HAL open science

Déformations isospectrales non compactes et théorie quantique des champs

Victor Gayral

To cite this version:

Victor Gayral. Déformations isospectrales non compactes et théorie quantique des champs. Physique des Hautes Energies - Théorie [hep-th]. Université de provence - Aix-Marseille I, 2005. Français. NNT : 2005AIXI1002 . hal-00007605v2

HAL Id: hal-00007605

https://hal.science/hal-00007605v2

Submitted on 21 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00007605, version 2 - 21 Oct 2005

Université de Provence, Aix-Marseille I

THÈSE

Présentée par

Victor GAYRAL

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

Spécialité : Physique des Particules, Physique Mathématique et Modélisation

École Doctorale : Physique et Science de la Matière

Titre :

Déformations Isospectrales Non Compactes et Théorie Quantique des Champs

Soutenue publiquement le 20 Mai 2005 devant le jury composé de

T. Fack (Président)
B. Iochum (Directeur de thèse)
G. Landi (Rapporteur)
T. Schücker
J. C. Várilly (Rapporteur)

Centre de Physique Théorique
CNRS–UMR 6207

Remerciements

Un directeur de thèse est rarement une unique personne. Je tiens tout d'abord à remercier Bruno Iochum, mon directeur officiel, qui m'a beaucoup appris, très justement conseillé et sans qui tout cela n'aurait été possible.
Viennent ensuite José Gracia-Bondía et Joseph Várilly, qui ont été bien plus que de merveilleux collaborateurs.
Tous trois ont su me faire confiance et ont été d'un grand soutien. Je tiens à leur exprimer ma plus profonde gratitude.

La formation de chercheur n'est épanouissante qu'au sein d'une équipe.
Je voudrai remercier 'les jeunes' qui m'ont entouré et avec qui j'ai eu de nombreuses discussions fertiles : Thomas Krajewski, Raimar Wulkenhaar, Michaël Grasseau, Raphaël Zentner, Christoff Stephan, Jan Jureit, Yaël Frégier et Pierre Martinetti.
Je tiens aussi à remercier tous les chercheurs et enseignants chercheurs du CPT et de l'IML qui m'ont accordé beaucoup de leur temps à tenter d'apporter des réponses aux innombrables questions que je me suis posées durant ces trois années de thèse, en particulier à Thomas Schücker, Serge Lazzarini, Christian Duval, Michel Rouleux, Valentin Zagrebnov, Pierre Duclos, Eric Soccorsi, Claude-Alain Pillet, Michaël Puschnigg, Antony Wassermann, Jean-Michel Combes.
Un grand merci à tout le 'staff' technique du CPT, en particulier à Dolly Roche, Isabelle Morganti, Vincent Bayle, Denis Patrat, Corinne Roux, Annette Elbaz, Sylvie Retourna.

Je remercie vivement Thierry Fack, Gianni Landi, Thomas Schücker et Joseph Várilly pour avoir accepté de faire partie du jury.

Table des matières

Introduction **7**

1 Déformations isospectrales **13**
1.1 Déformations isospectrales périodiques . . . 13
1.1.1 Sphères de Connes–Landi–Dubois-Violette . . . 13
1.1.2 La construction de Connes–Landi . . . 17
1.1.3 La construction de Connes–Dubois-Violette . . . 21
1.2 Déformations isospectrales non périodiques . . . 22
1.2.1 Le produit déformé, définition et premières propriétés . . . 22
1.2.2 Analyse Hilbertienne du produit déformé . . . 27

2 Triplets spectraux sans unité **35**
2.1 Géométries spinorielles non commutatives . . . 35
2.1.1 La notion d'espace Riemannien à spin non commutatif . . . 35
2.1.2 Généralisation des axiomes au cas sans unité . . . 38
2.2 Les plans de Moyal vus comme triplets spectraux . . . 40
2.2.1 Quelques notions de Moyalologie . . . 40
2.2.2 Les triplets associés aux plans de Moyal . . . 51
2.2.3 Vérification des axiomes . . . 52
2.2.4 Remarques sur les contraintes imposées . . . 66
2.3 Application aux déformations isospectrales . . . 66
2.3.1 Noyau de la chaleur et classes de Schatten . . . 66
2.3.2 Classes de Schatten faibles . . . 72
2.3.3 Calcul de la trace de Dixmier : le cas périodique . . . 75
2.3.4 Calcul de la trace de Dixmier : le cas non périodique . . . 77

3 Fonctionnelles d'actions **83**
3.1 Action de Connes–Lott . . . 84
3.1.1 L'algèbre différentielle universelle . . . 85
3.1.2 Fonctionnelle d'action . . . 89
3.2 Action spectrale . . . 90
3.2.1 Motivations et généralités . . . 90
3.2.2 Cas des plans de Moyal . . . 93

4 Mélange UV/IR et noyau de la chaleur **103**
4.1 Théorie $\varphi^{\star\Theta 4}$ sur déformations isospectrales 104
4.1.1 Action effective à une boucle 104
4.1.2 Développement en puissance du champ 111
4.1.3 Contributions planaires et non planaires 113
4.2 Déformations non périodiques 115
4.2.1 NCQFT sur plan de Moyal dans l'espace de configuration 115
4.2.2 Les divergences dans le cas général non périodique 118
4.3 Déformations périodiques 121
4.3.1 Comportement individuel des graphes non planaires 121
4.3.2 Condition Diophantienne et points fixes 124
4.4 Points fixes et divergences : un exemple 126

Conclusion et perspectives **129**

A Traces de Dixmier **135**

B Base de Wigner **139**
B.1 Limite $\theta \to 0$ 139
B.2 f_{mn} et opérateur d'Euler 140

Introduction

Cette thèse constitue un recueil des travaux de recherche que j'ai effectués ces trois dernières années en collaboration avec J. M. Gracia-Bondía, B. Iochum, F. Ruiz Ruiz, T. Schücker et J. C. Várilly.

La géométrie non commutative (GNC) est une généralisation (algébrique et opératorielle) des concepts principaux de la géométrie différentielle ordinaire ; elle permet ainsi d'élargir le cadre mathématique qui décrit la physique fondamentale au niveau classique. Les prémisses de la GNC datent de la première moitié du siècle dernier, de l'avènement de la mécanique quantique, à partir duquel il fut de plus en plus évident que les notions géométriques séculaires et intuitives devraient être repensées pour permettre d'y intégrer des situations (géométriques) plus générales.

Plus spécifiquement, les études que nous avons menées et qui sont reportées dans cette thèse, s'inscrivent dans le courant de pensée qui s'est construit autour des idées élaborées par Alain Connes. L'une des motivations principales de son approche, fut la description d'espaces 'pathologiques' pour lesquels les outils géométriques et analytiques classiques perdent leur pertinence.

La nécessité d'étendre les notions géométriques ordinaires est aussi primordiale en physique fondamentale, en l'occurrence si on décide de s'affranchir de l'hyphothèse du continu pour modéliser et comprendre l'espace-temps ainsi que les 'objets vivant dessus', tels les champs de matière et les champs de jauge. En effet, une description continue de l'espace-temps est contradictoire avec le principe d'incertitude spatio-temporel [34], analogue à celui d'Heisenberg sur la position et l'impulsion en mécanique quantique, et résultant de la nature dynamique de l'espace-temps induite par les équations d'Einstein. Il se produit évidemment dans le régime des petites distances, typiquement à l'échelle de Planck $l_p \sim 1.6\ 10^{-33}$cm. En effet, vouloir localiser une particule dans l'espace-temps avec une précision arbitraire, n'est pas envisageable déjà dans le cadre de la relativité générale. L'énergie nécessaire à une telle localisation (par exemple celle d'une particule incidente si on veut procéder par expérience de diffusion) peut provoquer une singularité, dont l'horizon rendrait impossible toute détection. L'espace-temps ne peut avoir la structure d'une variété différentiable qu'en première approximation.

La problématique ultime de la physique fondamentale, consiste en la description unifiée des interactions régissant les particules élémentaires au niveau quantique. En dehors des difficultés d'ordres techniques et/ou conceptuelles persistantes en théorie quantique des champs (en particulier dans sa formulation perturbative), une partie de ce programme a été réalisée : la quantification du modèle standard, i.e. des interactions électromagnétique, faible et forte. L'étape suivante est la quantification de la gravitation. Elle n'a été abordée que dans le contexte de la

quantification canonique (gravité quantique à boucle) et dans celui de la théorie des cordes. La question, qui pour l'heure n'a aucun embryon de réponse, est de savoir si les idées de la géométrie non commutative sont suffisamment robustes pour fournir un cadre approprié à la description de la gravitation au niveau quantique. Nous verrons qu'il existe plusieurs arguments conceptuels en faveur de la GNC, mais que de nombreuses obstructions techniques rendent pour l'heure problématique toute tentative de quantification de la gravitation dans le cadre de la GNC.

Les fondements de la géométrie non commutative reposent en quelque sorte à la fois sur le théorème de dualité de Gelfand–Naimark et sur la mécanique quantique elle-même. En effet, ce théorème affirme que toute C^*-algèbre commutative est isomorphe à l'algèbre des fonctions continues et s'annulant à l'infini sur un espace localement compact. Tout espace topologique localement compact X peut ainsi être décrit de manière duale en terme de la C^*-algèbre $C_0^\infty(X)$. Par ailleurs, la mécanique quantique nous indique, en particulier pour comprendre la stabilité des atomes et décrire leurs spectres en énergie, que les coordonnées de l'espace des phases ne commutent plus. Ainsi, d'une part les espaces ordinaires peuvent être caractérisés en termes purement algébrique et d'autre part il existe des phénomènes physiques ne pouvant être compris qu'en termes de coordonnées non commutatives.
Un espace non commutatif est alors défini par dualité, et consiste en la donnée d'une C^*-algèbre non commutative. Dans ce cadre, on peut aussi donner du sens à la notion de mesure à travers celle d'algèbre de von Neumann, de topologie via des théories (co)homologiques telles la K-théorie et la (co)homologie cyclique mais aussi de structure différentielle, généralement implémentée par un opérateur externe (un opérateur de Dirac abstrait). Les notions usuelles de fibrés vectoriels et de connections sont aussi (par dualité) directement transposable au monde non commutatif. Finalement, l'objet central dans l'interface entre la GNC et la physique fondamentale est celui de triplet spectral, généralisation non commutative de la notion de variété Riemannienne à spin ; le point de départ naturel pour l'élaboration de théories physiques.

En physique des particules, la GNC a permis deux avancées conceptuelles majeures : une interprétation géométrique du mécanisme de Higgs et l'unification au niveau classique de toutes les interactions connues.

Un des avantages de la GNC est de pouvoir traiter dans un même cadre espaces continus et espaces discrets. C'est en comprenant l'espace-temps en termes du 'produit' (rigoureusement du produit de triplets spectraux) d'un espace continu (une quatre-variété) par un espace à deux points, produisant un espace à deux couches chacune correspondant heuristiquement au monde des fermions de chiralité donnée, que l'on peut comprendre géométriquement le mécanisme de Higgs. En considérant la fonctionnelle d'action de Connes–Lott (qui n'est rien d'autre qu'une transposition directe dans le langage de la GNC de celle de Yang–Mills), cette particule scalaire apparaît alors (avec son fameux potentiel quartique) comme la composante (dans la direction discrète) d'une connection [18, 19].

En plus de cette même interprétation du champs de Higgs, l'action spectrale permet d'unifier au niveau classique les interactions électro-faible, forte et gravitationnelle. Cette fonctionnelle d'action est définie à partir du spectre d'un opérateur de Dirac $\mathcal{D}$: $S = \operatorname{Tr}\chi(\mathcal{D}^2/\Lambda^2)$ (nombre de ses valeurs propres inférieures ou égales à une échelle de masse Λ). On obtient par fluctuation de la métrique, c'est-à-dire par transformations de jauge généralisées au groupe des unitaires de l'algèbre, et en développant cette action en puissances de Λ, le Lagrangien du modèle standard couplé à la gravitation d'Einstein–Weyl [5–7].

Alors que sur le plan conceptuel les idées de la GNC sont en parfaite adéquation avec celles de

la gravitation quantique, en particulier sur la structure microscopique de l'espace-temps, sur le plan technique de nombreuses difficultés existent. Pour ne citer que la plus importante, il n'est pas clair comment implémenter (sur l'hypothétique algèbre non commutative décrivant notre espace-temps au niveau quantique) l'invariance sous difféomorphismes. Ce problème est bien plus sérieux qu'il n'y paraît, car pour l'heure toutes les constructions d'espaces non commutatifs utilisent le point de vue 'système de coordonnées'.

Les théories quantiques des champs sur espace non commutatif (NCQFT) ne souffrent pas de telles obstructions. Elles constituent plutôt une généralisation directe de celles sur espace commutatif. Les champs classiques sont interprétés comme les éléments d'une algèbre non commutative dans le cas scalaire, ou comme les éléments d'un module projectif de type fini (la notion non commutative de fibré vectoriel) dans le cas vectoriel. Le seul autre ingrédient dont on a besoin (en dehors d'un opérateur déterminant la cinétique) est une trace sur l'algèbre pour construire une action classique.
Ces théories peuvent être interprétées comme la limite à basse énergie d'une théorie quantique unifiée. La motivation principale pour les introduire, tombée en désuétude aujourd'hui [20–22], était de faire disparaître les divergences ultraviolettes (aux grandes énergies ou aux petites distances) dont sont affublées les théories quantiques des champs sur espace ordinaire. En effet, lorsque l'on substitue un espace quantique à un espace ordinaire, on s'attend a voir disparaître ces divergences car la notion de point, donc celle de petite distance, n'existe plus sur les espaces non commutatifs.
Ce ne fut pas le cas pour les premiers exemples étudiés, plans de Moyal et tores non commutatifs, ou en plus des divergences UV ordinaires, des divergences mélangeant courtes et grandes distances apparurent : le phénomène de mélange UV/IR.
C'est pour mieux comprendre l'origine de tels phénomènes, mais aussi pour différencier les aspects génériques de ceux spécifiques à un modèle, qu'il est primordial d'étudier la théorie quantique des champs sur d'autres espaces non commutatifs.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressé aux aspects mathématiques ainsi qu'à certaines applications physiques, d'une classe importante d'espaces non commutatifs : les déformations isospectrales. Ce sont des généralisations en espace courbe des sans doute plus anciens espaces quantiques connus : les tores non commutatifs et les plans de Moyal.

En cherchant à construire et à classifier, à partir de considérations homologiques, les variétés non commutatives sphériques de dimension trois, Connes, Landi et Dubois-Violette ont donné dans les articles [24, 25] une méthode pour générer à partir d'un espace Riemannien classique, une famille d'espaces quantiques fondés sur le paradigme du tore non commutatif. L'ingrédient de base est une variété Riemannienne compacte munie d'une structure spin et dont le groupe d'isométrie est de rang (dimension du sous-groupe commutatif maximal) supérieur ou égal à deux. On construit alors par dualité une famille de variétés (d'algèbres) non commutatives $C^\infty(M_\Theta)$, en déformant l'algèbre commutative $C^\infty(M)$ à partir de l'action sur M du sous-groupe Abélien maximal (isomorphe à un tore car la variété est compacte) du groupe d'isométrie de la variété. Dans la construction de Connes–Dubois-Violette [25] (celle de Connes–Landi [24] est sensiblement différente), $C^\infty(M_\Theta)$ est définie en termes d'algèbre des points fixes pour l'action d'un groupe :

$$C^\infty(M_\Theta) := \left(C^\infty(M)\widehat{\otimes}C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta)\right)^{\alpha\widehat{\otimes}\tau^{-1}}, \tag{0.0.1}$$

où $C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta)$ désigne l'algèbre d'un l-tore non commutatif de matrice de déformation Θ, τ est

l'action sur $C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta)$ du l-tore ordinaire et α est l'action par automorphismes sur $C^\infty(M)$ donnée par le sous-groupe Abélien maximal de $\mathrm{Isom}(M,g)$.
La terminologie 'déformation isospectrale' vient du fait que le triplet spectral sous-jacent, i.e. l'objet dual $(C^\infty(M_\Theta), L^2(M,S), \not{D})$ codant les structures topologique, différentielle, métrique et spin de la variété de départ M, possède le même espace de représentation, l'espace de Hilbert des sections de carré sommable du fibré des spineurs, et le même opérateur de Dirac que celui non déformé ; seule l'algèbre est modifiée.

Quelques temps plus tard, Várilly [104] et Sitarz [101] remarquèrent indépendamment, que cette construction s'inscrit dans la théorie de Rieffel de la déformation/quantification par action de $\mathbb{R}^l$ [92]. Se donnant une algèbre de Fréchet A munie d'une famille de semi-normes $\{p_i\}_{i\in I}$ ainsi que d'une action du groupe Abélien $\mathbb{R}^l$, fortement continue et isométrique pour chaque semi-norme, on peut déformer la sous-algèbre A^∞ consistant en les éléments de A qui sont lisses (pour la topologie Fréchet) par rapport à l'action des générateurs infinitésimaux X^k, $k \in \{1,\dots,l\}$ de l'action α. L'algèbre A^∞ peut alors être munie canoniquement d'une nouvelle famille de semi-normes $\tilde{p}_{i,m}(.) := \sup_{j\leq i}\sum_{|\beta|\leq m} p_j(X^\beta .)$, $\beta \in \mathbb{N}^l$. Elles ont la propriété d'être compatibles avec le produit déformé, défini par :

$$a\star_\Theta b := (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\; e^{-i<y,z>}\; \alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(a)\alpha_{-z}(b),\; a,b\in A^\infty. \tag{0.0.2}$$

Ici Θ est une matrice réelle et antisymétrique ; la matrice de déformation. Les intégrales intervenant dans la définition de ce produit sont des intégrales oscillantes à valeur dans A^∞. La propriété principale de ce processus de déformation est d'être réversible : en notant A^∞_Θ l'algèbre $(A^\infty, \star_\Theta)$, on a $(A^\infty_\Theta)^\infty_{\Theta'} = A^\infty_{\Theta+\Theta'}$.

En utilisant ce cadre plus général, la construction de Connes–Landi–Dubois-Violette peut être étendue aux variétés Riemanniennes non compactes munies d'une action de $\mathbb{R}^l$ par isométrie.

Dans cette thèse, on s'intéressera principalement aux espaces non commutatifs non compacts ainsi obtenus, qui sont qualifiés de déformations isospectrales non périodiques non compactes. Ils ont pour paradigmes les plans de Moyal, avec lesquels ils coïncident lorsque $M = \mathbb{R}^l$ et lorsque $\mathbb{R}^l$ agit sur lui-même par translation.

Dans la première partie de cette thèse, nous commencerons par revoir les motivations homologiques qui ont abouti à la construction (et à la classification) des variétés non commutatives tri-dimensionnelles de type sphérique. Nous reverrons ensuite les constructions respectives de Connes–Landi et de Connes–Dubois-Violette des déformations isospectrales périodiques compactes. Les déformations isospectrales non périodiques non compactes seront alors introduites en utilisant la théorie de Rieffel. Leurs propriétés algébriques seront établies et les aspects analytiques génériques, en particulier Hilbertien, seront étudiés.

La deuxième partie consiste en la construction de triplet spectraux sans unité. On commencera par le cas unifère, puis on motivera les modifications nécessaires pour formuler les axiomes des 'espaces Riemanniens à spin quantiques non compacts'. Après avoir revu un certain nombre de faits concernant l'analyse fonctionnelle sous-jacente au produit de Moyal, on vérifiera que ces axiomes modifiés sont satisfait pour les déformations non compactes plates. Enfin, nous donnerons les points clefs pour construire des triplets spectraux sans unité à partir des déformations isospectrales non compactes courbes.

Dans le chapitre suivant, nous calculerons pour les plans de Moyal, deux types de 'fonctionnelle d'action pour champs de jauge non commutatifs' : l'action de Connes–Lott et l'action

spectrale.

Dans le dernier chapitre, nous nous intéresserons aux théories quantiques des champs sur déformations isospectrales courbes. Nous nous focaliserons sur le phénomène de mélange des divergences ultraviolette et infrarouge (mélange UV/IR) ; phénomène très important car rendant problématique la renormalisation de la théorie et qui jusque-là n'était connu que pour les déformations plates (plans de Moyal et tores non commutatifs).
Au travers de l'étude d'une théorie scalaire en dimension quatre, nous allons montrer le caractère intrinsèque de ce phénomène et étudier ses conséquences sur la renormalisabilité. Nous verrons apparaître des manifestations nouvelles et/ou plus fines du mélange UV/IR, en relations avec les propriétés géométriques de ces espaces quantiques et arithmétiques des paramètres de déformation. D'autres perspectives de recherches seront proposées dans la conclusion, et deux appendices résumeront les propriétés des traces de Dixmier et de la base de Wigner de l'oscillateur harmonique.

Chapitre 1

Déformations isospectrales

1.1 Déformations isospectrales périodiques

1.1.1 Sphères de Connes–Landi–Dubois-Violette

Nous avons déjà stipulé dans l'introduction que l'origine des déformations isospectrales est de nature homologique. Ce point de vue homologique ne sera pas vraiment utilisé dans ce mémoire ; nous nous concentrerons sur les aspects analytiques. Il nous a semblé cependant instructif, de rappeler la construction homologique des sphères de Connes–Landi–Dubois-Violette, en particulier pour motiver l'introduction des déformations isospectrales. En effet, une sous-famille de ces espaces non commutatifs constitue l'archétype des déformations isospectrales courbes.

Le point de départ de leur construction est l'étude et la classification des variétés non commutatives tridimensionnelles sphériques. Ces dernières sont définies algébriquement à travers des contraintes sur les composantes de leur caractère de Chern en homologie cyclique, i.e. un cycle cyclique local sur l'algèbre $\mathcal{A}$ définissant la variété non commutative et dont le couplage avec la K-homologie du triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ (voir chapitre 2) donne un indice de Fredholm (voir [13, 55]).

On cherche ainsi à construire une algèbre $\mathcal{A}$, de dimension n, par générateurs et relations. Les générateurs sont dans le cas pair les éléments de matrice d'un projecteur $e \in M_q(\mathcal{A})$, $e^2 = e^* = e$ et sont dans le cas impair ceux d'un unitaire $U \in M_q(\mathcal{A})$, $U^*U = UU^* = 1$. Les relations sont implémentées par l'annulation de toutes les composantes de degré non maximal du caractère de Chern. Ces dernières conditions correspondent à la condition de sphéricité imposée et s'expriment en dimension paire $n = 2m$ par

$$\mathrm{ch}_k(e) = 0, \, \forall \, k = 0, \cdots, m-1, \tag{1.1.1}$$

et en dimension impaire $n = 2m+1$ par

$$\mathrm{ch}_{k+1/2}(U) = 0, \, \forall \, k = 0, \cdots, m-1. \tag{1.1.2}$$

La composante maximal (ch_m ou $\mathrm{ch}_{m+1/2}$) du caractère de Chern définit, quant à elle, un cycle de Hochschild jouant le rôle de la forme volume sur l'espace non commutatif en question. A des constantes λ_k, λ'_k près, les composantes du caractère de Chern sont données dans le cas pair par

$$\mathrm{ch}_k(e) = \lambda_k \sum_{i_0, \cdots, i_{2k}=1}^{q} \left(e^{i_0}_{i_1} - \tfrac{1}{2}\delta^{i_0}_{i_1} \right) \otimes e^{i_1}_{i_2} \otimes e^{i_2}_{i_3} \otimes \cdots \otimes e^{i_{2k}}_{i_0} \in \mathcal{A} \otimes (\widetilde{\mathcal{A}})^{\otimes 2k},$$

et dans le cas impair par

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_{k+1/2}(U) =& \lambda'_k \sum_{i_0,\cdots,i_{2k+1}=1}^{q} U^{i_0}_{i_1} \otimes U^{*i_1}_{i_2} \otimes U^{i_2}_{i_3} \otimes \cdots \otimes U^{*i_{2k+1}}_{i_0} \\ &- U^{*i_0}_{i_1} \otimes U^{i_1}_{i_2} \otimes U^{*i_2}_{i_3} \otimes \cdots \otimes U^{i_{2k+1}}_{i_0} \in \mathcal{A} \otimes (\widetilde{\mathcal{A}})^{\otimes 2k+1},\end{aligned}$$

où $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A}/\mathbb{C}$. Il existe de plus, une condition de consistance entre la dimension n et le rang q des matrices e et U, à savoir $q = 2^m$ pour $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$.

A. Connes a montré dans [17] qu'une solution des équations (1.1.1) et (1.1.2) est donnée par le générateur de Bott dans le cas des sphères ordinaires $\mathbb{S}^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$, et a trouvé avec G. Landi [24] une famille à un paramètre de solutions non commutatives dans le cas $n = 3, 4$. L'ensemble des solutions de (1.1.2) pour $n = 3$, i.e. l'ensemble des variétés non commutatives tri-dimensionnelles de type sphérique, a ensuite été classifié par A. Connes et M. Dubois-Violette dans l'article [25]. Il en résulte une famille de solutions à trois paramètres, dont les algèbres homogènes associées (pour lesquelles la condition d'unitarité de la matrice $U \in M_2(\mathcal{A})$ a été remplacée par $U^*U = UU^* \subset \mathbf{1}_2 \otimes \mathcal{A}$) sont isomorphes, pour des valeurs génériques des paramètres, aux algèbres de Sklyanin, introduites en connexion avec l'équation de Yang-Baxter. C'est cette construction que nous revoyons maintenant, en suivant de près l'article [25]. Notons finalement que l'ensemble de solutions pour $n = 4$, $q = 4$, constitue quant à lui une famille à sept paramètres de variétés non commutatives [37].

Soient $n = 3$, $q = 2$. Nous cherchons une algèbre complexe, unitale et involutive $\mathcal{A}$ dont les générateurs sont les éléments d'une matrice $U \in M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A} \simeq M_2(\mathcal{A})$ et les relations sont exprimées au travers des équations

$$\mathrm{ch}_{1/2}(U) = \sum_{i,j=1,2} U_{ij} \otimes U^*_{ij} - U^*_{ji} \otimes U_{ji} = 0, \tag{1.1.3}$$

et

$$UU^* = U^*U = \mathbf{1}_2 \tag{1.1.4}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U^* = \begin{pmatrix} U^*_{11} & U^*_{21} \\ U^*_{12} & U^*_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad U_{ij} \in \mathcal{A}.$$

Pour reparamétrer cette dernière équation, il est commode d'introduire les matrices de Pauli

$$\sigma := (1_2, -\vec{\sigma}), \qquad \bar{\sigma} := (1_2, \vec{\sigma}),$$

satisfaisant à

$$\sigma^l \sigma^j = \delta^{lj} + i\varepsilon^{ljm}\sigma^m. \tag{1.1.5}$$

Dans ce paramétrage, U s'écrit

$$U = (\bar{\sigma}\tilde{z}) = z_0 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{z},$$

où $(\tilde{z}) := (z_0, iz_1, iz_2, iz_3) \in \mathcal{A}^4$ et $\vec{z} := (z_1, z_2, z_3)$, c'est-à-dire

$$U = \begin{pmatrix} z_0 + iz_3 & iz_1 + z_2 \\ iz_1 - z_2 & z_0 - iz_3 \end{pmatrix}. \tag{1.1.6}$$

L'équation (1.1.3) devient alors :

$$\mathrm{ch}_{1/2}(U) = 2\left(\sum_{\mu=0}^{3} z_\mu \otimes z_\mu^* - z_\mu^* \otimes z_\mu\right) = 0. \tag{1.1.7}$$

Cette condition est satisfaite si et seulement si (voir [25] pour la preuve) il existe une matrice $\Lambda \in M_4(\mathbb{C})$ unitaire et symétrique telle que

$$z_\nu^* = \Lambda_\nu^\mu z_\mu.$$

Finalement, l'ensemble des relations (1.1.3) et (1.1.4) devient :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\nu=0}^{3} z_\nu z_\nu^* = \sum_{\nu=0}^{3} z_\nu^* z_\nu = 1, \\ z_k z_0^* - z_0 z_k^* + \varepsilon^{lkm} z_l z_m^* = 0, \\ z_0^* z_k - z_k^* z_0 + \varepsilon^{lkm} z_l^* z_m = 0. \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Pour paramétrer l'ensemble des solutions, il faut remarquer que les relations $UU^* = U^*U = \mathbf{1}_2$ et $\mathrm{ch}_{1/2}(U) = 0$ ne changent pas sous la transformation

$$U \mapsto uV_1UV_2, \tag{1.1.9}$$

où $u \in U(1)$ et $V_1, V_2 \in SU(2)$. Utilisant ce degré de liberté, Λ peut être diagonalisée et réécrite comme :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e^{-2i\varphi_1} & & \\ & & e^{-2i\varphi_2} & \\ & & & e^{-2i\varphi_3} \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, nous pouvons supposer que des générateurs $\{z_\mu\}$ s'écrivent

$$z_0 = x_0; \qquad z_j = e^{i\varphi_j} x_j,$$

où les éléments x_ν sont maintenant hermitiens. Pour ces nouveaux générateurs, les relations de commutation (1.1.8) deviennent

$$\begin{aligned} [x_0, x_1]_- &= i\frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{\cos\varphi_1}[x_2, x_3]_+ \\ [x_2, x_3]_- &= -i\frac{\sin\varphi_1}{\cos(\varphi_2 - \varphi_3)}[x_0, x_1]_+, \end{aligned}$$

plus celles obtenues par permutation circulaire de $\{x_1, x_2, x_3\}$. Il est aussi à noter qu'une rotation de $SO(3)$ permute les φ_l et que l'on peut remplacer φ_l par $\varphi_l - \pi$ en échangeant x_l par $-x_l$, sans changer les relations de l'algèbre ; tous les cas de figure sont donc couverts par

$$\{\, (e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3}) \in \mathbb{T}^3 \big| \pi > \varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \varphi_3 \geq 0 \,\}. \tag{1.1.10}$$

Il est aussi possible de vérifier, que la composante maximale du caractère de Chern satisfait

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}_{3/2}(U) = &- \sum_{0\leq\alpha,\beta,\gamma,\delta\leq 3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta + \varphi_\gamma - \varphi_\delta) x_\alpha \otimes x_\beta \otimes x_\gamma \otimes x_\delta \\ &+ i \sum_{0\leq\mu,\nu\leq 3} \sin(2(\varphi_\mu - \varphi_\nu)) x_\mu \otimes x_\nu \otimes x_\mu \otimes x_\nu. \end{aligned}$$

Le caractère de Chern est par construction un cycle de Hochschild sur l'algèbre $\mathcal{A}$, dont la composante de degré maximale est l'équivalent non commutatif de la forme volume. Pour des valeurs génériques des paramètres, $\mathrm{ch}_{3/2}(U)$ est non trivial et correspond à la forme volume associée à la métrique ronde de $\mathbb{S}^3$ dans le cas commutatif limite où $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$.

Dans la suite, nous n'allons nous intéresser qu'à une sous famille particulière à un paramètre des sphères de Connes–Dubois-Violette, donnée par $\varphi_1 = \varphi_2 = \theta/2$, $\varphi_3 = 0$. Ces solutions correspondent aux 3-sphères de Connes–Landi [24]. Les relations de commutation deviennent pour ces valeurs :

$$[x_0, x_1]_- = i\tan(\theta/2)[x_2, x_3]_+; \quad [x_0, x_2]_- = -i\tan(\theta/2)[x_1, x_3]_+, \tag{1.1.11}$$

$$[x_1, x_3]_- = i\tan(\theta/2)[x_0, x_2]_+; \quad [x_2, x_3]_- = -i\tan(\theta/2)[x_0, x_1]_+, \tag{1.1.12}$$

et

$$[x_0, x_3]_- = [x_1, x_2]_- = 0. \tag{1.1.13}$$

En définissant les éléments complexes

$$\zeta_1 := x_0 + ix_3; \qquad \zeta_2 := x_1 + ix_2,$$

ces relations deviennent :

$$\begin{aligned}
\zeta_1\,\zeta_2 &= e^{-i\theta}\,\zeta_2\,\zeta_1,\\
\zeta_1^*\,\zeta_2^* &= e^{-i\theta}\,\zeta_2^*\,\zeta_1^*,\\
\zeta_1^*\,\zeta_2 &= e^{i\theta}\,\zeta_2\,\zeta_1^*,\\
\zeta_1\,\zeta_2^* &= e^{i\theta}\,\zeta_2^*\,\zeta_1,\\
\zeta_1\,\zeta_1^* &= \zeta_1^*\,\zeta_1,\\
\zeta_2\,\zeta_2^* &= \zeta_2^*\,\zeta_2.
\end{aligned}$$

Ces dernières égalités rappellent les relations canoniques du tore non commutatif : c'est ce point de vue qui va être dorénavant exploité.
En posant finalement,

$$\zeta_1 = u\,\cos\phi,\ \zeta_2 = v\,\sin\phi, \tag{1.1.14}$$

où u et v sont des unitaires et ϕ un élément central, on obtient exactement les relations du tore non commutatif pour u et v, c'est-à-dire :

$$u\,v = e^{-i\theta} v\,u. \tag{1.1.15}$$

Cette construction donne en réalité le premier exemple de déformation isospectrale périodique, déformations que nous définirons dans le paragraphe suivant. En effet, et au vu de cette dernière paramétrisation, on peut déformer la structure commutative de l'algèbre des fonctions sur la trois-sphère ordinaire, en utilisant l'action isométrique de $\mathbb{T}^2$ sur $\mathbb{S}^3$, donnée dans le système de coordonnées sous-jacent à la paramétrisation (1.1.14) par

$$\mathbb{T}^2 \ni z : (u, v, \phi) \mapsto (z_1.u, z_2.v, \phi).$$

Il suffit ensuite d'introduire le 2-cocycle du groupe additif $\mathbb{Z}^2$

$$\sigma(r,s) := \exp\{-\tfrac{i}{2}\theta(r_1 s_2 - r_2 s_1)\},$$

pour obtenir une algèbre non commutative, en spécifiant le nouveau produit sur les 'modes de Fourier' $U_r := u^{r_1} v^{r_2}$, par

$$U_r\, U_s = \sigma(r,s)\, U_s\, U_r.$$

Autrement dit, l'algèbre du tore non commutatif a été plongée dans l'algèbre commutative des fonctions lisses sur la trois-sphère, de manière compatible avec sa structure Riemannienne standard (héritée de celle de $\mathbb{R}^4$) : La compatibilité s'exprime par le fait que cette action de groupe est isométrique pour la métrique ronde. Nous verrons dès le paragraphe suivant que cette construction se généralise facilement pour une grande classe de variété Riemannienne.

1.1.2 La construction de Connes–Landi

Nous revoyons dans ce paragraphe la construction des déformations isospectrales périodiques introduite dans [24].

Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte, sans bord, géodésiquement complète, connexe, orientée, de dimension n et munie d'une structure spin. Soit ensuite, $\tilde{\alpha}$ une action lisse et effective du groupe compact et Abélien $\mathbb{T}^l$, $2 \leq l \leq n$, par isométrie

$$\tilde{\alpha} : \mathbb{T}^l \longrightarrow \mathrm{Isom}(M,g) \subset \mathrm{Diff}(M),$$

où l est inférieur ou égal au rang du groupe d'isométrie de (M,g).
Il est à noter que la classe des variétés dont le rang du groupe d'isométrie est supérieur ou égal à deux est loin d'être vide, puisque les isométries préservant l'orientation (ce que nous supposeront toujours) forment un sous-groupe de $SO(n)$, d'après le théorème de Myers–Steenrod. En anticipant sur le chapitre 3, notons aussi $\mathcal{A} := C^\infty(M)$, l'algèbre commutative des fonctions indéfiniment différentiables sur M, $\mathcal{H} := L^2(M,S)$ l'espace de Hilbert des sections de carré sommable du fibré spinoriel et $\not{D}$ l'opérateur de Dirac associé à la métrique g.

Pour fixer les notations, notons que l'opérateur de Dirac s'écrit localement $\not{D} = -i(\partial_\mu + \omega_\mu) \otimes \gamma^\mu$, où ω_μ désigne la connection de spin, i.e. la connection de Levi–Civita relevée au fibré des spineurs. Lorsque l'espace sera plat, c'est-à-dire lorsque $M = \mathbb{R}^n$ ou $M = \mathbb{T}^l$, on notera $\not{\partial}$ l'opérateur de Dirac plat, i.e. $\not{\partial} = -i\partial_\mu \otimes \gamma^\mu$.

L'action $\tilde{\alpha}$ de $\mathbb{T}^l$ sur M induit sur $\mathcal{A}$ une action de $\mathbb{T}^l$ par automorphisme, que nous continuerons à désigner par $\tilde{\alpha}$:

$$(\tilde{\alpha}_z f)(p) := f(\tilde{\alpha}_{-z}(p)),\ z \in \mathbb{T}^l,\ f \in \mathcal{A},\ p \in M.$$

Sur le fibré des spineurs, l'action $\tilde{\alpha}$ se relève mais seulement modulo ± 1. On peut construire (voir [50] pour une construction particulière) un recouvrement double $p : \widetilde{\mathbb{T}}^l \to \mathbb{T}^l$, où $\widetilde{\mathbb{T}}^l$ est isomorphe à $\mathbb{T}^l$, de telle sorte que l'on puisse trouver un groupe d'opérateurs unitaires $\{V_{\tilde{z}} :\ \tilde{z} \in \widetilde{\mathbb{T}}^l\} \subset \mathcal{U}(\mathcal{H})$ couvrant le groupe d'isométries $\{\tilde{\alpha}_z :\ z \in \mathbb{T}^l\}$. En terme de sections lisses, ce recouvrement satisfait à

$$V_{\tilde{z}}(f \cdot \psi) = \tilde{\alpha}_z(f) \cdot V_{\tilde{z}}(\psi),$$

quel que soit $\psi \in \mathcal{H}$, $f \in C^\infty(M)$ et avec $p(\tilde{z}) = z$. En général ce relèvement au fibré des spineurs n'est pas trivial, i.e. si $p(\tilde{z}) = p(\tilde{z}')$ alors $V_{\tilde{z}} = \pm V_{\tilde{z}'}$, mais le signe ne peut être choisi globalement. De plus, en notant $(\cdot,\cdot)$ la structure Hermitienne du fibré des spineurs, on a

$$(V_{\tilde{z}}\psi, V_{\tilde{z}}\psi') = \tilde{\alpha}_z(\psi, \psi'),$$

pour $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$. L'action de $\mathbb{T}^l$ étant supposée isométrique, le pull-back de l'action laisse invariante la métrique :

$$\tilde{\alpha}_z^* g = g.$$

De même, il est facile de montrer que l'opérateur de Dirac, le Laplacien (scalaire et son relèvement au fibré des spineurs) ainsi que les champs de vecteurs X_j, $j = 1, \cdots, l$, associés à l'action infinitésimale de $\mathbb{T}^l$, commutent avec les unitaires $V_{\tilde{z}}$. Pour les mêmes raisons, la forme volume Riemannienne μ_g est aussi laissée invariante par (le pull-back de) l'action.

