité, cohérence et de présentation finie (*loc. cit.* 1.9.3, 1.24) coïncident ici.

Il reste à vérifier que les objets constructibles sont également noethériens.

7.2. Localisation. — Rappelons qu’en vertu d’un théorème de P. Deligne, nos topos, qui sont localement cohérents, ont suffisamment de points (*loc. cit.*, 9.0). Étant donné un point p d’un topos T , on peut former le topos *localisé en p* , la 2-limite $\lim_{U \ni p} T/U$, où U parcourt les voisinages ouverts de p . C’est un topos *local* au sens de [SGA₄ VI 8.4] : le foncteur section globale est un foncteur fibre, de *centre* p , noté T_p (« localisation de T en p »). Remarquons que le topos $T \overleftarrow{\times}_T T$ joue le rôle de localisation universelle : on a un diagramme 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} T_p & \longrightarrow & T \overleftarrow{\times}_T T \\ \downarrow & \square & \downarrow \text{pr}_1 \\ p & \longrightarrow & T \end{array}$$

7.3. Quelques lemmes. —

7.3.1 Lemme. — Soient $X \rightarrow T \leftarrow T' \leftarrow S$ des morphismes de schémas avec $T' \rightarrow T$ entier. Posons $X' = X \times_T T'$. Le morphisme $p : E' = X' \overleftarrow{\times}_{T'} S \rightarrow X \overleftarrow{\times}_T S = E$ est une équivalence de topos.

Démonstration. — Il suffit de montrer que les foncteurs p_* et p^* sont quasi-inverses l'un de l'autre. Compte tenu du fait que les topos considérés ont suffisamment de points, cela résultera du fait que les flèches d'adjonctions sont des isomorphismes sur les fibres. Or, tout point (x, s) de E se relève uniquement en un point (x', s) de E' et si E est local centré en (x, s) , E' est également local et centré en (x', s) . Le résultat en découle. \square

L'ensemble des classes d'isomorphismes de points d'un topos E comme plus haut peut-être ordonné par la relation d'ordre : $p \leq q$ si et seulement si il existe un morphisme $q \rightarrow p$ (i.e. p est une spécialisation de q). (On remarquera que tout endomorphisme d'un point est un automorphisme donc cette relation est bien antisymétrique.)

7.3.2 Lemme. — Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas noethériens avec f de type fini ou bien S excellent. Alors :

1. L'ensemble des classes d'isomorphismes de points de $E = X \overleftarrow{\times}_S S$ a un nombre fini d'élément maximaux,
2. Toute classe d'isomorphisme est majorée par un élément maximal.

Démonstration. — Tout point de E est spécialisation d'un point au-dessus d'un point générique d'une composante irréductible de S . Le schéma S étant noethérien, il suffit donc de considérer le cas de $E' = X \overleftarrow{\times}_S s$ où s est un schéma ponctuel de S . Soit S' la normalisation de l'adhérence de s dans S et X' le produit fibré $X \times_S S'$. D'après le lemme précédent, E' s'identifie à $X' \overleftarrow{\times}_{S'} s$. Chaque point de X' est dominé par une unique classe d'isomorphisme de points de E' ; en effet, si t est un point de S' , s' et t' des points topologiques au-dessus de s et t , le groupe $\text{Aut}(s')$ agit transitivement sur $\text{Hom}(s', t')$. La relation d'ordre sur les points de E' se déduit de celle des généralisations au sens classique (Zariski) sur X' . Il suffit donc de montrer que le schéma X' n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Si f est de type fini, on utilise le fait, démontré dans [Hei73], que la normalisation d'un anneau intègre noethérien a un spectre noethérien. Dans le cas où S est excellent on conclut plus simplement par le fait que la normalisation est finie sur la base.

Comme il résulte de la démonstration, le second énoncé est même valable sans hypothèses. \square

7.3.3 Lemme. — Sous les hypothèses du lemme précédent, on a :

1. Tout sous-faisceau d'un faisceau constructible est constructible,
2. Tout faisceau constructible sur E est noethérien.

Démonstration. — Commençons pas démontrer qu'une suite croissante de sous-faisceaux constructibles (\mathcal{F}_n) d'un faisceau constructible \mathcal{F} sur E est stationnaire. Par récurrence noethérienne, on peut supposer que la conclusion est valide pour $X' \rightarrow S'$ où X' et S' sont des sous-schémas fermés de X, S , avec (X', S') différent de (X, S) . Il suffit de montrer qu'elle est stationnaire au-dessus d'un sous-topos $E' = U_X \overleftarrow{\times}_S V_S$ pour des ouverts denses $U_X \hookrightarrow X$ et $V_S \hookrightarrow S$. Il existe un entier N tel que pour chaque point maximal p , les suites \mathcal{F}_{n_p} sont constantes pour $n \geq N$. Si l'on prend U_X et V_S tels que \mathcal{F}_N et \mathcal{F} soient localement constants sur E' , cela entraîne les isomorphismes $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_N$ sur E pour $n \geq N$. Prouvons 1). Soit \mathcal{G} est un sous-faisceau d'un faisceau constructible \mathcal{F} . D'une part il est colimite filtrante de faisceaux constructibles, et d'autre part, l'image d'un morphisme de faisceaux constructibles

est constructible; le faisceau \mathcal{G} est donc également réunion d'un ensemble filtrant croissant de sous-faisceaux *constructibles* de \mathcal{F} . D'après ce qui précède cet ensemble a un élément maximal et \mathcal{G} est donc constructible. Le second point en résulte immédiatement (par exemple en l'appliquant à la « limite » d'une hypothétique suite strictement croissante). \square

8. Démonstration du théorème 6.1

8.1. Réduction au cas plurinodal. — Commençons par un lemme général, qui trouverait certainement sa place plus haut.

8.1.1 Lemme. — Soient $h : X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre S -schémas et $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ un faisceau de torsion sur $X \overleftarrow{\times}_S S$. Si (y, t) est un point de $Y \overleftarrow{\times}_S S$, il existe un morphisme canonique de topos $\varphi_{y,t} : X_y \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S S$, « $x \mapsto (x, t)$ », tel que la fibre de $R\overleftarrow{h}_* \overleftarrow{\mathcal{F}}$ en (y, t) soit canoniquement isomorphe à $R\Gamma(X_y, \varphi_{y,t}^* \overleftarrow{\mathcal{F}})$.