Remarque 1.1.1. *Dans le cas des déformations périodiques, il n'est en fait pas nécessaire de supposer l'action isométrique. En effet, à partir d'une action lisse de $\mathbb{T}^l$ et d'une structure Riemannienne quelconque g, on peut fabriquer une métrique g_{inv} invariante sous l'action de $\mathbb{T}^l$ en moyennant cette dernière par l'action du tore*

$$g_{inv} := \int_{\mathbb{T}^l} d^l z\, \tilde{\alpha}_z^*(g),$$

avec $d^l z$ la mesure de Haar normalisée du l-tore. Cependant, pour les déformations isospectrales non périodiques (pour lesquelles l'action de $\mathbb{T}^l$ est remplacée par une action de $\mathbb{R}^l$, voir section 1.2) ce processus de moyenne n'est pas forcément bien défini, et il est commode, dans notre contexte, de conserver l'hypothèse d'isométrie pour l'action.

La construction de Connes–Landi [24] des déformations isospectrales périodiques est tout à fait analogue à celle des sphères de Connes–Landi utilisant le point de vue 'système de coordonnées versus série de Fourier'.
Nous allons exploiter ici le fait que tout $f \in \mathcal{A} = C^\infty(M)$ possède une décomposition en sous-espaces spectraux (ou décomposition de Peter–Weyl) $f = \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} f_r$, indicée par les éléments de $\mathbb{Z}^l$ le groupe dual de $\mathbb{T}^l$, et pour laquelle chaque f_r satisfait à la relation

$$\tilde{\alpha}_z(f_r) = e^{-i(r_1 z_1 + \cdots + r_l z_l)} f_r.$$

Pour éviter les problèmes liés au relèvement de l'action sur le fibré spinoriel, dans ce qui suit, nous allons pour simplifier travailler uniquement au niveau scalaire, c'est-à-dire au niveau de l'espace de Hilbert réduit $\mathcal{H}_r := L^2(M, \mu_g)$ des fonctions de carré sommable par rapport à l'espace mesuré (M, μ_g) où μ_g est la forme volume Riemannienne. Notons encore V_z la représentation de $\mathbb{T}^l$ induite sur $\mathcal{H}_r$ par des opérateurs unitaires, définie par $V_z(\psi)(p) := \psi(\tilde{\alpha}_{-z}(p))$, pour tout $\psi \in \mathcal{H}_r$.
Chaque opérateur A borné sur $\mathcal{H}_r$ et lisse en norme relativement à l'action du tore, i.e. qui soit tel que l'application $\mathbb{T}^l \ni z \mapsto V_z A V_{-z}$ soit lisse pour la topologie normique de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, possède une unique décomposition en éléments homogènes

$$A = \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} A_r,$$

convergente en norme. Cette décomposition définit ainsi une l-graduation ; chaque A_r est de l-degré $r = (r_1, \cdots, r_l)$. Explicitement, chaque composante A_r satisfait à la relation

$$V_z\, A_r\, V_{-z} = e^{-ir.z}\, A_r.$$

Pour tout $f \in C^\infty(M)$, on obtient alors une décomposition en 'série de Fourier'

$$f = \sum_{r \in \mathbb{Z}^l} f_r, \tag{1.1.16}$$

avec $\tilde{\alpha}_z(f_r) = e^{-ir.z} f_r$. Cette assertion provient du fait que M_f, l'opérateur de multiplication point à point par f, est lisse relativement à l'action car il appartient à l'intersection des domaines des puissances des dérivations $\delta_j(.) := [X_j, .]$, où les X_j, $j = 1, \cdots, l$, sont les générateurs infinitésimaux de l'action $\tilde{\alpha}$. On obtient alors le résultat en itérant la relation

$$\|[X_j, M_f]\| = \|M_{X_j(f)}\| = \|X_j f\|_\infty,$$

qui est finie car $f \in C^\infty(M)$ et donc $X_j(f) \in C^\infty(M)$ aussi.

On définit alors M_Θ, la déformation isospectrale de M de paramètre Θ, par dualité comme étant l'algèbre $C^\infty(M_\Theta)$ des fonctions lisses sur M munie du produit $\star_\Theta$, que l'on définit sur les éléments homogènes par

$$f_r \star_\Theta g_s := e^{-\frac{i}{2}\Theta(r,s)}\, f_r\, g_s =: \sigma_\Theta(r,s)\, f_r\, g_s,$$

avec $\Theta(r,s) := \sum_{i,j=1}^{l} r^i \Theta^{ij} s^j$. Ici, $\Theta^t = -\Theta$ est la matrice ($l \times l$ à entrées réelles) de déformation. Utilisant la décomposition en sous-espaces spectraux, ce produit s'étend par linéarité à tous les éléments de $C^\infty(M)$. L'associativité du produit ainsi défini, est alors garantie par le fait que σ_Θ est un 2-cocycle sur le groupe additif $\mathbb{Z}^l$:

$$\sigma_\Theta(r,s)\sigma_\Theta(r+s,t) = \sigma_\Theta(s,t)\sigma_\Theta(r,s+t).$$

Il est alors justifié de considérer les déformations isospectrales périodiques comme généralisations en espace courbe des paradigmes que sont les l-tores non commutatifs. Notons au passage que ces derniers peuvent être alternativement construits en utilisant cette procédure. Notons aussi que les plans de Moyal jouiront du même statut vis-à-vis des déformations isospectrales non périodiques.

Concernant la topologie, avec la présente définition, il est seulement possible de compléter, par rapport à la norme opératorielle, $C^\infty(M_\Theta)$ en une C^*-algèbre. C'est-à-dire, avec un abus évident de notation

$$C^*(M_\Theta) := \overline{L^\Theta(C^\infty(M))}^{\|.\|}, \tag{1.1.17}$$

où $L^\Theta(f) \equiv L^\Theta_f$ est l'opérateur de multiplication twistée à gauche par f sur $\mathcal{H}_r$, i.e. $L_f\psi := f \star_\Theta \psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}_r$. Il est ensuite immédiat de réaliser que l'opérateur L^Θ_f ainsi défini, est borné sur $\mathcal{H}_r$ pour tout $f \in C^\infty(M)$. En effet,

$$L^\Theta_f \psi = \sum_{r \in \mathbb{Z}^l} f_r \star_\Theta \psi = \sum_{r \in \mathbb{Z}^l} f_r . V_{-\frac{1}{2}\Theta r}(\psi),$$

ainsi

$$\|L_f^\Theta\| \leq \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} \|M_{f_r} V_{-\frac{1}{2}\Theta r}\| \leq \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} \|M_{f_r}\| \leq \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} \|f_r\|_\infty < \infty,$$

car $f \in C^\infty(M)$ et car sa décomposition de Peter–Weyl est convergente en norme $\|.\|_\infty$.

En revanche, nous allons voir que la construction de Connes–Dubois-Violette des déformations isospectrales périodiques, permet de munir canoniquement $C^\infty(M_\Theta)$ d'une topologie plus fine, rendant $C^\infty(M_\Theta)$ localement convexe.

Nous aurions aussi bien pu utiliser les opérateurs de multiplication twistée à droite, définis par $R_f^\Theta \psi := \psi \star_\theta f$ et satisfaisant aux mêmes propriétés que ceux de multiplication à gauche, pour définir la C^*-complétion (1.1.17), étant donné que $L^\Theta(C^\infty(M))$ et $R^\Theta(C^\infty(M))$ sont isomorphes. De plus, par associativité du produit déformé, on obtient directement que les représentations régulières droite et gauche commutent :

$$[L_f^\Theta, R_g^\Theta] = 0, \forall\, f, g \in C^\infty(M).$$

A la différence des cas non dégénérés (plans de Moyal et tores non commutatifs irrationnels, avec matrice de déformation symplectique), les algèbres de von Neumann associées ne sont pas à priori des facteurs. En effet, même pour des valeurs irrationnelles des paramètres de déformation, leurs centres contient l'algèbre des fonctions invariantes sous l'action du tore, c'est-à-dire les fonctions constantes sur les orbites de l'action. Cette algèbre se réduit au corps des scalaires seulement lorsque $M = \mathbb{T}^l$ muni d'une action libre.

Cette construction permet aussi de définir, pour n'importe quel opérateur A lisse en norme relativement à l'action du tore, ses twists gauche L_A^Θ et droit R_A^Θ par

$$L_A^\Theta := \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} A_r\, V_{-\frac{1}{2}\Theta r},$$
$$R_A^\Theta := \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} A_r\, V_{\frac{1}{2}\Theta r}.$$

Ici, A_r réfère à la décomposition de A en éléments homogènes. Cette décomposition étant convergente en norme et V_z étant un unitaire, il est clair que les opérateurs ainsi définis sont bornés. De plus on a

$$\begin{aligned}
[L_A^\Theta, R_B^\Theta] &= \sum_{r,s} [A_r\, V_{-\frac{1}{2}\Theta r}, B_s\, V_{\frac{1}{2}\Theta s}] \\
&= \sum_{r,s} [A_r, B_s] V_{\frac{1}{2}\Theta(s-r)} + B_s[A_r, V_{\frac{1}{2}\Theta s}] V_{-\frac{1}{2}\Theta r} + A_r[V_{-\frac{1}{2}\Theta r}, B_s] V_{\frac{1}{2}\Theta s} \\
&= \sum_{r,s} [A_r, B_s]\, e^{-i\frac{1}{2}\Theta(r,s)}\, V_{\frac{1}{2}\Theta(s-r)},
\end{aligned}$$

où la commutation des $\{V_z\}$ et les relations $[A_r, V_z] = (1 - e^{-irz}) A_r V_z$ ont été utilisées. Ainsi, si les composantes homogènes de A et de B commutent entre elles, le twist gauche de A commutera avec le twist droit de B.

Pour terminer, notons dès à présent qu'il n'y a pas d'obstruction à étendre cette construction au cas où M ne serait que localement compacte. Cependant, les difficultés techniques étant plus importantes, nous ne traiterons ce cas de figure que lors du paragraphe 1.2.

1.1.3 La construction de Connes–Dubois-Violette

Nous revoyons maintenant la construction de Connes–Dubois-Violette des déformations isospectrales périodiques [25]. A la différence de celle de Connes–Landi, qui comme nous le verrons au paragraphe 1.2 s'inscrit dans une théorie des déformations plus générale due à Rieffel [92], l'approche de Connes–Dubois-Violette adopte un point de vue totalement différent. Cette approche a non seulement la vertu de permettre de munir canoniquement les algèbres d'une topologie plus fine que celle donnée par la norme opératorielle (nécessaire pour la construction de triplets spectraux), mais aussi d'être entièrement compatible avec les techniques standards de calcul cohomologique. Elle donne un accès quasi direct à la cohomologie de Hochschild de ces déformations, qui se trouve être identique à celle des algèbres non déformées [25]. Finalement, cette nouvelle caractérisation va donner une image heuristique (mais correcte) de la situation, à savoir que l'on transfère la structure du tore non commutatif dans $C^\infty(M)$ d'une manière compatible avec la structure Riemannienne de la variété.

Soit $(M, g, \tilde{\alpha})$, satisfaisant aux mêmes hypothèses que celles du paragraphe précédent. On construit la variété non commutative M_Θ par dualité, en définissant $C^\infty(M_\Theta)$ en terme d'algèbre de points fixes sous l'action d'un groupe.
Pour fixer les notations, désignons par $C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta)$, l'algèbre du l-tore non commutatif de matrice de déformation $\Theta \in M_l(\mathbb{R})$, $\Theta^t = -\Theta$,

$$C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta) := \Big\{ c_r\, U^r : \{c_r\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^l) \Big\},$$

avec $U^r := u_1^{r_1} \cdots u_l^{r_l}$, où les unitaires $\{u_i\}_{i=1,\cdots,l}$ satisfont aux relations

$$u_i\, u_j = e^{-i\Theta_{ij}} u_j\, u_i,$$

qui équivaut à

$$U^r\, U^s = e^{-ir.\Theta s} U^s\, U^r.$$

Rappelons que muni de la famille de semi-normes canoniques

$$p_k(a) := \sup_{r\in\mathbb{Z}^l} \Big| (1+|r|^2)^k a_r \Big|, \quad \text{avec} \quad C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta) \ni a = \sum_r a_r\, U^r,$$

$C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta)$ devient un espace de Fréchet. Enfin, notons τ l'action usuelle du l-tore ordinaire sur le l-tore non commutatif, donnée sur les générateurs par

$$\tau : \mathbb{T}^l \ni z \mapsto \tau_z(U^r) = z^r U^r = z_1^{r_1} \cdots z_l^{r_l} U^r.$$

On définit alors

$$C^\infty(M_\Theta) := \Big(C^\infty(M) \widehat{\otimes} C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta) \Big)^{\tilde{\alpha}\widehat{\otimes}\tau^{-1}}, \tag{1.1.18}$$

où $\widehat{\otimes}$ est la complétion du produit tensoriel algébrique par rapport à la topologie inductive ou projective, qui coïncident ici puisque $C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta)$ est un espace de Fréchet nucléaire et $C^\infty(M)$ munie de sa topologie ordinaire est localement convexe.

Il n'est pas non plus nécessaire ici de se restreindre au cas où M est compacte. Ainsi, il suffit de remplacer $C^\infty(M)$ par $C^\infty_c(M)$ dans le cas où M ne serait que localement compacte. Une fois encore, les détails du cas non compact ne seront donnés que lors de la description du cas non périodique.

1.2 Déformations isospectrales non périodiques

Nous allons voir une troisième construction, permettant de généraliser les déformations isospectrales dans le cas d'une action de $\mathbb{R}^l$ par isométrie. Ces espaces courbes non commutatifs auront alors pour paradigme le plan de Moyal. Cette approche type 'star-produit' est basée sur la théorie de Rieffel des déformations [92], faisant appel à une formule intégrale pour le produit déformé. Elle permettra un traitement unifié avec le cas périodique et fournira un cadre adapté à l'analyse Hilbertienne.

1.2.1 Le produit déformé, définition et premières propriétés

Dans la suite, nous allons faire les hypothèses (sensiblement différentes de celles du paragraphe 1.1.2) suivantes :

Soit (M, g) une variété Riemannienne sans bord, géodésiquement complète, connexe, orientée, de dimension n et munie d'une structure spin. Soit ensuite α une action lisse du groupe Abélien $\mathbb{R}^l$, $2 \leq l \leq n$, par isométrie

$$\alpha : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathrm{Isom}(M, g) \subset \mathrm{Diff}(M),$$

où l est inférieur ou égal au rang du groupe d'isométrie de (M, g).

Pour simplifier les notations, nous utiliserons de manière équivalente $\alpha_z(p)$ et $z.p$ pour désigner l'action d'un élément du groupe sur un point de la variété et nous noterons encore α l'action induite par automorphisme sur $C_c^\infty(M)$: $(\alpha_z f)(p) = f(\alpha_{-z}(p))$. Soient aussi $\{X_j\}_{j=1,\cdots,l}$ les champs de vecteurs associés à l'action infinitésimale :

$$X_j(f) := \frac{\partial}{\partial z^j}\alpha_z(f)\bigg|_{z=0}, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Pour des raisons qui deviendront plus claires dans la suite, nous devons supposer dans le cas d'une action effective ($\ker(\alpha) = \{0\}$), qu'en plus d'être isométrique, l'action soit propre. Nous nous restreindrons donc à des actions pour lesquelles l'application

$$\mathbb{R}^l \times M \ni (z, p) \mapsto (p, \alpha_z(p)) \in M \times M,$$

est propre. Rappelons qu'une application entre deux espaces topologiques $f : E \to F$ est propre si et seulement si la pré-image de tout sous-ensemble compact K de F est un compact de E. Il convient cependant de noter que cette hypothèse est tout-à-fait naturelle car étant automatiquement satisfaite lorsque $\{\alpha_z : z \in \mathbb{R}^l\}$ est fermé dans $\mathrm{Isom}(M, g)$ pour la topologie des ouverts compacts [78, lemme 5.5].

Définition 1.2.1. *Soit $\Theta \in M_l(\mathbb{R})$ une matrice réelle et antisymétrique. Pour $f, h \in C_c^\infty(M)$, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact, le produit ordinaire de f avec g peut être déformé par l'action de groupe α, de la manière suivante [92] :*

$$f \star_\Theta h := (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^l}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, \alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f)\, \alpha_{-z}(h). \tag{1.2.1}$$

Ici, $< y, z >= \sum_{j=1}^l y^i z^i$ est vu comme le couplage entre $\mathbb{R}^l$ et son groupe dual. Nous utiliserons sans distinction $< y, z >$ et $y.z$ pour désigner ce couplage.

Définition 1.2.2. *Lorsque $M = \mathbb{R}^l$ et lorsque l'espace Euclidien agit sur lui-même par translation, pour une matrice de déformation non dégénérée (ce qui implique que la dimension soit paire $l = 2N$), le produit twisté* (1.2.1) *coïncide avec le produit de Moyal [80] :*

$$f\star_\theta h(x) := (2\pi)^{-2N} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} d^{2N}y\, d^{2N}z\, e^{-i<y,z>}\, f(x - \tfrac{1}{2}\Theta y)\, h(x+z).$$

Ce produit a été introduit dans la première moitié du siècle précédent pour formuler la mécanique quantique sur l'espace de phase : munie d'un tel produit, l'algèbre des fonctions sur l'espace de phase $\mathbb{R}^{2N}$ (l'espace cotangent de $\mathbb{R}^N$ avec sa structure symplectique canonique) est isomorphe à l'algèbre des opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^N)$. La forme asymptotique de ce produit (cf. paragraphe 2.2) a donné naissance à une théorie géométrique de quantification, pour les variétés de Poisson, appelée quantification par déformation [1].

Remarque 1.2.3. *Notons dès à présent que l'on peut toujours supposer Θ inversible. En effet, lorsque Θ ne l'est pas, le produit $\star_\Theta$ se réduit au produit déformé associé à l'action restreinte $\sigma := \alpha|_{V^\perp}$, où V est le noyau de Θ vu comme endomorphisme sur $\mathbb{R}^l$ [92, proposition 2.7].*

En dépit des apparences, cette formule est 'symétrique' ; même avec une matrice de déformation dégénérée, le produit twisté peut se réécrire comme

$$f\star_\Theta h := (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{i<y,z>}\, \alpha_{-z}(f)\, \alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(h).$$

Cette 'symétrie' montre en particulier que la conjugaison complexe est une involution (cf. équation (1.2.2)).

Il y a fondamentalement deux situations distinctes à considérer. Lorsque l'action α est effective, nous parlerons de déformations non périodiques. Les déformations périodiques seront quant à elles, caractérisées par $\ker(\alpha) \simeq \mathbb{Z}^l$. Dans ce dernier cas, l'action α se factorise au travers de l'action d'un tore $\tilde{\alpha} : \mathbb{R}^l/\mathbb{Z}^l \to \mathrm{Isom}(M, g)$, qui est automatiquement propre. Bien que pouvant être traité dans ce cadre, nous ne ferons pas mention explicite du cas mixte $\alpha : \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^{l-d} \to \mathrm{Isom}(M, g)$. D'évidentes modifications de nos arguments permettent de généraliser nos résultats dans cette situation.

Alors que dans le cas d'une variété non compacte les deux situations (périodique ou non) existent, lorsque la variété M est compacte, l'action α doit être périodique pour donner lieu à une action propre.

Finalement, dans le cas non périodique uniquement, que l'action soit propre implique qu'elle est aussi libre. Rappelons d'abord que l'action d'un groupe G sur un espace X est dite libre si tous les groupes d'isotropie ou stabilisateurs, $H_x := \{g \in G : g.x = x,\, x \in X\}$, sont réduits à l'identité du groupe. Aussi, une action est propre si et seulement si (voir [78] par exemple) $\{g \in G :\, g.U \cap V \neq \emptyset\}$ est compact pour tout compact $U, V \subset X$.
En prenant alors $U = V = \{p_0\}$ pour n'importe quel point $p_0 \in M$, son groupe d'isotropie $H_{p_0} = \{z \in \mathbb{R}^l : z.p_0 = p_0\} = \{z \in \mathbb{R}^l : z.\{p_0\} \cap \{p_0\} \neq \emptyset\}$ doit être compact. Le seul sous-groupe compact de $\mathbb{R}^l$ étant $\{0\}$, l'action est alors automatiquement libre. Cela implique en particulier que l'application quotient

$$\pi : M \longrightarrow M/\mathbb{R}^l,$$

définit une projection de $\mathbb{R}^l$-fibré principal, qui sont en définitive les variétés que nous considérons dans le cas non périodique.

Dans le cas périodique, l'action n'est évidemment pas automatiquement libre. L'ensemble M_{sing} des points de M ayant un stabilisateur non trivial donne lieu à des difficultés. Nous verrons dans le chapitre 4 que cet ensemble est en particulier responsable d'un nouveau type de mélange des divergences ultraviolettes et infrarouges, pour les théories quantiques des champs sur déformations isospectrales.

Pour étudier les propriétés générales du produit déformé dans le cas non périodique, il est suffisant d'établir le résultat suivant.

Lemme 1.2.4. *Soient α une action propre de $\mathbb{R}^l$ par isométrie et $\Delta_\alpha := -\sum_{j=1}^l {X_j}^2$, où les X_j sont les champs de vecteurs associés à l'action infinitésimale. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $f \in C_c^\infty(M)$, on a*

$$\sup_{p\in M} \int_{\mathbb{R}^l} d^l y \, |\alpha_y(\Delta_\alpha^k f)(p)| < \infty.$$

Preuve. Puisque $f \in C_c^\infty(M)$, $\Delta_\alpha^k f$ est aussi lisse et à support compact. Il est donc suffisant de traiter le cas $k = 0$. L'action étant propre, l'application $p \mapsto \tilde{f}(p) := \int_{\mathbb{R}^l} d^l y \, |\alpha_y(f)(p)|$ est bien définie puisque $\{\, y \in \mathbb{R}^l : \alpha_y(p) \in \operatorname{supp} f \,\}$ est compact pour chaque $p \in M$ [78, p. 41] car f est à support compact. Ainsi, la fonction $\tilde{f}(p)$ est finie et est constante sur chaque orbite de l'action. Soit $\pi\colon M \to M/\mathbb{R}^l$ la projection sur l'espace des orbites. Alors $\tilde{f}$ se factorise à travers π pour donner une application $\bar{f}$ définie par $\bar{f}(\pi(p)) := \tilde{f}(p)$. On obtient alors le résultat car $\bar{f} \in C_c^\infty(M/\mathbb{R}^l, \mathbb{C})$. En effet, si $p \notin \alpha_{\mathbb{R}^l}(\operatorname{supp} f)$, de telle manière que $\pi(p)$ n'appartienne pas à l'ensemble compact $\pi(\operatorname{supp} f)$, alors $\bar{f}(\pi(p)) = 0$. □

La non-localité de ce produit, ayant pour conséquence première la non-préservation des supports (le produit de deux fonctions à supports disjoints n'est pas nul a priori), implique que $\big(C_c^\infty(M), \star_\Theta\big)$ ne possède pas une structure d'algèbre. En revanche, il est aisé de montrer dans le cas non périodique, que $\star_\Theta$ est un produit bilinéaire sur $C_c^\infty(M)$ à valeur dans $L^\infty(M, \mu_g)$.

Lemme 1.2.5. *Dans le cas d'une action lisse, propre et isométrique de $\mathbb{R}^l$, $\star_\Theta$ est un produit bilinéaire sur $C_c^\infty(M)$ à valeur dans $L^\infty(M, \mu_g)$.*

Preuve. En effet, avec $\theta := \det(\Theta)^{1/l}$ (rappelons que l'on peut toujours supposer Θ inversible) on a

$$\sup_{p\in M} |f \star_\theta h(p)| \leq (\pi\theta)^{-l} \sup_{p\in M} \int d^l y |\alpha_y(f)(p)| \sup_{p\in M} \int d^l z |\alpha_z(h)(p)|,$$

qui est fini d'après le lemme 1.2.4. □

Simplement à partir de sa définition, on peut montrer que $\star_\Theta$ est associatif dans tous les cas de figures (action périodique ou action effective) et qu'il satisfait à toutes les propriétés du produit de Moyal ordinaire.

Lemme 1.2.6. *Le produit $\star_\Theta$ est formellement associatif. De plus, la conjugaison complexe est une involution :*

$$(f \star_\Theta h)^* = h^* \star_\Theta f^*. \tag{1.2.2}$$

L'action α est toujours un automorphisme pour le produit déformé :

$$\alpha_z(f \star_\Theta h) = \alpha_z(f) \star_\Theta \alpha_z(h). \tag{1.2.3}$$

La règle de Leibniz est satisfaite pour les générateurs infinitésimaux de l'action :

$$X_j(f \star_\Theta h) = X_j(f) \star_\Theta h + f \star_\Theta X_j(h), \ j = 1, \cdots, l. \tag{1.2.4}$$

Preuve. Pour l'associativité du produit twisté, nous avons d'une part :

$$((f\star_\Theta g)\star_\Theta h) = (2\pi)^{-2l}\int d^l y\, d^l z\, d^l y'\, d^l z'\, e^{-i(<y,z>+<y',z'>)}\alpha_{\frac{1}{2}\Theta(y+y')}(f)\,\alpha_{\frac{1}{2}\Theta y-z'}(g)\,\alpha_{-z}(h).$$

En effectuant les changements de variables $y' \to y' - y$, $z' \to z' + \frac{1}{2}\Theta y$ on obtient après une intégration d'ondes planes :

$$(2\pi)^{-l}\int d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\,\alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f)\,\alpha_{-z}(g)\,\alpha_{-z-\frac{1}{2}\Theta y}(h).$$

D'autre part nous avons :

$$(f\star_\Theta(g\star_\Theta h)) = (2\pi)^{-2l}\int d^l y\, d^l z\, d^l y'\, d^l z'\, e^{-i(<y,z>+<y',z'>)}\alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f)\,\alpha_{-z+\frac{1}{2}\Theta y'}(g)\,\alpha_{-z-z'}(h),$$

qui, après avoir effectué les translations $z' \to z' - z$, $y' \to y' + 2\Theta^{-1}z$, devient

$$(2\pi)^{-l}\int d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\alpha_{\frac{1}{2}\Theta y+z}(f)\,\alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(g)\,\alpha_{-z}(h).$$

En effectuant finalement $y \to y - 2\Theta^{-1}z$, $z \to z + \frac{1}{2}\Theta y$, on obtient le résultat.

Que la conjugaison complexe soit une involution, est une conséquence directe du fait qu'elle commute avec l'action α et de la définition produit déformé. Pour obtenir la troisième assertion, il suffit d'utiliser le fait que $\{\alpha_z\}$ forme un groupe Abélien. Etant la version infinitésimale de la précèdente, la dernière affirmation en est une conséquence. □

Plus généralement, un opérateur différentiel d'ordre un satisfait à la règle de Leibniz pour le produit déformé si et seulement si il commute avec l'action α. Ce sera en particulier le cas pour l'opérateur de Dirac.

Comme dans le cas plat, l'intégrale avec la forme volume Riemannienne μ_g est une trace pour le produit twisté :

Lemme 1.2.7. *Pour $f, h \in C_c^\infty(M)$, on a*

$$\int_M \mu_g\, f\star_\Theta h = \int_M \mu_g\, h\star_\Theta f = \int_M \mu_g\, fh.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
\int_M f\star_\Theta h(p)\,\mu_g(p) &= (2\pi)^{-l}\int_M \mu_g(p)\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} f((-\tfrac{1}{2}\Theta y)\cdot p)\, h(z\cdot p)\\
&= (2\pi)^{-l}\int_M \mu_g(p)\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} f((-\tfrac{1}{2}\Theta y - z)\cdot p)\, h(p)\\
&= (2\pi)^{-l}\int_M \mu_g(p)\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} f((-z)\cdot p)\, h(p)\\
&= \int_M \mu_g(p)\, f(p)\, h(p),
\end{aligned}$$

en utilisant l'isométrie $p \mapsto (-z)\cdot p$ et la translation $z \mapsto z - \frac{1}{2}\Theta y$. □

Nous reviendrons au cours de ce manuscrit sur les différentes algèbres que l'on peut construire avec le produit déformé dans sa forme générique, mais surtout avec le produit de Moyal sur l'espace Euclidien $\mathbb{R}^l$. Cependant, nous allons d'ores et déjà mentionner l'existence de l'algèbre $\big(\mathcal{B}(M,\alpha),\star_\Theta\big)$, car la preuve de la stabilité des éléments de $\mathcal{B}(M,\alpha)$ sous $\star_\Theta$, utilise de manière fondamentale ce qui doit être considéré comme la définition correcte des intégrales intervenant dans la définition du produit déformé, à savoir des intégrales oscillantes.

Définition 1.2.8. *Soit $\mathcal{B}(M,\alpha)$ l'espace de Fréchet des fonctions essentiellement bornées sur M et ayant toutes leurs dérivées, par rapport aux générateurs $\{X_j\}_{j=1,\cdots,l}$ de l'action, bornées*

$$\mathcal{B}(M,\alpha) := \Big\{ f \in C^\infty(M) \cap L^\infty(M,\mu_g) : X^\beta f \in L^\infty(M,\mu_g),\, \forall \beta \in \mathbb{N}^l \Big\},$$

où $X^\beta := X_1^{\beta_1}\cdots X_l^{\beta_l}$. L'espace $\mathcal{B}(M,\alpha)$ est muni de la topologie donnée par la famille de semi-normes

$$q_k(f) := \sup_{|\beta|\leq k}\sup_{p\in M} \big|(X^\beta f)(p)\big|.$$

Lemme 1.2.9. *$\Big(\mathcal{B}(M,\alpha),\star_\Theta\Big)$ est une algèbre de Fréchet associative et involutive avec un produit jointement continu.*

Preuve. En définissant le produit déformé en terme d'intégrales oscillantes [64, 92] on a avec $k \in \mathbb{N}$ arbitraire

$$\begin{aligned}\big(X^\beta f\big)\star_\Theta\big(X^\gamma h\big) &= (2\pi)^{-l}\int d^l y\, d^l z\, \frac{\alpha_{\frac{1}{2}\Theta_y}\big(X^\beta f\big)}{(1+|y|^2)^k}\,\frac{\alpha_{-z}\big(X^\gamma h\big)}{(1+|z|^2)^k}\,(1+|y|^2)^k\,(1+|z|^2)^k\, e^{-i<y,z>}\\ &= (2\pi)^{-l}\int d^l y\, d^l z\, \frac{\alpha_{\frac{1}{2}\Theta_y}\big(X^\beta f\big)}{(1+|y|^2)^k}\,\frac{\alpha_{-z}\big(X^\gamma h\big)}{(1+|z|^2)^k}\,[P_k(\partial_y,\partial_z)e^{-i<y,z>}],\end{aligned}$$

où P_k est un polynôme de degré $2k$ dans ses deux variables. En utilisant ensuite

$$|\partial_y^\beta(1+|y|^2)^{-k}| \leq C_{\beta,k}(1+|y|^2)^{-k},$$

on obtient d'après la règle de Leibniz

$$\begin{aligned}\Big|\big(X^\beta f\big)\star_\Theta\big(X^\gamma h\big)\Big| &\leq \sum_{|\delta|,|\delta'|\leq 2k} C'_{\delta,\delta'}\int d^l y\, d^l z\, \Big|\alpha_{\frac{1}{2}\Theta_y}\big(X^{\beta+\delta} f\big)\Big|\,\Big|\alpha_{-z}\big(X^{\gamma+\delta'} h\big)\Big|\\ &\qquad\qquad \times (1+|y|^2)^{-k}\,(1+|z|^2)^{-k}\\ &\leq \sum_{|\delta|,|\delta'|\leq 2k} C'_{\delta,\delta'}\, q_{|\beta+\delta|}(f)\, q_{|\gamma+\delta'|}(h)\,\Big(\int d^l y\,(1+|y|^2)^{-k}\Big)^2,\end{aligned}$$

qui est finie pour $k > l/2$. Ces estimations montrent que le produit est séparément continu, donc jointement continu car $\mathcal{B}(M,\alpha)$ est un espace de Fréchet. □

Remarque 1.2.10. *Dans le cas périodique ($\ker(\alpha) = \mathbb{Z}^l$), compact ou non, nous avons vu au paragraphe 1.1.2 que chaque fonction bornée et indéfiniment différentiable possède une décompo-*

sition en éléments homogènes (1.1.16). On obtient alors pour $f, h \in C^\infty(M) \cap L^\infty(M, \mu_g)$

$$\begin{aligned} f \star_\Theta h &= \sum_{r,s\in\mathbb{Z}^l} (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^l}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, \alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f_r)\, \alpha_{-z}(h_s) \\ &= \sum_{r,s\in\mathbb{Z}^l} (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^l}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, e^{-\frac{i}{2}r\Theta y}\, e^{isz}\, f_r\, h_s \\ &= \sum_{r,s\in\mathbb{Z}^l} e^{-\frac{i}{2}\Theta(r,s)}\, f_r\, h_s. \end{aligned}$$

La construction par produit twisté des déformations isospectrales périodiques, coïncide donc avec celle de Connes–Landi. Ce petit calcul montre aussi que dans le cas périodique non compact, $C_c^\infty(M)$ *est stable par multiplication twistée. En effet, bien que non local sur les orbites de l'action, le produit twisté périodique de deux fonctions à support compact est encore une fonction à support compact, puisque les orbites sont compactes (elles sont isomorphes à* $\mathbb{T}^l$*) et les directions transverses n'interviennent pas dans la procédure de déformation. En d'autres termes, puisque* $\mathrm{supp}(f_r) \subset \mathbb{T}^l.\mathrm{supp}(f)$*, on a*

$$\mathrm{supp}(f \star_\theta h) \subset \bigcup_{r,s\in\mathbb{Z}^l} \mathrm{supp}(f_r) \cap \mathrm{supp}(h_s) \subset \mathbb{T}^l.\mathrm{supp}(f) \cap \mathbb{T}^l.\mathrm{supp}(h).$$

1.2.2 Analyse Hilbertienne du produit déformé

1.2.2.1 Propriétés du noyau du produit twisté

Dans cette partie, nous allons commencer par montrer que l'opérateur L_f (resp. R_f) de multiplication twistée à gauche (resp. à droite) pour $f \in C_c^\infty(M)$ est un opérateur à noyau par rapport à l'espace mesuré (M, μ_g) et qu'il est borné. Lorsque nous voudrons insister sur sa dépendance en Θ, nous écrirons L_f^Θ (resp. R_f^Θ) à la place de L_f (resp. R_f). Nous adopterons aussi la notation M_f pour désigner l'opérateur de multiplication ordinaire par f, correspondant au cas limite $\Theta = 0$.

Soit, comme au paragraphe 1.1.2, $\mathcal{H} = L^2(M, S)$ l'espace de Hilbert des sections de carré sommable du fibré des spineurs et soit $\mathcal{H}_r = L^2(M, \mu_g)$ l'espace de Hilbert réduit. Sous l'hypothèse de complétude géodésique de la variété, l'opérateur de Dirac $\not{D}$, restreint au domaine dense $\Gamma_c^\infty(M, S)$ des sections lisses et à support compact, est essentiellement auto-adjoint [118]. Nous utiliserons alors la même notation pour désigner l'opérateur densement défini et son unique fermeture. Il en va de même pour le Laplacien scalaire Δ (ainsi que son relèvement au fibré des spineurs) de domaine $C_c^\infty(M) \subset \mathcal{H}_r$. Dans nos conventions, $\Delta = (d + \delta)^2$ est positif et restreint aux 0-formes, $\Delta = \delta d = *_H d *_H d$, où $*_H$ est l'étoile de Hodge.

Le groupe $\mathbb{R}^l$ étant simplement connexe, à la différence de l'action d'un tore, l'action α de $\mathbb{R}^l$ se relève directement au fibré des spineurs. Nous noterons simplement $\{V_z : z \in \mathbb{R}^l\}$ le groupe d'unitaires associé au groupe d'isométries $\{\alpha_z : z \in \mathbb{R}^l\}$. On a encore $V_z(f.\psi) = \alpha_z(f).V_z(\psi)$ et $\big(V_z\psi, V_z\psi'\big) = \alpha_z\big(\psi, \psi'\big)$, pour tout $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$, $f \in C_c^\infty(M)$ et avec $\big(.,.\big)$ la structure Hermitienne du fibré des spineurs. Notons aussi que $\not{D}$, Δ, X_k commutent avec V_z, conséquence de l'isométrie de l'action.

Définition 1.2.11. *Pour tout $p \in M$, soit $\delta_p^g \in C_c^\infty(M)'$ la distribution définie pour tout $\phi \in C_c^\infty(M)$ par*

$$\langle \delta_p^g, \phi \rangle = \int_M \delta_p^g(p')\, \phi(p')\, \mu_g(p') := \phi(p).$$

La distribution δ_p^g, représentée dans un système de coordonnées locales par

$$(\det g(x))^{-1/2}\, \delta(x - x'),$$

peut aussi être pensée comme un n-courant de de Rham [96] en la multipliant par la forme volume Riemannienne ; elle est surtout le noyau, au sens de l'espace mesuré (M, μ_g), de l'identité :

$$\delta_p^g(p') = K_{\mathbf{1}}(p, p').$$

Une conséquence de la propriété d'isométrie de l'action, que nous utiliserons largement, est l'identité

$$\delta_{z\cdot p}^g(p') = \delta_p^g(-z \cdot p').$$

Définition 1.2.12. *Pour $f \in C_c^\infty(M)$, les opérateurs de multiplication twistée à gauche L_f et à droite R_f sur $\mathcal{H}$, sont définis par*

$$L_f\psi(p) := (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{-iyz} \alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f)(p)\, V_{-z}\psi(p), \tag{1.2.5}$$

et

$$R_f\psi(p) := (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{-izy} \alpha_{-z}(f)(p)\, V_{\frac{1}{2}\Theta y}\psi(p). \tag{1.2.6}$$

Nous allons aussi tirer profit du fait que L_f et R_f peuvent être alternativement définis en terme d'intégrales à valeur opérateur :

$$L_f = (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\; e^{-i<y,z>}\, V_{\frac{1}{2}\Theta y}\, M_f\, V_{-z}, \tag{1.2.7}$$

$$R_f = (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\; e^{-i<y,z>}\, V_{-z}\, M_f\, V_{\frac{1}{2}\Theta y}. \tag{1.2.8}$$

Les formules (1.2.7) et (1.2.8) peuvent être facilement obtenues à partir de (1.2.5) et (1.2.6) en utilisant

$$V_z M_f V_{-z} = M_{\alpha_z(f)},$$

ainsi que la translation $z \to z - \frac{1}{2}\Theta y$ qui laisse la phase inchangée car Θ est antisymétrique.

Néanmoins, ces intégrales ne sont pas définies au sens de Bochner, mais sont plutôt des intégrales oscillantes à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. En effet, il est facile de voir que la norme (opératorielle) de l'intégrant n'est pas une fonction sommable sur $\mathbb{R}^{2l}$, car ne dépendant de y, z qu'au travers d'opérateurs unitaires.

Nous allons voir que ces dernières formules permettent de définir les twists gauche et droit pour une classe d'opérateurs bornés beaucoup plus importante.
Avec cette présentation, il est aussi quasiment direct de vérifier que L et R sont deux représentations qui commutent (en fait R est une anti-représentation) :

$$[L_f, R_h] = 0, \;\; \forall f, h \in C_c^\infty(M).$$

Les formules (1.2.7) et (1.2.8) fournissent alors un autre moyen de vérifier l'associativité du produit déformé, l'associativité étant équivalente à la commutation de L avec R.

En utilisant la propriété de trace (lemme 1.2.7), on peut aussi montrer que l'adjoint de L_f (resp. R_f) est égal à L_{f^*} (resp. R_{f^*}). Ce résultat peut être encore plus simplement établi en utilisant les formules (1.2.7) et (1.2.8). Pour L_f on obtient

$$\begin{aligned}(L_f)^* &= (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\; e^{i<y,z>}\, V_z\, M_{f^*}\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y}\\ &= (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\; e^{-i<y,z>}\, V_{\frac{1}{2}\Theta z}\, M_{f^*}\, V_{-y} = L_{f^*},\end{aligned}$$

où les changements de variables $z \to \frac{1}{2}\Theta z$, $y \to 2\Theta^{-1}y$ et la relation $< \Theta^{-1}y, \Theta z >= - < y, z >$ ont été utilisés.

Nous allons établir une estimation pour la norme des opérateurs L_f, R_f dans le cas d'une action propre de $\mathbb{R}^l$. Au chapitre 2, nous verrons que dans le cas non dégénéré (caractérisé par $n = l$, Θ inversible), on peut obtenir de plus fines estimations sur $\|L_f\|$, en utilisant une caractérisation matricielle du produit déformé.

Proposition 1.2.13. *Lorsque $f \in C_c^\infty(M)$, alors L_f et R_f, dans le cas d'une action propre et isométrique de $\mathbb{R}^l$, sont des opérateurs à noyau par rapport à l'espace mesuré (M, μ_g) et sont bornés sur $L^2(M, \mu_g)$. De plus, on a l'expression suivante pour leur noyau distributionnel :*

$$K_{L_f}(p,p') = (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} f((-\tfrac{1}{2}\Theta y)\cdot p)\, \delta^g_{z\cdot p}(p'). \tag{1.2.9}$$

$$K_{R_f}(p,p') = (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} f(z\cdot p)\, \delta^g_{(-\frac{1}{2}\Theta y)\cdot p}(p'). \tag{1.2.10}$$

Preuve. Le cas R_f étant tout à fait similaire, nous ne traiterons que celui de L_f. Soit $\psi \in \mathcal{H}$; par définition (1.2.5), nous avons

$$L_f\psi(p) = (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^l}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, \alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f)(p)\int_M \mu_g(p')\, \delta^g_{z\cdot p}(p')\, \psi(p').$$

L'expression du noyau (1.2.9) est alors obtenue par permutation des intégrales.
Que L_f soit borné est une conséquence de sa définition en terme d'intégrales oscillantes [41,64,92] à valeur opérateur :

$$\begin{aligned}L_f\psi(p) &= (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^l}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, \alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f)\, V_{-z}\psi(p)\\ &= (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^l} d^l z\,(1+|z|^2)^{-r}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\,(1+|z|^2)^r\, e^{-i<y,z>}\, \alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f)\, V_{-z}\psi(p)\\ &= (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^l} d^l z\,(1+|z|^2)^{-r}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\,((1+\Delta_\alpha)^r\, e^{-i<y,z>})\, \alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f)\, V_{-z}\psi(p)\\ &= (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^l} d^l z\,(1+|z|^2)^{-r}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\, e^{-i<y,z>}\,((1+\Delta_\alpha)^r\alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f))\, V_{-z}\psi(p),\end{aligned}$$

où $\Delta_\alpha := -\sum_{j=1}^l X_j^2$. Nous avons utilisé ici le fait que les dérivées totales ne contribuent pas à l'expression précédente car f est à support compact. Alors,

$$\|L_f\psi\| \le (2\pi)^{-l}\|\psi\|\left(\int_{\mathbb{R}^l} d^l z\,(1+|z|^2)^{-r}\right)\sup_{p\in M}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\,|(1+\Delta_\alpha)^r\alpha_{\frac{1}{2}\Theta y}(f)(p)|. \tag{1.2.11}$$

Cette expression est finie d'après le lemme 1.2.4 et pour $r > l/2$. □

Remarque 1.2.14. *Dans le cas périodique (compact ou non), que L_f soit borné pour une fonction $f \in C_c^\infty(M)$, est une conséquence de la décomposition de f en éléments homogènes. D'une part on a $L_{f_r} = M_{f_r} V_{-\frac{1}{2}\Theta r}$ et d'autre part :*

$$\|L_f\| \leq \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} \|M_{f_r} V_{-\frac{1}{2}\Theta r}\| \leq \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} \|f_r\|_\infty < \infty.$$

On obtient dans ce cas pour le noyau de Schwartz de l'opérateur L_f :

$$K_{L_f}(p,p') = \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} f_r(p)\, \delta^g_{\frac{1}{2}\Theta r.p}(p').$$

Evidemment, des expressions analogues pour les opérateurs de multiplication twistée à droite sont valables.

1.2.2.2 Invariance de la norme de Hilbert–Schmidt

Dans ce paragraphe, nous allons établir un résultat central : *la norme de Hilbert–Schmidt est un invariant des déformations isospectrales.*

Tout d'abord, nous avons besoin d'obtenir des propriétés d'invariance pour les noyaux des opérateurs du type $h(\not{D})$, avec h une fonction réelle, lisse et bornée.

Lemme 1.2.15. *Pour tous $z \in \mathbb{R}^l$, $p, p' \in M$, h fonction réelle, lisse et bornée, le noyau $K_{h(\not{D})}$ est invariant sous α :*

$$K_{h(\not{D})}(z\cdot p, z\cdot p') = K_{h(\not{D})}(p,p'),$$

presque partout sur $(M \times M, \mu_g \times \mu_g)$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la propriété d'isométrie de l'action. En effet, l'invariance de la connection de Levi-Civita associée à g, implique l'invariance de la connection de spin sous le relèvement de l'action au fibré des spineurs. Ainsi $V_z \not{D} V_{-z} = \not{D}$ pour tout z. Si h est une fonction réelle et bornée sur $\mathbb{R}$, on obtient alors par calcul fonctionnel $[V_z, h(\not{D})] = 0$ pour $z \in \mathbb{R}^l$. De plus, pour $\psi \in \mathcal{H}$, l'invariance de la forme volume Riemannienne sous le difféomorphisme $p' \mapsto \alpha_{-z}(p')$ donne

$$\int_M \mu_g(p')\, K_{h(\not{D})}(z\cdot p, z\cdot p')\, \psi(p') = \int_M \mu_g(p')\, K_{h(\not{D})}(z\cdot p, p')\, \psi((-z)\cdot p').$$

Le terme de droite est égal à $(h(\not{D})V_z\psi)(z\cdot p) = (V_{-z}h(\not{D})V_z\psi)(p) = (h(\not{D})\psi)(p)$. Alors, $K_{h(\not{D})}(\alpha_z(\cdot), \alpha_z(\cdot))$ et $K_{h(\not{D})}(\cdot,\cdot)$ représentent le même opérateur sur $\mathcal{H}$. □

Le théorème suivant montre que la norme de Hilbert–Schmidt de $L_f\, h(\not{D})$ est indépendante des paramètres de déformation.

Théorème 1.2.16. *Soient $f \in C_c^\infty(M)$ et h une fonction lisse, réelle et bornée sur $\mathbb{R}$, telle que $M_f\, h(\not{D})$ soit un opérateur de Hilbert–Schmidt. Alors, lorsque l'action α est lisse, propre et isométrique les opérateurs $L_f^\Theta\, h(\not{D})$, $R_f^\Theta\, h(\not{D})$ sont aussi de Hilbert–Schmidt, avec*

$$\|L_f^\Theta\, h(\not{D})\|_2 = \|R_f^\Theta\, h(\not{D})\|_2 = \|M_f\, h(\not{D})\|_2.$$

Preuve. Les arguments des cas L_f et R_f étant tout à fait semblables, nous ne traiterons que le cas de la multiplication twistée à gauche. Tout d'abord et d'après la proposition 1.2.13, on peut représenter le noyau de $L_f\, h(\not{D})$ en terme du noyau $K_{h(\not{D})}$:

$$\begin{aligned}
K_{L_f h(\not{D})}(p,p') &= \int_M \mu_g(q)\, K_{L_f}(p,q) K_{h(\not{D})}(q,p') \\
&= (2\pi)^{-l} \int_M \mu_g(q) \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} f((-\tfrac{1}{2}\Theta y)\cdot p)\, \delta^g_{z\cdot p}(q)\, K_{h(\not{D})}(q,p') \\
&= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} f((-\tfrac{1}{2}\Theta y)\cdot p)\, K_{h(\not{D})}(z\cdot p, p').
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|L_f\, h(\not{D})\|_2^2 &= \int_{M\times M} \mu_g(p)\, \mu_g(p')\, |K_{L_f h(\not{D})}(p,p')|^2 \\
&= (2\pi)^{-2l} \int_{M\times M} \mu_g(p)\, \mu_g(p') \int_{\mathbb{R}^{4l}} d^l y_1\, d^l z_1\, d^l y_2\, d^l z_2\, e^{i(y_1 z_1 - y_2 z_2)} \\
&\qquad \times \bar{f}((-\tfrac{1}{2}\Theta y_1)\cdot p)\, f((-\tfrac{1}{2}\Theta y_2)\cdot p) \overline{K_{h(\not{D})}}(z_1\cdot p, p')\, K_{h(\not{D})}(z_2\cdot p, p') \\
&= (2\pi)^{-2l} \int_{M\times M} \mu_g(p)\, \mu_g(p') \int_{\mathbb{R}^{4l}} d^l y_1\, d^l z_1\, d^l y_2\, d^l z_2\, e^{i(y_1 z_1 - y_2 z_2)} \bar{f}((-\tfrac{1}{2}\Theta y_1 - z_2)\cdot p) \\
&\qquad \times f((-\tfrac{1}{2}\Theta y_2 - z_2)\cdot p) \overline{K_{h(\not{D})}}((z_1 - z_2)\cdot p, (z_1 - z_2)\cdot p')\, K_{h(\not{D})}(p, (z_1 - z_2)\cdot p'),
\end{aligned}$$

où l'invariance de μ_g sous les isométries $p \mapsto (-z_2)\cdot p$ et $p' \mapsto (z_1 - z_2)\cdot p'$ a été utilisée. Ensuite, d'après le lemme 1.2.15, en effectuant la translation $z_1 \mapsto z_1 + z_2$, la dernière expression devient

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-2l} \int_{M\times M} \mu_g(p)\, \mu_g(p') \int_{\mathbb{R}^{4l}} d^l y_1\, d^l z_1\, d^l y_2\, d^l z_2\, e^{i(y_1(z_1+z_2) - y_2 z_2)} \\
&\qquad \times \bar{f}((-\tfrac{1}{2}\Theta y_1 - z_2)\cdot p)\, f((-\tfrac{1}{2}\Theta y_2 - z_2)\cdot p) \overline{K_{h(\not{D})}}(p,p')\, K_{h(\not{D})}(p, z_1\cdot p'), \\
&= (2\pi)^{-2l} \int_{M\times M} \mu_g(p)\, \mu_g(p') \int_{\mathbb{R}^{4l}} d^l y_1\, d^l z_1\, d^l y_2\, d^l z_2 e^{i((y_1 - 2\Theta^{-1} z_2)(z_1+z_2) - y_2 z_2)} \\
&\qquad \times \bar{f}((-\tfrac{1}{2}\Theta y_1)\cdot p)\, f((-\tfrac{1}{2}\Theta y_2)\cdot p) \overline{K_{h(\not{D})}}(p,p')\, K_{h(\not{D})}(p, z_1\cdot p'),
\end{aligned}$$

en faisant les changements $y_1 \mapsto y_1 - 2\Theta^{-1} z_2$ et $y_2 \mapsto y_2 - 2\Theta^{-1} z_2$. On obtient alors,

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-l} \int_{M\times M} \mu_g(p)\, \mu_g(p') \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{i<y,z>} \\
&\qquad \times \bar{f}((-\tfrac{1}{2}\Theta y)\cdot p)\, f((-\tfrac{1}{2}\Theta y - z)\cdot p) \overline{K_{h(\not{D})}}(p,p')\, K_{h(\not{D})}(p, z\cdot p') \\
&= (2\pi)^{-l} \int_{M\times M} \mu_g(p)\, \mu_g(p') \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{i<y,z>}\, \bar{f}(p)\, f((-z)\cdot p)\, \overline{K_{h(\not{D})}}(p,p')\, K_{h(\not{D})}(p, z\cdot p') \\
&= \int_{M\times M} \mu_g(p)\, \mu_g(p') |f(p)|^2 |K_{h(\not{D})}(p,p')|^2 = \|M_f\, h(\not{D})\|_2^2.
\end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, nous avons utilisé l'invariance de la forme volume ainsi que celle du noyau $K_{h(\not{D})}$, sous les isométries $p \mapsto (\frac{1}{2}\Theta y)\cdot p$ et $p' \mapsto (\frac{1}{2}\Theta y)\cdot p'$. □

Remarque 1.2.17. *Nous avons démontré ce résultat dans le cas spinoriel, mais il est évidemment aussi valable dans le cas scalaire, i.e. lorsque $L_f h(\Delta)$ agit sur l'espace de Hilbert réduit $\mathcal{H}_r$. On obtient alors :*

$$\|L_f h(\Delta)\|_2 = \|R_f h(\Delta)\|_2 = \|M_f h(\Delta)\|_2.$$

Nous avons eu besoin de supposer ici que $M_f\, h(\not{D})$ appartienne à l'idéal des opérateurs de Hilbert–Schmidt. Nous verrons au paragraphe 2.3.1 des conditions suffisantes sur la fonction h, pour réaliser cette hyphothèse.

Dans la suite, nous allons utiliser la présentation de L_f et R_f en termes d'intégrales à valeur opérateur (1.2.7) et (1.2.8) pour obtenir une deuxième démonstration du théorème précédent, avec une formulation légèrement différente : $h(\not{D})\, L_f\, h(\not{D})$ est à trace si et seulement si l'opérateur 'non déformé' $h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})$ l'est et leurs traces coïncident. Avant de donner cette deuxième preuve, il est intéressant de comprendre l'origine de ce résultat au travers du calcul heuristique suivant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(h(\not{D})\, L_f\, h(\not{D})) &= (2\pi)^{-l}\, \mathrm{Tr}\Big(\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, h(\not{D}) V_{\frac{1}{2}\Theta y}\, M_f\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z}\, h(\not{D})\Big) \\
&= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, \mathrm{Tr}\big(V_{\frac{1}{2}\Theta y}\, h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D}) V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z}\big) \\
&= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, \mathrm{Tr}\big(h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})\, V_{-z}\big) \\
&= \mathrm{Tr}\Big(h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D}) \int_{\mathbb{R}^l} d^l z\, \delta_0(z)\, V_{-z}\Big) \\
&= \mathrm{Tr}(h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})). \qquad (1.2.12)
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.18. *Nous allons voir que ces manipulations (inversion de la trace et de l'intégrale) peuvent être justifiées en introduisant un régularisateur fortement convergent. Cependant, avec la trace de Dixmier à la place de la trace ordinaire (avec des contraintes bien précises sur la fonction h), ces manipulations restent formelles. En effet, tous les régularisateurs naturels donnent lieu à des opérateurs à trace, et donc de trace de Dixmier nulle.*

Deuxième preuve du théorème 1.2.16. Ici, nous remplaçons l'hypothèse $M_f\, h(\not{D})$ est Hilbert–Schmidt par $h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})$ est à trace, pour $f = g^* \star_\Theta g$ et $g \in C_c^\infty(M)$.

Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un système uniformément borné d'unités approchées pour $C_c^\infty(M)$, c'est-à-dire, une famille croissante de fonctions positives à support compact telles que $u_k \uparrow 1$ point à point sur M. En particulier, ceci implique que s-lim $M_{u_k} = 1$. De plus, $M_{u_k}\, h(\not{D})$ est Hilbert–Schmidt pour tout k car u_k est à support compact (cf. proposition 2.3.3). Considérons les opérateurs positifs régularisés

$$0 \leq A_k := M_{u_k}\, h(\not{D})\, L_f\, h(\not{D})\, M_{u_k}.$$

Etant donné que $M_{u_k}\, h(\not{D})$ est Hilbert–Schmidt, A_k est à trace et

$$\begin{aligned}
A_k &= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, M_{u_k}\, h(\not{D}) V_{\frac{1}{2}\Theta y}\, M_f\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z}\, h(\not{D})\, M_{u_k} \\
&=: \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, A_k(y,z)
\end{aligned}$$

est bien définie comme une intégrale d'opérateurs à trace. De plus, comme A_k et $A_k(y,z)$ sont à trace, on peut échanger la trace et l'intégrale, pour obtenir en utilisant $[h(\not{D}), V_z] = 0$

$$\mathrm{Tr}(A_k) = (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, \mathrm{Tr}\big(h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z}\, M_{u_k^2}\, V_{\frac{1}{2}\Theta y}\big).$$

De même,

$$\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z}\, M_{u_k^2}\, V_{\frac{1}{2}\Theta y}$$

est une intégrale où l'intégrant est à trace, car $h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})$ est à trace par hypothèse et

$$\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-iy.z}\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z}\, M_{u_k^2}\, V_{\frac{1}{2}\Theta y} = R_{u_k^2} \tag{1.2.13}$$

est borné d'après la proposition 1.2.13. Ainsi, $\mathrm{Tr}(A_k) = \mathrm{Tr}\big(h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})\, R_{u_k^2}\big)$, et donc

$$\|A_k\|_1 \leq \|R_{u_k^2}\|\, \|h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})\|_1. \tag{1.2.14}$$

Etant donné que $\{M_{u_k^2}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un système d'unités approchées uniformément borné, par la proposition 2.18 [92], $\{R_{u_k^2}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi un système d'unités approchées uniformément borné. Alors $\|R_{u_k^2}\| \leq C$, d'où $\|A_k\|_1 \leq C\, \|h(\not{D})\, M_f\, h(\not{D})\|_1$ pour tout k. Nous avons ensuite besoin de montrer que $\text{s-lim}\, A_k = A := h(\not{D})\, L_f\, h(\not{D})$, pour garantir la traçabilité de A car d'après la proposition 2 de [30], la limite d'une famille fortement continue d'opérateurs uniformément bornés en norme trace, est aussi à trace. Nous avons

$$A - A_k = A - M_{u_k} A M_{u_k} = (1 - M_{u_k})A + M_{u_k} A (1 - M_{u_k}).$$

Puisque $\|M_{u_k}\| \leq 1$, on obtient pour tout $\psi \in \mathcal{H}$

$$\|(A - A_k)\psi\| \leq \|(1 - M_{u_k})A\psi\| + \|A\|\|(1 - M_{u_k})\psi\|.$$

Cela conclut la preuve, car $\text{s-lim}\, M_{u_k} = 1$. □

La propriété d'invariance de la norme de Hilbert–Schmidt peut être généralisée de la manière suivante. Pour un opérateur borné A, on peut définir formellement ses twists gauche et droit par

$$L_A^\Theta := (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, V_{\frac{1}{2}\Theta y}\, A\, V_{-z},$$

$$R_A^\Theta := (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, V_{-z}\, A\, V_{\frac{1}{2}\Theta y}.$$

Nous allons montrer que ces expressions peuvent être bien définies, par exemple pour les opérateurs de Hilbert–Schmidt.

Théorème 1.2.19. *Soit A un opérateur de Hilbert–Schmidt, alors L_A^Θ et R_A^Θ sont aussi Hilbert–Schmidt avec*

$$\|L_A^\Theta\|_2 = \|R_A^\Theta\|_2 = \|A\|_2\,.$$

Preuve. La preuve étant similaire à celle du théorème 1.2.16, nous esquisserons uniquement le cas de L_A. D'après [100, théorème 2.11], le noyau K_A de A est une fonction appartenant à $L^2(M \times M, \mu_g \times \mu_g)$. De plus, nous obtenons l'expression du noyau de L_A en terme de celui de A :

$$K_{L_A}(p, p') = (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y \, d^l z \, e^{-iy.z} \, K_A(\tfrac{1}{2}\Theta y.p, z.p').$$

Un calcul tout à fait semblable à celui de la preuve du théorème 1.2.16, montre alors que l'application $K_A \mapsto K_{L_A}$ est une isométrie sur $L^2(M \times M, \mu_g \times \mu_g)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \|L_A\|_2 &= \int_{M \times M} \mu_g(p) \, \mu_g(p') \, |K_{L_A}(p, p')|^2 \qquad (1.2.15) \\ &= \int_{M \times M} \mu_g(p) \, \mu_g(p') \, |K_A(p, p')|^2 = \|A\|_2. \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Triplets spectraux sans unité

2.1 Géométries spinorielles non commutatives

2.1.1 La notion d'espace Riemannien à spin non commutatif

Une des notions centrales en géométrie non commutative est celle de triplet spectral ; *de variété Riemannienne à spin non commutative.*

Pour définir et construire des espaces métriques à spin non commutatifs, Connes a reformulé en terme algébrique et opératoriel [14, 15] la notion de variété ordinaire. Cette reformulation va ensuite permettre une généralisation (quasi directe) au monde non commutatif.
Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord revoir le cadre axiomatique qui a été développé pour reconstruire à partir de données opératorielles les structures topologique, différentielle, métrique et spin.

Une variété non commutative compacte à spin, consiste en un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ (ainsi que deux autres opérateurs externes χ et J), sujet aux sept conditions proposées dans [14]. Ici, $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre à élément unité fidèlement représentée sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (nous noterons π la représentation) et $\mathcal{D}$ est un opérateur non borné et essentiellement auto-adjoint, jouant le rôle d'un opérateur de Dirac abstrait. De plus, le triplet doit être tel que chacun des commutateurs $[\mathcal{D}, \pi(a)]$, avec $a \in \mathcal{A}$, s'étende en un opérateur borné. Il est évidemment entendu que $\pi(a)\,\mathrm{Dom}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{D})$. Le triplet ainsi défini est dit pair, s'il existe de plus une $\mathbb{Z}_2$-graduation χ de l'espace de Hilbert, commutant avec les éléments de l'algèbre représentée et anticommutant avec l'opérateur $\mathcal{D}$. Le dernier ingrédient est un opérateur antilinéaire J, l'involution de Tomita–Takesaki.

Dans le cas commutatif, c'est-à-dire lorsque l'on veut reconstruire une variété Riemannienne à spin ordinaire (M, g, S), c'est l'algèbre $C^\infty(M)$ qui va permettre de reconstruire l'espace topologique sous-jacent à la variété M. En effet, l'algèbre $C(M)$ des fonctions continues, la C^*-complétion de $C^\infty(M)$ par rapport à la norme $\|.\|_\infty$, est en dualité via le théorème de Gelfand–Naimark avec l'espace de ses caractères ($*$-homomorphismes d'algèbres entre $C^\infty(M)$ et $\mathbb{C}$), qui se trouve être (en tant qu'espace localement compact) isomorphe à M.
La structure Riemannienne va pouvoir quant à elle, être reconstruite via la formule des distances ; en prenant pour $\mathcal{D}$ l'opérateur de Dirac $\not{D}$ associé à la métrique g, on obtient la distance géodésique via la formule

$$d_g(p, p') = \sup_{f \in C^\infty(M)} \left\{ |f(p) - f(p')| : \|[\not{D}, M_f]\| \leq 1 \right\}. \tag{2.1.1}$$

Ici $\not{D}$ est vu comme opérant sur $L^2(M,S)$, l'espace de Hilbert des sections de carré sommable du fibré des spineurs, sur lequel $C^\infty(M)$ est aussi représentée par opérateur de multiplication point à point. Rappelons que la distance géodésique $d_g(.,.)$ est usuellement définie par

$$d_g(p,p') := \inf_\gamma \left\{ l_g(\gamma),\, \gamma(0)=p,\, \gamma(1)=p' \right\}, \tag{2.1.2}$$

où $\gamma : [0,1] \to M$ est une courbe lisse par morceaux et $l_g(\gamma)$ est la longueur (Riemannienne) de cette courbe :

$$l_g(\gamma) := \int_0^1 |\dot\gamma(t)| dt := \int_0^1 \sqrt{g\big(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)} dt.$$

Il est important de remarquer qu'à la différence de la formule (2.1.2), la formule des distances de Connes (2.1.1) se généralise pour des espaces non commutatifs. On peut en effet définir une notion de distance, associée à la structure Riemannienne abstraite donnée par l'opérateur $\mathcal{D}$, sur l'espace des états purs (points extrémaux de l'espace convexe des fonctionnelles positives et normalisées) d'une C^*-algèbre A par

$$d(\psi,\phi) = \sup_{a\in A} \left\{ |\psi(a)-\phi(a)| : \|[\mathcal{D},a]\| \le 1 \right\}, \tag{2.1.3}$$

pour tout ψ,ϕ, états purs de A.
Finalement, lorsque la dimension n de M est paire $n=2m$, la graduation χ est l'équivalent n-dimensionnelle de la matrice γ_5 en dimension 4

$$\chi = (-i)^m \gamma^1 \cdots \gamma^{2m},$$

et J est la conjugaison de charge pour les spineurs.
Les autres structures peuvent être aussi reconstruites, dans le cas compact et sans bord [14, 15, 55, 88], à condition que le triplet $\big(C^\infty(M), L^2(M,S), \not{D}, J, \chi\big)$ satisfasse à des contraintes supplémentaires. Nous allons revoir ces conditions dans le cas général compact (à unité) et nous discuterons les points à modifier pour qu'elles soient applicables aussi dans le cas non compact (sans unité).

Soit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'idéal des opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$, et soit $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, $p \ge 1$, les classes de Schatten ordinaires, i.e.

$$\mathcal{L}^p(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \|T\|_p := \big(\operatorname{Tr}(|T|^p)\big)^{1/p} < \infty\}.$$

L'opérateur $\mathcal{D}$ doit de plus être à résolvante compacte, c'est-à-dire $(\mathcal{D}-\lambda)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ pour tout λ en dehors du spectre de $\mathcal{D}$. Cette première condition oblige à se restreindre à des opérateurs ayant un spectre purement ponctuel, i.e. consistant de valeurs propres discrètes de multiplicités finies. Cette condition caractérise, avec le fait que l'algèbre $\mathcal{A}$ possède une unité, les espaces non commutatifs "compacts" et assure aussi que la classe de K-homologie du triplet est bien définie [63].

La condition de sommabilité, ou encore axiome de dimension, stipule que $(\mathcal{D}-\lambda)^{-1}$ soit non seulement compact mais qu'il appartienne à la k-ième classe de Schatten faible $\mathcal{L}^{(k,\infty)}(\mathcal{H})$, pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Rappelons que ces idéaux d'opérateurs compacts sont définis par

$$\mathcal{L}^{(k,\infty)}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \mu_m(T) = O(m^{-1/k})\}, \qquad k \ge 1,$$

où $\mu_m(T)$ désigne la m-ième valeur singulière de T, i.e. la m-ième valeur propre de son module $|T| := \sqrt{T^*T}$. Aussi, $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ est le domaine naturel des traces de Dixmier Tr_ω (associées à la

divergence logarithmique, cf. appendice A).
Autrement dit, il doit exister un unique entier naturel k, la dimension spectrale du triplet, qui soit tel que $(\mathcal{D}-\lambda)^{-k}$ soit Dixmier-traçable et avec une trace de Dixmier non identiquement nulle.
La trace de Dixmier, dont les propriétés fondamentales sont données dans l'appendice A, jouit d'un statut très particulier en géométrie non commutative. Elle permet non seulement de définir une notion purement analytique de dimension, mais aussi de construire abstraitement une intégrale sur l'algèbre, via l'application :

$$\mathcal{A} \ni a \mapsto \mathrm{Tr}_\omega \left(\pi(a)|\mathcal{D}|^{-k}\right).$$

Par construction, cette fonctionnelle possède aussi la propriété d'hypertrace [13,55], i.e. s'annule sur les commutateurs.
Nous verrons au chapitre 3, que cette intégrale non commutative permet de construire des fonctionnelles d'action généralisant celle de Yang–Mills ordinaire.
Lorsque l'opérateur $\mathcal{D}$ n'est pas inversible, on pourra tout de même donner du sens à son inverse. En effet, que l'opérateur $\mathcal{D}$ soit à résolvante compacte, implique en particulier que son noyau est de dimension finie. Son inverse partielle, $\mathcal{D}^{-1}$ est alors défini en lui assignant la valeur 0 sur $\ker(\mathcal{D})$.
Ces conditions doivent être modifiées dans le cas non compact. En effet, pour une variété non compacte ordinaire, non seulement le noyau de l'opérateur de Dirac n'est pas de dimension finie mais en plus, son spectre essentiel n'est pas vide.

La condition suivante, dite de régularité, constitue une notion de différentiabilité pour les éléments de l'algèbre. Soit δ la dérivation définie par $\delta(T) := [|\mathcal{D}|, T]$, pour $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. La régularité signifie que a et $[\mathcal{D}, \pi(a)]$ appartiennent à l'intersection des domaines des puissances de δ, pour tout $a \in \mathcal{A}$. Cette condition ne sera que légèrement modifiée dans le cas sans unité.

L'axiome de finitude stipule que l'espace des spineurs lisses $\mathcal{H}^\infty$, l'intersection des domaines des puissances de $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}^\infty := \bigcap_n \mathrm{Dom}(\mathcal{D}^n)$, soit un module projectif de type fini. Rappelons qu'un module projectif de type fini, le pendant non commutatif d'un fibré vectoriel, est un module à gauche sur $\mathcal{A}$ de la forme $\mathcal{A}^m p$, pour un certain projecteur $p = p^* = p^2 \in M_m(\mathcal{A})$ et un certain $m \in \mathbb{N}$, le 'rang du fibré'. Le projecteur en question devant pouvoir être l'unité de $M_m(\mathcal{A})$ (par exemple dans le cas commutatif avec un fibré des spineurs trivial), il est clair que cet axiome devra être modifié dans le cas non compact.

La condition de réalité consiste en l'existence d'une involution antilinéaire J, définissant une représentation de l'algèbre opposée sur $\mathcal{H}$ par $a \mapsto J\pi(a^*)J^{-1}$. De plus, cette deuxième représentation doit commuter avec la première

$$[\pi(a), J\pi(b^*)J^{-1}] = 0, \forall\, a, b \in \mathcal{A},$$

et doit satisfaire $J^2 = \pm 1$, $J\mathcal{D} = \pm\mathcal{D}J$, $J\chi = \pm\chi J$, où les signes ne dépendent que de k mod 8 (voir [14, 55] pour la table des signes). Cette condition ainsi que la suivante, sont de nature purement algébrique et ne nécessitent pas d'être modifiées dans le cas sans unité.

L'axiome suivant, dit de premier ordre, caractérise le fait que dans le cas commutatif, l'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel d'ordre un. Cette condition est alors algébriquement traduite par le fait que les opérateurs bornés $[\mathcal{D}, \pi(a)]$ commutent aussi avec la représentation de l'algèbre opposée ; cela équivaut aussi à dire que l'espace $[\mathcal{D}, \pi(\mathcal{A})]$ est affilié à $\pi(\mathcal{A})$.

La condition d'orientabilité correspond à l'existence d'une "forme volume" sur l'espace non commutatif. Il doit ainsi exister un k-cycle de Hochschild (à valeur dans le bimodule $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}$) $\mathbf{c} = (a_0 \otimes b_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_k$, $a_0, \cdots, a_k \in \mathcal{A}$, $b_0 \in \mathcal{A}^{op}$ où k est la dimension spectrale du triplet, tel que $\pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{c}) = \chi$. Ici, $\pi_{\mathcal{D}}$ est la représentation de $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}) \otimes \mathcal{A}^{\otimes k}$ donnée par :

$$\pi_{\mathcal{D}}\big((a_0 \otimes b_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_l\big) = \pi(a_0) J \pi(b_0^*) J^{-1} [\mathcal{D}, \pi(a_1)] \cdots [\mathcal{D}, \pi(a_l)]. \tag{2.1.4}$$

Il y aura encore lieu de modifier cette condition, car la valeur $\mathbf{1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ doit pouvoir être prise par $\pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{c})$ lorsque k est impair.

La dernière condition, la dualité de Poincaré, est de nature topologique. Dans le cas compact, elle s'exprime par le fait que la forme d'intersection $\bigcap : K_*(\mathcal{A}) \times K_*(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$, donnée par la composition du produit de Kasparov avec l'application indice de Fredholm, soit non dégénérée. Nous laisserons à part cette dernière condition, car n'étant pas centrale dans le théorème de reconstruction [15, 55] et faisant aujourd'hui encore l'objet d'investigations dans le cas commutatif non compact (voir en particulier les travaux d'A. Rennie [89]).

2.1.2 Généralisation des axiomes au cas sans unité

2.1.2.1 Plongement dans une algèbre avec unité

En se basant sur la dualité de Gelfand–Naimark dans le cas non compact (toute C^*-algèbre commutative sans unité A est isomorphe à l'algèbre $C_0(\chi(A))$ des fonctions continues et s'annulant à l'infini sur l'espace de ses caractères $\chi(A)$), le point de départ pour la construction de triplets spectraux non unitaux est la donnée d'une algèbre sans unité $\bar{\mathcal{A}}$.

A l'exception de la condition $(\mathcal{D} - \lambda)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, qui n'est clairement pas satisfaite dans le cas commutatif non compact et dont la généralisation naturelle (déjà présente dans [14]) est $\pi(a)(\mathcal{D} - \lambda)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ pour tout $a \in \bar{\mathcal{A}}$, toutes les autres modifications nécessitent de considérer un plongement dans une algèbre à élément unité : $\mathcal{A} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$. Evidemment, $\widetilde{\mathcal{A}}$ doit elle aussi être représentée par des opérateurs bornés et doit être telle que les commutateurs $[\mathcal{D}, \pi(a)]$, pour tout $a \in \widetilde{\mathcal{A}}$, s'étendent en des opérateurs bornés. De plus, on demandera que les conditions de régularité, de réalité et de premier ordre, soient aussi satisfaites pour les éléments du plongement unifère choisie.

Cette adjonction d'unité va jouer un rôle prépondérant dans les axiomes d'orientation et de finitude.

Le point clef pour l'axiome d'orientation est de pouvoir laisser la possibilité au cycle de Hochschild, jouant le rôle de la forme volume, de prendre la valeur $\mathbf{1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Il est donc clair que dans le cas sans unité, le cycle $\mathbf{c}$ doit être un cycle de Hochschild sur $\widetilde{\mathcal{A}}$ et non pas sur $\bar{\mathcal{A}}$.

Concernant l'axiome de finitude, le projecteur p devra lui aussi être choisi dans $M_m(\widetilde{\mathcal{A}})$. Pour donner lieu à un module projectif de type fini à gauche sur $\bar{\mathcal{A}}$ (et non pas sur $\widetilde{\mathcal{A}}$), il faudra alors se restreindre à un plongement unifère pour lequel $\bar{\mathcal{A}}$ soit un idéal (à droite). Il est alors utile d'introduire la notion de pull-back de module, dans la terminologie de Rennie [89].