Démonstration. — Soit (y, t) comme dans l'énoncé et notons s l'image de y dans S . Quitte à remplacer S par $S(s)$ on peut supposer S strictement local. De même, on peut supposer $Y(y) = Y$. La fibre de $R\overleftarrow{h}_* \overleftarrow{\mathcal{F}}$ en (y, t) s'identifie naturellement à $R\Gamma(X \overleftarrow{\times}_S S(t), \mathcal{F})$. Notons π_t le morphisme $X \overleftarrow{\times}_S S(t) \rightarrow X$; le théorème de changement de base propre permet de réécrire $R\Gamma(X \overleftarrow{\times}_S S(t), \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(X, R\pi_{t*} \mathcal{F})$ comme

$$R\Gamma(X_y, i_y^* R\pi_{t*} \mathcal{F}),$$

où i_y est l'immersion fermée de la fibre spéciale $X_y \hookrightarrow X$. Remarquons maintenant qu'il existe un morphisme de topos $\varphi_{y,t}$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \overleftarrow{\times}_S S(t) & & \\ \pi_t \downarrow & \searrow^{\varphi_{y,t}} & \\ X & \xleftarrow{i_y} & X_y \end{array}$$

au-dessus du morphisme $s = \text{Ens} \rightarrow S \overleftarrow{\times}_S S(t)$, $s \mapsto (s, t)$. Le point clé indiqué à l'auteur par O. Gabber, dont le lemme résulte immédiatement, est que le morphisme canonique $i_y^* R\pi_{t*} \rightarrow \varphi_{y,t}^*$ est un isomorphisme. En passant aux fibres, il nous suffit de montrer que si x est un point géométrique de X_y , le morphisme canonique $R\Gamma(X(x) \overleftarrow{\times}_S S(t), \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_{(x,t)}$ est un isomorphisme. Cela résulte du fait que le topos $X(x) \overleftarrow{\times}_S S(t)$ est un topos local, de centre (x, t) . \square

Ce lemme entraîne en particulier que la formation des images directes par un morphisme propre « fléché » commute aux changements de base $S' \rightarrow S$ et que si \mathcal{F} est un faisceau sur X , on a un isomorphisme $\overleftarrow{h}_* p^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p^* \overleftarrow{h}_* \mathcal{F}$ (où les p sont les premières projections des topos fléchés vers les topos usuels).

8.1.2 Proposition. — Soient S un schéma noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre S -schémas de type fini et $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ un faisceau de Λ -modules constructible sur $X \overleftarrow{\times}_S S$. Alors, l'image directe $R\overleftarrow{f}_* \overleftarrow{\mathcal{F}}$ est constructible sur $Y \overleftarrow{\times}_S S$.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire, tout comme dans le cas classique (auquel nous nous ramenons), que la torsion de $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ soit d'ordre inversible sur S .

Démonstration. — Pour tout objet \mathcal{U} du site définissant $X \overleftarrow{\times}_S S$ introduit en 7.1, notons $\Lambda_{\mathcal{U}/X \overleftarrow{\times}_S S}$ (ou plus simplement $\Lambda_{\mathcal{U}}$) le faisceau associé à $\Lambda[\mathrm{Hom}(-, \mathcal{U})]$ sur $X \overleftarrow{\times}_S S$. Le faisceau Λ -constructible, donc noethérien, $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ est isomorphe à un quotient des sommes directes finies de tels faisceaux (cf. e.g. [SGA₄ IX 2.7]). Prenant une résolution à gauche de $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ par somme directes de faisceaux de la forme $\Lambda_{\mathcal{U}}$ et considérant la première suite spectrale, on se ramène à démontrer la proposition dans le cas particulier d'un faisceau $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ de la forme $\Lambda_{\mathcal{U}}$. (On utilise implicitement le fait que la catégorie des faisceaux constructibles est stable par (co)noyaux et extensions.)

Remarquons qu'il suffit de démontrer le théorème après un changement de base fini et surjectif $S' \rightarrow S$ (cf. lemme 8.1.4). Or, si l'ouvert \mathcal{U} de $X \overleftarrow{\times}_S S$ est de la forme $U_X/V_S \setminus U_S$, il existe un tel morphisme $S' \rightarrow S$ tel que l'image inverse de \mathcal{U} sur $X_{S'} \overleftarrow{\times}_{S'} S'$ soit un coproduit d'ouverts de la forme $U_{X'}/V_{S'} \setminus U_{S'}$, où maintenant $V_{S'}$ et $U_{S'}$ sont des ouverts de Zariski de S' . Plus précisément on a :

8.1.3 Lemme. — *Soit $f : U \rightarrow S$ un morphisme séparé étale entre schémas cohérents. Il existe un morphisme fini surjectif $S' \rightarrow S$ tel que l'image inverse de U sur S' soit un coproduit d'ouverts de Zariski.*

Démonstration. — Par le Main Theorem de Zariski, on peut factoriser f en une immersion ouverte suivie d'un morphisme fini $f : U \hookrightarrow T \rightarrow S$. Quitte à rajouter à T le complémentaire de l'image de f , on peut supposer $T \rightarrow S$ également surjectif. Soit W le sous-schéma ouvert de S au-dessus duquel le cardinal des fibres géométriques de f est maximal, égal à m . Le morphisme f est fini sur W et si $m > 0$, on peut supposer $U = T$ sur W . L'image inverse de U sur T se décompose; on conclut alors en itérant ce procédé et avec m de plus en plus petit. \square

Pour simplifier les notations supposons dorénavant $S' = S$. Pour des ouverts \mathcal{U} comme ci-dessus, il est évident que la constructibilité de $\mathrm{R}\overleftarrow{f}_*(\Lambda_{\mathcal{U}})$ résulte de la constructibilité de $\mathrm{R}\overleftarrow{f}_*\Lambda_{U_X/V_S \setminus U_S}$ sur $Y \overleftarrow{\times}_S S$. Si l'on note pr_1 la projection $X \overleftarrow{\times}_S S$, on a un isomorphisme canonique

$$\Lambda_{(U_X/V_S \setminus U_S)/(X \overleftarrow{\times}_S S)} \simeq \mathrm{pr}_1^* \Lambda_{U_X/X}$$

où $U_X/V_S \setminus U_S$ est l'image inverse sur $X \overleftarrow{\times}_S S$ de l'ouvert U_X de X .

Le faisceau $\Lambda_{U_X/X}$ étant constructible sur X il est isomorphe à sous-faisceau d'un produit de faisceaux $\pi_* C$ où $\pi : X' \rightarrow X$ est un morphisme fini et C un Λ -module constant constructible. Il nous reste donc à montrer que $\mathrm{R}\overleftarrow{f}_*(\mathrm{pr}_1^* \pi_* \Lambda)$ est constructible sur $Y \overleftarrow{\times}_S S$. Ce dernier est isomorphe à $\mathrm{R}\overleftarrow{f}'_* \Lambda$, où f' est le composé $X' \rightarrow X \rightarrow Y$, lui-même isomorphe à $\mathrm{pr}_1^* \mathrm{R}f'_* \Lambda$. D'après le théorème de constructibilité classique, $\mathrm{R}f'_* \Lambda$ est constructible sur Y , ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

8.1.4 Lemme. — *Soit $(f, \overleftarrow{\mathcal{F}})$ comme dans la proposition précédente et supposons qu'il existe un morphisme fini surjectif $S' \rightarrow S$ tel que $\mathrm{R}\overleftarrow{f}_{S'}^* \overleftarrow{\mathcal{F}}_{S'}$ soit constructible sur $Y_{S'} \overleftarrow{\times}_{S'} S'$. Alors, $\mathrm{R}\overleftarrow{f}_* \overleftarrow{\mathcal{F}}$ est constructible sur $Y \overleftarrow{\times}_S S$.*

Compte tenu de la commutation aux changements de base, ce lemme résulte à son tour du lemme :

8.1.5 Lemme. — *Soient $S' \rightarrow S$ un morphisme propre surjectif, X un S -schéma, et X' son image inverse sur S' . Considérons $p : E' = X' \overleftarrow{\times}_{S'} S' \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S S = E$. Alors, si $\overleftarrow{\mathcal{F}}$*

est un faisceau sur E tel que $p^*\overleftarrow{\mathcal{F}}$ soit constructible sur E' , le faisceau $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ est également constructible.

Démonstration. — On remarque que tout point de E peut se relever en un point de E' si bien que le morphisme p est conservatif. Il est aussi cohérent, comme on le voit sur les sites de définition. On utilise alors le fait, énoncé dans le dernier paragraphe de **7.1**, que la cohérence (équivalente à la constructibilité) se teste après image inverse par un morphisme cohérent conservatif. \square

La proposition précédente étant établie, il résulte des dévissages utilisés pour établir la commutation aux changements de base (cf. plus particulièrement **3.4**) qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas des coefficients constants et d'une fibration plurinodale. Ici encore, compte tenu de **3.3.2**, il nous faut procéder par récurrence sur l'entier r tel que les $\tau_{\leq r}\Psi_{X/S}(\mathcal{F})$ (X/S et \mathcal{F} variables) deviennent constructibles au-dessus d'une altération de S . Plus précisément, si $\varepsilon : X_\bullet \rightarrow X$ est un hyperrecouvrement propre de X comme dans **3.3.1** (pour $M = r$ et étendu arbitrairement en plus grand degré) et $\overleftarrow{\varepsilon}$ est le morphisme de topos induit par ε entre le topos simplicial associé aux $X_i \overleftarrow{\times}_S S$ (noté $X_\bullet \overleftarrow{\times}_S S$) et $X \overleftarrow{\times}_S S$, on a un isomorphisme canonique entre $\Psi_{X/S}(\Lambda)$ et $\overleftarrow{\varepsilon}_*\Psi_{X_\bullet/S}(\Lambda)$. Les constituants de $\Psi_{X_\bullet/S}(\Lambda)$ ne sont autres que les $\Psi_{X_i/S}(\Lambda)$ ($i \geq 0$). La conclusion résulte maintenant du fait que chaque $\tau_{\leq r-i}\Psi_{X_i/S}(\Lambda)$ est constructible — hypothèse satisfaite si $i > 0$ (récurrence sur r) et pour $i = 0$ (cas plurinodal, traité plus bas) — et par la suite spectrale, comme en **3.1**, du fait que $\tau_{\leq r-i}\overleftarrow{\varepsilon}_*(K) \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r-i}\overleftarrow{\varepsilon}_*\tau_{\leq r-i}(K)$, ce dernier complexe étant constructible sur $X \overleftarrow{\times}_S S$ si $\tau_{\leq r-i}(K)$ l'est sur $X_i \overleftarrow{\times}_S S$.

Remarquons également qu'en vertu du lemme précédent, si l'on sait démontrer la constructibilité pour un complexe de cycles proches après un changement de base propre et surjectif, on aura automatiquement la constructibilité sur toute base telle que l'on ait commutation aux changements de base.

8.2. Le cas plurinodal et des coefficients constants ; fin de la démonstration de

6.1. — Soit r un entier fixé tel que l'on ait constructibilité (après changement de base) de $\tau_{\leq r-1}\Psi_m\mathcal{F}$ pour tout morphisme m comme en **1.1** et tout faisceau Λ -constructible \mathcal{F} sur la source de m . On va montrer qu'il en est de même de $\Psi_f\Lambda$, avec f plurinodal, en procédant par récurrence sur la dimension relative. Considérons qu'un morphisme fini est plurinodal de dimension relative nulle. La constructibilité dans ce cas est facile (cf. aussi *infra*).