Définition 2.1.1. *Soit $\mathcal{E} := A^m p$, $p \in M_m(A)$ un module projectif de type fini à gauche et soit A_1 un idéal à droite de A (i.e. $A_1 A \subset A_1$). Le pull-back de $\mathcal{E}$ sur A_1 est le module à gauche $\mathcal{E}_1$ sur A_1, défini par $\mathcal{E}_1 := A_1 \mathcal{E}$.*

Finalement, l'axiome de dimension doit être lui aussi légèrement modifié. Ainsi, nous verrons dans l'exemple du plan de Moyal, qu'il est trop restrictif de demander que

$$\pi(a)(\mathcal{D} - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}^{(k,\infty)}(\mathcal{H}),$$

soit satisfait, pour tout $a \in \bar{\mathcal{A}}$ (et pour un certain $k \in \mathbb{N}$). En effet, l'algèbre $\bar{\mathcal{A}}$ est quasiment (modulo le projecteur p) uniquement déterminée par l'espace des "spineurs lisses" $\mathcal{H}^\infty$; bien que sous-ensemble des opérateurs compact, l'ensemble $\{\pi(a)(\mathcal{D}-\lambda)^{-1}\}_{a\in\bar{\mathcal{A}}}$ n'est pas a priori inclus dans $\mathcal{L}^{(k,\infty)}(\mathcal{H})$. Cette subtilité émanant des propriétés des espaces $\mathcal{L}^{(p,\infty)}(\mathcal{H})$ nécessite l'introduction d'une algèbre intermédiare $\mathcal{A}$, dense dans $\bar{\mathcal{A}}$, qui soit aussi un idéal bilatère de $\widetilde{\mathcal{A}}$ et qui soit telle que

$$\{\pi(a)(\mathcal{D}-\lambda)^{-1}\}_{a\in\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}^{(k,\infty)}(\mathcal{H}),$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

2.1.2.2 Les axiomes modifiés

Définition 2.1.2. *Un triplet spectral sans unité réel de dimension k, consiste en la donnée de*

$$(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{H}, D, J, \chi),$$

où $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre dense d'une algèbre (a priori sans unité) $\bar{\mathcal{A}}$, toutes deux fidèlement représentées (via une représentation π) sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\widetilde{\mathcal{A}}$ est un plongement unifère de $\bar{\mathcal{A}}$, agissant par opérateurs bornés sur le même espace de Hilbert. D est un opérateur auto-adjoint non borné sur $\mathcal{H}$ tel que $[D, \pi(a)]$, pour tout a dans $\widetilde{\mathcal{A}}$, s'étende en un opérateur borné sur $\mathcal{H}$. De plus, J et χ sont des opérateurs respectivement anti-unitaire et auto-adjoint. Le triplet est dit impair lorsque $\chi = 1$ et pair sinon. Dans le cas paire, J et χ doivent satisfaire à $\chi^2 = 1$, $\chi\pi(a) = \pi(a)\chi$ pour $a \in \widetilde{\mathcal{A}}$ et $D\chi = -\chi D$. Finalement, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

0. *Compacité* :
   L'opérateur $\pi(a)(D-\lambda)^{-1}$ est compact pour $a \in \bar{\mathcal{A}}$ et $\lambda \notin \operatorname{sp} D$.
1. *Dimension spectrale* :
   Il existe un unique entier positif k, la dimension spectrale du triplet, pour lequel l'opérateur $\pi(a)(D^2+\varepsilon^2)^{-1/2}$ appartient à la classe de Schatten faible $\mathcal{L}^{(k,\infty)}(\mathcal{H})$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. De plus, $\operatorname{Tr}_\omega(\pi(a)(|D|+\varepsilon)^{-k})$ doit être non identiquement nulle. L'entier k est paire si et seulement si le triplet l'est.
2. *Régularité* :
   Les opérateurs bornés $\pi(a)$ et $[D, \pi(a)]$, pour tout $a \in \widetilde{\mathcal{A}}$, appartiennent à l'intersection des domaines des puissances de la dérivation $\delta : T \mapsto [|D|, T]$.
3. *Finitude* :
   Les algèbres $\bar{\mathcal{A}}$ et $\widetilde{\mathcal{A}}$ sont des pré-C^*-algèbres (stables par calcul fonctionnel holomorphe dans leur C^*-complétion) et sont telles que l'espace des spineurs lisses

   $$\mathcal{H}^\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom}(D^k)$$

   soit le $\bar{\mathcal{A}}$-pullback d'un module projectif de type fini sur $\widetilde{\mathcal{A}}$. De plus $\mathcal{A}$ est aussi un idéal bilatère de $\widetilde{\mathcal{A}}$ et est une pré-C^*-algèbre avec la même C^*-complétion que $\bar{\mathcal{A}}$.
   Aussi, une structure Hermitienne $(\cdot \mid \cdot)$ à valeur dans $\bar{\mathcal{A}}$ est implicitement définie sur $\mathcal{H}^\infty$ par l'intégrale non commutative :

   $$\operatorname{Tr}_\omega\big((\pi(a)\xi \mid \eta)(|D|+\varepsilon)^{-k}\big) = \langle \eta \mid \pi(a)\xi \rangle, \tag{2.1.5}$$

où $a \in \widetilde{\mathcal{A}}$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire de $\mathcal{H}$.

4. *Réalité* :
   Il existe un opérateur antiunitaire J sur $\mathcal{H}$, qui soit tel que $[\pi(a), J\pi(b)^* J^{-1}] = 0$ pour tout $a, b \in \widetilde{\mathcal{A}}$ (donc $b \mapsto J\pi(b)^* J^{-1}$ est une représentation sur $\mathcal{H}$ de l'algèbre opposée $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ commutant avec la représentation originelle). De plus, $J^2 = \pm 1$, $JD = \pm DJ$ et aussi $J\chi = \pm \chi J$ dans le cas pair, où les signes ne dépendent que de $k \bmod 8$ (voir par exemple [55, p. 405] pour la table des signes).
5. *Premier ordre* :
   Les opérateurs $[D, \pi(a)]$ commutent aussi avec la représentation de l'algèbre opposée : $[[D, \pi(a)], J\pi(b)^* J^{-1}] = 0$ pour tous $a, b \in \widetilde{\mathcal{A}}$.
6. *Orientation* :
   Il existe un *k-cycle de Hochschild* $\mathbf{c}$ sur $\widetilde{\mathcal{A}}$, à valeur dans $\widetilde{\mathcal{A}} \otimes \widetilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{op}}$, consistant en une somme finie de termes $(a \otimes b^{\mathrm{op}}) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_k$, dont la représentation naturelle sur $\mathcal{H}$ est donnée par $\pi_D(.)$ (2.1.4) ; la "forme volume" $\pi_D(\mathbf{c})$ doit résoudre l'équation
   $$\pi_D(\mathbf{c}) = \chi \quad \text{(cas pair)}, \quad \text{ou} \quad \pi_D(\mathbf{c}) = \mathbf{1} \quad \text{(cas impair)}. \tag{2.1.6}$$

Finalement, une telle géométrie est dite *connexe* si les seuls opérateurs commutant avec $\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{D}$ sont les scalaires.

2.2 Les plans de Moyal vus comme triplets spectraux

Les résultats que nous allons mentionner dans cette partie, ont été obtenus dans [46] en collaboration avec J. M. Gracia-Bondía, B. Iochum, T. Schücker et J. C. Várilly. Ils visent à réhabiliter les déformations du type Moyal dans le cadre de la GNC, en mettant fin à une polémique basée sur des inexactitudes.

Les critiques faites à l'encontre de ces déformations sont liées à deux notions différentes de dimension. Premièrement, en se basant sur l'isomorphisme de Wigner (voir la remarque 2.2.11), il a été argumenté que la dimension spectrale du plan de Moyal est nulle : étant isomorphe à des opérateurs compacts, les éléments de l'algèbre, multipliés par l'inverse de l'opérateur de Dirac à la puissance de la dimension de l'hyperplan considéré, donnent lieu à des opérateurs à trace et donc à trace de Dixmier nulle.
Comme nous le verrons lors du paragraphe suivant, cette assertion n'est vraie que lorsque l'on considère la représentation irréductible de Schrödinger. La représentation que nous allons utiliser, la représentation régulière gauche, ne souffre quant à elle d'aucune affection de cette sorte.

La deuxième critique visait la trivialité de l'homologie de Hochschild de l'algèbre sous-jacente au plan de Moyal. Pour cette deuxième notion non commutative de dimension (qui est indépendante de la représentation, du moment qu'elle soit fidèle) les caractéristiques topologiques sont primordiales. Il en résulte que cette critique n'est en fait que partiellement correcte, i.e. n'est vraie que pour certaines algèbres construites avec le produit de Moyal.

2.2.1 Quelques notions de Moyalologie

2.2.1.1 Espace de Schwartz et produit de Moyal

Soient $l \in \mathbb{N}$ et Θ une matrice $l \times l$ réelle antisymétrique. Soit aussi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$ l'espace de Schwartz (fonctions lisses ayant toutes leurs dérivées à décroissance rapide) sur $\mathbb{R}^l$. Pour $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$, le

produit de Moyal a été défini (définition 1.2.2) par :

$$f \star_\Theta h(x) := (2\pi)^{-l} \iint_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y \, d^l z \, e^{-iyz} f(x - \tfrac{1}{2}\Theta y) \, h(x+z). \tag{2.2.1}$$

Le produit de Moyal correspond évidemment au produit de Rieffel (1.2.1) associé à l'action de $\mathbb{R}^l$ sur lui-même par translation.

Au vu de la remarque (1.2.3), nous supposerons que la matrice de déformation Θ soit non dégénérée, c'est-à-dire que la forme bilinéaire $\sigma(y,z) := y \cdot \Theta z$ soit symplectique. Cela implique que la dimension soit paire, $l = 2N$. On définit aussi $\theta > 0$ par $\theta^{2N} := \det \Theta$. La formule (2.2.1) peut être alors réécrite comme

$$f \star_\Theta h(x) = (\pi\theta)^{-2N} \iint d^{2N} y \, d^{2N} z \, f(x+y) \, h(x+z) \, e^{-2iy\cdot\Theta^{-1}z}. \tag{2.2.2}$$

Cette dernière expression est très familière dans la formulation de la mécanique quantique sur l'espace des phases, où $\mathbb{R}^{2N}$ est paramétré par N paires de variables de positions et d'impulsions conjuguées. En sélectionnant

$$\Theta = \hbar S := \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1_N \\ -1_N & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2.3}$$

le star-produit associé (ou plutôt son commutateur) a été introduit dans ce contexte par Moyal [80], en utilisant un développement en puissance de $\hbar$, dont le premier terme non trivial donne le crochet de Poisson :

$$f \star_\hbar g(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(x) \, \frac{\partial g}{\partial (Sx)^\alpha}(x). \tag{2.2.4}$$

Le développement (2.2.4) de la forme intégrale (2.2.2) existe et quelquefois même devient exact, sous certaines conditions données dans [39].

Bien que particulièrement simplificatrice, en l'occurrence lorsque l'une des deux fonctions est un polynôme, la forme différentielle (ou asymptotique) (2.2.4) du produit de Moyal n'est pas utilisable pour la construction de triplets spectraux. En effet, l'opérateur de Moyal-multiplication associé étant

$$L_f^\Theta = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}} \left(\frac{i\theta}{2}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \, M_{\partial^\alpha f} \, \frac{\partial}{\partial (\Theta x)^\alpha},$$

ne peut en aucun cas définir un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^{2N})$.

Etant donné que nos préoccupations sont de nature analytique, il n'y a pas vraiment d'avantage à travailler avec la matrice de déformation Θ la plus générale qui soit ; on prendra alors pour simplifier (les notations principalement) $\Theta = \theta S$ avec θ réel. Avec ce choix de Θ, le produit de Moyal peut être réécrit comme

$$f \star_\theta g(x) := (\pi\theta)^{-2N} \iint_{\mathbb{R}^{4N}} d^{2N} y \, d^{2N} z \, f(y) g(z) \, e^{\frac{2i}{\theta}(x-y)\cdot S(x-z)}. \tag{2.2.5}$$

En plus des propriétés génériques du produit twisté (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4), on peut montrer par intégration par partie que le produit de Moyal satisfait à la "règle de multiplication mixte",

$$x_j.(f \star_\theta g) = f \star_\theta (x_j.g) + \frac{i\,\theta}{2} \frac{\partial f}{\partial (Sx)_j} \star_\theta g = (x_j.f) \star_\theta g - \frac{i\,\theta}{2} f \star_\theta \frac{\partial g}{\partial (Sx)_j}, \tag{2.2.6}$$

qui permettra en particulier d'écrire les opérateurs de différentiation partielle en termes de Moyal-commutateurs.

Pour simplifier les notations, on posera aussi $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ et $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N})$ l'espace des distributions tempérées.

Théorème 2.2.1. [54] *$\mathcal{A}_\theta := (\mathcal{S}, \star_\theta)$ est une algèbre de Fréchet sans unité, associative, involutive avec un produit jointement continu et une trace fidèle.*

La preuve de l'associativité a déjà été donnée dans le lemme 1.2.6. Que l'intégrale soit une trace pour le produit de Moyal, a aussi été montré dans le lemme 1.2.7. La continuité pour $\star_\theta$, dans la topologie produit de l'espace de Schwartz s'obtient en remarquant que

$$\|f \star_\theta g\|_\infty \leq (\pi\theta)^{-2N} \|f\|_1 \, \|g\|_1.$$

Des estimations similaires pour $x^\alpha \, \partial^\beta (f \star_\theta g)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2N}$ sont ensuite obtenues par induction, en utilisant la règle de multiplication mixte (2.2.6) ainsi que celle de Leibniz. Ces inégalités impliquent alors que le produit est séparément continu, donc jointement continu car $\mathcal{S}$ est un espace de Fréchet.

2.2.1.2 La base de l'oscillateur harmonique

Définition 2.2.2. *L'algèbre $\mathcal{A}_\theta$ possède une base naturelle, constituée des "transitions propres" f_{mn} de l'oscillateur harmonique, indicées par $m, n \in \mathbb{N}^N$. Avec comme d'habitude, la notation multi-indicielle $m = (m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{N}^N$, $|m| := m_1 + \cdots + m_N$, $m! := m_1! \ldots m_N!$. Soit*

$$H_l := \tfrac{1}{2}(x_l^2 + x_{l+N}^2) \quad \textit{pour } l = 1, \ldots, N \quad \textit{et} \quad H := H_1 + H_2 + \cdots + H_N,$$

les f_{mn} diagonalisent l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique :

$$\begin{aligned} H_l \star_\theta f_{mn} &= \theta(m_l + \tfrac{1}{2}) f_{mn}, \\ f_{mn} \star_\theta H_l &= \theta(n_l + \tfrac{1}{2}) f_{mn}. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Ces fonctions peuvent être définies par

$$f_{mn} := \frac{1}{\sqrt{\theta^{|m|+|n|} \, m! n!}} \, (a^*)^m \star_\theta f_{00} \star_\theta a^n, \tag{2.2.8}$$

où f_{00} est la Gaussienne $f_{00}(x) := 2^N e^{-2H/\theta}$, les fonctions de création et d'annihilation sont

$$a_l := \frac{1}{\sqrt{2}}(x_l + i \, x_{l+N}) \quad \textit{et} \quad a_l^* := \frac{1}{\sqrt{2}}(x_l - i \, x_{l+N}), \tag{2.2.9}$$

et $a^n := a_1^{n_1} \ldots a_N^{n_N} = a_1^{\star_\theta n_1} \star_\theta \cdots \star_\theta a_N^{\star_\theta n_N}$.

Les f_{mn} peuvent aussi être exprimées en termes de polynômes de Laguerre et sont évidemment très singulières dans la limite $\theta \to 0$ (voir l'appendice B). Le lemme suivant résume leurs propriétés principales.

Lemme 2.2.3. [54] *Soient $m, n, k, l \in \mathbb{N}^N$. Alors $f_{mn} \star_\theta f_{kl} = \delta_{nk} f_{ml}$ et $f_{mn}^* = f_{nm}$. Donc f_{nn} est un projecteur orthogonal et f_{mn} est nilpotent pour $m \neq n$. De plus, $\langle f_{mn}, f_{kl} \rangle = 2^N \, \delta_{mk} \, \delta_{nl}$. La famille $\{ f_{mn} : m, n \in \mathbb{N}^N \} \subset \mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^{2N})$ est une base orthogonale.*

Il est clair que $e_K := \sum_{|n|\leq K} f_{nn}$, pour $K \in \mathbb{N}$, définit un système d'unités approchées $\{e_K\}$ pour $\mathcal{A}_\theta$. Qui plus est, ce système est uniformément borné par rapport à la norme opératorielle sur $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ car

$$0 \leq e_K \leq \sum_{n=0}^{\infty} f_{nn} = 1.$$

Une conséquence du lemme 2.2.3 est la caractérisation matricielle du produit de Moyal.

Proposition 2.2.4. [54] *Soit $N = 1$. Alors $\mathcal{A}_\theta$ est isomorphe (en tant qu'algèbre de Fréchet) à l'algèbre matricielle des suites doublement indicées à décroissance rapide $c = \{c_{mn}\}$, i.e. qui sont telles que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, les semi-normes*

$$r_k(c) := \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} \theta^{2k}(m+\tfrac{1}{2})^k(n+\tfrac{1}{2})^k |c_{mn}|^2 \right)^{1/2}$$

soient finies. L'isomorphisme est donné par la décomposition $f = \sum_{m,n\in\mathbb{N}^N} c_{mn} f_{mn}$ dans la base des $\{f_{mn}\}$.

Pour $N > 1$, $\mathcal{A}_\theta$ est isomorphe au produit tensoriel projectif de N algèbres matricielles de cette sorte.

Définition 2.2.5. *Soit $\mathcal{G}_{st}$ (pour $s, t \in \mathbb{R}$) l'espace de Hilbert des éléments $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ pour lesquels*

$$\|f\|_{st}^2 := \sum_{m,n=0}^{\infty} \theta^{s+t}(m+\tfrac{1}{2})^s(n+\tfrac{1}{2})^t |c_{mn}|^2 < \infty. \tag{2.2.10}$$

Les espaces de Hilbert $\mathcal{G}_{st}$, pour $s, t \in \mathbb{R}^N$, sont définis par produit tensoriel :

$$\mathcal{G}_{st} := \mathcal{G}_{s_1t_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}_{s_Nt_N}.$$

En d'autres termes, les éléments $(2\pi)^{-N/2}\theta^{-(N+s+t)/2}(m+\frac{1}{2})^{-s/2}(n+\frac{1}{2})^{-t/2} f_{mn}$ (avec une évidente notation multi-indicielle), pour $m, n \in \mathbb{N}^N$, constituent une base orthonormée de $\mathcal{G}_{st}$.

Il est clair que pour $q \leq s$ et $r \leq t$ dans $\mathbb{R}^N$, on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}_{st} \subseteq \mathcal{G}_{qr} \subset \mathcal{S}'$ avec des inclusions denses et continues. De plus, $\mathcal{S} = \bigcap_{s,t\in\mathbb{R}^N} \mathcal{G}_{st}$ topologiquement (i.e. la topologie projective coïncide avec la topologie usuelle de $\mathcal{S}$) et $\mathcal{S}' = \bigcup_{s,t\in\mathbb{R}^N} \mathcal{G}_{st}$ topologiquement (i.e. la topologie inductive coïncide avec celle du dual fort de $\mathcal{S}'$). En particulier, le développement $f = \sum_{m,n\in\mathbb{N}^N} c_{mn} f_{mn}$ pour $f \in \mathcal{S}'$ converge dans la topologie du dual fort.

Pour deux espaces F, G, tels que $f \star_\theta g$ soit défini pour tout $f \in F$, $g \in G$, on désignera par $F \star_\theta G$ l'espace linéairement engendré par l'ensemble $\{f \star_\theta g : f \in F,\ g \in G\}$.

En utilisant la caractérisation matricielle du produit de Moyal, il est possible de montrer que $\mathcal{S} \star_\theta \mathcal{S} = \mathcal{S}$. Autrement dit, l'espace $\mathcal{S}$ possède la propriété de factorisation forte.

Proposition 2.2.6. [54, p. 877] *L'algèbre $\mathcal{A}_\theta = (\mathcal{S}, \star_\theta)$ possède la propriété de factorisation (non unique) : pour tout $h \in \mathcal{S}$ il existe $f, g \in \mathcal{S}$ tel que $h = f \star_\theta g$.*

La preuve de ce résultat est constructive, nous reproduisons ici les arguments principaux.

Preuve. Soit $h \in \mathcal{S}$ et soit $c = \{c_{mn}\}$ la suite correspondante. Posons

$$d_m := (\sup\{|c_{jk}| : j \in \mathbb{N}, k \leq m\})^{1/2}.$$

Alors, la suite diagonale $d := \{d_m\, \delta_{mn}\}$ et la suite $b := \{c_{mn}/d_m\}$ sont à décroissance rapide et satisfont $bd = c$. □

2.2.1.3 Algèbres des multiplicateurs

Définition 2.2.7. *En utilisant la propriété clef de trace (lemme 1.2.7), le produit de Moyal va pouvoir être défini par dualité sur certains sous-ensembles de $\mathcal{S}'$. En notant $\langle T, g\rangle \in \mathbb{C}$ l'évaluation d'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$ sur une fonction test $g \in \mathcal{S}$, on définit en utilisant la continuité du produit déformé sur $\mathcal{S}$, les distributions $T\star_\theta f$ et $f\star_\theta T$ pour $f \in \mathcal{S}$, par $\langle T\star_\theta f, g\rangle := \langle T, f\star_\theta g\rangle$ et $\langle f\star_\theta T, g\rangle := \langle T, g\star_\theta f\rangle$. L'involution de $\mathcal{S}$ est aussi étendue sur $\mathcal{S}'$ par $\langle T^*, g\rangle := \overline{\langle T, g^*\rangle}$.*

Des propriétés régularisantes du produit de Moyal (voir paragraphe suivant), on tire que si $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$, alors $T\star_\theta f$, $f\star_\theta T \in C^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ [54].

Les algèbres des multiplicateurs (gauche et droit) de $\mathcal{A}_\theta$ sont les sous-ensembles de $\mathcal{S}'$ définis par

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_L^\theta &:= \{\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N}) : T\star_\theta h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N}) \text{ pour tout } h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})\,\},\\ \mathcal{M}_R^\theta &:= \{\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N}) : h\star_\theta T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N}) \text{ pour tout } h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})\,\}.\end{aligned}$$

L'algèbre bilatère des multiplicateurs consiste en leur intersection :

$$\mathcal{M}^\theta := \mathcal{M}_L^\theta \cap \mathcal{M}_R^\theta.$$

On peut alors définir les produits $T\star_\theta S$ et $S\star_\theta T$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $S \in \mathcal{M}^\theta$. De plus, on montre (voir [106]) que $\mathcal{M}^\theta$ est une $*$-algèbre unifère, localement convexe, semi-réflexive, complète, nucléaire et qu'elle est munie d'un produit hypocontinu et d'une involution continue. De plus $\mathcal{M}^\theta$ est la compactification maximale de $\mathcal{A}_\theta$ définie par dualité (voir [55, Sec. 1.3]). Cette algèbre contient en plus des fonctions constantes, les ondes planes, les fonctions à croissance polynomiale ainsi que toutes les dérivées de la distribution de Dirac. Il est aussi à noter que pour des valeurs différentes du paramètre de déformation, $\mathcal{M}_\theta$ et $\mathcal{M}_{\theta'}$ sont isomorphes mais pas identique en tant que sous ensemble de $\mathcal{S}'$. En particulier l'exponentielle imaginaire quadratique

$$h_\beta(x) := \exp\big(i\beta \sum_{j=1}^N x_j x_{j+N}\big),$$

appartient à $\mathcal{M}_\theta$ si et seulement si $|\beta| \neq 2/\theta$ (voir [39]).

Rappelons aussi que lorsque $\theta = 0$, le rôle de $\mathcal{M}^\theta$ est joué par $\mathcal{O}_M$ ("M" pour multiplicateur), l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^{2N}$ ayant toutes leurs dérivées à croissances polynomiales.

Il existe un autre moyen de définir le produit de Moyal d'une paire de distributions appartenant aux espaces de type Sobolev $\mathcal{G}_{st}$ [54]. Si $f = \sum_{m,n} c_{mn} f_{mn} \in \mathcal{G}_{st}$, $g = \sum_{m,n} d_{mn} f_{mn} \in \mathcal{G}_{qr}$ et si $t + q \geq 0$, alors pour $a_{mn} := \sum_k c_{mk} d_{kn}$, la série $h := \sum_{m,n} a_{mn} f_{mn}$ converge dans $\mathcal{G}_{sr}$ et $f\star_\theta g = h$. Cette propriété est obtenue en utilisant

$$\|f\star_\theta g\|_{st} \leq \|f\|_{sq}\, \|g\|_{rt} \quad \text{si } q + r \geq 0. \tag{2.2.11}$$

Ces estimations, que nous réétablirons dans le cas $s = t = 0$, sont une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy–Schwarz pour le produit scalaire sous-jacent à la norme (2.2.10). En particulier, $\mathcal{G}_{t,-t}$ est une algèbre de Banach, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$.

Cette première unitalisation est clairement trop "grosse" pour la construction de triplets spectraux. En effet, une fois représentée sur $L^2(\mathbb{R}^{2N})$, $\mathcal{M}^\theta$ n'est pas une algèbre d'opérateurs bornés. En particulier $x^\mu \in \mathcal{M}^\theta$ et

$$L^\theta_{x^\mu} = M_{x^\mu} - \frac{i\theta}{2}\frac{\partial}{\partial(Sx)^\mu},$$

n'est pas borné.
Nous introduisons maintenant une deuxième compactification, qui par construction sera représentée sur $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ par des opérateurs bornés.

Définition 2.2.8. *Soit A_θ la C^*-algèbre*

$$A_\theta := \{\, T \in \mathcal{S}' : T\star_\theta g \in L^2(\mathbb{R}^{2N}) \text{ pour tout } g \in L^2(\mathbb{R}^{2N})\,\},$$

munie de la norme opératorielle $\|L^\theta(T)\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\, \|T\star_\theta g\|_2/\|g\|_2 : 0 \neq g \in L^2(\mathbb{R}^{2N})\,\}$.

Evidemment, $\mathcal{A}_\theta = \mathcal{S} \hookrightarrow A_\theta$, mais $\mathcal{A}_\theta$ n'est pas dense dans A_θ. Nous noterons A^0_θ la fermeture (en norme) de $\mathcal{A}_\theta$ dans A_θ.

Les lemmes suivants montrent que $L^2(\mathbb{R}^{2N})$, tout comme $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ sont inclus dans A_θ.

Lemme 2.2.9. [54] *Si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$, alors $f\star_\theta g \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ et $\|L^\theta_f\|_{\mathrm{op}} \leq (2\pi\theta)^{-N/2}\|f\|_2$.*

Preuve. En développant $f, g \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ sur la base orthonormée $\{\alpha_{nm}\} := (2\pi\theta)^{-N/2}\{f_{nm}\}$, $f = \sum_{m,n} c_{mn}\alpha_{mn}$ et $g = \sum_{m,n} d_{mn}\alpha_{mn}$, on a

$$\begin{aligned}\|f\star_\theta g\|_2^2 &= (2\pi\theta)^{-2N}\Big\|\sum_{m,l}\Big(\sum_n c_{mn}\, d_{nl}\Big) f_{ml}\Big\|_2^2 = (2\pi\theta)^{-N}\sum_{m,l}\Big|\sum_n c_{mn}\, d_{nl}\Big|^2 \\ &\leq (2\pi\theta)^{-N}\sum_{m,j}|c_{mj}|^2\sum_{k,l}|d_{kl}|^2 = (2\pi\theta)^{-N}\|f\|_2^2\,\|g\|_2^2,\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz. □

Lemme 2.2.10. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$, alors $f \in A_\theta$ et*

$$\|L_f\| \leq (\pi\theta)^{-N}\|f\|_1.$$

Preuve. Réécrivons le produit de Moyal comme

$$f\star_\theta g(x) = (\pi\theta)^{-2N}\int d^{2N}y\, f(y)\, e^{-\frac{2i}{\theta}xSy}\,\widehat{g}\big(\frac{2}{\theta}S(y-x)\big),$$

où $\widehat{g}$ désigne la transformée de Fourier de g. En remarquant ensuite que l'opérateur T_y, défini par

$$(T_y\psi)(x) := (\pi\theta)^{-N}\, e^{-\frac{2i}{\theta}xSy}\,\widehat{\psi}\big(\frac{2}{\theta}S(y-x)\big),$$

est unitaire, on obtient le résultat car

$$L_f\psi = (\pi\theta)^{-N}\int d^{2N}\, f(y)\,(T_y\psi).$$

□

Remarque 2.2.11. *Le lemme 2.2.9 peut aussi s'obtenir en utilisant la représentation irréductible de Schrödinger, à la place de la représentation régulière gauche (dégénérée avec multiplicité infinie). Soit $\sigma^\theta(.)$ la représentation de Schrödinger (voir [43, 81] par exemple), agissant sur $L^2(\mathbb{R}^N)$. On peut alors construire un opérateur unitaire W, la transformation de Wigner [43, 106], de $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ sur $L^2(\mathbb{R}^N) \otimes L^2(\mathbb{R}^N)$, tel que*

$$W\, L^\theta(f)\, W^{-1} = \sigma^\theta(f) \otimes \mathbf{1}.$$

Dans la représentation irréductible, $\sigma^\theta(f)$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt avec $\|\sigma^\theta(f)\|_2 = (2\pi\theta)^{-N/2}\|f\|_2$. On obtient alors directement le résultat :

$$\|L^\theta(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2N})} = \|\sigma^\theta(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\sigma^\theta(f)\|_2 = (2\pi\theta)^{-N/2}\|f\|_2.$$

Proposition 2.2.12. [67,106] *$(A_\theta, \|.\|_{\mathrm{op}})$ est une C^*-algèbre unifère d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^{2N})$, isomorphe à $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))$ et incluant $L^2(\mathbb{R}^{2N})$. De plus, $\mathcal{A}_\theta \hookrightarrow A_\theta$ continûment, mais $\mathcal{A}_\theta$ n'est pas dense dans A_θ, c'est-à-dire $A^0_\theta \subsetneq A_\theta$.*

La preuve de ce résultat est directement basée sur l'isomorphisme de Wigner W. En effet, pour $f \in \mathcal{S}$, $\sigma^\theta(f)$ est un opérateur compact (en particulier à trace), et donc

$$A^0_\theta = \{\, W^{-1}(T \otimes 1)W : T \text{ compact} \,\},$$

alors que

$$A_\theta = \{\, W^{-1}(T \otimes 1)W : T \text{ borné} \,\}.$$

$\mathcal{A}_\theta$ est donc une algèbre de Fréchet, dont la topologie est plus fine que celle donnée par la norme opératorielle. Nous allons voir maintenant qu'elle est aussi stable par calcul fonctionnel holomorphe dans sa C^*-complétion A^0_θ.

Proposition 2.2.13. *$\mathcal{A}_\theta$ est une pré-C^*-algèbre de Fréchet sans unité.*

Preuve. Nous adaptons ici les arguments du cas commutatif non compact [55, p. 135]. Pour montrer que $\mathcal{A}_\theta$ est stable sous calcul fonctionnel holomorphe, il est suffisant de vérifier que si $f \in \mathcal{A}_\theta$ avec $1 + f$ inversible dans A_θ avec inverse $1 + g$, alors la quasi-inverse g de f appartient à $\mathcal{A}_\theta$. De

$$(1 + f)\star_\theta(1 + g) = 1 + f + g + f\star_\theta g = 1,$$

on obtient $f\star_\theta f + g\star_\theta f + f\star_\theta g\star_\theta f = 0$. Il est alors suffisant de montrer que $f\star_\theta g\star_\theta f \in \mathcal{A}_\theta$, car la relation précédente impliquera $g\star_\theta f \in \mathcal{A}_\theta$ et donc $g = -f - g\star_\theta f \in \mathcal{A}_\theta$.

Etant donné que, $A_\theta \subset \mathcal{G}_{-r,0}$ pour tout $r > N$ [106, p. 886], et que $\mathcal{S} = \bigcap_{s,t\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,t}$, alors pour s, t arbitraires et p, q positifs

$$f\star_\theta g\star_\theta f \in \mathcal{G}_{s,p+r}\star_\theta \mathcal{G}_{-r,0}\star_\theta \mathcal{G}_{q,t} \subset \mathcal{G}_{s,t},$$

en utilisant le fait que $\mathcal{G}_{s,q}\star_\theta \mathcal{G}_{r,t} \subset \mathcal{G}_{s,t}$ si $q + r \geq 0$ (cf. équation 2.2.11). □

Finalement, les deux compactifications différentes $\mathcal{M}^\theta$ et A_θ de $\mathcal{A}_\theta$, contiennent toutes deux un groupe d'unitaires à $2N$ paramètres, engendré par les ondes planes :

$$\exp(ik\,\cdot)\star_\theta \exp(il\,\cdot) = e^{-\frac{i}{2}\theta\, k\cdot Sl} \exp(i(k + l)\cdot). \tag{2.2.12}$$

La pertinence de la présence de ce groupe d'unitaires réside dans le fait que l'algèbre de ce groupe est isomorphe à l'algèbre du $2N$-tore non commutatif, qui se trouve être plongé dans $\mathcal{M}^\theta$ et A_θ. Notons aussi que dans la représentation adjointe, ce groupe représente le groupe des translations de $\mathbb{R}^{2N}$:

$$\big(\exp(ik\,\cdot)\star_\theta f\star_\theta \exp(-ik\,\cdot)\big)(x) = f(x+\theta Sk),$$

pour $f \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$.

2.2.1.4 Autres algèbres

Définition 2.2.14. *Un opérateur pseudodifférentiel (*ΨDO*)* $A \in \Psi$DO *sur* $\mathbb{R}^k$ *est un opérateur linéaire pouvant s'écrire comme*

$$A\,h(x) = (2\pi)^{-k}\iint_{\mathbb{R}^{2k}} d^k\xi\, d^k y\, \sigma[A](x,\xi)\, h(y)\, e^{i\xi\cdot(x-y)}.$$

Soit $\Psi^d := \{\, A \in \Psi DO : \sigma[A] \in S^d \,\}$ *la classe des* ΨDOs *d'ordre* d*, avec*

$$S^d := \{\, \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k) : |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma(x,\xi)| \le C_{K\alpha\beta}(1+|\xi|^2)^{(d-|\beta|)/2} \text{ pour tout } x\in K\,\},$$

où K *est n'importe quel sous-ensemble compact de* $\mathbb{R}^k$*,* $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^k$*, et les* $C_{K\alpha\beta}$ *sont des constantes positives. On notera aussi* $\Psi^\infty := \bigcup_{d\in\mathbb{R}}\Psi^d$ *et* $\Psi^{-\infty} := \bigcap_{d\in\mathbb{R}}\Psi^d$*. Un* ΨDO A *est dit régularisant si* $A\in\Psi^{-\infty}$*, de manière équivalente [64, 98], si* A *s'étend en une application linéaire continue de* $C^\infty(\mathbb{R}^k)'$*, le dual de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, dans* $C^\infty(\mathbb{R}^k)$*.*

Lemme 2.2.15. *Si* $f\in\mathcal{S}$*, alors* L_f^θ *est un* ΨDO *régularisant.*

Preuve. A partir de sa définition (2.2.1), on obtient directement que l'opérateur de multiplication twistée à gauche par $f\in\mathcal{S}$ est un opérateur pseudodifférentiel de symbole $f(x-\frac{\theta}{2}S\xi)$. Clairement, L_f^θ définit une application continue $C^\infty(\mathbb{R}^{2N})'\to C^\infty(\mathbb{R}^{2N})$, étant donné que $C^\infty(\mathbb{R}^{2N})'\hookrightarrow\mathcal{S}'$, avec une inclusion continue et que $\mathcal{S}\star_\theta\mathcal{S}'\in C^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ [54, théorème 1]. On obtient aussi le résultat par

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta f(x-\tfrac{\theta}{2}S\xi)| \le C_{K\alpha\beta}(1+|\xi|^2)^{(d-|\beta|)/2},$$

pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{2N}$, tout compact $K\subset\mathbb{R}^{2N}$ et tout $d\in\mathbb{R}$, car $f\in\mathcal{S}$. □

Remarque 2.2.16. *A la différence du cas d'une variété compacte, les* ΨDO *régularisants sur une variété non compacte ne sont pas nécessairement des opérateurs compacts. En effet, pour tout* $n\in\mathbb{N}$*,* $L^\theta(f_{nn})$ *possède la valeur propre* 1 *avec multiplicité infinie et ne peut alors pas être compact.*

Pour les produits de Moyal génériques $\star_\Theta$, pour lesquels l'antisymétrie est la seule contrainte sur la matrice de déformation, les opérateurs L_f^Θ, R_f^Θ sont aussi des opérateurs pseudodifférentiels de symboles

$$\sigma[L_f^\Theta] = f(x-\tfrac12\Theta\xi) \quad\text{et}\quad \sigma[R_f^\Theta] = f(x+\tfrac12\Theta\xi). \tag{2.2.13}$$

Définition 2.2.17. *Pour* $m\in\mathbb{N}$*,* $f\in C^m(\mathbb{R}^k)$ *et* $\gamma,l\in\mathbb{R}$*, soit*

$$q_{\gamma lm}(f) := \sup\{\,(1+|x|^2)^{(-l+\gamma|\alpha|)/2}|\partial^\alpha f(x)| : x\in\mathbb{R}^k,\ |\alpha|\le m\,\};$$

et soit $\underline{\mathcal{V}}^m_{\gamma,l}$*, respectivement* $\mathcal{V}^m_{\gamma,l}$*, l'espace des fonctions appartenant à* $C^m(\mathbb{R}^k)$ *pour lesquelles*

$$(1+|x|^2)^{(-l+\gamma|\alpha|)/2}\,\partial^\alpha f(x)$$

s'annule à l'infini pour tout $|\alpha|\leq m$*, respectivement est fini pour tout* $x\in\mathbb{R}^k$*, normés par* $q_{\gamma lm}$*. On définit alors*

$$\mathcal{V}_\gamma := \bigcup_{l\in\mathbb{R}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{V}^m_{\gamma,l},\quad \textit{et plus généralement,}\quad \mathcal{V}_{\gamma,l}:=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{V}^m_{\gamma,l},$$

en particulier $\mathcal{V}_\gamma=\bigcup_{l\in\mathbb{R}}\mathcal{V}_{\gamma,l}$*. Soient aussi,* $\mathcal{O}_C:=\mathcal{V}_0$ *et* $\mathcal{O}_r:=\mathcal{V}_{0,r}$*. On a*

$$\mathcal{S}=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{l\in\mathbb{R}}\underline{\mathcal{V}}^m_{0,l}.$$

Finalement, en utilisant les notations de Laurent Schwartz [96], on désignera par $\mathcal{B}:=\mathcal{O}_0$*, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables ayant toutes leurs dérivées bornées.*

Nous aurons aussi besoin de $\dot{\mathcal{B}}:=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\underline{\mathcal{V}}^m_{0,0}$, l'espace des fonctions lisses s'annulant à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées et l'espace $\mathcal{D}_{L^2}$, des éléments de $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ dont toutes les dérivées sont de carré sommable (intersection des espaces de Sobolev) [84, 96]. En utilisant le lemme de Sobolev, on peut montrer que les éléments de $\mathcal{D}_{L^2}$ sont en fait des fonctions lisses et que de plus, $\mathcal{D}_{L^2}\subset\dot{\mathcal{B}}$ [96] : si $f\in\mathcal{D}_{L^2}$, sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ vérifie $(1+|\xi|^{2n})\mathcal{F}(f)\in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et par l'inégalité de Cauchy–Schwarz $\mathcal{F}(f)\in L^1(\mathbb{R}^{2N})$, donc f tend vers zéro à l'infini.

Nous allons reproduire maintenant les arguments, basés encore une fois sur la définition du produit de Moyal en terme d'intégrales oscillantes, qui montrent que l'espace $\mathcal{O}_C$ est stable sous produit de Moyal. Le produit de Moyal possède ainsi, sous certaines conditions, le même comportement que le produit ordinaire. Cette proposition, extraite de [41], généralise le lemme 1.2.9 dans le cas spécifique du plan de Moyal.

Proposition 2.2.18. [41] *L'espace* $\mathcal{O}_C$ *est une* $*$*-algèbre associative pour le produit de Moyal. Plus précisément, le produit de Moyal définit une application jointement continue de* $\mathcal{O}_r\times\mathcal{O}_s$ *à valeur dans* $\mathcal{O}_{r+s}$*, pour tout* $r,s\in\mathbb{R}$*. De plus,* $\mathcal{A}_\theta$ *est un idéal bilatère essentiel de* $\mathcal{O}_C$*.*

Preuve. Soit $f\in\mathcal{O}_r$ et $g\in\mathcal{O}_s$. D'après la règle de Leibniz pour le produit de Moyal, on a $\partial^\alpha(f\star_\theta g)=\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta f\star_\theta\partial^\gamma g$. Il est alors suffisant de montrer qu'il existe des constantes C_{rsm} telles que

$$(1+|x|^2)^{-(r+s)/2}|(\partial^\beta f\star_\theta\partial^\gamma g)(x)|\leq C_{rsm}\,q_{0rm}(f)\,q_{0sm}(g) \tag{2.2.14}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}^{2N}$ et avec $m\geq|\beta|+|\gamma|$ suffisamment grand. Pour $k\in\mathbb{N}$ (que l'on déterminera plus tard), on a

$$\begin{aligned}(\partial^\beta f\star_\theta\partial^\gamma g)(x)&=(\pi\theta)^{-2N}\iint d^{2N}y\,d^{2N}z\,\frac{\partial^\beta f(x+y)}{(1+|y|^2)^k}\,\frac{\partial^\gamma g(x+z)}{(1+|z|^2)^k}\,(1+|y|^2)^k(1+|z|^2)^k e^{\frac{2i}{\theta}y\cdot Sz}\\&=(\pi\theta)^{-2N}\iint d^{2N}y\,d^{2N}z\,\frac{\partial^\beta f(x+y)}{(1+|y|^2)^k}\,\frac{\partial^\gamma g(x+z)}{(1+|z|^2)^k}\,P_k(\partial_y,\partial_z)\big[e^{\frac{2i}{\theta}y\cdot Sz}\big]\\&=(\pi\theta)^{-2N}\iint d^{2N}y\,d^{2N}z\,e^{\frac{2i}{\theta}y\cdot Sz}\,P_k(-\partial_y,-\partial_z)\left[\frac{\partial^\beta f(x+y)}{(1+|y|^2)^k}\,\frac{\partial^\gamma g(x+z)}{(1+|z|^2)^k}\right],\end{aligned}$$

où P_k est un polynôme de degré $2k$ dans ses deux variables y et z. En utilisant ensuite

$$|\partial^\alpha((1+|x|^2)^{-k})| \leq c_{\alpha,k}(1+|x|^2)^{-k}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|\partial^\beta f \star_\theta \partial^\gamma g|(x) &\leq \sum_{k',k''\leq 2k} C'_{k'k''} \iint d^{2N}y\, d^{2N}z \left| \frac{\partial^{\beta+k'} f(x+y)}{(1+|y|^2)^k} \frac{\partial^{\gamma+k''} g(x+z)}{(1+|z|^2)^k} \right| \\
&\leq C''_{rsm}\, q_{0rm}(f)\, q_{0sm}(g) \iint d^{2N}y\, d^{2N}z\, \frac{(1+|x+y|^2)^{r/2}}{(1+|y|^2)^k} \frac{(1+|x+z|^2)^{s/2}}{(1+|z|^2)^k} \\
&\leq C'''_{rsm}\, q_{0rm}(f)\, q_{0sm}(g)\, (1+|x|^2)^{(r+s)/2} \int d^{2N}y\, (1+|y|^2)^{r/2-k} \int d^{2N}z\, (1+|z|^2)^{s/2-k},
\end{aligned}$$

avec $m \geq |\beta|+|\gamma|+2k$. L'inégalité de Cauchy $1+|x+y|^2 \leq 2(1+|x|^2)(1+|y|^2)$ a été utilisée pour extraire la variable x. Pour $k > N+\max\{r,s\}/2$ (et donc avec $m \geq |\beta|+|\gamma|+2N+\max\{r,s\}$), les intégrales sont finies. La continuité dans la topologie produit s'obtient alors à partir des estimations (2.2.14).

Que $\mathcal{S}$ soit un idéal bilatère de $\mathcal{O}_C$ est une conséquence de l'inclusion $\mathcal{O}_C \subset \mathcal{M}^\theta$. Rappelons qu'un idéal $\mathcal{I}$ d'une algèbre A est dit essentiel si $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}' \neq \{0\}$ pour tout autre idéal $\mathcal{I}' \neq \{0\}$. Rappelons aussi que cette condition est équivalente [55, proposition 1.8] à $a\mathcal{I} \neq 0$ pour tout $0 \neq a \in A$.
Supposons alors qu'il existe un élément $g \in \mathcal{O}_C$, qui soit tel que $g \star_\theta \mathcal{S} = 0$. L'ensemble $\{f_{mn}\}$ étant une base de $\mathcal{S}$, on a alors $g \star_\theta f_{mn} = 0$ pour tout $m,n \in \mathbb{N}^{2N}$. Ainsi, dans la décomposition $g = \sum_{m,n} c_{mn} f_{mn}$ (en tant qu'élément de $\mathcal{S}'$), tous les coefficients c_{mn} doivent être nuls et donc $g = 0$, qui contredit l'hypothèse. □

Finalement, le résultat suivant (basé sur des estimations de type Calderón–Vaillancourt) donne des conditions suffisantes pour que des fonctions lisses appartiennent à A_θ^0 ou A_θ.

Théorème 2.2.19. [43, 65] *L'inclusion $\mathcal{V}_{0,0}^{2N+1} \subset A_\theta$ est satisfaite, en particulier on a $\mathcal{B} \subset A_\theta$. De plus $\underline{\mathcal{V}}_{00}^{2N+1} \subset A_\theta^0$, et donc $\dot{\mathcal{B}} \subset A_\theta^0$.*

Nous avons montré dans le lemme 1.2.9 (et aussi dans la proposition 2.2.18), que $\mathcal{B}$ est une $*$-algèbre par produit de Moyal, pour lequel $\mathcal{A}_\theta$ est un idéal bilatère dense (car $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}^\theta$). De plus, $\mathcal{D}_{L^2} \subset \dot{\mathcal{B}} \subset \mathcal{M}^\theta$. Nous allons montrer maintenant que $(\mathcal{D}_{L^2}, \star_\theta)$ est aussi une $*$-algèbre.

Lemme 2.2.20. *$(\mathcal{D}_{L^2}, \star_\theta)$ est une $*$-algèbre avec produit et involution continus. De plus, $(\mathcal{D}_{L^2}, \star_\theta)$ est un idéal bilatère dans $(\mathcal{B}, \star_\theta)$.*

Preuve. Que les éléments de $\mathcal{D}_{L^2}$ soient stables sous produit de Moyal, est une conséquence de la règle de Leibniz et du lemme 2.2.9 :

$$\|\partial^\alpha(f \star_\theta g)\|_2 \leq (2\pi\theta)^{N/2} \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta f\|_2\, \|\partial^{\alpha-\beta} g\|_2.$$

La continuité jointe est encore obtenue par ces estimations, en utilisant le fait que $\mathcal{D}_{L^2}$ est un espace de Fréchet (voir [96]). La continuité de l'involution $f \mapsto f^*$ est immédiate.

La propriété d'idéal bilatère de $\mathcal{D}_{L^2}$ pour $\mathcal{B}$, vient directement de la stabilité de ces deux espaces sous dérivations et de l'inclusion $\mathcal{B} \subset A_\theta$, car alors

$$\|\partial^\alpha f \star_\theta \partial^\beta g\|_2 \leq \|L_{\partial^\alpha f}\| \|g\|_2 < \infty$$

pour tous $f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{D}_{L^2}$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2N}$. □

2.2.1.5 Le plongement unifère préféré

Les algèbres $\mathcal{M}^\theta$, A_θ sont trop grosses pour la construction de triplets spectraux. En particulier, $L^\theta(\mathcal{M}^\theta)$ contient des opérateurs non bornés et A_θ, étant isomorphe à $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))$, a une cohomologie de Hochschild inintéressante. Un plongement dans une algèbre à unité plus utile est donnée par $\mathcal{A}_\theta \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_\theta := (\mathcal{B}, \star_\theta)$. Cette dernière algèbre possède de plus une caractérisation intrinsèque : Le commutant de $L^\theta(\mathcal{S})$ (i.e. le commutant de $\mathcal{A}_\theta$ dans la représentation régulière gauche) dans la sous-algèbre des opérateurs bornés lisses (en norme) par rapport à l'action du groupe d'Heisenberg, est exactement $R^\theta(\mathcal{B})$ [77].

Proposition 2.2.21. *$\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$ est une pré-C^*-algèbre de Fréchet à unité.*

Preuve. Nous avons déjà obtenu que l'espace de Fréchet $\mathcal{B}$ est une étoile algèbre sous produit de Moyal, produit continu dans la topologie définie par la famille de semi-normes q_{00m}, $m \in \mathbb{N}$. Aussi, les éléments de $\mathcal{B}$ sont exactement les éléments de A_θ lisses (en norme) par rapport à l'action α (fortement continue sur $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$ par rapport aux semi-normes q_{00m}) de $\mathbb{R}^l$ par translation [92, théorème 7.1]. Soit maintenant G une fonction holomorphe sur un voisinage du spectre de L^θ_f, $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_\theta$. Alors $G(f) \in \widetilde{\mathcal{A}}_\theta$, car $\alpha(G(f)) = G(\alpha(f))$ et donc $L^\theta_{G(f)}$ est lisse en norme par rapport à l'action α. □

La C^*-complétion de $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$ contient A^0_θ (celle de $\mathcal{A}_\theta$), mais il n'est pas certain qu'elle soit identique à A_θ. Aussi, $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$ munie de la topologie que nous avons considérée ici, n'est pas un espace séparable. Il existe d'autres topologies sur $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$ (relativement naturelles), la rendant séparable [96, p. 203].

Finalement et en anticipant sur le paragraphe suivant, une des raisons principales pour choisir $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$ comme compactification, provient du fait qu'elle est maximale en tant que sous-algèbre de A_θ, stable par commutation avec l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{R}^{2N}$: pour tout $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_\theta$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{ad}^n_{\not\partial}(L^\theta_f) \in L^\theta(\mathcal{B}) \otimes M_{2^N}(\mathbb{C}).$$

En plus d'être isomorphe à l'espace des spineurs 'lisses', $\mathcal{D}_{L^2}$ possède toutes les propriétés nécessaires à la construction d'un triplet spectral sans unité.

Corollaire 2.2.22. *$(\mathcal{D}_{L^2}, \star_\theta)$ est une pré-C^*-algèbre de Fréchet sans unité, dont la C^*-complétion est A^0_θ.*

Preuve. Les arguments sont tout à fait analogues à ceux de la preuve de la proposition 2.2.13. Tout d'abord, on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_{L^2} \subset A^0_\theta$ avec des inclusions denses, de telle sorte que A^0_θ est aussi la C^*-complétion de $(\mathcal{D}_{L^2}, \star_\theta)$. En effet, la deuxième inclusion s'obtient en remarquant que si $f \in \mathcal{D}_{L^2}$, alors $W\, L^\theta(f)\, W^{-1} = \sigma^\theta(f) \otimes 1$ où $\sigma^\theta(f)$ est Hilbert–Schmidt donc compact.

Deuxièmement, si $f \in \mathcal{D}_{L^2}$ a un quasi-inverse $g \in A^0_\theta$, alors la proposition précédente montre que $g \in \widetilde{\mathcal{A}}_\theta$. En effet, étant donné que $(\mathcal{D}_{L^2}, \star_\theta)$ est un idéal dans $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$ d'après le lemme 2.2.20, on en déduit que $f \star_\theta g \star_\theta f \in \mathcal{D}_{L^2}$, qui est suffisant pour établir que $g \in \mathcal{D}_{L^2}$. □

Nous allons introduire maintenant un des outils essentiels pour la construction de triplets spectraux associés aux plans de Moyal. La terminologie ainsi que les concepts que nous allons évoquer sont issus de l'article [90], dans lequel Rennie a proposé d'équiper une algèbre non commutative sans unité $\mathcal{A}$ (par exemple $\mathcal{A}_\theta$) d'un "idéal local" $\mathcal{A}_c \subset \mathcal{A}$. Cette notion constitue une généralisation non commutative de $C^\infty_c(M)$, l'espace des fonctions à support compact. *Une algèbre de Fréchet $\mathcal{A}$ est dite locale*, si elle possède un idéal dense $\mathcal{A}_c$ avec unités locales ; *une*

algèbre $\mathcal{A}_c$ possède des unités locales, si pour chaque sous-ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathcal{A}_c$, il existe $u \in \mathcal{A}_c$ tel que $ua_i = a_i u = a_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.

Le produit de Moyal n'est évidemment pas local dans le sens ordinaire, le produit de deux fonctions (ou distributions) à supports disjoints n'étant pas nul a priori. De plus, il n'y a pas d'idéaux connus pour $\mathcal{A}_\theta$ et $\mathcal{D}_{L^2}$ (autres que $\mathcal{A}_\theta$), elles ne sont certainement pas locales au sens de Rennie [90].

On peut cependant définir une notion plus faible de localité, qui se trouve être particulièrement pertinente dans notre situation :

Définition 2.2.23. *Une algèbre de Fréchet $\mathcal{A}$ est dite quasi-locale s'il existe une sous-$*$-algèbre dense $\mathcal{A}_c \subset \mathcal{A}$ possédant des unités locales. Le candidat naturel pour le plan de Moyal est :*

$$\mathcal{A}_c := \bigcup_{K \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{c,K}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A}_{c,K} := \Big\{ f \in \mathcal{S} : f = \sum_{0 \leq |m|, |n| \leq K} c_{mn} f_{mn} \Big\}.$$

C'est-à-dire, $\mathcal{A}_c$ est l'algèbre des combinaisons linéaires finies des $\{ f_{mn} : m, n \in \mathbb{N}^N \}$; elle est évidemment dense dans $\mathcal{A}_\theta$ et dans $\mathcal{D}_{L^2}$ et possède un système d'unités locales donné par $\{e_K\}$, où $e_K := \sum_{|n| \leq K} f_{nn}$. Ainsi, $\mathcal{A}_\theta$ comme $\mathcal{D}_{L^2}$ sont quasi-locales.

2.2.2 Les triplets associés aux plans de Moyal

Nous allons donner maintenant les triplets spectraux sans unité associés aux plans de Moyal. Nous verrons qu'ils satisfont à toutes les conditions données lors du paragraphe 2.1.2.

Soient $\bar{\mathcal{A}}_\theta = (\mathcal{D}_{L^2}, \star_\theta)$, avec sous-algèbre dense $\mathcal{A}_\theta = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N}), \star_\theta)$ et plongement unifère préféré $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta := (\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N}), \star_\theta)$. L'espace de Hilbert des sections de carré intégrable du fibré (trivial) des spineurs est dans ce cas $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^{2N}) \otimes \mathbb{C}^{2^N}$. La représentation de $\bar{\mathcal{A}}_\theta$ (aussi celles de $\mathcal{A}_\theta$ et de $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$) est donnée par $\pi^\theta \colon \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) : f \mapsto L_f^\theta \otimes 1_{2^N}$, où L_f^θ agit sur l'espace de Hilbert réduit $\mathcal{H}_r := L^2(\mathbb{R}^{2N})$ par multiplication twistée.

Les opérateurs $\pi^\theta(f)$ sont bornés, car ils agissent diagonalement sur $\mathcal{H}$ et

$$\|L_f^\theta\| \leq (2\pi\theta)^{-N/2} \|f\|_2$$

pour $f \in \bar{\mathcal{A}}_\theta$ (lemme 2.2.9) et car $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta \subset A_\theta$ (théorème 2.2.19).

Comme dans le cadre générique des déformations isospectrales, l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{D}$ n'est pas déformé : il sera l'opérateur de Dirac (Euclidien) ordinaire $\partial\!\!\!/ := -i\, \partial_\mu \otimes \gamma^\mu$, où les matrices (Hermitiennes) de Dirac $\gamma^1, \ldots, \gamma^{2N}$, satisfaisant $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = +2\, \delta^{\mu\nu}$, représentent (irréductiblement) l'algèbre de Clifford $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^{2N})$ associée à $(\mathbb{R}^{2N}, \eta)$, avec η la métrique Euclidienne standard.

Pour la graduation de l'espace de Hilbert χ, on prendra la chiralité associée à l'algèbre de Clifford :

$$\chi := \gamma_{2N+1} := \mathbf{1}_{\mathcal{H}_r} \otimes (-i)^N \gamma^1 \gamma^2 \ldots \gamma^{2N}.$$

Donc, $\chi^2 = (-1)^N (\gamma^1 \ldots \gamma^{2N})^2 = (-1)^{2N} = \mathbf{1}$ et $\chi \gamma^\mu = -\gamma^\mu \chi$.

La structure réelle J est la conjugaison de charge pour les spineurs sur $\mathbb{R}^{2N}$. Il est suffisant de supposer que $J^2 = \pm 1$ (où les signes sont donnés dans [14, 55]) et que

$$J(1_{\mathcal{H}_r} \otimes \gamma^\mu) J^{-1} = -\mathbf{1}_{\mathcal{H}_r} \otimes \gamma^\mu,$$

les conditions sur les autres signes seront alors automatiquement garanties. En général, dans une représentation donnée, la conjugaison de charge s'écrit

$$J := CK, \tag{2.2.15}$$

où C est une matrice unitaire $2^N \times 2^N$ et K est la conjugaison complexe. Une forme explicite pour C dans une représentation particulière (où toutes les matrices γ^μ sont soit purement imaginaires soit purement réelles suivant que μ est pair ou impair) peut être trouvée dans [121].

La propriété fondamentale de la structure réelle est l'échange des multiplications twistées à droite et à gauche :

$$J(L^\theta(f^*) \otimes 1_{2^N})J^{-1} = R^\theta(f) \otimes 1_{2^N}. \tag{2.2.16}$$

Cette relation s'obtient en utilisant le fait que la conjugaison complexe est une involution pour le produit de Moyal (équation 1.2.2) et que L^θ_f agit diagonalement.

Le lemme 1.2.6 propriété (1.2.4) implique que $[\not{\partial}, \pi^\theta(f)] = -iL^\theta(\partial_\mu f) \otimes \gamma^\mu =: \pi^\theta(\not{\partial}(f))$ qui par le théorème 2.2.19 est borné pour tout $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_\theta = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})$, exactement comme dans le cas commutatif.

2.2.3 Vérification des axiomes

2.2.3.1 Compacité et dimension spectrale

Dans ce paragraphe, nous allons développer des outils et des techniques qui généralisent ceux de la théorie de la diffusion en mécanique quantique. La référence principale utilisée est le livre de B. Simon [100, Chapitre 4]. Nous utiliserons quelquefois la convention $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H}) := \mathcal{K}(\mathcal{H})$, avec $\|A\|_\infty := \|A\|_{\mathrm{op}}$.

Alternativement à 2.2.14, on peut définir l'opérateur pseudodifférentiel $g(-i\nabla)$ sur $\mathcal{H}_r$ pour $g \in L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$, par

$$g(-i\nabla)\psi := \mathcal{F}^{-1}(g\,\mathcal{F}\psi),$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier ordinaire. Ces deux définitions coïncident évidemment :

$$g(-i\nabla)\psi(x) = (2\pi)^{-2N} \iint d^{2N}\xi\, d^{2N}y\, e^{i\xi\cdot(x-y)}\, g(\xi)\psi(y),$$

mais permet d'obtenir directement l'inégalité $\|g(-i\nabla)\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, car alors

$$\|g(-i\nabla)\psi\|_2 = \|\mathcal{F}^{-1}M_g\mathcal{F}\psi\|_2 \leq \|M_g\|\|\psi\|_2 = \|g\|_\infty\|\psi\|_2.$$

Théorème 2.2.24. *Soient $f \in \mathcal{A}$ et $\lambda \notin \operatorname{sp}\not{\partial}$. En désignant par $R_{\not{\partial}}(\lambda)$ la résolvante de l'opérateur de Dirac, alors $\pi^\theta(f)\,R_{\not{\partial}}(\lambda)$ est un opérateur compact.*

En utilisant la première équation résolvante, $R_{\not{\partial}}(\lambda) = R_{\not{\partial}}(\lambda') + (\lambda' - \lambda)R_{\not{\partial}}(\lambda)R_{\not{\partial}}(\lambda')$, on peut toujours supposer que $\lambda = i\mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}^*$. Ce théorème va être démontré par interpolation complexe, en utilisant le résultat général sur l'invariance de la norme de Hilbert–Schmidt pour les déformations isospectrales (théorème 1.2.16) et la borne pour la norme opératorielle des opérateurs de multiplication twistée (lemme 2.2.9).

Lemme 2.2.25. *Lorsque $f \in \mathcal{S}$ et $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$, alors*

$$\pi^\theta(f)R_{\not{\partial}}(i\mu) \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff \pi^\theta(f)|R_{\not{\partial}}(i\mu)|^2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Preuve. La direction '$\Rightarrow$' est évidente car $R_{\not\partial}(-i\mu)$ est un opérateur normal borné ; en supposant que $\pi^\theta(f)R_{\not\partial}(i\mu)$ est compact, on en déduit que $\pi^\theta(f)|R_{\not\partial}(i\mu)|^2 = \pi^\theta(f)R_{\not\partial}(i\mu)R_{\not\partial}(-i\mu)$ l'est aussi. Réciproquement, si $\pi^\theta(f)|R_{\not\partial}(i\mu)|^2$ est compact, alors $\pi^\theta(f)|R_{\not\partial}(i\mu)|^2\pi^\theta(f^*)$ est compact et $\pi^\theta(f)R_{\not\partial}(i\mu)$ est lui aussi compact, sachant qu'un opérateur T est compact si et seulement si TT^* l'est. □

L'intérêt de ce lemme réside dans la nature diagonale de l'action de $\pi^\theta(f)|R_{\not\partial}(i\mu)|^2$ sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_r \otimes \mathbb{C}^{2^N}$; il sera alors possible de remplacer, sans aucune modification dans nos conclusions $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H}_r$, $\pi^\theta(f)$ par L^θ_f et de considérer le Laplacien $\Delta := -\sum_{\mu=1}^{2N} \partial_\mu^2$ à la place du carré de l'opérateur de Dirac $\not\partial^2$.

Lemme 2.2.26. *Si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$, alors $L^\theta_f g(-i\nabla)$, $M_f g(-i\nabla) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_r)$ avec*

$$\|L^\theta_f\, g(-i\nabla)\|_2 = \|M_f\, g(-i\nabla)\|_2 = (2\pi)^{-N}\|f\|_2\,\|g\|_2.$$

Preuve. La première égalité a déjà été établie lors du théorème 1.2.16. Pour la seconde, il suffit de remarquer que $K_{M_f\, g(-i\nabla)}(x,y) = (2\pi)^{-N} f(x)\widehat{g}(x-y)$, où $\widehat{g}$ désigne la transformée de Fourier de g et d'appliquer le théorème 2.11 [100] sur la caractérisation des opérateurs de Hilbert–Schmidt ; i.e. un opérateur sur un espace de Hilbert séparable $L^2(X,\mu)$ est de Hilbert-Schmidt si et seulement si c'est un opérateur à noyau dont le noyau est de carré sommable sur $(M\times M, \mu\times\mu)$. Ainsi,

$$\|M_f\, g(-i\nabla)\|_2^2 = (2\pi)^{-2N}\int d^{2N}x\, d^{2N}y\, |f|^2(x)\, |\widehat{g}|^2(x-y) = (2\pi)^{-2N}\,\|f\|_2\,\|g\|_2.$$

□

Lemme 2.2.27. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$ avec $2 \le p < \infty$, alors $L^\theta_f\, g(-i\nabla) \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H}_r)$ et*

$$\|L^\theta_f\, g(-i\nabla)\|_p \le (2\pi)^{-N(1/2+1/p)}\theta^{-N(1/2-1/p)}\,\|f\|_2\,\|g\|_p.$$

Preuve. Le cas $p = 2$ (avec l'égalité) a été traité dans le lemme précédent. Pour $p = \infty$, on a $\|L^\theta_f\, g(-i\nabla)\|_\infty \le (2\pi\theta)^{-N/2}\|f\|_2\,\|g\|_\infty$, car $\|L^\theta_f\, g(-i\nabla)\|_\infty \le \|L^\theta_f\|_\infty\,\|g(-i\nabla)\|_\infty$.

Le résultat pour $2 < p < \infty$ sera obtenu par interpolation complexe (voir [13, 100]). A cette fin, notons que l'on peut toujours supposer $g \ge 0$: en définissant la fonction a par $|a| = 1$ et $g = a|g|$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|L^\theta_f\, g(-i\nabla)\|_2^2 &= \mathrm{Tr}(|L^\theta_f\, g(-i\nabla)|^2) = \mathrm{Tr}(\bar{g}(-i\nabla)\, L^\theta_{f^*}\, L^\theta_f\, g(-i\nabla)) \\
&= \mathrm{Tr}(|g|(-i\nabla)\,\bar{a}(-i\nabla)\, L^\theta_{f^*}\, L^\theta_f\, a(-i\nabla)\,|g|(-i\nabla)) \\
&= \mathrm{Tr}(\bar{a}(-i\nabla)\,|g|(-i\nabla)\, L^\theta_{f^*}\, L^\theta_f\,|g|(-i\nabla)\, a(-i\nabla)) \\
&= \mathrm{Tr}(|L^\theta_f\,|g|(-i\nabla)|^2) = \|L^\theta_f\,|g|(-i\nabla)\|_2^2,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|L^\theta_f\, g(-i\nabla)\|_\infty &= \|L^\theta_f\, a(-i\nabla)\,|g|(-i\nabla)\|_\infty = \|L^\theta_f\,|g|(-i\nabla)\, a(-i\nabla)\|_\infty \\
&\le \|L^\theta_f\,|g|(-i\nabla)\|_\infty\,\|a(-i\nabla)\|_\infty = \|L^\theta_f\,|g|(-i\nabla)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ensuite et pour une fonction positive, bornée et à support compact g, on définit l'application

$$F_p : z \mapsto L^\theta_f\, g^{zp}(-i\nabla) : S = \{\, z \in \mathbb{C} : 0 \le \Re z \le \tfrac{1}{2}\,\} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_r).$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $F_p(iy) = L_f^\theta g^{iyp}(-i\nabla) \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{H}_r)$ car $g^{iyp} \in L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$. De plus, $\|F_p(iy)\|_\infty \leq (2\pi\theta)^{-N/2}\|f\|_2$.

On a aussi, d'après le lemme 2.2.26, $F_p(\frac{1}{2}+iy) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_r)$ et

$$\|F_p(\tfrac{1}{2}+iy)\|_2 = (2\pi)^{-N}\|f\|_2\,\|g^{p/2}\|_2.$$

On obtient alors par interpolation complexe (voir par exemple [86, Chap. 9] ou [100]) que $F(z) \in \mathcal{L}^{1/\Re z}(\mathcal{H}_r)$, pour tout z dans la bande S. De plus,

$$\|F_p(z)\|_{1/\Re z} \leq \|F(0)\|_\infty^{1-2\Re z}\,\|F(\tfrac{1}{2})\|_2^{2\Re z} = \|f\|_2(2\pi\theta)^{-\frac{N}{2}(1-2\Re z)}(2\pi)^{-2N\Re z}\,\|g^{p/2}\|_2^{2\Re z}.$$

En appliquant cette estimation pour $z = 1/p$, on obtient pour de telles fonctions g :

$$\|L_f^\theta\, g(-i\nabla)\|_p = \|F(1/p)\|_p \leq (2\pi)^{-N(1/2+1/p)}\theta^{-N(1/2-1/p)}\|f\|_2\,\|g\|_p.$$

Finalement, le résultat est obtenu en utilisant la densité des fonctions à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^{2N})$. □

Remarque 2.2.28. *Dans le cas commutatif, si f et g sont bornées sur $\mathbb{R}^k$, alors*

$$\|f(x)\,g(-i\nabla)\|_\infty \leq \|f\|_\infty\,\|g\|_\infty.$$

On obtient ainsi, par interpolation complexe [2, 86, 100], une estimation 'symétrique' en f et g :

$$\|f(x)\,g(-i\nabla)\|_p \leq (2\pi)^{-k/p}\,\|f\|_p\,\|g\|_p,$$

pour $p \geq 2$. Pour $g(x) = (1+|x|^2)^{-1}$ et $f \in \mathcal{S}$, on obtient alors que $M_f R_{\not\partial}(z)$ est compact.

Lemme 2.2.29. *Si $f \in \mathcal{S}$ et $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$, alors $\pi^\theta(f)\,|R_{\not\partial}(i\mu)|^2 \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour tout $p > N$.*

Preuve. Nous avons :

$$\pi^\theta(f)\,|R_{\not\partial}(i\mu)|^2 = (L_f^\theta \otimes 1_{2^N})\,(\not\partial - i\mu)^{-1}(\not\partial + i\mu)^{-1} = L_f^\theta\,(-\partial^\nu\partial_\nu + \mu^2)^{-1} \otimes 1_{2^N}.$$

Ainsi, cet opérateur agit diagonalement sur $\mathcal{H}_r \otimes \mathbb{C}^{2^N}$ et le lemme 2.2.27 implique que

$$\left\|L_f^\theta\,(-\partial^\nu\partial_\nu + \mu^2)^{-1}\right\|_p \leq (2\pi)^{-N(1/2+1/p)}\theta^{-N(1/2-1/p)}\,\|f\|_2\left(\int \frac{d^{2N}\xi}{(\xi^\nu\xi_\nu + \mu^2)^p}\right)^{1/p},$$

qui est fini pour $p > N$. □

Preuve du théorème 2.2.24. D'après le lemme 2.2.25, il était suffisant de montrer que $\pi^\theta(f)\,|R_{\not\partial}(i\mu)|^2$ est compact pour $0 \neq \mu$ réel. □

Nous allons établir le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 2.2.30. *La dimension spectrale du $2N$-plan de Moyal est $2N$.*

Nous allons commencer par établir des propriétés d'existence. D'après le lemme 2.2.27 et parce que $[\not\partial, \pi^\theta(f)] = -iL^\theta(\partial_\mu f) \otimes \gamma^\mu$, on voit que $\pi^\theta(f)(\not\partial^2 + \varepsilon^2)^{-l}$ et $[\not\partial, \pi^\theta(f)]\,(\not\partial^2 + \varepsilon^2)^{-l}$ appartiennent à $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour tout $p > N/l$ (nous supposerons toujours $\varepsilon > 0$). Dans le prochain lemme, nous allons montrer que $[|\not\partial|, \pi^\theta(f)]\,(\not\partial^2 + \varepsilon^2)^{-l}$ satisfait aux mêmes propriétés de sommabilité.

Lemme 2.2.31. *Lorsque $f \in \mathcal{S}$ et $\frac{1}{2} \leq l \leq N$, alors $[|\partial\!\!\!/|, \pi^\theta(f)]\,(\partial\!\!\!/^2 + \varepsilon^2)^{-l} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour tout $p > N/l$.*

Preuve. Nous allons utiliser l'identité spectrale, valable pour n'importe quel opérateur positif A,

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}\frac{A^2}{A^2+\mu},$$

ainsi que l'identité (valable aussi pour tout A, B avec $\lambda \notin \operatorname{sp} A$) :

$$[B, (A-\lambda)^{-1}] = (A-\lambda)^{-1}[A,B](A-\lambda)^{-1}. \tag{2.2.17}$$

Pour tout $\rho > 0$,

$$\begin{aligned}
[|\partial\!\!\!/|, \pi^\theta(f)] = [|\partial\!\!\!/| + \rho, \pi^\theta(f)] &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}, \pi^\theta(f)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}\left(1 - \frac{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}\right)\big[(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2, \pi^\theta(f)\big]\frac{1}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\mu\,\frac{\sqrt{\mu}}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}\big[(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2, \pi^\theta(f)\big]\frac{1}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\mu\frac{\sqrt{\mu}}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}\Big(-\pi^\theta(\partial^\mu\partial_\mu f) - 2i(L^\theta(\partial_\mu f)\otimes\gamma^\mu)\partial\!\!\!/ + 2\rho\big[|\partial\!\!\!/|, \pi^\theta(f)\big]\Big) \\
&\qquad\qquad \times \frac{1}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

La dernière égalité implique que

$$\begin{aligned}
\big\|[|\partial\!\!\!/|, \pi^\theta(f)]\,(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-l}\big\|_p \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\mu\Big\|\frac{\sqrt{\mu}}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}\Big(&-\pi^\theta(\partial^\mu\partial_\mu f) - 2i(L^\theta(\partial_\mu f)\otimes\gamma^\mu)\partial\!\!\!/ \\
&+ 2\rho\big[|\partial\!\!\!/|, \pi^\theta(f)\big]\Big)\frac{1}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}\,(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-l}\Big\|_p.
\end{aligned}$$

Ainsi, la preuve se réduit à montrer que pour tout $f \in \mathcal{S}$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\mu\Big\|\frac{\sqrt{\mu}}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}\,\pi^\theta(f)\partial\!\!\!/\,\frac{1}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}\,(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-l}\Big\|_p < \infty. \tag{2.2.19}$$

Etant donné que les normes de Schatten sont des normes symétriques

$$\|ABC\|_p \leq \|A\|\|B\|_p\|C\|,$$

et que seul l'espace de Hilbert restreint est concerné, l'expression (2.2.19) est majorée par

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\mu\,\sqrt{\mu}\Big\|\frac{1}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu}\Big\|^{3/2}\Big\|\frac{\partial\!\!\!/}{(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\Big\|\Big\|\pi^\theta(f)\frac{1}{(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{l-1/2}}\frac{1}{((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu)^{1/2}}\Big\|_p \\
\leq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\mu}\,d\mu}{(\mu+\rho^2)^{3/2}}\big\|\pi^\theta(f)\,(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-l+1/2}((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu)^{-1/2}\big\|_p.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.2.27, on peut estimer la dépendance en μ de la dernière norme :

$$\begin{aligned}
&\left\|\pi^\theta(f)((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu)^{-1/2}(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-l+1/2}\right\|_p \\
&\qquad \le (2\pi)^{-N(1/2+1/p)}\theta^{-N(1/2-1/p)}\|f\|_2\left\|((|\xi|+\rho)^2+\mu)^{-1/2}(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-l+1/2}\right\|_p \\
&\qquad \le C(p,\theta)\left\|((|\xi|+\rho)^2+\mu)^{-1/2}\right\|_q\left\|(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-l+1/2}\right\|_r,
\end{aligned}$$

avec $p^{-1}=q^{-1}+r^{-1}$ choisis de manière appropriée. Ces intégrales sont finies pour $q>2N$ et $r>2N/(2l-1)$ (pour $l=\frac{1}{2}$, il faut prendre $r=\infty$ et $q=p$). Pour de telles valeurs,

$$\begin{aligned}
&\left\|\pi^\theta(f)((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\mu)^{-1/2}(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-l+1/2}\right\|_p \\
&\le C(p,\theta,N;f)\|(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-l+1/2}\|_r\,\Omega_{2N}^{1/q}\left(\int_0^\infty dR\frac{R^{2N-1}}{((R+\rho)^2+\mu)^{q/2}}\right)^{1/q} \\
&= C(p,\theta,N;f)\|(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-l+1/2}\|_r\,\pi^{N/q}\,\frac{\Gamma^{1/q}(\frac{q}{2}-N)}{\Gamma^{1/q}(\frac{q}{2})}\,\mu^{-1/2+N/q} \\
&=: C'(p,q,\theta,N;f)\,\mu^{-1/2+N/q}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'intégrale (2.2.19) est plus petite que

$$C'(p,q,\theta,N;f)\int_0^\infty d\mu\frac{\mu^{N/q}}{(\mu+\rho^2)^{3/2}},$$

donc finie pour $q>2N$ et $p>N/l$. La preuve est alors complète. □

Le lemme suivant est une généralisation de l'inégalité de Cwikel [26, 100, 112] pour les opérateurs de multiplication twistée. Cette inégalité permet d'obtenir dans le cas commutatif une estimation sur les valeurs singulières des opérateurs compacts du type $M_f g(-i\nabla)$. Ces estimations donnent alors des conditions suffisantes, sur les fonctions f et g, pour que $M_f g(-i\nabla)$ appartienne aux classes de Schatten faibles $\mathcal{L}^{(p,\infty)}(\mathcal{H})$.