Factorisons le morphisme plurinodal f comme en **4.2**. Notons $Z \xrightarrow{i} X$ le lieu singulier fermé de h , $X^0 \xrightarrow{j} X$ l'ouvert complémentaire, π le morphisme fini $Z \rightarrow Y$ et enfin h^0 le morphisme lisse $X^0 \rightarrow Y$. On a un triangle distingué

$$\overleftarrow{j}_!\Psi_{X^0/S}(\Lambda) \rightarrow \Psi_{X/S}(\Lambda) \rightarrow \overleftarrow{i}_*(\overleftarrow{i}^*\Psi_{X/S}(\Lambda)) \xrightarrow{\pm 1},$$

et une suite exacte (où l'on note Ψ^i pour $H^i\Psi$, $i \in \mathbf{Z}$) :

$$0 \rightarrow \overleftarrow{j}_!\Psi_{X^0/S}^r\Lambda \rightarrow \Psi_{X/S}^r\Lambda \rightarrow \overleftarrow{i}_*\overleftarrow{i}^*\Psi_{X/S}^r\Lambda \rightarrow 0.$$

Par hypothèse de récurrence sur la dimension relative, nous pouvons supposer que le r -tronqué de $\overleftarrow{j}_!\Psi_{X^0/S}(\Lambda)$ est constructible, car, par locale acyclicité des morphismes lisses, $\Psi_{X^0/S}\Lambda \xleftarrow{\sim} \overleftarrow{h}^0*\Psi_{Y/S}\Lambda$. Il nous reste alors à vérifier que $\overleftarrow{i}^*\Psi_{X/S}^r(\Lambda)$ est constructible — du moins après changement de base. (Dorénavant, nous omettrons cette précaution oratoire.) En appliquant le foncteur h_* , on obtient la suite exacte longue de cohomologie :

$$0 \rightarrow R^0\overleftarrow{h}_*\overleftarrow{j}_!\Psi_{X^0/S}^r\Lambda \rightarrow R^0\overleftarrow{h}_*\Psi_{X/S}^r\Lambda \rightarrow R^0\overleftarrow{h}_*\overleftarrow{i}_*\overleftarrow{i}^*\Psi_{X/S}^r\Lambda = \overleftarrow{\pi}_*(\overleftarrow{i}^*\Psi_{X/S}^r\Lambda) \rightarrow R^1\overleftarrow{h}_*\overleftarrow{j}_!\Psi_{X^0/S}^r\Lambda \rightarrow \cdots$$

Comme $\overleftarrow{j}^! \Psi_{X_0/S}^r \Lambda$ est constructible, il en est de même des premiers et derniers termes (8.1.2). Par finitude de π , la constructibilité de $\overleftarrow{i}^* \Psi_{X/S}^r \Lambda$ résultera de celle de $\overleftarrow{\pi}_* (\overleftarrow{i}^* \Psi_{X/S}^r \Lambda)$. On en tire qu'il nous suffit de montrer que le second terme, $R^0 \overleftarrow{h}_* \Psi_{X/S}^r \Lambda$ est constructible. Du lemme ci-dessous, appliqué à $K = \Psi_{X/S} \Lambda$, il résulte qu'il suffit de s'assurer de la constructibilité de $\Psi_{Y/S}^r(h_* \Lambda) = H^r \overleftarrow{h}_* \Psi_{X/S} \Lambda$ et de $\tau_{\leq r-1} \Psi_{X/S} \Lambda$ (connue par hypothèse de récurrence sur r). Or on sait que le complexe $h_* \Lambda$ de faisceaux sur Y est constructible. Grâce aux dévissages des sections précédentes, et de l'hypothèse de double récurrence (sur l'indice r et la dimension relative) on sait que le faisceau $\Psi_{Y/S}^r(h_* \Lambda)$ est constructible. En effet, on se ramène à la constructibilité de faisceaux $\Psi_{Y'/S}^r \Lambda$ pour Y'/S plurinodal de dimension relative inférieure ou égale à celle de Y/S ainsi que de faisceaux $\Psi_m^{r-i} \Lambda$ pour $i > 0$.

Ceci conclut la démonstration du théorème 6.1.

8.2.1 Lemme. — Soient $K \in \text{Ob } D^+(X \overleftarrow{\times}_S S, \Lambda)$ et $r \in \mathbf{Z}$. Supposons $\tau_{\leq r-1} K$ constructible sur $X \overleftarrow{\times}_S S$ et $H^r \overleftarrow{h}_* K$ constructible sur $Y \overleftarrow{\times}_S S$. Alors le faisceau $R^0 \overleftarrow{h}_* H^r K$ est constructible sur $Y \overleftarrow{\times}_S S$.

Démonstration. — On peut supposer que $\tau_{\leq r} K \rightarrow K$ est un isomorphisme. Appliquant le foncteur \overleftarrow{h}_* au triangle distingué

$$\tau_{\leq r-1} K \rightarrow K = \tau_{\leq r} K \rightarrow H^r K[-r] \xrightarrow{+1}$$

on obtient (en passant à la cohomologie de degré r) la suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow H^r \overleftarrow{h}_* K \rightarrow R^0 \overleftarrow{h}_* H^r K \rightarrow H^{r+1} \overleftarrow{h}_* \tau_{\leq r-1} K \rightarrow \cdots$$

Les hypothèses du lemme nous affirment que le premier terme est constructible ainsi que le troisième compte tenu de la propriété de h . \square

9. Un exemple

Soient k un corps séparablement clos et S l'hensélisé du plan \mathbf{A}_k^2 en l'origine o . Notons $e : X = \text{Écl}_o S \rightarrow S$ l'éclatement du point fermé. Nous allons montrer que pour $n \geq 2$ et $\Lambda = \mathbf{Z}/n$, le complexe des cycles proches $\Psi_e \Lambda$ n'est pas constructible et que sa formation ne commute pas aux changements de base. (Si l'entier n est inversible sur k , le premier point entraîne le second compte tenu de 6.1.) Pour chaque D image inverse sur S d'une droite du plan passant par l'origine, notons η_D son point générique, $\bar{\eta}_D$ un point générique géométrique et enfin o_D le point de X correspondant, localisé sur le diviseur exceptionnel. Calculons, pour D, D' deux droites comme ci-dessus,

$$(\Psi_e \Lambda)_{(o_{D'}, \bar{\eta}_D)} = \text{R}\Gamma(X(o_{D'}) \times_S S(\bar{\eta}_D), \Lambda).$$

La mise en défaut de la commutation aux changements de base quelconques se voit déjà en comparant la cohomologie des tubes de Milnor aux fibres de Milnor : pour $D \neq D'$, le schéma non vide $X(o_{D'}) \times_S S(\bar{\eta}_D)$ n'a pas la même cohomologie que le schéma vide $X(o_{D'}) \times_S \bar{\eta}_D$.

La restriction de e à $S(\bar{\eta}_D)$ étant un isomorphisme, le tube de Milnor $X(o_{D'}) \times_S S(\bar{\eta}_D)$ est isomorphe à $X(o_{D'}) \times_X X(\bar{\eta}_D)$, où $\bar{\eta}_D$ est ici le point géométrique de X au-dessus du point $\bar{\eta}_D$ de S . Il résulte de [Art71] (cf. 2.3) que ce joint n'a de cohomologie qu'en degré nul. Pour montrer que l'inconstructibilité, il faut comparer le π_0 de ces joints suivant les cas $D' = D$ et $D' \neq D$.

Si $D' \neq D$, le joint $X(o_{D'}) \times_X X(\bar{\eta}_D)$ est concentré au-dessus du point générique η_X de X :

$$X(o_{D'}) \times_X X(\bar{\eta}_D) \xleftarrow{\sim} (X(o_{D'}) \times_X X(\bar{\eta}_D)) \times_X \eta_X \simeq X(o_{D'})_{\eta_X} \times_{\eta_X} X(\bar{\eta}_D)_{\eta_X}.$$

Remarquons que les η_X -schémas $X(o_{D'})_{\eta_X}$ sont tous isomorphes pour D' variable.

Si $D = D'$, le joint correspondant est de même la somme disjointe de $X(o_D)_{\eta_X} \times_{\eta_X} X(\bar{\eta}_D)_{\eta_X}$, qui est isomorphe à $X(o_{D'})_{\eta_X} \times_{\eta_X} X(\bar{\eta}_D)_{\eta_X}$, et d'une *composante supplémentaire* $X(o_D) \times_X \bar{\eta}_D \simeq D(o_D) \times_D \bar{\eta}_D = \bar{\eta}_D$.

On laisse au lecteur le soin d'en déduire que les cycles évanescents ne sont pas constructibles au sens indiqué en 6.1.

Enfin on vérifie aisément que localement, la première projection

$$e' := \text{Écl}_o \mathbf{A}_k^2 \times_{\mathbf{A}_k^2} \text{Écl}_o \mathbf{A}_k^2 \rightarrow \text{Écl}_o \mathbf{A}_k^2$$

est de la forme $\mathbf{A}_k^1 \times_k f$, où f est la projection

$$\text{Spec}(k)[X, T]/(TX) \rightarrow \text{Spec}(k)[X].$$

En particulier, le but du morphisme f est régulier de dimension 1, ce qui entraîne la comutation aux changements de base et la constructibilité de $\Psi_f \Lambda$ et finalement les mêmes propriétés pour e' . Ainsi, l'éclatement tue l'éclatement.

10. Conjugaison des cycles évanescents à la manière de S. Lefschetz.

10.1. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme *propre* de schémas, $\overleftarrow{f} : \mathcal{X} \overleftarrow{\times}_{\mathcal{S}} \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \overleftarrow{\times}_{\mathcal{S}} \mathcal{S}$ le morphisme induit, p_1, p_2 respectivement les première et seconde projections $\mathcal{S} \overleftarrow{\times}_{\mathcal{S}} \mathcal{S} \rightrightarrows \mathcal{S}$ et enfin ℓ un nombre premier inversible sur \mathcal{S} . On a une flèche d'adjonction $p_2^* \mathbf{R}f_* \mathbf{Q}_\ell \rightarrow \mathbf{R}\overleftarrow{f}_*(\Psi_f \mathbf{Q}_\ell)$ associée au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\Psi_f} & \mathcal{X} \overleftarrow{\times}_{\mathcal{S}} \mathcal{S} \\ \downarrow f & & \downarrow \overleftarrow{f} \\ \mathcal{S} & \xleftarrow{p_2} & \mathcal{S} \overleftarrow{\times}_{\mathcal{S}} \mathcal{S} \end{array}$$

C'est un isomorphisme (cf. 8.1.1). De plus on a un morphisme canonique de complexes de faisceaux sur $\mathcal{S} \overleftarrow{\times}_{\mathcal{S}} \mathcal{S}$, $p_1^* \mathbf{R}f_* \mathbf{Q}_\ell \rightarrow p_2^* \mathbf{R}f_* \mathbf{Q}_\ell$ dont la fibre en un point $t \rightsquigarrow s$ s'identifie au morphisme de spécialisation $\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{X}_s, \mathbf{Q}_\ell) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{X}_t, \mathbf{Q}_\ell)$. Tout cône de ce morphisme est isomorphe à $\mathbf{R}\overleftarrow{f}_*(\Phi_f \mathbf{Q}_\ell)$. (Le lecteur se convaincra aisément que le morphisme $p_1^* \mathbf{R}f_* \mathbf{Q}_\ell \rightarrow p_2^* \mathbf{R}f_* \mathbf{Q}_\ell$ s'obtient en appliquant le foncteur $\mathbf{R}\overleftarrow{f}_*$ aux deux premiers termes du triangle distingué sur $\mathcal{X} \overleftarrow{\times}_{\mathcal{S}} \mathcal{S} : \mathbf{Q}_\ell \rightarrow \Psi_f(\mathbf{Q}_\ell) \rightarrow \Phi_f(\mathbf{Q}_\ell) \xrightarrow{+1}$.) Dans le groupe de Grothendieck des faisceaux sur $\mathcal{S} \overleftarrow{\times}_{\mathcal{S}} \mathcal{S}$, on a donc plus suggestivement :

$$[(\mathbf{R}f_* \mathbf{Q}_\ell)_{\text{gén.}}] - [(\mathbf{R}f_* \mathbf{Q}_\ell)_{\text{spé.}}] = [\mathbf{R}\overleftarrow{f}_*(\Phi_f \mathbf{Q}_\ell)] =: [\varphi_f(\mathbf{Q}_\ell)].$$

10.2. Soit maintenant X une sous-variété projective lisse connexe de dimension $n + 1$ d'un espace projectif \mathbf{P} sur un corps algébriquement clos. Nous reprenons les notations et la terminologie de [Del80], § 4.2.3. Soit $D \subset \mathbf{P}^\vee$ un pinceau de Lefschetz (non nécessairement *transverse*) et $S = D \cap X^\vee$ le schéma des points s de la droite projective D qui correspondent à des fibres $X \cap H_s$ singulières. Soient t un point générique géométrique de $D - S$, et s un point géométrique de S .