Lemme 2.2.32. *Si $f\in\mathcal{S}$, alors $\pi^\theta(f)\,(|\partial\!\!\!/|+\varepsilon)^{-1}\,\pi^\theta(f^*)\in\mathcal{L}^{(2N,\infty)}(\mathcal{H})$.*

Preuve. Comme remarqué précédemment, il suffit de remplacer $\partial\!\!\!/^2$ par Δ, $\pi^\theta(f)$ par L_f^θ et $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H}_r$. Soit $g(-i\nabla):=(\sqrt{\Delta}+\varepsilon)^{-1}$. Etant donné que la fonction g est positive, elle peut être décomposée comme $g=\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n$ où

$$g_n(x):=\begin{cases} g(x) & \text{si } 2^{n-1}<g(x)\le 2^n, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour $n\in\mathbb{Z}$, soient A_n et B_n les opérateurs définis par

$$A_n:=\sum_{k\le n}L_f^\theta\,g_k(-i\nabla)\,L_{f^*}^\theta,\quad B_n:=\sum_{k>n}L_f^\theta\,g_k(-i\nabla)\,L_{f^*}^\theta.$$

La norme opératorielle de A_n peut être estimée par

$$\begin{aligned}
\|A_n\|_\infty &\le \|L_f^\theta\|^2\left\|\sum_{k\le n}g_k(-i\nabla)\right\|_\infty \le (2\pi\theta)^{-N}\|f\|_2^2\left\|\sum_{k\le n}g_k\right\|_\infty \\
&\le (2\pi\theta)^{-N}\|f\|_2^2\,2^n =: 2^n\,c_1(\theta,N;f).
\end{aligned}$$

La norme trace de B_n peut, quant à elle, être calculée en utilisant le lemme 2.2.26 :

$$\begin{aligned}\|B_n\|_1 &= \Big\|\Big(\sum_{k>n} g_k(-i\nabla)\Big)^{1/2} L^\theta_{f^*}\Big\|_2^2 = \Big\|L^\theta_f\Big(\sum_{k>n} g_k(-i\nabla)\Big)^{1/2}\Big\|_2^2 = (2\pi)^{-2N}\|f\|_2^2\Big\|\Big(\sum_{k>n} g_k\Big)^{1/2}\Big\|_2^2\\ &= (2\pi)^{-2N}\|f\|_2^2\Big\|\sum_{k>n} g_k\Big\|_1 = (2\pi)^{-2N}\|f\|_2^2\sum_{k>n}\|g_k\|_1\\ &\le (2\pi)^{-2N}\|f\|_2^2\sum_{k>n}\|g_k\|_\infty\,\nu\{\mathrm{supp}(g_k)\},\end{aligned}$$

où ν est la mesure Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2N}$. Par définition, $\|g_k\|_\infty \le 2^k$ et

$$\begin{aligned}\nu\{\mathrm{supp}(g_k)\} &= \nu\{\, x\in\mathbb{R}^{2N} : 2^{k-1} < g(x) \le 2^k \,\} \le \nu\{\, x\in\mathbb{R}^{2N} : (|x|+\varepsilon)^{-1} \ge 2^{k-1}\,\}\\ &\le 2^{2N(1-k)}\, c_2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|B_n\|_1 &\le (2\pi)^{-2N}\|f\|_2^2\, 2^{2N} c_2 \sum_{k>n} 2^{k(1-2N)}\\ &< \pi^{-2N}\, c_2\, \|f\|_2^2\, 2^{n(1-2N)} =: 2^{n(1-2N)}\, c_3(N;f).\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, nous avons sommé une série géométrique, convergente puisque $N > \frac{1}{2}$.

On peut alors estimer la m-ième valeur singulière μ_m de B_n (les valeurs singulières étant comptées avec leur propre multiplicité) : $\|B_n\|_1 = \sum_{k=0}^\infty \mu_k(B_n)$ et pour $m = 1, 2, 3, \ldots$, on a $\|B_n\|_1 \ge \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k(B_n) \ge m\,\mu_m(B_n)$. Ainsi, $\mu_m(B_n) \le \|B_n\|_1\, m^{-1} \le 2^{n(1-2N)}\, c_3\, m^{-1}$. Finalement, l'inégalité de Fan [100, théorème 1.7] implique

$$\begin{aligned}\mu_m(L^\theta_f\, g(-i\nabla)\, L^\theta_{f^*}) &= \mu_m(A_n + B_n) \le \mu_1(A_n) + \mu_m(B_n)\\ &\le \|A_n\| + \|B_n\|_1\, m^{-1} \le 2^n\, c_1 + 2^{n(1-2N)}\, c_3\, m^{-1}.\end{aligned}$$

Pour un m donné, on peut choisir $n \in \mathbb{Z}$ de telle sorte que $2^n \le m^{-1/2N} < 2^{n+1}$. Alors

$$\mu_m(L^\theta_f\, g(-i\nabla)\, L^\theta_{f^*}) \le c_1\, m^{-1/2N} + c_3\, m^{-(1-2N)/2N} m^{-1} =: c_4(\theta, N; f)\, m^{-1/2N}.$$

Cette dernière inégalité implique directement le résultat, car alors

$$L^\theta_f\, (\sqrt{\Delta} + \varepsilon)^{-1}\, L^\theta_{f^*} \in \mathcal{L}^{(2N,\infty)}(\mathcal{H}_r).$$

□

Corollaire 2.2.33. *Si $f, g \in \mathcal{S}$, alors $\pi^\theta(f)\,(|\partial\!\!\!/\,| + \varepsilon)^{-1}\,\pi^\theta(g) \in \mathcal{L}^{(2N,\infty)}(\mathcal{H})$.*

Preuve. Il suffit de considérer des combinaisons linéaires de $\pi^\theta(f \pm g^*)\,(|\partial\!\!\!/\,| + \varepsilon)^{-1}\,\pi^\theta(f^* \pm g)$ et de $\pi^\theta(f \pm ig^*)\,(|\partial\!\!\!/\,| + \varepsilon)^{-1}\,\pi^\theta(f^* \mp ig)$, pour obtenir le résultat. □

Corollaire 2.2.34. *Pour tout $h \in \mathcal{S}$, $\pi^\theta(h)\,(|\partial\!\!\!/\,| + \varepsilon)^{-1}$, $\pi^\theta(h)\,(\partial\!\!\!/^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} \in \mathcal{L}^{(2N,\infty)}(\mathcal{H})$.*

Preuve. D'après la propriété de factorisation forte (proposition 2.2.6), pour tout $h \in \mathcal{S}$, il existe $f, g \in \mathcal{S}$ tels que $h = f \star_\theta g$. Ainsi

$$\pi^\theta(h)\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1} = \pi^\theta(f)\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\,\pi^\theta(g) + \pi^\theta(f)\,[\pi^\theta(g), (|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}],$$

et nous obtenons à partir de l'identité (2.2.17)

$$\pi^\theta(h)\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1} = \pi^\theta(f)\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\,\pi^\theta(g) + \pi^\theta(f)\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\,[|\not{\partial}|, \pi^\theta(g)]\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}.$$

Par des arguments similaires à ceux des lemmes 2.2.27 et 2.2.31, le dernier terme appartient à l'espace $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour $p > N$ et donc à $\mathcal{L}^{(2N,\infty)}(\mathcal{H})$.

La deuxième assertion est obtenue en remarquant (par calcul fonctionnel) que l'opérateur $(|\not{\partial}| + \varepsilon)(\not{\partial}^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}$ est borné. □

Le lemme suivant est la dernière propriété d'existence dont nous avons besoin.

Lemme 2.2.35. *Si $f \in \mathcal{S}$, alors $\pi^\theta(f)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N}$ et $\pi^\theta(f)(\not{\partial}^2 + \varepsilon^2)^{-N}$ sont dans $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$.*

Preuve. Par calcul fonctionnel, il est suffisant de montrer le résultat pour $\pi^\theta(f)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N}$. Nous allons factoriser $f \in \mathcal{S}$ (proposition 2.2.6), en utilisant la notation :

$$\begin{aligned} f &= f_1 \star_\theta f_2 = f_1 \star_\theta f_{21} \star_\theta f_{22} = f_1 \star_\theta f_{21} \star_\theta f_{221} \star_\theta f_{222} \\ &= \cdots = f_1 \star_\theta f_{21} \star_\theta f_{221} \star_\theta \cdots \star_\theta f_{22\cdots 21} \star_\theta f_{22\cdots 22}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \pi^\theta(f)\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N} &= \pi^\theta(f_1)\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\,\pi^\theta(f_2)\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N+1} \\ &\quad + \pi^\theta(f_1)\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\,[|\not{\partial}|, \pi^\theta(f_2)]\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N}. \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

D'après le lemme 2.2.27, $\pi^\theta(f_1)(|\not{\partial}|+\varepsilon)^{-1} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour tout $p > 2N$; et par le lemme 2.2.31, le terme $[|\not{\partial}|, \pi^\theta(f_2)](|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N}$ appartient à $\mathcal{L}^q(\mathcal{H})$ pour tout $q > 1$. Alors, le dernier terme du membre de droite de l'équation (2.2.20) appartient à $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Introduisons la relation d'équivalence $A \sim B$ pour $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ lorsque $A - B$ est à trace. On a alors

$$\pi^\theta(f)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N} \sim \pi^\theta(f_1)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_2)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N+1},$$

donc,

$$\begin{aligned} \pi^\theta(f)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N} &\sim \pi^\theta(f_1)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_2)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N+1} \\ &= \pi^\theta(f_1)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_{21})(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_{22})(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N+2} \\ &\quad + \pi^\theta(f_1)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_{21})(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\,[|\not{\partial}|, \pi^\theta(f_{22})]\,(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N+1} \\ &\sim \pi^\theta(f_1)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_{21})(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_{22})(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N+2} \sim \cdots \\ &\sim \pi^\theta(f_1)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_{21})(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_{221})(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1} \ldots \pi^\theta(f_{22\cdots 22})(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

La deuxième relation est satisfaite car $\pi^\theta(f_1)(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1}\pi^\theta(f_{21})(|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-1} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour $p > N$ d'après le lemme 2.2.27 et $[|\not{\partial}|, \pi^\theta(f_{22})](|\not{\partial}| + \varepsilon)^{-2N+1} \in \mathcal{L}^q(\mathcal{H})$ pour $q > 2N/(2N-1)$ d'après le lemme 2.2.31. Les autres équivalences sont obtenues à partir d'arguments similaires. Le corollaire 2.2.33, l'inégalité de Hölder pour les classes de Schatten faibles (voir par exemple [55, proposition 7.16]) ainsi que l'inclusion $\mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ conduisent finalement au résultat. □

Nous allons calculer maintenant des traces de Dixmier. En utilisant la trace régularisée d'opérateurs pseudodifférentiels définie par

$$\mathrm{Tr}_\Lambda(A) := (2\pi)^{-2N} \iint_{|\xi|\leq\Lambda} d^{2N}\xi\, d^{2N}x\, \sigma[A](x,\xi),$$

le résultat que nous allons obtenir peut être conjecturé car

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \mathrm{Tr}_\Lambda(\cdot)/\log(\Lambda^{2N})$$

est heuristiquement reliée à la trace de Dixmier et car nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{2N\log\Lambda}\, \mathrm{Tr}_\Lambda\big(\pi^\theta(f)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\big)\\
&\quad= \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{2^N}{2N(2\pi)^{2N}\log\Lambda} \iint_{|\xi|\leq\Lambda} d^{2N}\xi\, d^{2N}x\, f(x-\tfrac{\theta}{2}S\xi)\,(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-N}\\
&\quad= \frac{2^N\,\Omega_{2N}}{2N\,(2\pi)^{2N}} \int d^{2N}x\, f(x).
\end{aligned}$$

Cependant, pour établir rigoureusement ce résultat dans le contexte du produit de Moyal, il est nécessaire d'adopter une stratégie plus subtile. Nous allons ainsi calculer la trace de Dixmier de l'opérateur $\pi^\theta(f)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}$, comme le résidu de la trace ordinaire d'une famille méromorphe d'opérateurs. Dans cette perspective, les résultats récents de [4], qui étendent le théorème de trace de Connes (voir [12] et [55, Chap. 7]), seront déterminants.

Dans le langage de [62], notre première tâche va être de vérifier que la *dimension analytique* de $\mathcal{A}_\theta$ est égale à $2N$, c'est-à-dire que pour $f\in\mathcal{A}_\theta$, l'opérateur $\pi^\theta(f)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-z/2}$ est à trace lorsque $\Re z > 2N$.

Lemme 2.2.36. *Si $f\in\mathcal{S}$, alors $L^\theta_f\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-z/2}$ est à trace pour $\Re z>2N$, et*

$$\mathrm{Tr}[L^\theta_f\,(\Delta+\varepsilon^2)^{-z/2}] = (2\pi)^{-2N}\iint d^{2N}\xi\, d^{2N}x f(x)\,(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-z/2}.$$

Preuve. Soit $S^{d,l}$ la classe des symboles (définition 3.2.7) de Shubin (ou symboles GLS) [60,98] et $\Psi^{ld}(\mathbb{R}^{2n})$ la classe correspondante d'opérateurs pseudodifférentiels. Il est démontré dans [32], que si $\sigma(x,\xi)\in S^{d,l}(\mathbb{R}^{2n})$ pour $d,l<-n$, alors l'opérateur pseudodifférentiel associé à ce symbole est à trace. Qui plus est, on a

$$\mathrm{Tr}\,A = (2\pi)^{-n}\iint d^nx\, d^n\xi\, \sigma(x,\xi).$$

En utilisant la formule du produit pour les symboles d'opérateurs pseudodifférentiels, on obtient pour $p>N$,

$$\begin{aligned}
\sigma\big[L^\theta_f(\Delta+\varepsilon^2)^{-p}\big](x,\xi) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^N} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\, \partial^\alpha_\xi\sigma[L^\theta_f](x,\xi)\,\partial^\alpha_x\sigma\big[(\Delta+\varepsilon^2)^{-p}\big](x,\xi)\\
&= \sigma[L^\theta_f](x,\xi)\,\sigma\big[(\Delta+\varepsilon^2)^{-p}\big](x,\xi)\\
&= f(x-\tfrac{\theta}{2}S\xi)\,(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-p}.
\end{aligned}$$

Ainsi, toujours avec $p > N$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\big(L_f^\theta(\Delta+\varepsilon^2)^{-p}\big) &= (2\pi)^{-2N}\iint d^{2N}\xi\, d^{2N}x\, f(x-\tfrac{\theta}{2}S\xi)\,(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-p}\\ &= (2\pi)^{-2N}\iint \xi\, d^{2N}x\, f(x)\,(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-p}\, d^{2N}. \qquad \square\end{aligned}$$

Nous continuons avec un résultat technique, dans l'esprit de [90]. Considérons le système d'unités approchées $\{e_K\}_{K\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_c$ avec $e_K := \sum_{0\le|n|\le K} f_{nn}$. Les éléments e_K sont des projecteurs ordonnés : $e_K \star_\theta e_L = e_L \star_\theta e_K = e_K$ pour $K \le L$ et sont de plus des unités locales pour $\mathcal{A}_c$ (définition 2.2.23).

Lemme 2.2.37. *Si $f \in \mathcal{A}_{c,K}$,*

$$\pi^\theta(f)\,(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-N} - \pi^\theta(f)\,\big(\pi^\theta(e_K)(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_K)\big)^N \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}).$$

Preuve. Pour simplifier les notations, nous utiliserons $e := e_K$ et $e_n := e_{K+n}$. Etant donné que $\pi^\theta(f)$ est borné et $f = f\star_\theta e$, nous pouvons supposer $f = e \in \mathcal{A}_{c,K}$.

De $e_n \star_\theta e = e \star_\theta e_n = e$, on déduit

$$\pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}\big(1-\pi^\theta(e_n)\big) = \pi^\theta(e)\,(\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}\,[\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_n)]\,(\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}. \tag{2.2.21}$$

De plus, $\pi^\theta(e)\,[\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_n)] = [\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e\star_\theta e_n)] - [\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e)]\,\pi^\theta(e_n) = 0$, car $\pi^\theta(e_n)$, pour $n \ge 1$, est une unité locale pour $[\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e)]$ (voir l'équation 3.1.3) :

$$[\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e)]\,\pi^\theta(e_n) = [\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e)].$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}A_n &:= \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}[\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_n)](\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}\\ &= \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}[\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_1)](\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}[\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_n)](\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}\\ &= \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}[\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_1)]\pi^\theta(e_2)(\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}[\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_n)](\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1} = \cdots\\ &= \big(\pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}\big)\big([\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_1)](\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}\big)\big([\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_2)](\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}\big)\cdots\big([\partial\!\!\!/,\pi^\theta(e_n)](\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}\big).\end{aligned}$$

Pour $n = 2N$, A_{2N} apparaît comme un produit de $2N+1$ termes, chacun appartenant à $\mathcal{L}^{2N+1}(\mathcal{H})$ d'après le lemme 2.2.27. Ainsi, d'après l'inégalité de Hölder, A_{2N} est à trace et donc $\pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/+\lambda)^{-1}(1-\pi^\theta(e_{2N})) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. D'où

$$\begin{aligned}&\pi^\theta(e)\,(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1}\big(1-\pi^\theta(e_{4N})\big)\\ &\quad= \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/-i\varepsilon)^{-1}\big(1-\pi^\theta(e_{2N})+\pi^\theta(e_{2N})\big)(\partial\!\!\!/+i\varepsilon)^{-1}\big(1-\pi^\theta(e_{4N})\big)\\ &\quad= \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/-i\varepsilon)^{-1}\big(1-\pi^\theta(e_{2N})\big)(\partial\!\!\!/+i\varepsilon)^{-1}\big(1-\pi^\theta(e_{4N})\big)\\ &\qquad+ \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/-i\varepsilon)^{-1}\pi^\theta(e_{2N})(\partial\!\!\!/+i\varepsilon)^{-1}\big(1-\pi^\theta(e_{4N})\big) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}),\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

c'est-à-dire que $\pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1} \sim \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N})$, avec la relation d'équivalence définie précédemment. En itérant ces équivalences, on obtient

$$\begin{aligned}\pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-N} &\sim \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N})(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-N+1}\\ &\sim \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N})(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{8N})(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-N+2} \sim \cdots\\ &\sim \pi^\theta(e)(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N})(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{8N})\cdots(\partial\!\!\!/^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N^2}).\end{aligned}$$

En utilisant ensuite l'identité (2.2.17), le dernier terme devient

$$\begin{aligned}&\pi^\theta(e)(\not\partial + i\varepsilon)^{-1}\pi^\theta(e)(\not\partial - i\varepsilon)^{-1}\pi^\theta(e_{4N})(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{8N})\cdots(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N^2})\\&\quad+\pi^\theta(e)(\not\partial + i\varepsilon)^{-1}[\not\partial,\pi^\theta(e)](\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N})(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{8N})\cdots(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N^2}).\end{aligned}$$

Le second terme de la dernière expression est à trace, car composé d'un produit de N termes, chacun appartenant à $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour $p > N$, ainsi que d'un terme dans $\mathcal{L}^q(\mathcal{H})$ pour $q > 2N$, d'après le lemme 2.2.27. En commutant $\pi^\theta(e)$ encore une fois, on obtient en utilisant la relation d'ordre sur les unités locales e_K

$$\begin{aligned}&\pi^\theta(e)(\not\partial + i\varepsilon)^{-1}\pi^\theta(e)(\not\partial - i\varepsilon)^{-1}\pi^\theta(e_{4N})(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{8N})\cdots(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N^2})\\&=\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{8N})\cdots(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N^2})\\&\quad+\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}[\not\partial,\pi^\theta(e)](\not\partial - i\varepsilon)^{-1}\pi^\theta(e_{4N})(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{8N})\cdots(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N^2}).\end{aligned}$$

Le dernier terme étant encore à trace, il en résulte que

$$\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\sim\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{8N})\cdots(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e_{4N^2}).$$

On obtient finalement le résultat en appliquant cet algorithme $(N-1)$ fois :

$$\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\sim\big(\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e)\big)^N. \qquad \square$$

Corollaire 2.2.38. $\mathrm{Tr}_\omega\big(\pi^\theta(g)\,[\pi^\theta(f),(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}]\big) = 0$ *pour tout* $g\in\mathcal{S}$ *et tout projecteur* $f\in\mathcal{A}_c$.

Preuve. C'est une conséquence du lemme précédent, généralisé à n'importe quel projecteur f de l'algèbre quasi-locale $\mathcal{A}_c$ et appliqué à $\pi^\theta(g\star_\theta f)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}$ et à son adjoint. $\square$

Nous disposons dorénavant de tous les outils nécessaires pour évaluer la trace de Dixmier.

Proposition 2.2.39. *Soit* $f\in\mathcal{S}$, *alors chaque trace de Dixmier* Tr_ω *de* $\pi^\theta(f)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}$ *est indépendante de* ε *et de* ω, *et*

$$\mathrm{Tr}_\omega\big(\pi^\theta(f)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\big)=\frac{2^N\,\Omega_{2N}}{2N\,(2\pi)^{2N}}\int d^{2N}x\,f(x)=\frac{1}{N!\,(2\pi)^N}\int d^{2N}x\,f(x),$$

où Ω_{2N} *désigne l'hypersurface de la boule unité de* $\mathbb{R}^{2N}$.

Preuve. Nous allons commencer par démontrer ce résultat pour $f\in\mathcal{A}_c$. Soit e une unité locale pour f (qui en possède toujours par hypothèse), i.e. $e\star_\theta f = f\star_\theta e = f$. D'après les lemmes 2.2.35 et 2.2.37 et parce que $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est contenu dans le noyau de la trace Dixmier, on obtient

$$\mathrm{Tr}_\omega(\pi^\theta(f)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N})=\mathrm{Tr}_\omega\big(\pi^\theta(f)\,(\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e))^N\big).$$

Le lemme 2.2.37 appliqué à $f=e$ implique alors que l'opérateur positif $\big(\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e)\big)^N$ appartient à $\mathcal{L}^{1+}(\mathcal{H})$ puisqu'égal à $\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}$ plus un terme appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Ainsi, [4, théorème 5.6] implique (étant donné que la limite converge, toutes les traces de Dixmier donneront le même résultat) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\omega\big(\pi^\theta(f)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\big)&=\lim_{s\downarrow 1}(s-1)\,\mathrm{Tr}\big[\pi^\theta(f)\,(\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e))^{Ns}\big]\\&=\lim_{s\downarrow 1}(s-1)\,\mathrm{Tr}\big(\pi^\theta(f)\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-Ns}\pi^\theta(e)+E_{Ns}\big),\end{aligned}\tag{2.2.23}$$

où

$$E_{Ns} := \pi^\theta(f)\left(\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e)\right)^{Ns} - \pi^\theta(f)\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-Ns}\pi^\theta(e).$$

Le lemme 2.2.37 montre encore que $E_N \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.

Pour $s > 1$, le premier terme de $\pi^\theta(f)\left(\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e)\right)^{Ns}$ de E_{Ns} est à trace. En effet, d'après le lemme 2.2.27 et puisque $\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour $p > N$, nous avons $\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e) \in \mathcal{L}^{Ns}(\mathcal{H})$. Cet opérateur étant positif, on conclut que

$$\left(\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-1}\pi^\theta(e)\right)^{Ns} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}).$$

Le second terme, $\pi^\theta(f)\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-Ns}\pi^\theta(e)$ appartient aussi à $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, car

$$\|\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-Ns}\pi^\theta(e)\|_1 = \|(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-Ns/2}\pi^\theta(e)\|_2^2 = \|\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-Ns/2}\|_2^2$$

qui est fini d'après le lemme 2.2.26. Ainsi, $E_{Ns} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ pour tout $s \geq 1$. De l'équation (2.2.23), il résulte que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\omega\big(\pi^\theta(f)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\big) &= \lim_{s\downarrow 1}(s-1)\,\mathrm{Tr}\big(\pi^\theta(f)\pi^\theta(e)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-Ns}\pi^\theta(e)\big)\\ &= \lim_{s\downarrow 1}(s-1)\,\mathrm{Tr}\big(\pi^\theta(f)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-Ns}\big).\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.2.36, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\omega\big(\pi^\theta(f)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\big) &= \lim_{s\downarrow 1}(s-1)\,\mathrm{Tr}(1_{2^N})\,\mathrm{Tr}\big(L_f^\theta(\Delta+\varepsilon^2)^{-Ns}\big)\\ &= 2^N(2\pi)^{-2N}\lim_{s\downarrow 1}(s-1)\iint d^{2N}\xi\, d^{2N}x\, f(x)\,(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-Ns}\\ &= \frac{1}{N!\,(2\pi)^N}\int d^{2N}x\, f(x),\end{aligned}$$

où l'identité

$$\int d^{2N}\xi\,(|\xi|^2+\varepsilon^2)^{-Ns} = \pi^N\frac{\Gamma(N(s-1))}{\Gamma(Ns)\,\varepsilon^{2N(s-1)}},$$

ainsi que le comportement $\Gamma(N\alpha) \sim 1/N\alpha$ pour $\alpha \downarrow 0$, ont été utilisés. La proposition est alors démontrée pour $f \in \mathcal{A}_c$.

Soit finalement f arbitraire dans $\mathcal{S}$. Rappelons aussi que $\{e_K\}_K$ forme un système d'unités approchées pour $\mathcal{A}_\theta$. D'après la propriété de factorisation forte $f = g\star_\theta h$ avec $g, h \in \mathcal{S}$, le corollaire 2.2.38 implique

$$\begin{aligned}&\big|\mathrm{Tr}_\omega\big((\pi^\theta(f)-\pi^\theta(e_K\star_\theta f\star_\theta e_K))(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\big)\big|\\ &\quad= \big|\mathrm{Tr}_\omega\big((\pi^\theta(f)-\pi^\theta(e_K\star_\theta f))\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\big)\big|\\ &\quad= \big|\mathrm{Tr}_\omega\big((\pi^\theta(g)-\pi^\theta(e_K\star_\theta g))\,\pi^\theta(h)(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\big)\big|\\ &\quad\leq \|\pi^\theta(g)-\pi^\theta(e_K\star_\theta g)\|_\infty\ \mathrm{Tr}_\omega\big|\pi^\theta(h)\,(\not\partial^2+\varepsilon^2)^{-N}\big|.\end{aligned}$$

Etant donné que $\|\pi^\theta(g)-\pi^\theta(e_K\star_\theta g)\|_\infty \leq (2\pi\theta)^{-N/2}\|g-e_K\star_\theta g\|_2$ tend vers zéro lorsque K croît, la preuve est complète car $e_K\star_\theta f\star_\theta e_K$ appartient à $\mathcal{A}_c$ et car

$$\int d^{2N}x\,[e_K\star_\theta f\star_\theta e_K](x) \to \int d^{2N}x\, f(x)\,,\ \ K\uparrow\infty. \qquad \square$$

Remarque 2.2.40. *A partir d'arguments similaires, on peut aussi montrer que pour tout $f \in \mathcal{S}$,*

$$\mathrm{Tr}_\omega\big(\pi^\theta(f)\,(|\not{\partial}|+\varepsilon)^{-2N}\big) = \mathrm{Tr}_\omega\big(\pi^\theta(f)\,(\not{\partial}^2+\varepsilon^2)^{-N}\big).$$

En conclusion : *les dimensions spectrale et analytique des plans de Moyal coïncident.* Le lemme 2.2.35, la proposition 2.2.39 ainsi que la remarque précédente terminent la preuve du théorème 2.2.30. □

2.2.3.2 La condition de régularité

Théorème 2.2.41. *Pour $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_\theta$, les opérateurs bornés $\pi^\theta(f)$ et $[\not{\partial}, \pi^\theta(f)]$ appartiennent à l'intersection des domaines des puissances de la dérivation $\delta(T) := [|\not{\partial}|, T]$.*

Dans le cas compact commutatif, la démonstration de ce résultat [23, 55] est grandement simplifiée, en remarquant que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\delta^n) = \bigcap_{n,m\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Dom}(L^n)\cap\mathrm{Dom}(R^n)\big),$$

où les opérateurs (sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) L et R sont définis par

$$L(\cdot) := |\not{\partial}|^{-1}\,[\not{\partial}^2,\cdot], \quad R(\cdot) := [\not{\partial}^2,\cdot]\,|\not{\partial}|^{-1}. \tag{2.2.24}$$

Cette simplification vient du fait que les commutateurs avec $\not{\partial}^2$ sont beaucoup plus faciles à manipuler que ceux avec $|\not{\partial}|$. Cependant, dans le cas non compact (commutatif ou non), les opérateurs L et R ne sont pas bien définis, car $|\not{\partial}|^{-1}$ ne l'est pas. Une preuve analogue devrait exister, en définissant à la place de L et R les transformations L_λ et R_λ, pour λ réelle, par

$$L_\lambda(\cdot) := (|\not{\partial}|+i\lambda)^{-1}\,[\not{\partial}^2,\cdot], \quad R_\lambda(\cdot) := [\not{\partial}^2,\cdot]\,(|\not{\partial}|-i\lambda)^{-1}.$$

Nous allons démontrer cette condition par une approche plus directe, dont la vertu est de rester valable dans le cas commutatif compact ou non.

Preuve du théorème 2.2.41. Comme précédemment, puisque $[\not{\partial}, \pi^\theta(f)] = -iL^\theta(\partial_\mu f)\otimes\gamma^\mu$, il est suffisant de démontrer le résultat pour $\pi^\theta(f)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\rho>0$, en itérant l'identité spectrale (2.2.18) n fois, on obtient pour $\delta^n(\pi^\theta(f))$:

$$\frac{1}{\pi^n}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty d\lambda_n\ldots d\lambda_1 \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{\lambda_i}}{(|\not{\partial}|+\rho)^2+\lambda_i}\,(\mathrm{ad}(|\not{\partial}|+\rho)^2)^n\,(\pi^\theta(f))\prod_{i=1}^n\frac{1}{(|\not{\partial}|+\rho)^2+\lambda_i},$$

avec une notation évidente pour les commutateurs itérés n fois.

De $[\not{\partial}^2, \pi^\theta(f)] = \not{\partial}^2(f) + 2\not{\partial}(f)\,\not{\partial}$, avec la notation $\not{\partial}(f) := -iL^\theta(\partial_\mu f)\otimes\gamma^\mu$, on peut vérifier que le terme de plus haut degré en $\not{\partial}$ dans le développement de $(\mathrm{ad}(|\not{\partial}|+\rho)^2)^n\,(\pi^\theta(f))$ est $2^n\not{\partial}^n(f)\,\not{\partial}^n$. Pour le reste de la démonstration, nous ne considérerons que les termes de plus haut degré en $\not{\partial}$. Comme dans la preuve du lemme 2.2.31, tous les commutateurs $[|\not{\partial}|, \pi^\theta(f)]$ qui apparaissent à cause de la présence artificielle de ρ, seront traités comme une somme de deux

opérateurs d'ordre un. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi^n}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty d\lambda_n\dots d\lambda_1\prod_{i=1}^n\frac{\sqrt{\lambda_i}}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i}2^n\partial\!\!\!/^n(f)\partial\!\!\!/^n\prod_{j=1}^n\frac{1}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_j}\\
&\quad=\frac{1}{\pi^n}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty d\lambda_n\dots d\lambda_1\,2^n\partial\!\!\!/^n(f)\,\partial\!\!\!/^n\prod_{i=1}^n\frac{\sqrt{\lambda_i}}{((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i)^2}\\
&\qquad+\frac{1}{\pi^n}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty d\lambda_n\dots d\lambda_1\left[\prod_{i=1}^n\frac{1}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i},2^n\partial\!\!\!/^n(f)\right]\partial\!\!\!/^n\prod_{i=1}^n\frac{\sqrt{\lambda_i}}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i}.
\end{aligned}\tag{2.2.25}$$

En utilisant $\int_0^\infty d\lambda\, t(\lambda+t^2)^{-2}\sqrt{\lambda}=\pi/2$, le premier terme du membre de droite de l'équation (2.2.25) est égal à

$$2^n\partial\!\!\!/^n(f)\frac{\partial\!\!\!/^n}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^n}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\,\frac{|\partial\!\!\!/|+\rho}{((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda)^2}\sqrt{\lambda}\right)^n=\partial\!\!\!/^n(f)\frac{\partial\!\!\!/^n}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^n},$$

qui est un opérateur borné.

Pour les autres termes, il faut remarquer que le commutateur $\left[\prod_i((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i)^{-1},\partial\!\!\!/^n(f)\right]$ peut se réécrire comme

$$-\prod_{i=1}^n((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i)^{-1}\left[\prod_{j=1}^n((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_j),\partial\!\!\!/^n(f)\right]\prod_{k=1}^n((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_k)^{-1},$$

et le terme de plus haut degré en $\partial\!\!\!/$ est, à une constante près

$$\prod_{i=1}^n((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i)^{-1}\,\partial\!\!\!/^{n+1}(f)\,\partial\!\!\!/^{2n-1}\prod_{k=1}^n((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_k)^{-1}.$$

Ainsi la preuve se réduit à montrer que la norme suivante est finie

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty d\lambda_n\dots d\lambda_1\prod_{i=1}^n\frac{\sqrt{\lambda_i}}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i}\,\partial\!\!\!/^{n+1}(f)\,\partial\!\!\!/^{3n-1}\left(\prod_{j=1}^n\frac{1}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_j}\right)^2\right\|\\
&\le\|\partial\!\!\!/^{n+1}(f)\|\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{i=1}^n d\lambda_i\left(\left\|\frac{\partial\!\!\!/^{3-1/n}}{((|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i)^{3/2-1/2n}}\right\|\left\|\frac{\sqrt{\lambda_i}}{(|\partial\!\!\!/|+\rho)^2+\lambda_i}\right\|^{3/2+1/2n}\right)\\
&\le\|\partial\!\!\!/^{n+1}(f)\|\left(\int_0^\infty d\lambda\,\frac{\sqrt{\lambda}}{(\rho^2+\lambda)^{3/2+1/2n}}\right)^n.
\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est finie pour tout $n\in\mathbb{N}$ ainsi que la dernière norme, car $\partial^\alpha f\in\widetilde{\mathcal{A}}_\theta\subset A_\theta$ pour $|\alpha|\le n+1$; la preuve est alors complète. □

2.2.3.3 La condition de finitude

Lemme 2.2.42. *Les vecteurs lisses pour l'opérateur de Dirac sont donnés par*

$$\mathcal{H}^\infty:=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{Dom}(\partial\!\!\!/^k)\simeq\mathcal{D}_{L^2}\otimes\mathbb{C}^{2^N}.$$

Preuve. Puisque $\mathcal{D}_{L^2}$ est le domaine commun des dérivées partielles ∂_μ, où $\mu = 1, \ldots, 2N$ et $\not\partial = -i\partial_\mu \otimes \gamma^\mu$, la conclusion est immédiate. □

D'après le lemme 2.2.20, $\bar{\mathcal{A}}_\theta := \mathcal{D}_{L^2}$ est un idéal dans $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$. Alors, $\mathcal{H}^\infty$ est un $\bar{\mathcal{A}}_\theta$-pullback d'un module libre à gauche sur $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$.

De plus, il y a sur $\mathcal{H}^\infty$ une structure Hermitienne naturelle à valeur dans $\bar{\mathcal{A}}_\theta$, donnée par

$$(\xi \mid \eta)' := \sum_{j=1}^{2^N} \xi_j \star_\theta \eta_j^*, \quad \text{pour tout} \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}^\infty.$$

Puisque $\mathcal{D}_{L^2} \subset \mathcal{M}^\theta$, le couplage Hermitien $(\pi^\theta(a)\xi \mid \eta)' := a \star_\theta (\xi \mid \eta)'$ est à valeur dans $\mathcal{A}_\theta$ si $a \in \mathcal{A}_\theta$. La proposition 2.2.39 et le lemme 1.2.6 impliquent alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\omega\big(\pi^\theta((\xi \mid \eta)')\,(\not\partial^2 + \varepsilon^2)^{-N}\big) &= \frac{2^N\,\Omega_{2N}}{2N\,(2\pi)^{2N}} \sum_{j=1}^{2^N} \int d^{2N}x\,(\xi_j \star_\theta \eta_j^*)(x) \\ &= \frac{1}{N!\,(2\pi)^N} \sum_{j=1}^{2^N} \int d^{2N}x\,\eta_j^*(x)\,\xi_j(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $(\xi \mid \eta) := N!\,(2\pi)^N (\xi \mid \eta)'$ est une structure Hermitienne satisfaisant à l'équation (2.1.5). Son unicité peut être obtenue en reproduisant la preuve du cas commutatif [55, p. 501].

Remarque 2.2.43. *De la définition des espaces $\mathcal{O}_r$, il est clair que $\mathcal{O}_r \subset \mathcal{D}_{L^2}$ si et seulement si $r < -N$. Soit alors $\mathcal{N} := \bigcup_{r<-N} \mathcal{O}_r \subset \mathcal{D}_{L^2}$. L'utilisation de la proposition 2.2.18, indique que l'espace $\mathcal{N}$ est une $*$-algèbre pour le produit $\star_\theta$ et qu'il est un idéal dans $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta = \mathcal{B}$. Cet espace de fonctions a déjà été utilisé en physique, en particulier dans [72].*

2.2.3.4 Les autres axiomes

- Les propriétés de commutation/anticommutation avec la structure réelle J, sont évidemment satisfaites car ni J, ni χ, ni $\not\partial$ n'ont été déformés. L'axiome de réalité est alors satisfait.
- La condition de premier ordre est une conséquence de l'équation (2.2.16),
$$[[\not\partial, \pi^\theta(f)], J\pi^\theta(g)J^{-1}] = [\pi^\theta(\not\partial(f)), J\pi^\theta(g)J^{-1}] = -i\,[L^\theta(\partial_\mu f) \otimes \gamma^\mu, R^\theta(g^*) \otimes 1] = 0,$$
car par associativité du produit twisté, les opérateurs de multiplication twistée à droite et à gauche commutent.
- La condition d'orientation nécessite un $2N$-cycle de Hochschild sur $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta = \mathcal{B}$. En utilisant le plongement du tore non commutatif $C^\infty(\mathbb{T}^k_\Theta)$ dans $\mathcal{B}$ (vu comme sous-algèbre des fonctions périodiques avec une période fixée), on obtient le cycle désiré à partir des générateurs $u_j(x) := e^{-ix_j}$, $j = 1, \ldots, 2N$ (qui satisfont évidemment aux relations canoniques du tore NC). On obtient alors
$$\frac{(-i)^N}{(2N)!} \sum_\sigma (-1)^\sigma (u_{\sigma(1)} \star_\theta u_{\sigma(2)} \star_\theta \cdots \star_\theta u_{\sigma(2N)})^{\star_\Theta -1} [\not\partial, u_{\sigma(1)}] \cdots [\not\partial, u_{\sigma(2N)}] = \chi,$$
où la représentation π^θ est sous-entendue.