Pour chaque chemin c entre t et un point générique géométrique de $D(s)$, on définit un cycle évanescant $\pm\delta_c \in H^n(X_t, \mathbf{Q}_\ell)([\frac{n}{2}])$. Dorénavant nous nous autoriserons à omettre les twists à la Tate.

Comme suggéré dans *loc. cit.*, le formalisme des cycles évanescents sur une base quelconque permet de mieux comprendre la conjugaison des cycles évanescents (au signe près) sous l'action du groupe $\pi_1(D - S, t)$, y compris dans le cas exceptionnel ($p = 2$, dimension des sections hyperplanes paire) « sauvage » et/ou des coefficients de torsion.

Notons X_{bon}^\vee le lieu de X^\vee correspondant à une unique singularité quadratique ordinaire ([SGA₇ XVII 3.2]), et supposons que X^\vee soit une hypersurface. Rappelons que dans le cas non exceptionnel, X_{bon}^\vee est soit vide soit le lieu lisse X_{lisse}^\vee de X^\vee (*loc. cit.* 3.5). Dans le cas exceptionnel, cet ouvert est contenu dans X_{lisse}^\vee mais l'inclusion peut être stricte. Soit \mathcal{X} la « variété d'incidence » des points (x, H) avec $X \ni x \in H$ et f le morphisme propre $\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{P}^\vee$, $(x, H) \mapsto H$. Considérons l'anneau de coefficients $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^i \mathbf{Z}$, où ℓ est un nombre premier inversible sur k et $i \in \mathbf{N} - \{0\}$. Les résultats qui suivent sont donc, même dans le cas non exceptionnel, légèrement plus forts que ceux de [SGA₇ XVIII] (\mathbf{Q}_ℓ -coefficients).

D'après la théorie de Lefschetz locale, la restriction du faisceau constructible $\varphi_f^n \Lambda$ au sous-topos $\overleftarrow{U} := X_{\text{bon}}^\vee \overleftarrow{\times}_{\mathbf{P}^\vee} (\mathbf{P}^\vee - X^\vee)$ est localement constante de rang 1 ; les fibres ont un générateur canonique au signe près, compatible avec les flèches de spécialisations (la démonstration, qui généralise celle de [SGA₇ xv 2.2], est laissée au lecteur). De même, $p_2^* Rf_* \Lambda =: (Rf_* \Lambda)_{\text{gén.}}$ est localement constant sur \overleftarrow{U} , de fibre la cohomologie d'une section hyperplane lisse. Le noyau \mathcal{K} du morphisme $(R^n f_* \Lambda)_{\text{gén.}} \rightarrow \varphi_f^n \Lambda$ est donc lisse (sur \overleftarrow{U}) ; sa fibre en un point $t \rightsquigarrow s$ est isomorphe à l'orthogonal de $\pm\delta_s^t$ dans $H^n(X \cap H_t, \Lambda)$. C'est aussi l'image de $p_1^* R^n f_* \Lambda =: (R^n f_* \Lambda)_{\text{spé.}}$ dans $(R^n f_* \Lambda)_{\text{gén.}}$. L'accouplement parfait $R^n f_* \Lambda \otimes R^n f_* \Lambda \rightarrow \Lambda$ sur $\mathbf{P}^\vee - X^\vee$ induit un tel accouplement sur $(R^n f_* \Lambda)_{\text{gén.}}$ par image inverse sur \overleftarrow{U} . Notons Ev l'orthogonal pour cet accouplement du sous-faisceau \mathcal{K} précédent ; c'est un faisceau lisse de rang 0 ou 1 sur \overleftarrow{U} , dont la fibre en $t \rightsquigarrow s$ est canoniquement engendrée par $\pm\delta_s^t$. Comme le schéma X_{bon}^\vee est connexe, le topos \overleftarrow{U} est « connexe par arcs » : on peut relier deux points par une chaîne finie de spécialisation/généralisation de points. Soient maintenant deux points s_1 et s_2 de S et t une généralisation géométrique commune dans D . Par connexité, il existe un chemin, c'est-à-dire un isomorphisme de foncteurs fibres, $\overleftarrow{g} \in \pi_1(X_{\text{bon}}^\vee \overleftarrow{\times}_{\mathbf{P}^\vee} (\mathbf{P}^\vee - X^\vee); (s_1, t), (s_2, t))$ envoyant $\pm\delta_{s_1}^t \in \text{Ev}_{(s_1, t)}$ sur $\pm\delta_{s_2}^t \in \text{Ev}_{(s_2, t)}$. Ces éléments sont naturellement dans $H^n(X_t, \Lambda)$; sur ce groupe, l'action de $\pi_1(X_{\text{bon}}^\vee \overleftarrow{\times}_{\mathbf{P}^\vee} (\mathbf{P}^\vee - X^\vee); (s_1, t), (s_2, t))$ se factorise à travers $\pi_1(\mathbf{P}^\vee - X^\vee, t)$ par la seconde projection, donc l'image $g \in \pi_1(\mathbf{P}^\vee - X^\vee, t)$ de \overleftarrow{g} conjugue $\pm\delta_{s_1}^t$ à $\pm\delta_{s_2}^t$. La conjugaison des cycles évanescents sous l'action de $\pi_1(D - S)$ résultera alors du fait que la représentation $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^\vee - X^\vee, u) \rightarrow \text{Aut}((R^n f_* \Lambda)_u)$ associée à $R^n f_* \Lambda$ a même image que le morphisme composé $\rho \circ (\pi_1(D - S) \rightarrow \pi_1(\mathbf{P}^\vee - X^\vee))$. Dans le cas modéré cela résulte de la surjectivité de $\pi_1^{\text{mod.}}(D - S) \rightarrow \pi_1^{\text{mod.}}(\mathbf{P}^\vee - X^\vee)$ (cf. *loc. cit.*) ; cela suffit donc pour conclure dans ce cas (i.e. $p \neq 2$ ou n impair)^(vi).

Nous présentons ici une démonstration de l'égalité de ces groupes de monodromie, due à O. Gabber^(vii) qui permet donc de traiter le cas général. Il s'agit de montrer que si $Y \rightarrow \mathbf{P}^\vee - X^\vee$ est le revêtement galoisien correspondant à $\text{Im}(\rho)$, le schéma $Y \times_{\mathbf{P}^\vee} D$ est connexe.