Théorème 2.2.44. *Les plans de Moyal $(\mathcal{S}, \mathcal{D}_{L^2}, \mathcal{B}, \mathcal{H}, \not\partial, J, \chi)$ sont des triplets spectraux réels, sans unité, connexes de dimension spectrale $2N$.* □

2.2.4 Remarques sur les contraintes imposées

Il est normal de se questionner sur la pertinence des choix que nous avons fait, qui évidemment ne peuvent être absolument uniques. Cependant, le contenu analytique des données $(\mathcal{A}_\theta, \bar{\mathcal{A}}_\theta, \widetilde{\mathcal{A}}_\theta, \mathcal{H}, \mathcal{D}, J, \chi)$ est sévèrement contraint par les axiomes.

Tout d'abord et comme remarqué précédemment, le choix de l'algèbre $\bar{\mathcal{A}}_\theta$ est presque exclusivement donné par la condition de finitude. En d'autres termes, c'est l'opérateur $\mathcal{D}$ qui nous nous dit quelle doit être l'algèbre sans unité à considérer.

Pour le choix du plongement $\mathcal{A}_\theta \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_\theta$, le fait que $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$ soit représentée par des opérateurs bornés donne une contrainte 'supérieure'. La condition d'orientabilité donne quant à elle un plongement 'minimal'. En effet, $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta$ doit permettre de construire 'le bon' cycle de Hochschild. Dans le cas des plans de Moyal, nous avons vu que l'appartenance des ondes planes au plongement choisi est une contrainte décisive.

Concernant l'algèbre intermédiaire $\mathcal{A}_\theta$, les contraintes imposées sont de nature purement analytique ($a(\mathcal{D}-\lambda)^{-k} \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ pour tout $a \in \mathcal{A}_\theta$). Au vu des techniques utilisées dans le cas des plans de Moyal, l'algèbre $\mathcal{A}_\theta$ doit d'une part être inclue dans l'intersection des fonctions sommable et de carré sommable et d'autre part doit satisfaire à la propriété de factorisation forte. Pour l'heure, seule $(\mathcal{S}, \star_\theta)$ est connue pour satisfaire à toutes ces conditions.

Notons finalement que les contraintes imposées par la condition de régularité sont en fait relativement faibles.

2.3 Application aux déformations isospectrales

Nous allons regarder maintenant les points clefs de la construction de triplets spectraux sans unité associés aux déformations isospectrales non compactes.

Rappelons que la construction de nouveaux triplets spectraux (à unité) [24], fut la motivation première pour introduire les déformations isospectrales périodiques. Ainsi, à une déformation isospectrale périodique et compacte, on peut associer canoniquement un triplet spectral satisfaisant à toutes les conditions requises [14]. En effet, d'une part la construction de Connes–Dubois-Violette [25] donne directement accès à une 'pré-C^*-algèbre lisse' $C^\infty(M_\Theta)$ et d'autre part, $C^\infty(M_\Theta)$ ayant une unité et le reste du triplet n'étant pas déformé, tous les autres axiomes sont directement satisfaits.

Nous n'allons donner que des résultat partiels dans les cas génériques non compacts (périodiques et non périodiques). Il y a deux raisons principales à cela. Tout d'abord, comparativement aux plans de Moyal, la 'technologie algébrique' n'est pas suffisamment élaborée ; ce travail est en cours. Deuxièmenent, il résulte de l'étude précédente, que la condition déterminante pour l'élaboration de triplets spectraux sans unité est celle de la dimension spectrale.

Nous allons alors nous borner à démontrer qu'elle est satisfaite aussi dans les cas courbes. Pour ce faire, l'outil principal sera une estimation du comportement du noyau de la chaleur sur sa diagonale. Nous verrons aussi au chapitre 4, que son comportement hors de la diagonale est primordial pour l'étude des théories quantiques des champs sur déformations isospectrales.

2.3.1 Noyau de la chaleur et classes de Schatten

Dans ce paragraphe, nous allons établir des estimations pour les normes de Schatten des opérateurs $M_f(1+\Delta)^{-k}$ et $L_f(1+\Delta)^{-k}$ agissant sur l'espace de Hilbert réduit $\mathcal{H}_r := L^2(M, \mu_g)$.

Ici, Δ désigne encore le Laplacien $(d+d^*)^2$ restreint aux 0-formes. De telles estimations seront obtenues en utilisant le comportement du noyau de la chaleur sur sa diagonale, la présentation en terme de transformée de Laplace des opérateurs $(1+\Delta)^{-k}$, ainsi que la proposition 1.2.13 et le théorème 1.2.16.

Nous avons besoin de faire de plus amples hypothèses sur le 'comportement de la géométrie à l'infini'. Dorénavant, $K_t(p,p')$ désignera le noyau de la chaleur, i.e. le noyau du semi-groupe de la chaleur $e^{-t\Delta}$. Rappelons qu'en toute généralité, $K_t(p,p')$ est une fonction indéfiniment différentiable, strictement positive et symétrique sur $M \times M \times (0,\infty)$ [27, théorème 5.2.1].

Dans le reste de ce chapitre, nous allons supposer que M est une variété Riemannienne connexe, complète, de dimension $n \geq 2$ et de plus, qu'une des deux hypothèses suivantes soit satisfaite.

Soit $B(p,r) := \{\, p' \in M : d_g(p,p') < r \,\}$ la boule géodésique centrée en p et de rayon r. La constante isopérimétrique $\mathcal{I}(M)$ de la variété, est donnée [8, p. 96] par

$$\mathcal{I}(M) := \inf_{\Omega} \frac{A(\partial\Omega)^n}{V(\Omega)^{n-1}},$$

où Ω varie dans l'ensemble des sous-variétés de M ayant une fermeture compacte et un bord lisse. Ici, $V(\Omega)$ et $A(\partial\Omega)$ sont respectivement le volume et l'aire Riemannien de Ω et de $\partial\Omega$.

Les hyphothèses supplémentaires sur le comportement de la géométrie à l'infini sont :

(I) *M n'est pas compacte et il existe $a > 0$ tel que $\sup_{p\in M} \mathcal{I}(B(p,a))^{-1} < \infty$. (Cette propriété est en particulier vérifiée lorsque M a une constante isopérimétrique strictement positive : $\mathcal{I}(M) > 0$.)*

(II) *M a une courbure de Ricci bornée inférieurement, c'est-à-dire, $\mathrm{Ricci}(p,p) \geq (n-1)\,\chi$, pour tout $p \in M$ et pour une certaine constante χ.*
D'après [9, théorème 3.9], ceci entraîne que $\sup_{p\in M} V(B(p,a))^{-1} < \infty$, pour un certain $a > 0$.

Dans [8, théorème 8, p. 198], il est démontré que si M satisfait à l'hypothèse (I), alors le noyau de la chaleur est borné inférieurement : pour tout $p \in M$ et $r > 0$ pour lequel $\overline{B(p,r)}$ appartient à l'image de l'application exponentielle $\exp_p$, on a

$$K_t(p,p) \leq C_1(n)\,(t^{-n/2} + r^{-(n+2)}\,t)\,\mathcal{I}(B(p,r))^{-1}. \tag{2.3.1}$$

Des estimations différentes sont données dans [28, lemme 15] (voir aussi [27]) lorsque la condition (II) est satisfaite : en se donnant $\varepsilon > 0$, il existe une constante c_ε telle que pour tout $t > 0$ et $p \in M$, on ait

$$0 \leq K_t(p,p) \leq c_\varepsilon(n)\,V(B(p,t^{1/2}))^{-1}\,e^{(\varepsilon-E)t},$$

où $E := \inf \mathrm{sp}(\Delta) \geq 0$. Etant donné que [10, proposition 4.1],

$$V(B(p,r)) \geq c\,r^n\,V(B(p,1)) \quad \text{pour} \quad 0 < r < 1,$$

on obtient alors

$$K_t(p,p) \leq \begin{cases} C_2(\varepsilon)\,t^{-n/2}\,V(B(p,1))^{-1}\,e^{(\varepsilon-E)t}, & t \leq 1, \\ C_3(\varepsilon)\,V(B(p,1))^{-1}\,e^{(\varepsilon-E)t}, & t > 1. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Que les suprema soient finis dans les hyphothèses (I) ou (II) ne joue aucun rôle dans les estimations (2.3.1) et (2.3.2), mais c'est une condition suffisante pour obtenir le lemme 2.3.2.

Lemme 2.3.1. *Supposons que la courbure de Ricci de (M, g) soit bornée inférieurement. Alors le semi-groupe de la chaleur est une contraction préservant la positivité sur $L^p(M, \mu_g)$, pour $1 \leq p \leq \infty$.*

Preuve. La propriété de préservation de la positivité ($\phi \geq 0$ implique $e^{-t\Delta}\phi \geq 0$) est une propriété générale des Laplacien de Dirichlet (voir [27, théorème 5.2.1] ou [29]) ; on peut alors appliquer le critère de Beurling–Deny [87, théorème XIII.51] : un semi-groupe préservant la positivité est une contraction sur $L^\infty(M, \mu_g)$ pour tout $t > 0$ si et seulement si il est une contraction sur chaque $L^p(M, \mu_g)$ pour tout $t > 0$. Alors, pour $\phi \in L^\infty(M, \mu_g)$, on a

$$\|e^{-t\Delta}\phi\|_\infty = \sup_{p\in M} \int_M K_t(p, p')\, \phi(p')\, \mu_g(p') \leq \sup_{p\in M} \|\phi\|_\infty \int_M K_t(p, p')\, \mu_g(p') = \|\phi\|_\infty.$$

Nous avons utilisé ici la positivité du noyau de la chaleur K_t et de la forme volume Riemannienne μ_g, ainsi que la loi de conservation de probabilité $\int_M K_t(p, p')\, \mu_g(p') = 1$ qui est satisfaite pour toute variété complète avec courbure de Ricci bornée inférieurement (voir [8, théorème 5, p. 191] ou [27, théorème 5.2.6, p. 153]). □

Lemme 2.3.2. *Supposons que M satisfasse (I) ou (II) ; alors $(1+\Delta)^{-k}$ est un opérateur borné de $L^2(M, \mu_g)$ vers $L^\infty(M, \mu_g)$ pour tout $k > n/4$.*

Preuve. Soit $\phi \in L^2(M, \mu_g)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, la positivité ainsi que la symétrie de $K_{(1+\Delta)^{-k}}$, la positivité de μ_g, la règle de produit pour les noyaux d'opérateurs et la présentation en terme de transformée de Laplace

$$(1+\Delta)^{-2k} = \Gamma(2k)^{-1} \int_0^\infty t^{2k-1}\, e^{-t\,(1+\Delta)}\, dt,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|(1+\Delta)^{-k}\phi\|_\infty^2 &= \sup_{p\in M} \left| \int_M \mu_g(p')\, K_{(1+\Delta)^{-k}}(p, p')\, \phi(p') \right|^2 \\
&\leq \|\phi\|_2^2 \sup_{p\in M} \int_M \mu_g(p')\, |K_{(1+\Delta)^{-k}}(p, p')|^2 \\
&= \|\phi\|_2^2 \sup_{p\in M} \int_M \mu_g(p')\, K_{(1+\Delta)^{-k}}(p, p')\, K_{(1+\Delta)^{-k}}(p', p) \\
&= \|\phi\|_2^2 \sup_{p\in M} K_{(1+\Delta)^{-2k}}(p, p) \\
&= \|\phi\|_2^2 \sup_{p\in M} \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_0^\infty dt\, t^{2k-1}\, e^{-t}\, K_t(p, p).
\end{aligned}$$

Par hypothèse, les estimations (2.3.1) et (2.3.2) donnent

$$K_t(p, p) \leq c_1\, (t^{-n/2} + c_2\, t)\, \max(e^{(\varepsilon_0 - E)t}, 1)$$

pour des constantes c_1, c_2, indépendantes de p et pour un $\varepsilon = \varepsilon_0 < 1$ fixé. Alors, l'intégrale sur t est finie lorsque $k > n/4$, donc $\|(1+\Delta)^{-k}\phi\|_\infty \leq c(k)\, \|\phi\|_2$. □

Nous arrivons au résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 2.3.3. *Si M satisfait (I) ou (II), alors pour tout $f \in L^2(M, \mu_g)$ et tout $k > n/4$, l'opérateur $M_f\,(1+\Delta)^{-k}$ est Hilbert–Schmidt et satisfait*

$$\|M_f\,(1+\Delta)^{-k}\|_2 \leq C_k(n)\,\|f\|_2.$$

Preuve. Que $M_f\,(1+\Delta)^{-k}$ soit un opérateur de Hilbert–Schmidt est une conséquence du principe de factorisation de Grothendieck [61] : se donnant deux opérateurs bornés

$$A \in \mathcal{L}(L^2(X,\mu), L^\infty(X,\mu)) \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{L}(L^\infty(X,\mu), L^2(X,\mu)),$$

leur produit BA est un opérateur de Hilbert–Schmidt sur $L^2(X,\mu)$.

Etant donné que pour $f \in L^2(M,\mu_g)$, M_f est borné de $L^\infty(M,\mu_g)$ vers $L^2(M,\mu_g)$, le lemme 2.3.2 montre que $M_f\,(1+\Delta)^{-k}$ est Hilbert–Schmidt pour $k > n/4$. Pour l'estimation de la norme de Hilbert–Schmidt nous utilisons encore (2.3.1), (2.3.2), ainsi que la représentation en termes de transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
\|M_f\,(1+\Delta)^{-k}\|_2^2 &= \int_{M\times M} \mu_g(p)\,\mu_g(p')\,|f(p)|^2 |K_{(1+\Delta)^{-k}}(p,p')|^2 \\
&= \int_M \mu_g(p)\,|f(p)|^2\,K_{(1+\Delta)^{-2k}}(p,p) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_M \mu_g(p)\,|f(p)|^2 \int_0^\infty dt\,t^{2k-1}\,e^{-t}\,K_t(p,p) \leq C_k(n)^2\,\|f\|_2^2,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les mêmes estimations sur l'intégrale en t que dans le lemme 2.3.2, la symétrie et la règle du produit pour le noyau $K_{(1+\Delta)^{-k}}$. □

Remarque 2.3.4. *Au vu des techniques employées, on peut généraliser ce résultat au moins pour les opérateurs de la forme $M_f\,h(\sqrt{\Delta})$ où h est la transformée de Laplace d'une fonction qui se comporte comme t^{k-1} lorsque $t \downarrow 0$, pour $k > n/4$ et qui décroît suffisamment vite à l'infini.*

Nous allons, toujours par interpolation complexe, obtenir des propriétés d'existence analogues à celles obtenues lors du paragraphe précédent, pour les autres classes de Schatten.

Théorème 2.3.5. *Si M satisfait (I) ou (II), lorsque $f \in L^p(M,\mu_g)$ pour $2 \leq p < \infty$ et $k > n/2p$, on a $M_f\,(1+\Delta)^{-k} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H}_r)$.*

Preuve. Le cas $p = 2$ a été obtenu dans la proposition 2.3.3. Pour $p = \infty$, on a

$$\|M_f\,(1+\Delta)^{-k}\| \leq \|M_f\|\,\|(1+\Delta)^{-k}\| \leq \|f\|_\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+} (1+x)^{-k} = \|f\|_\infty.$$

Nous allons encore établir le résultat pour $2 < p < \infty$ par interpolation complexe. Premièrement, on peut toujours supposer f positive, car

$$\|M_f\| = \|M_{|f|}\|, \qquad \|M_f\,(1+\Delta)^{-k}\|_2 = \|M_{|f|}\,(1+\Delta)^{-k}\|_2.$$

Alors, pour $f \geq 0$ appartenant à $L^p(M,\mu_g)$, on définit l'application

$$F_p : z \mapsto M_f^{pz}\,(1+\Delta)^{-kpz},$$

pour tout z dans la bande $S := \{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re z \leq \frac{1}{2} \}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'opérateur $F_p(iy) = M_{f^{ipy}} (1+\Delta)^{ikpy}$ est bornée, avec $\|F_p(iy)\| \leq 1$; et pour $z = \frac{1}{2}+iy$, la proposition 2.3.3 montre que

$$\|F_p(\tfrac{1}{2} + iy)\|_2 = \|M_{f^{p/2}} (1+\Delta)^{-kp/2}\|_2 \leq C_{kp/2}(n) \, \|f^{p/2}\|_2 = C_{kp/2}(n) \, \|f\|_p^{p/2},$$

qui est fini car $k > n/2p$. Par interpolation complexe [100] on obtient que $F_p(z) \in \mathcal{L}^{1/\Re z}(\mathcal{H}_r)$ pour tout $z \in S$, et

$$\begin{aligned} \|F_p(z)\|_{1/\Re z} &\leq \|F_p(0)\|_\infty^{1-2\Re z} \, \|F_p(\tfrac{1}{2})\|_2^{2\Re z} \leq \|M_{f^{p/2}}(1+\Delta)^{-kp/2}\|_2^{2\Re z} \\ &\leq C_{kp/2}(n)^{2\Re z} \, \|f^{p/2}\|_2^{2\Re z} = C_{kp/2}(n)^{2\Re z} \, \|f\|_p^{p\Re z}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $z = 1/p$

$$\|F_p(1/p)\|_p = \|M_f \, (1+\Delta)^{-k}\|_p \leq C_{kp/2}(n)^{2/p} \, \|f\|_p,$$

qui conclut la preuve. □

Nous allons ensuite obtenir l'analogue de ce résultat pour les opérateurs déformés, en utilisant la propriété fondamentale de l'invariance de la norme de Hilbert-Schmidt pour les déformations isospectrales (lemme 1.2.16), ainsi que la borne sur la norme de L_f (proposition 1.2.13). Nous ne formulerons cette proposition que pour les opérateurs de multiplication à gauche, mais évidemment, elle sera vraie aussi dans le cas de la multiplication twistée à droite.

Proposition 2.3.6. *Soient $2 \leq p < \infty$ et $f \in C_c^\infty(M)$ où M satisfait à (I) ou (II). Alors, dans le cas d'une action α isométrique, lisse et propre du groupe Abélien $\mathbb{R}^l$, $L_f \, (1+\Delta)^{-k} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H}_r)$ pour tout $k > n/2p$.*

Preuve. La preuve étant essentiellement la même que celle du théorème précédent, nous allons seulement l'esquisser. Les théorèmes 1.2.16 et 2.3.3 impliquent que pour $k > n/4$,

$$\|L_f \, (1+\Delta)^{-k}\|_2 = \|M_f \, (1+\Delta)^{-k}\|_2 \leq C_k(n) \, \|f\|_2.$$

De plus, par (1.2.11),

$$\|L_f \, (1+\Delta)^{-k}\| \leq \|L_f\| \leq \widetilde{C}_r(l) \sup_{p \in M} \int_{\mathbb{R}^l} |(1+\Delta_y)^r \alpha_{\frac{1}{2}\Theta_y} f(p)| \, d^l y =: \omega(f; r, l, n),$$

qui est fini lorsque $r > l/2$. En définissant $G_p(z) := L_f \, (1+\Delta)^{-kpz}$ pour $z \in S$ et $k > n/2p$, on conclut que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\|G_p(iy)\| = \|L_f \, (1+\Delta)^{-ikpy}\| \leq \omega(f; r, l, n),$$

et

$$\|G_p(\tfrac{1}{2} + iy)\|_2 = \|L_f \, (1+\Delta)^{-kpy/2}\|_2 \leq C_{kp/2}(n) \, \|f\|_2.$$

Une fois encore, on obtient le résultat par interpolation complexe :

$$\begin{aligned} \|L_f \, (1+\Delta)^{-k}\|_p = \|G_p(p^{-1})\|_p &\leq \|G_p(0)\|_\infty^{1-2/p} \, \|G_p(2^{-1})\|_2^{2/p} \\ &\leq \omega(f; r, l, n)^{1-2/p} \, C_{kp/2}(n)^{2/p} \, \|f\|_2^{2/p}. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.7. *Les conclusions de la proposition précédente peuvent s'étendre au cas $p = 1$ dans de nombreuses situations. En particulier, pour les plans de Moyal en utilisant la propriété de factorisation forte (Proposition 2.2.6), et dans le cas général lorsque $f = g \star_\theta h$ pour $g, h \in C_c^\infty(M)$. En effet, pour $k > n/2$, avec $n \geq 2$, en écrivant $k = 1 + \delta$ on a*

$$L_f(1+\Delta)^{-k} = L_g(1+\Delta)^{-1}L_h(1+\Delta)^{-\delta} + L_g(1+\Delta)^{-1}[\Delta, L_h](1+\Delta)^{-1-\delta}.$$

On obtient le résultat en utilisant la proposition précédente, les inégalités de Hölder et en remarquant que le commutateur $[\Delta, L_h]$ est égal à une somme d'opérateurs de multiplication twisté fois un opérateur différentiel d'ordre un, qui multiplié avec le facteur supplémentaire $(1+\Delta)^{-1}$ donne un opérateur borné.

Nous allons montrer maintenant que la proposition précédente s'étend naturellement au fibré spinoriel.

Corollaire 2.3.8. *Soit $2 \leq p < \infty$ et $f \in C_c^\infty(M)$. Sous les hypothèses de la proposition précédente, $L_f\,(1+\not{D}^2)^{-k}$ et $L_f\,(1+|\not{D}|)^{-2k}$ appartiennent à $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour tout $k > n/2p$.*

Démonstration. L'opérateur $(1+\not{D}^2)^k(1+|\not{D}|)^{-2k}$ étant borné, il est suffisant de considérer le cas $L_f\,(1+\not{D}^2)^{-k}$. Pour cet opérateur, en utilisant la formule de Lichnerowicz

$$\not{D}^2 = \Delta + \tfrac{1}{4}R, \tag{2.3.3}$$

où R est le scalaire de courbure, on obtient le résultat par comparaison

$$(1+\not{D}^2)^{-1} = (1+\Delta)^{-1}(1 - \tfrac{1}{4}R(1+\not{D}^2)^{-1}).$$

□

Avant de clore ce paragraphe, nous allons montrer que les commutateurs suivant possèdent les mêmes propriétés de sommabilité que celles de $L_f(1+\not{D}^2)^{-k}$.

Lemme 2.3.9. *Si $f \in C_c^\infty(M)$ et $2 \leq p < \infty$, alors les opérateurs*

$$[\not{D}, L_f]\,(1+\not{D}^2)^{-k}, \qquad [|\not{D}|, L_f]\,(1+\not{D}^2)^{-k}, \qquad [(1+\not{D}^2)^{\frac{1}{2}}, L_f]\,(1+\not{D}^2)^{-k},$$
$$[\not{D}, L_f]\,(1+|\not{D}|)^{-2k}, \qquad [|\not{D}|, L_f]\,(1+|\not{D}|)^{-2k}, \qquad [(1+\not{D}^2)^{\frac{1}{2}}, L_f]\,(1+|\not{D}|)^{-2k}$$

appartiennent tous à $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ lorsque $k > n/2p$.

Démonstration. Comme remarqué précédemment, il est suffisant d'établir le lemme dans le cas $(1+\not{D}^2)^{-k}$.

Pour $[\not{D}, L_f](1+\not{D}^2)^{-k}$, c'est une conséquence directe de la propriété d'isométrie de l'action : étant donné que $\not{D}$ commute avec (le relèvement de) l'action, on obtient

$$[\not{D}, L_f] = L_{[\not{D}, M_f]} = L_{\not{D}f},$$

Ainsi, la preuve de la proposition 2.3.6 s'applique avec $\not{D}f$ à la place de f car (avec un petit abus de notation) $\not{D}f \in C_c^\infty(M)$.

Pour $[|\not{D}|, L_f]$, la preuve se déduit des précédentes, en utilisant l'identité spectrale pour un opérateur positif A :

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{A^2}{A^2+\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\ . \tag{2.3.4}$$

Ainsi, pour n'importe quel réel strictement positif ρ,

$$\begin{aligned}[|\not{D}|, L_f] &= [|\not{D}| + \rho, L_f] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{(|\not{D}|+\rho)^2+\lambda}\big[(|\not{D}|+\rho)^2, L_f\big]\frac{1}{(|\not{D}|+\rho)^2+\lambda}\sqrt{\lambda}\,d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{(|\not{D}|+\rho)^2+\lambda}\big(\not{D}[\not{D}, L_f] + [\not{D}, L_f]\not{D} + 2\rho|\not{D}|L_f - 2\rho L_f|\not{D}|\big)\frac{1}{(|\not{D}|+\rho)^2+\lambda}\sqrt{\lambda}\,d\lambda.\end{aligned}$$

Considérons les différents termes : vu que $[\not{D}, L_f] = L_{\not{D}f}$, ils sont tous du même ordre en $\not{D}$; cela nous permet de ne traiter en détail que le premier terme, pour les autres la preuve est identique.

En commutant $[\not{D}, L_f]$ avec le facteur $((|\not{D}|+\rho)^2+\lambda)^{-1}$ à sa gauche, le premier terme de la dernière équation devient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{|\not{D}|+\rho}{((|\not{D}|+\rho)^2+\lambda)^2}\sqrt{\lambda}\,d\lambda\,\frac{\not{D}}{|\not{D}|+\rho}\,[\not{D}, L_f] \\ &\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{((|\not{D}|+\rho)^2+\lambda)^2}\not{D}\big[(|\not{D}^2|+\rho)^2, [\not{D}, L_f]\big]\frac{1}{(|\not{D}|+\rho)^2+\lambda}\sqrt{\lambda}\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\frac{\not{D}}{|\not{D}|+\rho}\,[\not{D}, L_f] + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{((|\not{D}|+\rho)^2+\lambda)^2}\not{D}\Big(\not{D}[\not{D}, [\not{D}, L_f]] + [\not{D}, [\not{D}, L_f]]\not{D} \\ &\qquad\qquad + 2\rho|\not{D}|\,[\not{D}, L_f] - 2\rho[\not{D}, L_f]\,|\not{D}|\Big)\frac{1}{(|\not{D}|+\rho)^2+\lambda}\sqrt{\lambda}\,d\lambda.\end{aligned}$$

Vu que $\not{D}(|\not{D}|+\rho)^{-1}$ est borné, le corollaire 2.3.8 montre que

$$\frac{\not{D}}{|\not{D}|+\rho}\,[\not{D}, L_f]\,(1+\not{D}^2)^{-k} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \quad \text{lorsque} \quad k > n/p.$$

Pour les quatre autres termes, par exemple pour le premier, on obtient (et similairement pour les trois autres) :

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\not{D}^2}{((|\not{D}|+\rho)^2+\lambda)^2}\,[\not{D}, [\not{D}, L_f]](1+|\not{D}|)^{-k}\frac{1}{(|\not{D}|+\rho)^2+\lambda}\sqrt{\lambda}\,d\lambda\right\|_p \\ &\qquad \le \big\|[\not{D}, [\not{D}, L_f]](1+|\not{D}|)^{-k}\big\|_p\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\|\frac{\not{D}^2}{(|\not{D}|+\rho)^2+\lambda}\right\|\left\|\frac{1}{(|\not{D}|+\rho)^2+\lambda}\right\|^2\sqrt{\lambda}\,d\lambda \\ &\qquad \le \big\|[\not{D}, [\not{D}, L_f]](1+|\not{D}|)^{-k}\big\|_p\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{(\rho^2+\lambda)^2}\,d\lambda \\ &\qquad = \frac{1}{2\rho}\,\big\|L_{\not{D}^2 f}\,(1+|\not{D}|)^{-k}\big\|_p\end{aligned}$$

qui est fini d'après le même corollaire.

Pour $[(1+\not{D}^2)^{1/2}, L_f]$, la preuve est essentiellement la même, en utilisant la représentation spectrale (2.3.4) appliquée à l'opérateur positif $(1+\not{D}^2)^{1/2}$. □

2.3.2 Classes de Schatten faibles

Nous allons maintenant démontrer que les déformations isospectrales des variétés spinorielles non compactes ont pour dimension spectrale celle classique, i.e. celle de la variété.

La proposition suivante utilise l'estimation (2.3.1) ou (2.3.2) pour donner une version améliorée de l'inégalité de Cwikel (lemme 2.2.32).

Proposition 2.3.10. *Soit $f \in C_c^\infty(M)$. Alors*

$$L_f\,(1+\Delta)^{-1/2}\,L_{\bar f} \in \mathcal{L}^{n,\infty}(\mathcal{H}_r).$$

Démonstration. Choisissons un nombre m tel que $0 < m < 1$. On définit les opérateurs positifs

$$\begin{aligned} A_k &:= L_f \int_0^{m^{2k}} t^{-1/2}\, e^{-t(1+\Delta)}\, dt\; L_{\bar f}, \\ B_k &:= L_f \int_{m^{2k}}^{1} t^{-1/2}\, e^{-t(1+\Delta)}\, dt\; L_{\bar f}, \\ C &:= L_f \int_1^{\infty} t^{-1/2}\, e^{-t(1+\Delta)}\, dt\; L_{\bar f}, \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ (la valeur de k la plus commode sera choisie plus tard). Leur somme est évidemment $A_k + B_k + C = \Gamma(\frac{1}{2})\, L_f(1+\Delta)^{-1/2} L_{\bar f}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrons tout d'abord que C appartient à toutes les classes de Schatten $\mathcal{L}^p(\mathcal{H}_r)$ pour $p \geq 1$. En effet, en utilisant le théorème 1.2.16 ainsi que (2.3.1) ou (2.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} \|C\|_1 &= \left\| L_f \left(\int_1^\infty t^{-1/2} e^{-t(1+\Delta)}\, dt \right)^{1/2} \right\|_2^2 = \left\| M_f \left(\int_1^\infty t^{-1/2} e^{-t(1+\Delta)}\, dt \right)^{1/2} \right\|_2^2 \\ &= \mathrm{Tr}\left(M_{|f|^2} \int_1^\infty t^{-1/2} e^{-t(1+\Delta)}\, dt \right) \\ &= \int_M |f(p)|^2 \int_1^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, K_t(p,p)\, \mu_g(p)\, dt \\ &\leq c \int_M |f(p)|^2\, \mu_g = c\, \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Ainsi $C \in \mathcal{L}^n(\mathcal{H}_r) \subset \mathcal{L}^{n,\infty}(\mathcal{H}_r)$.

De plus, on obtient l'estimation suivante pour la norme opératorielle de A_k :

$$\|A_k\| \leq \|L_f\|^2 \int_0^{m^{2k}} t^{-1/2} \|e^{-t(1+\Delta)}\|\, dt \leq \|L_f\|^2 \int_0^{m^{2k}} t^{-1/2}\, dt = 2\, \|L_f\|^2\, m^k.$$

D'après le théorème 1.2.16, on peut aussi estimer B_k en norme de trace :

$$\begin{aligned} \|B_k\|_1 &= \int_{m^{2k}}^1 t^{-1/2} e^{-t} \int_M |f(p)|^2\, K_t(p,p)\, \mu_g(p)\, dt \\ &\leq c \int_M |f(p)|^2\, \mu_g(p) \int_{m^{2k}}^1 t^{-(n+1)/2}\, dt \\ &= c\, \|f\|_2^2\, \frac{2}{n-1}\, (m^{-k(n-1)} - 1) \\ &\leq c'\, \|f\|_2^2\, m^{-k(n-1)}, \end{aligned}$$

car $m < 1$.

Par l'inégalité de Fan —voir [100]—, on peut estimer la j-ième valeur singulière de $D := A_k + B_k$:

$$\begin{aligned} \mu_j(D) = \mu_j(A_k + B_k) &\leq \mu_1(A_k) + \mu_j(B_k) \\ &\leq \|A_k\| + j^{-1} \|B_k\|_1 \\ &\leq 2\, \|L_f\|^2\, m^k + c'\, \|f\|_2^2\; j^{-1}\, m^{k(1-n)}. \end{aligned}$$

Finalement, se donnant j et $m < 1$, on peut choisir $k \in \mathbb{N}$ qui soit tel que $m^k \leq j^{-1/n} < m^{k-1}$. Ainsi, $j^{-1}\, m^{-k(n-1)} < m^{(k-1)n}\, m^{-k(n-1)} = m^{-n}\, m^k$ et donc

$$\mu_j(D) \leq c(f,n,m)\, j^{-1/n},$$

qui termine la preuve car $L_f\,(1+\Delta)^{-1/2}\, L_{\bar{f}} = \Gamma(\frac{1}{2})^{-1}(C+D)$. □

Ce résultat a un corollaire immédiat.

Corollaire 2.3.11. *Soit $f, h \in C_c^\infty(M)$. Alors $L_f\,(1+\Delta)^{-1/2}\, L_h \in \mathcal{L}^{n,\infty}(\mathcal{H}_r)$.*

Démonstration. On obtient le résultat par polarisation, i.e. en additionnant $L_{(f\pm\bar{h})}\,(1+\Delta)^{-1/2}\, L_{(\bar{f}\pm h)}$ et $L_{(f\pm i\bar{h})}\,(1+\Delta)^{-1/2}\, L_{(\bar{f}\mp ih)}$. □

Une fois encore, ce résultat se relève à l'espace de Hilbert des spineurs de carré intégrable.

Corollaire 2.3.12. *Soit $f, h \in C_c^\infty(M)$. Alors $L_f\,(1+\not{D}^2)^{-1/2}\, L_h$ et $L_f\,(1+|\not{D}|)^{-1}\, L_h$ sont dans $\mathcal{L}^{n,\infty}(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Décomposons le deuxième opérateur comme

$$\begin{aligned}
L_f\,(1+|\not{D}|)^{-1}\, L_h &= L_f(1+\not{D}^2)^{-1/2} L_h \frac{(1+\not{D}^2)^{1/2}}{1+|\not{D}|} + L_f(1+\not{D}^2)^{-1/2}\left[\frac{(1+\not{D}^2)^{1/2}}{1+|\not{D}|}, L_h\right] \\
&= L_f(1+\not{D}^2)^{-1/2} L_h \frac{(1+\not{D}^2)^{1/2}}{1+|\not{D}|} - L_f(1+|\not{D}|)^{-1}[|\not{D}|, L_h](1+|\not{D}|)^{-1} \\
&\quad + L_f(1+\not{D}^2)^{-1/2}\big[(1+\not{D}^2)^{1/2}, L_h\big](1+|\not{D}|)^{-1}.
\end{aligned}$$

Vu que $L_f(1+|\not{D}|)^{-1}$, $[|\not{D}|, L_h](1+|\not{D}|)^{-1}$, $L_f(1+\not{D}^2)^{-1/2}$ et $[(1+\not{D}^2)^{1/2}, L_h](1+|\not{D}|)^{-1}$ appartiennent tous à $\mathcal{L}^{2n}(\mathcal{H})$ d'après le lemme 2.3.9, et comme $(1+\not{D}^2)^{1/2}(1+|\not{D}|)^{-1}$ est borné, il est suffisant de démonter le corollaire pour $L_f\,(1+\not{D}^2)^{-1/2}\, L_h$.

Par l'identité (2.3.4) et la formule de Lichnerowicz une fois encore, on obtient

$$\begin{aligned}
L_f\,(1+\not{D}^2)^{-1/2}\, L_h &= L_f\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\not{D}^2)^{-1}}{(1+\not{D}^2)^{-1}+\lambda}\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\, L_h \\
&= L_f\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\Delta)^{-1}(1-\frac{1}{4}R(1+\not{D}^2)^{-1})}{(1+\Delta)^{-1}(1-\frac{1}{4}R(1+\not{D}^2)^{-1})+\lambda}\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\, L_h \\
&= L_f\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Bigg(\frac{(1+\Delta)^{-1}}{(1+\Delta)^{-1}+\lambda} + \frac{1}{4}\frac{(1+\Delta)^{-2}}{(1+\Delta)^{-1}+\lambda} R \frac{(1+\not{D}^2)^{-1}}{(1+\not{D}^2)^{-1}+\lambda} \\
&\qquad - \frac{1}{4}(1+\Delta)^{-1} R \frac{(1+\not{D}^2)^{-1}}{(1+\not{D}^2)^{-1}+\lambda}\Bigg)\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\, L_h \\
&= L_f\,(1+\Delta)^{-1/2}\, L_h + \frac{1}{4\pi} L_f \int_0^\infty \Bigg(\frac{(1+\Delta)^{-2}}{(1+\Delta)^{-1}+\lambda} R \frac{(1+\not{D}^2)^{-1}}{(1+\not{D}^2)^{-1}+\lambda} \\
&\qquad - (1+\Delta)^{-1} R \frac{(1+\not{D}^2)^{-1}}{(1+\not{D}^2)^{-1}+\lambda}\Bigg)\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\, L_h.
\end{aligned}$$

Le premier terme appartient à $\mathcal{L}^{n,\infty}(\mathcal{H})$ d'après le corollaire 2.3.11, les deux autres sont dans $\mathcal{L}^n(\mathcal{H})$ car

$$\begin{aligned}
&\left\| L_f \int_0^\infty \frac{(1+\Delta)^{-2}}{(1+\Delta)^{-1}+\lambda} R \frac{(1+\not{D}^2)^{-1}}{(1+\not{D}^2)^{-1}+\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} L_h \right\|_n \\
&\quad \leq \|L_f(1+\Delta)^{-2}\|_n \|R(1+\not{D}^2)^{-1}\| \|L_h\| \int_0^\infty \left\| \frac{1}{(1+\Delta)^{-1}+\lambda} \right\| \left\| \frac{1}{(1+\not{D}^2)^{-1}+\lambda} \right\| \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \\
&\quad \leq 4\, \|L_f(1+\Delta)^{-2}\|_n \|L_h\| \int_0^\infty \frac{1}{(1+\lambda)^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}},
\end{aligned}$$

qui est fini d'après la proposition 2.3.6. Aussi, la proposition 2.3.6 et le corollaire 2.3.8, impliquent que

$$\begin{aligned}
&\left\| L_f \int_0^\infty (1+\Delta)^{-1} R \frac{(1+\not{D}^2)^{-1}}{(1+\not{D}^2)^{-1}+\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} L_h \right\|_n \\
&\quad \leq \|L_f\,(1+\Delta)^{-1}\|_n\, \|R(1+\not{D}^2)^{-1}\, L_h\| \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}$$

est fini. Finalement, comme $\mathcal{L}^n(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}^{n,\infty}(\mathcal{H})$, la preuve est complète. □

2.3.3 Calcul de la trace de Dixmier : le cas périodique

Une discussion heuristique

Dans ce paragraphe, nous allons voir que la trace de Dixmier donne lieux à un invariant de la déformation, tenant exactement le même rôle que la trace ordinaire. Avant de démontrer cette propriété, c'est-à-dire

$$\mathrm{Tr}_\omega(L_f\,(1+\not{D}^2)^{-n/2}) = \mathrm{Tr}_\omega(M_f\,(1+\not{D}^2)^{-n/2}), \quad \text{pour tout} \quad f \in C_c^\infty(M),$$

(ou au niveau scalaire, i.e. lorsque L_f agit sur $\mathcal{H}_r$, avec $(1+\Delta)^{-n/2}$ à la place de $(1+\not{D}^2)^{-n/2}$), nous allons donner un argument heuristique pour montrer combien ce résultat est naturel.