^(vi) Remarquons qu'en caractéristique positive, le morphisme $\pi_1(D - D \cap H) \rightarrow \pi_1(\mathbf{P} - H)$ n'est *jamais* surjectif si $D \neq \mathbf{P}$ et H est une hypersurface. Par la théorie d'Artin-Schreier, il suffit de montrer que si $d \geq 1$, $f \in \Gamma(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(d))$ et $D := V(x_0) \subsetneq V(f) =: H$, il existe une fonction g sur $\mathbf{P}^2 - H$, nulle sur D , qui n'est pas de la forme $h^p - h$ pour $h \in \Gamma(\mathbf{P}^2 - H, \mathcal{O})$. On remarque alors que $g = \frac{x_0^d}{f}$ convient.

^(vii) Lettre à l'auteur, 14 mars 2005.

Nous allons, par un théorème de Bertini, nous ramener au cas où D est la droite générique après avoir convenablement compactifié la situation.

10.3 Proposition. — Soient $S = \text{Spec}(A)$ un schéma strictement local de point fermé s , X un S -schéma plat, de présentation finie dont la fibre spéciale est purement de dimension paire n et présente une singularité quadratique ordinaire en x telle que $\kappa(x)/\kappa(s)$ soit radicielle. Il existe une forme quadratique non dégénérée $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i, j} X_i X_j$ à coefficients dans A et $b, c \in A$ tels que l'hensélisé $X(x)$ de X en x soit S -isomorphe à l'hensélisé de

$$S[X_0, X_1, \dots, X_n]/(X_0^2 + b \cdot X_0 + c + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i, j} X_i X_j)$$

en le point au-dessus de s dont les n dernières coordonnées sont nulles. De plus, la S -classe d'isomorphisme de $S[X_0]/(X_0^2 + b \cdot X_0 + c)$ est indépendante des choix.

Démonstration. — Seul le dernier point est à vérifier ; le premier se trouve dans [SGA₇ xv 1.3.2] (dont la démonstration est valable sous réserve que S soit strictement hensélien ou encore $\kappa(x)/\kappa(s)$ triviale)^(viii). Nous ne vérifions cette proposition que dans le cas (plus délicat) où la caractéristique résiduelle est égale à 2 ; nous l'appliquerons dans ce cas uniquement. Comme la forme quadratique $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i, j} X_i X_j$ est non dégénérée, le lieu singulier relatif est défini par l'idéal $(2X_0 + b, X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, si l'on a une autre description de $X(x)$ décrite avec des variables \star' , on a l'égalité $(2X_0 + b, X_1, \dots, X_n) = (2X'_0 + b', X'_1, \dots, X'_n)$.

Il en résulte qu'il existe des éléments $(u_{i, j})$ de A tels que

$$X'_i = \left(\sum_1^n u_{i, j} X_j \right) + v_i \cdot (2X_0 + b).$$

La matrice $(u_{i, j})$ est inversible car dans la fibre spéciale (X_1, \dots, X_n) et (X'_1, \dots, X'_n) sont des systèmes minimaux de générateurs de l'idéal du lieu singulier relatif et $2X_0 + b$ s'annule sur la fibre spéciale ($2 = 0$ et $b^2 - 4c = 0$). Finalement,

$$(X'_1, \dots, X'_n) = (X_1 - h_1 \cdot (2X_0 + b), \dots, X_n - h_n \cdot (2X_0 + b))$$

pour certains h_i . Ainsi, $A[X'_0]/(X_0'^2 + b'X'_0 + c') \simeq \mathcal{O}(X(x))/(X'_1, \dots, X'_n)$ est isomorphe à

$$\mathcal{O}(\mathbf{A}_S^{n+1}(x))/(X_i - \tilde{h}_i \cdot (2X_0 + b) (1 \leq i \leq n), X_0^2 + bX_0 + c + \varphi \cdot (2X_0 + b)^2)$$

pour certains (\tilde{h}_i) et φ dans $\mathcal{O}(\mathbf{A}_S^{n+1}(x))$. En quotientant par les n premières équations, on obtient l'anneau local hensélien B de la droite affine \mathbf{A}_S^1 de coordonnée X_0 au point correspondant à x . On achève la démonstration en remarquant que si ψ est une solution de $\varphi = \psi + \psi^2$, et que l'on pose $Y_0 = X_0 + \psi \cdot (2X_0 + b)$, on a l'égalité $Y_0^2 + bY_0 + c = X_0^2 + bX_0 + c + \varphi \cdot (2X_0 + b)^2$. \square

La proposition précédente se reformule de la façon suivante. Soit $\Omega = \mathbf{P}^\vee - (X^\vee - X^\vee_{\text{bon}})$ et considérons le faisceau étale associé au préfaisceau

$$U/\Omega \rightsquigarrow \{\text{ensemble des classes d'isomorphisme de morphismes finis, plats de rang } 2, U' \rightarrow U \text{ étales hors de } X^\vee\}.$$

La correspondance $\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{P}^\vee$ définit une section de ce faisceau sur Ω . La lissité de \mathcal{X} entraîne la lissité des schémas U'/U correspondant à ces revêtements doubles. De même, si D définit un pinceau de Lefschetz, la partie correspondante de \mathcal{X} est un éclatement lisse de la variété

^(viii)D'après O. Gabber, le $\text{Spec}(\mathbf{F}_2(b))$ -schéma défini par l'équation $X_0^2 + b + X_0(X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2)$ est un contre-exemple à *loc. cit.*

X si bien que $U' \times_{\mathbf{P}^V} D$ est également lisse. Appliquons la formule de Picard-Lefschetz en le point générique de X^V_{bon} . En dimension relative paire, elle s'écrit

$$\sigma(x) - x = \pm \frac{\varepsilon(\sigma) - 1}{2} \langle x, \delta \rangle \delta,$$

où le caractère ε d'ordre 2 est précisément tué par le revêtement introduit plus haut. Ainsi, pour U' comme ci-dessus et compte tenu de la pureté du lieu de ramification, l'image inverse du faisceau $R^n f_* \Lambda$ sur $U' \times_{\mathbf{P}^V} (\mathbf{P}^V - X^V)$ se prolonge en un faisceau lisse sur U' . De plus, pour tout point géométrique t de X^V_{bon} , la restriction de la représentation ρ à $\pi_1(\mathbf{P}^V(t) - X^V(t))$ est non triviale (car $\langle \delta, \delta \rangle = \pm 2$) si bien que si \bar{Y} est la normalisation de \mathbf{P}^V dans Y , le schéma $\bar{Y} \times_{\mathbf{P}^V} \mathbf{P}^V(t)$ est une union disjointe de copies des revêtements doubles distingués de $\mathbf{P}^V(t)$. (En effet, il est étale sur $\mathbf{P}^V(t) - X^V(t)$, non trivial et trivialisé par $\mathbf{P}^V(t)$.) Cela montre en particulier qu'au-dessus de Ω , le schéma \bar{Y} est lisse et, de façon semblable, que pour chaque pinceau de Lefschetz D , le schéma $\bar{Y} \times_{\mathbf{P}^V} D$ est lisse. Ces schémas forment une famille propre et lisse sur l'ouvert de $\text{Gr}(1, \mathbf{P}^V)$ correspondant aux pinceaux de Lefschetz. La fibre générique est donc géométriquement connexe par le théorème de Bertini ([Jou83], I 6.10(3)) et il en est donc ainsi de chaque fibre.

10.4. Remarques finales. — Dans [SGA₇ XV], P. Deligne démontre la formule de Picard-Lefschetz en dimension relative impaire en utilisant un théorème de comparaison avec la théorie transcendante. Récemment, L. Illusie en a donné une démonstration algébrique ([Ill02]). Il serait cependant intéressant de disposer d'un théorème de comparaison (après modification) — dont le sens exact reste encore à préciser — entre la cohomologie étale des fibres de Milnor (à coefficients constants) et la cohomologie de Betti des fibres de Milnor classiques, définies au moyen de petites boules de rayons « ε, η » dans le cas où $X \rightarrow S$ est un morphisme de variétés algébriques complexes. Le cas des singularités isolées devrait résulter d'un argument local-global. L'auteur remercie P. Deligne de lui avoir fait remarquer que le cas général semble inconnu et L. Illusie d'avoir attiré son attention sur l'article [IKN05].

Enfin, motivé par les succès de la théorie des faisceaux pervers sur un S -schéma, avec S de dimension 0 ou 1, il serait naturel d'étudier un tel formalisme dans le présent cadre (S général) : perversité des cycles proches, dualité.

Références

- [Art71] M. ARTIN — « On the joins of Hensel rings », *Advances in Math.* **7** (1971), p. 282–296.
- [Art73] M. ARTIN — « Morphismes acycliques », 1973, exposé xv dans [Gro73].
- [Del72] P. DELIGNE — « La formule de Picard-Lefschetz », 1972, exposé xv dans [Gro72].
- [Del74] P. DELIGNE — « Théorie de Hodge. III », *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* (1974), no. 44, p. 5–77.
- [Del77] P. DELIGNE *et al.* — *Cohomologie étale*, Springer-Verlag, 1977, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569.
- [Del80] P. DELIGNE — « La conjecture de Weil. II », *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* (1980), no. 52, p. 137–252.
- [dJ97] A. J. DE JONG — « Families of curves and alterations », *Ann. Inst. Fourier* **47** (1997), no. 2, p. 599–621.
- [GNAPGP88] F. GUILLÉN, V. NAVARRO AZNAR, P. PASCUAL GAINZA et F. PUERTA — *Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1335, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Gro67] A. GROTHENDIECK (rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ) — « Éléments de géométrie algébrique », *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* (1960–1967).

- [Gro72] A. GROTHENDIECK *et al.* – *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Springer-Verlag, 1972, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I & II). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288 & 340.
- [Gro73] A. GROTHENDIECK *et al.* – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Springer-Verlag, 1972–1973, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269–270 & 305.
- [Hei73] W. HEINZER – « Minimal primes of ideals and integral ring extensions », *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 40, 1973, p. 370–372.
- [Hub96] R. HUBER – *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.
- [Ill02] L. ILLUSIE – « Sur la formule de Picard-Lefschetz », *Algebraic geometry 2000*, Azumino (Hotaka), *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 36, Math. Soc. Japan, Tôkyô, 2002, p. 249–268.
- [IKN05] L. ILLUSIE, KATÔ K. et NAKAYAMA K. – « Quasi-unipotent logarithmic Riemann-Hilbert correspondences », *J. Math. Sci. Univ. Tôkyô* **12** (2005), no. 1, p. 1–66.
- [Jou83] J.-P. JOUANLOU – *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1983.
- [Kat72] N. M. KATZ – « Pinceaux de Lefschetz : théorèmes d’existence », 1972, exposé XVII dans [Gro72].
- [Lau81] G. LAUMON – « Semi-continuité du conducteur de Swan (d’après P. Deligne) », *Astérisque*, vol. 83, Soc. Math. France, Paris, 1981, p. 173–219.
- [Lau83] G. LAUMON – « Vanishing cycles over a base of dimension ≥ 1 », *Algebraic geometry (Tôkyô/Kyôto, 1982)*, Lecture Notes in Math., vol. 1016, Springer, Berlin, 1983, p. 143–150.
- [Lüt93] W. LÜTKEBOHMERT – « On compactification of schemes », *Manuscripta Math.* **80** (1993), no. 1, p. 95–111.
- [MV00] I. MOERDIJK et J. J. C. VERMEULEN – « Proper maps of toposes », *Mem. Amer. Math. Soc.* **148** (2000), no. 705.
- [OP68] J. OHM et R. L. PENDLETON – « Rings with noetherian spectrum », *Duke Math. J.* **35** (1968), p. 631–639.
- [RG71] M. RAYNAUD et L. GRUSON – « Critères de platitude et de projectivité. Techniques de « platification » d’un module », *Invent. Math.* **13** (1971), p. 1–89.
- [Sab83] C. SABBAAH – « Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents », *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, (Luminy, 1981), *Astérisque*, vol. 101, Soc. Math. France, Paris, 1983, p. 286–319.

18 juillet 2005

FABRICE ORGOGOZO, Princeton University, Mathematics Department, Fine Hall, Washington Road,
Princeton, NJ 8544–1000 U.S.A. • Courriel : orgogozo@math.princeton.edu