Pour cette fin, nous allons utiliser la définition de L_f pour $f \in C_c^\infty(M)$, en terme d'intégrale à valeur opérateur (équation 1.2.7). En utilisant cette présentation, la propriété de trace de la trace de Dixmier ainsi que la commutativité de l'opérateur de Dirac (ou du Laplacien) avec les unitaires V_z, le résultat serait immédiat si nous pouvions échanger la trace de Dixmier avec les intégrales de Lebesgue :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_\omega((L_f\,(1+\not{D}^2)^{-n/2}) &= (2\pi)^{-l}\, \mathrm{Tr}_\omega\left(\int_{\mathbb{R}^{2l}} e^{-iyz}\, V_{\frac{1}{2}\Theta y}\, M_f\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z}\, d^l y\, d^l z\, (1+\not{D}^2)^{-n/2} \right) \\
&= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} e^{-iyz}\, \mathrm{Tr}_\omega(V_{\frac{1}{2}\Theta y} M_f\, (1+\not{D}^2)^{-n/2}\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z})\, d^l y\, d^l z \\
&= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} e^{-iyz}\, \mathrm{Tr}_\omega(M_f\, (1+\not{D}^2)^{-n/2}\, V_{-z})\, d^l y\, d^l z \\
&= \mathrm{Tr}_\omega\left(M_f\, (1+\not{D}^2)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^l} \delta_0(z)\, V_{-z}\, d^l z \right) \\
&= \mathrm{Tr}_\omega\left(M_f\, (1+\not{D}^2)^{-n/2} \right).
\end{aligned}$$

Cependant, l'échange de la trace de Dixmier avec l'intégrale est loin d'être rigoureux : ces intégrales sont oscillantes et la trace de Dixmier n'obéit par en général à la convergence dominée.

Pour les déformations non périodiques, nous allons démontrer ce résultat en passant par un calcul de résidu de fonction zéta. Nous allons commencer par l'établir dans le cas plus simple des déformations périodiques.

Le cas périodique non compacte

La décomposition en sous-espaces spectraux de $f \in C_c^\infty(M)$ donne un accès direct à la Dixmier-traçabilité des opérateurs $L_f\,(1+\Delta)^{-n/2}$ agissant sur $\mathcal{H}_r = L^2(M,\mu_g)$ et $L_f\,(1+\not{D}^2)^{-n/2}$ agissant sur $\mathcal{H} = L^2(M,S)$, ainsi qu'à la valeur de leur trace de Dixmier.

Proposition 2.3.13. *Soit α une action effective lisse et isométrique de $\mathbb{T}^l$ sur M, avec $l \geq 2$, et soit $f \in C_c^\infty(M)$. Alors, l'opérateur $L_f\,(1+\Delta)^{-n/2}$ est Dixmier-traable sur $\mathcal{H}_r$, et la valeur de sa trace de Dixmier est indépendante de ω :*

$$\mathrm{Tr}_\omega(L_f\,(1+\Delta)^{-n/2}) = C'(n)\,\delta_{0,r}\int_M f_r\,\mu_g = C'(n)\int_M f_0\,\mu_g,$$

où $C'(n) := \Omega_n/n\,(2\pi)^n$, Ω_n est le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, et $f = \sum_r f_r$ est la décomposition de f en composantes homogènes.

Démonstration. Chaque f_r satisfait à $\alpha_z(f_r) = e^{-izr}\,f_r$ pour tout $z \in \mathbb{T}^l$. Vu que $[M_{f_r}, V_z] = M_{f_r}(1-e^{-izr})V_z$, on en déduit que $[M_{f_r}, V_{-\frac{1}{2}\Theta_r}] = 0$ par antisymétrie de la matrice de déformation.

D'après [91, Prop. 15], $M_f\,(1+\Delta)^{-n/2}$ appartient à $\mathcal{L}^{1,\infty}(\mathcal{H}_r)$ et de plus

$$\|M_f\,(1+\Delta)^{-n/2}\|_{1,\infty} \leq C_1(n)\,\|f\|_\infty.$$

Cette estimation est obtenue par une partition (finie) de l'unité sur le compact $\mathrm{supp}\,f$ et en appliquant le théorème de Weyl. On obtient alors,

$$\begin{aligned}\|L_f\,(1+\Delta)^{-n/2}\|_{1,\infty} &\leq \sum_{r\in\mathbb{Z}^l}\|M_{f_r}V_{-\frac{1}{2}\Theta_r}\,(1+\Delta)^{-n/2}\|_{1,\infty}\\ &\leq \sum_{r\in\mathbb{Z}^l}\|M_{f_r}\,(1+\Delta)^{-n/2}\|_{1,\infty}\\ &\leq C_1(n)\sum_{r\in\mathbb{Z}^l}\|f_r\|_\infty,\end{aligned}$$

car chaque f_r est à support (compact) contenu dans $\mathbb{T}^l\cdot(\mathrm{supp}\,f)$. Ces estimations donnent la Dixmier-traçabilité, étant donné que la décomposition en sous-espaces spectraux est convergente dans la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour le calcul de la trace Dixmier, il suffit de remarquer que pour tout $z \in \mathbb{T}^l$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\omega(L_{f_r}\,(1+\Delta)^{-n/2}) &= \mathrm{Tr}_\omega(V_z\,M_{f_r}\,V_{-\frac{1}{2}\Theta_r}\,(1+\Delta)^{-n/2}\,V_{-z})\\ &= \mathrm{Tr}_\omega(M_{\alpha_z(f_r)}\,V_{-\frac{1}{2}\Theta_r}\,(1+\Delta)^{-n/2})\\ &= e^{-izr}\,\mathrm{Tr}_\omega(M_{f_r}\,V_{-\frac{1}{2}\Theta_r}\,(1+\Delta)^{-n/2}),\end{aligned}$$

qui est différent de zéro si et seulement si $r = 0$. Ainsi,

$$\mathrm{Tr}_\omega\left(L_{f_r}\,(1+\Delta)^{-n/2}\right) = \mathrm{Tr}_\omega\left(M_{f_0}\,(1+\Delta)^{-n/2}\right)\delta_{0,r} = C'(n)\,\delta_{0,r}\int_M f_0\,\mu_g.$$

La dernière égalité est obtenue (c.f. [91]) par calcul du résidu de Wodzicki de l'opérateur $M_f(1+\Delta)^{-n/2}$. □

Corollaire 2.3.14. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, l'opérateur $L_f\,(1+\not{D}^2)^{-n/2}$ est Dixmier-traçable sur $\mathcal{H}$ pour $f \in C_c^\infty(M)$; de plus, la valeur de sa trace de Dixmier est indépendante de ω :*

$$\mathrm{Tr}_\omega(L_f\,(1+\not{D}^2)^{-n/2}) = C(n)\,\delta_{0,r}\int_M f_r\,\mu_g = C(n)\int_M f_0\,\mu_g,$$

où $C(n) := 2^{\lfloor n/2\rfloor}\Omega_n/n\,(2\pi)^n$, avec $2^{\lfloor n/2\rfloor}$ le rang du fibré spinoriel.

Démonstration. En utilisant la formule de Lichnerowicz $\not{D}^2 = \Delta + \frac{1}{4}R$, la Dixmier-traçabilité est obtenue par comparaison :

$$(1+\not{D}^2)^{-1} = (1+\Delta)^{-1}\big(1 - \tfrac{1}{4}R\,(1+\not{D}^2)^{-1}\big). \tag{2.3.5}$$

Pour le calcul de la trace de Dixmier, on peut appliquer les arguments de la proposition précédente. On obtient le résultat en remarquant que, modulo le facteur $2^{\lfloor n/2\rfloor}$, les symboles principaux de $(1+\not{D}^2)^{-n/2}$ et de $(1+\Delta)^{-n/2}$ sont identiques (cf. équation (2.3.5)). Ainsi les opérateurs $M_{f_r}(1+\not{D}^2)^{-n/2}$ et $M_{f_r}(1+\Delta)^{-n/2}$ ont le même résidu de Wodzicki, à un facteur constant près. □

2.3.4 Calcul de la trace de Dixmier : le cas non périodique

Dans ce paragraphe, nous allons établir le théorème suivant :

Théorème 2.3.15. *Soit M une variété Riemannienne à spin, non compacte, sans bord, connexe, complète, satisfaisant à (I) ou (II), avec un scalaire de courbure borné et munie d'une action lisse propre et isométrique de $\mathbb{R}^l$. Si $f \in C_c^\infty(M)$, alors $L_f\,(1+|\not{D}|)^{-n}$ appartient à $\mathcal{L}^{1,\infty}(\mathcal{H})$ et la valeur de sa trace Dixmier est donnée par*

$$\mathrm{Tr}_\omega\big(L_f\,(1+|\not{D}|)^{-n}\big) = \mathrm{Tr}_\omega\big(M_f\,(1+|\not{D}|)^{-n}\big) = C(n)\int_M f(p)\,\mu_g(p),$$

où $C(n) = 2^{\lfloor n/2\rfloor}\,\Omega_n/n\,(2\pi)^n$.

Dans le cas non périodique, la variété M est nécessairement de la forme $V\times\mathbb{R}^l$, où le groupe $\mathbb{R}^l$ agit par translation sur le second facteur. En effet, une action propre du groupe additif $\mathbb{R}^l$ est automatiquement libre, car le seul sous-groupe compact de $\mathbb{R}^l$ est le sous-groupe trivial $\{0\}$. Ainsi la projection sur l'espace des orbites $\pi : M \to M/\mathbb{R}^l$ définit une projection de $\mathbb{R}^l$-fibré principal [38, Thm. 1.11.4]. Remarquons que l'action soit propre, a été cruciallement utilisé dans la proposition 1.2.13 pour montrer que les opérateurs de multiplication twistée sont bornés. Or un $\mathbb{R}^l$-fibré principal possède une section (lisse) globale, il est donc automatiquement trivial (voir [31, §16.14.5]).

Ainsi $M = V\times\mathbb{R}^l$, où V est une variété lisse, non nécessairement compacte de dimension $k = n - l$, qui est munie d'une structure Riemannienne, induite de celle de M, et $\pi : M \to V$

est juste la projection sur le premier facteur. Si $\{\phi_j\}_{j\in J}$ est une partition de l'unité localement finie sur V, où chaque ϕ_j est lisse et à support compact, on peut définir une partition de l'unité α-invariante $\{\psi_j\}$ sur M, en posant $\psi_j := \phi_j \circ \pi$. Pour tout $f \in C_c^\infty(M)$, la somme $f = \sum_j f\psi_j$ est finie car $\operatorname{supp} f$ est compact ; étant donné que ψ_j est α-invariant, on obtient directement

$$L_f = \sum_j L_{f\psi_j} = \sum_j L_f\, M_{\psi_j}.$$

Pour manipuler des opérateurs du type $L_f\, h(\not{D})$, on peut sans perte de généralité se restreindre a une seule carte de V.

Notons $\hat{x} := (x^1, \ldots, x^k)$ et $\bar{x} := (x^{k+1}, \ldots, x^n)$ respectivement les coordonnées transverses et longitudinales sur M. Il est aussi immédiat de remarquer que l'opérateur L_f est pseudodifférentiel, de symbole

$$\sigma[L_f](\hat{x}, \bar{x}; \hat{\xi}, \bar{\xi}) = f(\hat{x}, \bar{x} - \tfrac{1}{2}\Theta\bar{\xi}). \tag{2.3.6}$$

En effet, pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, la définition 1.2.12 montre que

$$\begin{aligned} L_f\psi(\hat{x}, \bar{x}) = (f \star_\Theta \psi)(\hat{x}, \bar{x}) &= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} e^{-i\bar{\xi}\bar{y}} \alpha_{\frac{1}{2}\Theta\bar{\xi}}(f)(\hat{x}, \bar{x})\, V_{-\bar{y}}\psi(\hat{x}, \bar{x})\, d^l\bar{\xi}\, d^l\bar{y} \\ &= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} e^{-i\bar{\xi}\bar{y}} f(\hat{x}, \bar{x} - \tfrac{1}{2}\Theta\bar{\xi})\, \psi(\hat{x}, \bar{x} + \bar{y})\, d^l\bar{\xi}\, d^l\bar{y} \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i\bar{\xi}(\bar{y}-\bar{x})} e^{-i\hat{\xi}(\hat{y}-\hat{x})}\, f(\hat{x}, \bar{x} - \tfrac{1}{2}\Theta\bar{\xi})\, \psi(\hat{y}, \bar{y})\, d^l\bar{\xi}\, d^l\bar{y}\, d^k\hat{\xi}\, d^k\hat{y}. \end{aligned}$$

Proposition 2.3.16. *Sous les hyphothèse du théorème 2.3.15, si $f \in C_c^\infty(M)$ alors $L_f(1 + |\not{D}|)^{-n}$ appartient à $\mathcal{L}^{1,\infty}(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Pour $\hat{x}$ fixé, la fonction $\bar{x} \mapsto f(\hat{x}, \bar{x})$ est dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^l)$, et donc peut être décomposée dans la base de Wigner $\{f_{mn}\}$, avec $m, n \in \mathbb{N}^{l/2}$:

$$f(\hat{x}, \bar{x}) = \sum_{m,n} c_{mn}(\hat{x})\, f_{mn}(\bar{x}),$$

où les coefficients matriciels c_{mn} sont des éléments de $C_c^\infty(V)$.

Se donnant deux fonctions de la sorte, $f(\hat{x}, \bar{x}) = \sum c_{mn}(\hat{x})\, f_{mn}(\bar{x})$, $h(\hat{x}, \bar{x}) = \sum d_{mn}(\hat{x})\, f_{mn}(\bar{x})$, leur produit twisté devient un produit matriciel dans les variables $\bar{x}$:

$$(f \star_\Theta h)(\hat{x}, \bar{x}) = \sum_{m,n,k} c_{mk}(\hat{x})\, d_{kn}(\hat{x})\, f_{mn}(\bar{x}). \tag{2.3.7}$$

Ainsi, l'opérateur L_f peut être vu comme appartenant à l'algèbre $M_\infty(C_c^\infty(V))$ avec des éléments de matrices (à valeurs dans $C_c^\infty(V)$) à décroissance rapide.

Ainsi, on peut étendre la propriété de factorisation forte (proposition 2.2.6) à ce contexte : pour tout $f \in C_c^\infty(M)$, il existe $h, k \in C^\infty(M)$ qui sont des fonctions Schwartz dans les variables $\bar{x}$, à support compact sur V et tel que

$$f(\hat{x}, \bar{x}) = (h \star_\Theta k)(\hat{x}, \bar{x}). \tag{2.3.8}$$

Par factorisations répétées (permettant d'écrire f comme un produit de n fonctions de la sorte) et par commutateurs itérés (exactement comme dans le Corollaire 2.2.34 et le lemme 2.2.35), on

peut faire apparaître $L_f(1+|\not{D}|)^{-n}$ comme un produit de n termes de la forme $L_h(1+|\not{D}|)^{-1}L_k$, chacun d'entre eux appartenant à $\mathcal{L}^{n,\infty}(\mathcal{H})$ d'après le corollaire 2.3.12, plus un extra terme dans $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Finalement, l'inégalité de Hölder pour les classes de Schatten faibles, implique que $L_f(1+|\not{D}|)^{-n} \in \mathcal{L}^{1,\infty}(\mathcal{H})$. □

Nous allons introduire une famille d'unités locales, en généralisant la construction du paragraphe 2.2.

Définition 2.3.17. *La variété V pouvant être vue comme une union de compacts C_i, chacun étant contenu dans l'intérieur de C_{i+1}, on définit les fonctions χ_i, par : $\chi_i := 1$ sur C_i et $\chi_i := 0$ ailleurs. Pour tout $K \in \mathbb{N}$, soit la fonction e_K définie par*

$$e_K(\hat{x},\bar{x}) := \sum_{|n|\leq K} \chi_K(\hat{x})\, f_{nn}(\bar{x}),$$

où $|n| = n_1+\cdots+n_{l/2}$. Ainsi e_K est réél, $e_K\star_\Theta e_K = e_K$ d'après (2.3.7) et L_{e_K} est un projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}$. Soit ensuite, $f_K := e_K\star_\Theta f\star_\Theta e_K$, ou plus explicitement

$$f_K(\hat{x},\bar{x}) := \sum_{|m|,|n|\leq K} \chi_K(\hat{x})\, c_{mn}(\hat{x})\, f_{mn}(\bar{x}). \tag{2.3.9}$$

Par construction, $e_K\star_\Theta f_K = f_K\star_\Theta e_K = f_K$.

L'opérateur $L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}$ est Dixmier-traçable : dans la proposition 2.3.10 ainsi que dans la suite, on peut remplacer f par e_K même si il n'appartient pas à $C_c^\infty(M)$, étant donné qu'il reste à décroissance rapide. La propriété de trace de la trace de Dixmier implique alors que

$$\mathrm{Tr}_\omega\big(L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\big) = \mathrm{Tr}_\omega\big(L_{f_K}L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}\big).$$

Comme L_{f_K} est borné, le théorème 5.6 de [4] montre que si la limite

$$\lim_{s\downarrow 1}(s-1)\,\mathrm{Tr}\big(L_{f_K}(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^s\big),$$

existe, alors elle coïncidera avec la valeur de toute trace de Dixmier de l'opérateur $L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}$.

Lemme 2.3.18. *La norme trace*

$$\big\|L_{f_K}(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^s - L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns}\big\|_1 \tag{2.3.10}$$

est une fonction bornée de s, pour $1\leq s\leq 2$.

Démonstration. Posons $s =: 1+\varepsilon$, avec $0<\varepsilon\leq 1$. Nous allons utiliser la représentation spectrale suivante, généralisant (2.3.4), pour une puissance fractionnaire d'un opérateur positif A :

$$A^\varepsilon = \frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty A\,(1+\lambda A)^{-1}\,\lambda^{-\varepsilon}\,d\lambda.$$

Etant donné que L_{e_K} est un projecteur orthogonal et que $L_{f_K}L_{e_K} = L_{f_K}$, on a

$$\begin{aligned} L_{f_K}(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^s &= L_{f_K}L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}\,\big(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}\big)^\varepsilon \\ &= L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &L_{f_K}(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^s - L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns} \\ &\quad = L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\,\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}}{1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}} - \frac{(1+|\not{D}|)^{-n}}{1+\lambda(1+|\not{D}|)^{-n}}\right)\lambda^{-\varepsilon}\,d\lambda. \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

La première fraction entre parenthèse peut être réécrite comme

$$\big((1+|\not{D}|)^n+\lambda T_K\big)^{-1}T_K,$$

où

$$T_K := (1+|\not{D}|)^n L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}.$$

Comme L_{e_K} est un projecteur, on obtient

$$\begin{aligned} T_K &= L_{e_K}^2 + [(1+|\not{D}|)^n, L_{e_K}]\,(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K} \\ &= L_{e_K} + \sum_{0\le k<r\le n}\binom{n}{r}|\not{D}|^k\,[|\not{D}|, L_{e_K}]\,|\not{D}|^{r-k-1}(1+|\not{D}|)^{-n}\,L_{e_K} \\ &=: L_{e_K} + \sum_{0\le k<r\le n} A_{rk}. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

La propriété cruciale pour montrer que la différence (2.3.11) est uniformément (en ε) à trace, est que, à la seule exception du premier terme de (2.3.12) qui est seulement borné, tous les autres A_{rk} sont compacts. Plus précisément, en utilisant la proposition 2.3.6 (ainsi que quelques commutateurs), on en déduit que chaque $A_{rk}\in\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour tout $p>n$.

En suivant une idée de Rennie [91, Thm. 12], on peut réduire la différence des fractions dans l'équation (2.3.11) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}}{1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}} - \frac{(1+|\not{D}|)^{-n}}{1+\lambda(1+|\not{D}|)^{-n}} \\ &= ((1+|\not{D}|)^n+\lambda T_K)^{-1}\,T_K - ((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1} \\ &= \big(((1+|\not{D}|)^n+\lambda T_K)^{-1} - ((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1}\big)\,T_K + \big((1+|\not{D}|)^n+\lambda\big)^{-1}(T_K-1) \\ &= ((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1}(\lambda-\lambda T_K)((1+|\not{D}|)^n+\lambda T_K)^{-1}\,T_K + \big((1+|\not{D}|)^n+\lambda\big)^{-1}(T_K-1) \\ &= ((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1}\,(T_K-1)\,\big(1-((1+|\not{D}|)^n+\lambda T_K)^{-1}\,\lambda T_K\big) \\ &= ((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1}\,(T_K-1)\,\big(1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} &L_{f_K}(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^s - L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns} \\ &\quad = L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{(1+|\not{D}|)^n+\lambda}(T_K-1)\frac{1}{1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}}\,\lambda^{-\varepsilon}\,d\lambda \\ &\quad = L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{(1+|\not{D}|)^n+\lambda}\,L_{e_K}(T_K-1)\frac{1}{1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}}\,\lambda^{-\varepsilon}\,d\lambda \\ &\qquad + L_{f_K}\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\left[L_{e_K},\frac{(1+|\not{D}|)^{-n}}{(1+|\not{D}|)^n+\lambda}\right](T_K-1)\frac{1}{1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}}\,\lambda^{-\varepsilon}\,d\lambda. \end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant que le deuxième terme du membre de droite est uniformément borné en norme de trace. En écrivant

$$\begin{aligned}&\big[L_{e_K},(1+|\not{D}|)^{-n}((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1}\big]\\&\qquad=[L_{e_K},(1+|\not{D}|)^{-n}]\,((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1}+(1+|\not{D}|)^{-n}\,[L_{e_K},((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1}],\end{aligned}$$

pour le premier de ces termes, on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}&\left\|L_{f_K}[L_{e_K},(1+|\not{D}|)^{-n}]\,\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{(1+|\not{D}|)^n+\lambda}L_{e_K}(T_K-1)\frac{\lambda^{-\varepsilon}}{1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}}\,d\lambda\right\|_1\\&\le\big\|L_{f_K}[L_{e_K},(1+|\not{D}|)^{-n}]\big\|_1\\&\qquad\times\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\|((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1}\|\,\|L_{e_K}(T_K-1)\|\big\|(1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^{-1}\big\|\,\lambda^{-\varepsilon}\,d\lambda\\&\le\|L_{e_K}(T_K-1)\|\,\big\|L_{f_K}[L_{e_K},(1+|\not{D}|)^{-n}]\big\|_1\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda^{-\varepsilon}}{1+\lambda}\,d\lambda\\&=\|L_{e_K}(T_K-1)\|\,\big\|L_{f_K}[L_{e_K},(1+|\not{D}|)^{-n}]\big\|_1=:C_1.\end{aligned}$$

La constante C_1 est finie (et indépendante de ε) car

$$L_{f_K}\,[L_{e_K},(1+|\not{D}|)^{-n}]=L_{f_K}\sum_{0\le k<r\le n}\binom{n}{r}\frac{|\not{D}|^k}{(1+|\not{D}|)^n}\,[|\not{D}|,L_{e_K}]\,\frac{|\not{D}|^{r-k-1}}{(1+|\not{D}|)^n},\tag{2.3.13}$$

et car chaque terme appartient à $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, d'après la proposition 2.3.6 et l'inégalité de Hölder. D'une façon analogue, on peut montrer que la norme de trace de

$$L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\,\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty[L_{e_K},((1+|\not{D}|)^n+\lambda)^{-1}]\,L_{e_K}(T_K-1)\frac{\lambda^{-\varepsilon}}{1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}}\,d\lambda$$

est bornée par une constante $C_2:=\|L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\|\,\|[L_{e_K},(1+|\not{D}|)^{-n}]\|_1$, indépendante de ε.

En utilisant le développement (2.3.12) de T_K, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}&\big\|L_{f_K}(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^s-L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns}\big\|_1\\&\le\sum_{0\le k<r\le n}\left\|L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{(1+|\not{D}|)^n+\lambda}L_{e_K}A_{rk}\frac{\lambda^{-\varepsilon}}{1+\lambda L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K}}\,d\lambda\right\|_1\\&\qquad\qquad+C_1+C_2\\&\le\sum_{0\le k<r\le n}\big\|L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\big\|_{p/(p-1)}\,\|L_{e_K}A_{rk}\|_p\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda^{-\varepsilon}}{1+\lambda}\,d\lambda+C_1+C_2\\&=\sum_{0\le k<r\le n}\big\|L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\big\|_{p/(p-1)}\,\|L_{e_K}A_{rk}\|_p+C_1+C_2,\end{aligned}$$

qui est fini pour $p>n$. □

Preuve du théorème 2.3.15. Pour $1<s\le 2$, l'opérateur $L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns}$ apparaissant dans (2.3.10) est à trace, étant égale au produit de $L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-n}\in\mathcal{L}^{1,\infty}(\mathcal{H})$ par $L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n(s-1)}\in\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour $p>1/(s-1)$, plus un commutateur à trace. La différence des traces

$$\mathrm{Tr}\big(L_{f_K}(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^s\big)-\mathrm{Tr}\big(L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns}\big)$$

est alors une fonction bornée de s, pour $1 \leq s \leq 2$. Ainsi,

$$\lim_{s\downarrow 1}(s-1)\,\mathrm{Tr}\big(L_{f_K}(L_{e_K}(1+|\not{D}|)^{-n}L_{e_K})^s\big) = \lim_{s\downarrow 1}(s-1)\,\mathrm{Tr}\big(L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns}\big). \tag{2.3.14}$$

L'expression du noyau de $L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns}$ et le lemme 1.2.15 donnent

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big(L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns}\big) &= \int_M K_{L_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns}}(p,p)\,\mu_g(p)\\
&= (2\pi)^{-l}\int_M\int_{\mathbb{R}^{2l}} e^{-iyz} f((-\tfrac{1}{2}\Theta y)\cdot p)\,K_{(1+|\not{D}|)^{-ns}}(z\cdot p,p)\,d^l y\,d^l z\,\mu_g(p)\\
&= (2\pi)^{-l}\int_M\int_{\mathbb{R}^{2l}} e^{-iyz} f(p')\,K_{(1+|\not{D}|)^{-ns}}(z\cdot p',p')\,d^l y\,d^l z\,\mu_g(p')\\
&= \int_M f_K(p')\,K_{(1+|\not{D}|)^{-ns}}(p',p')\,\mu_g(p')\\
&= \mathrm{Tr}\big(M_{f_K}(1+|\not{D}|)^{-ns}\big).
\end{aligned}$$

Le calcul du terme de droite de (2.3.14) est alors direct :

$$\lim_{s\downarrow 1}(s-1)\ \mathrm{Tr}\big(M_{f_K}\,(1+|\not{D}|)^{-ns}\big) = \mathrm{Tr}_\omega\big(M_{f_K}\,(1+|\not{D}|)^{-n}\big) = C(n)\int_M f_K(p)\,\mu_g(p). \tag{2.3.15}$$

La dernière égalité est une propriété connue de la trace de Dixmier dans le cas commutatif non compact [91]. La constante de proportionnalité $C(n) = 2^{\lfloor n/2\rfloor}\,\Omega_n/n\,(2\pi)^n$ est la même que dans le corollaire 2.3.14.

Il reste a s'affranchir de la troncature induite par les projecteurs L_{e_K}. Notons tout d'abord que

$$\mathrm{Tr}_\omega\big((L_f - L_{f_K})\,(1+|\not{D}|)^{-n}\big) = \mathrm{Tr}_\omega\big((1-L_{e_K})L_f\,(1+|\not{D}|)^{-n}\big),$$

car $L_f[L_{e_K},(1+|\not{D}|)^{-n}]$ est à trace (voir (2.3.13)) et car L_{e_K} est un idempotent. En utilisant une fois de plus la propriété de factorisation, $f = h\star_\Theta k$, on obtient

$$\big|\mathrm{Tr}_\omega\big((L_f - L_{f_K})\,(1+|\not{D}|)^{-n}\big)\big| \leq \|L_h - L_{e_K\star_\Theta h}\|\,\big|\mathrm{Tr}_\omega\big(L_k\,(1+|\not{D}|)^{-n}\big)\big|. \tag{2.3.16}$$

Le terme de droite tend vers zéro lorsque $K\to\infty$, en vertu de l'estimation (1.2.11) pour la norme de l'opérateur de multiplication twisté. En réécrivant (2.3.15) comme

$$\mathrm{Tr}_\omega\big(L_{f_K}\,(1+|\not{D}|)^{-n}\big) = C(n)\int_M f_K(p)\,\mu_g(p),$$

on obtient que le terme de gauche converge vers $\mathrm{Tr}_\omega(L_f\,(1+|\not{D}|)^{-n})$ lorsque $K\to\infty$. Pour le terme de droite, le fait que les coefficients $c_{mn}(\hat{x})$ dans (2.3.9) sont à décroissance rapide assure que $f_K\to f$ dans $L^1(M,\mu_g)$. En prenant la limite $K\to\infty$ pour les deux membres de (2.3.16) on obtient le résultat :

$$\mathrm{Tr}_\omega\big(L_f\,(1+|\not{D}|)^{-n}\big) = C(n)\int_M f(p)\,\mu_g(p). \qquad \square$$

Chapitre 3

Fonctionnelles d'actions

L'importante intersection entre la géométrie non commutative et la physique des interactions fondamentales [5–7, 12, 16, 18, 19, 66, 107] a plusieurs origines.

D'une part, il y a les motivations conceptuelles inhérentes à la notion d'espace quantique, qui même en l'absence d'avancée majeure, fournit un cadre prometteur pour la résolution du problème de la quantification de la gravitation et/ou de la compréhension de l'origine des divergences qui apparaissent en théorie quantique des champs ordinaire. En particulier, il n'est pas encore clair que les divergences ultraviolettes dont sont affublées ces théories, viennent de la non prise en compte de la nature quantique de l'espace-temps, ou si elles sont une caractéristique fondamentale, et donc sont à considérer avec plus d'égard [20–22].

D'autre part, au niveau classique cette fois, la géométrie non commutative a permis des avancées conceptuelles importantes : interprétation géométrique du mécanisme de Higgs et unification des quatre interactions fondamentales. Ces avancées sont conséquentes à la constructions de 'fonctionnelles d'actions pour champs de jauge non commutatif', généralisant celles de Yang–Mills et d'Einstein–Hilbert dans un cadre géométrique plus étendu.
Dans ce chapitre, nous allons voir deux constructions d'actions non commutatives, au travers des exemples de déformations isospectrales que sont les plans de Moyal : l'action de Connes–Lott et l'action spectrale.

L'action de Connes–Lott, introduite dans [18, 19], a permis de décrire le modèle standard de la physique des particules (MS) dans un cadre non commutatif. Le triplet spectral décrivant ce modèle est le produit d'un triplet spectral commutatif $(C^\infty(M), L^2(M,S), \not{D})$ avec un triplet spectral fini (de dimension spectrale nulle), où l'algèbre est la somme directe $\mathcal{A}_F = \mathbb{H}\oplus\mathbb{C}\oplus M_3(\mathbb{C})$ ($\mathbb{H}$ est le corps des quaternions), l'opérateur de Dirac est la matrice de masse fermionique et l'espace de représentation est le corps des complexes à la puissance du nombre de particules du modèle (en comptant tous les degrés de libertés : couleur, isospin....). Ces triplets portent le nom éloquent de triplets spectraux presque commutatifs. Le groupe de jauge du modèle standard est alors obtenu comme le groupe des unitaires de l'algèbre $\mathcal{A}_F$.
Une fonctionnelle d'action est ensuite construite à partir de 'l'intégrale non commutative'

$$\mathcal{A} \ni a \mapsto \mathrm{Tr}_\omega\left(\pi(a)(1+\mathcal{D}^2)^{-n/2}\right),$$

évaluée sur le carré de la courbure F d'un 'champ de jauge non commutatif' représenté A :

$$\tilde{\pi}\big(\Omega^1\mathcal{A}\big) \ni A = \sum_{j\in J}\tilde{\pi}(a_j\delta b_j) := \sum_{j\in J}\pi(a_i)[\mathcal{D},\pi(b_i)],$$

et la courbure, par analogie avec sa définition ordinaire, est donnée par

$$F = [\mathcal{D}, A] + A^2.$$

Pour que cette action soit analytiquement bien définie dans le cas sans unité, i.e. pour que

$$\mathrm{Tr}_\omega \left(\pi(.)(1 + \mathcal{D}^2)^{-n/2} \right) \in \mathcal{A}^*,$$

il faut ne considérer que des champs de jauge prenant valeur dans l'algèbre sans unité. Cette restriction peut paraître excessive, car ne permettant pas aux potentiels vecteurs d'être de "pure jauge", i.e. d'avoir la forme

$$A_{pj} = \pi(u)^*[\mathcal{D}, \pi(u)],$$

pour u un unitaire de l'algèbre unifère $\widetilde{\mathcal{A}}$. Nous verrons comment, avec l'action spectrale, on peut contourner cet obstacle.
Concernant le modèle standard, cette nouvelle description donne enfin une interprétation géométrique du champ de Higgs. Ce dernier fera alors intégralement partie de la connection de "Yang–Mills" généralisée. Plus heuristiquement, il sera interprété comme une connection, au sens mathématique aussi bien qu'au sens littéral, entre le monde des fermions droits et celui des fermions gauches.
Il y a aussi une avancée au niveau phénoménologique : les paramètres du potentiel de Higgs ne sont plus libres, on obtient des contraintes sur sa masse [5].

Alors que l'action de Connes–Lott n'est finalement qu'une généralisation abstraite de celle de Yang–Mills, l'action spectrale est fondée sur des concepts différents. Le point de départ de cette construction fut la recherche d'une fonctionnelle d'action ne dépendant que du spectre de l'opérateur de Dirac généralisé $\mathcal{D}_A$, covariant par rapport à l'action du groupe des unitaires de l'algèbre. Dans le cas d'un triplet spectral unital, l'action spectrale est alors définie comme le nombre de valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A + \varepsilon JAJ^{-1}$ inférieures en module à une constante Λ :

$$S_\Lambda(\mathcal{D}, A) = \#\{\lambda_k : |\lambda_k| \leq \Lambda\}.$$

Lorsque l'on considère le triplet spectral du MS, l'action spectrale unifie au niveau classique le modèle standard complet (Yang–Mills–Higgs) avec la gravitation d'Einstein–Weyl. Cette approche donne elle aussi une interprétation géométrique du mécanisme de Higgs, ainsi que des contraintes sur la masse de cette particule scalaire [5].

3.1 Action de Connes–Lott

La construction (et le calcul) de l'action de Connes–Lott pour un triplet spectral sans unité, sera donnée au travers de l'exemple des plans de Moyal non dégénérés. Le résultat que nous allons obtenir est tout à fait naturel, dans le sens où l'action obtenue est celle de Yang–Mills pour laquelle tous les produits point à point ont été remplacés par des produits de Moyal. Le point clef du calcul d'une telle action est la détermination d'un idéal, appelé Junk, de l'algèbre différentielle universelle associée à l'algèbre non commutative décrivant le modèle. Nous verrons que cet idéal possède la même structure que dans tous les exemples connus : géométries presque commutatives, tores non commutatifs. Cependant, les éléments caractéristiques de cet idéal sont propres à chaque exemple. L'outil de base va une fois encore être la base de Wigner de l'oscillateur harmonique.

3.1.1 L'algèbre différentielle universelle

Nous allons nous borner à décrire une théorie de jauge $U(1)$ sur plan de Moyal. Le cas général $U(n)$ peut être obtenu en tensorisant l'algèbre $\mathcal{A}_\theta = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N}), \star_\theta)$ par l'algèbre finie $M_n(\mathbb{C})$. C'est -à-dire que nous utiliserons ici $\mathcal{A}_F = \mathbb{C}$.
Aussi, pour des raisons de cohérence analytique, nous ne considérerons ni son extension $\bar{\mathcal{A}}_\theta = (\mathcal{D}_{L^2}, \star_\theta)$ ni son plongement unifère $\widetilde{\mathcal{A}}_\theta = (\mathcal{B}, \star_\theta)$ (voir paragraphe 2.2.2), pour lesquelles l'application

$$\mathrm{Tr}_\omega \left(\pi(.)(1+\mathcal{D}^2)^{-n/2} \right),$$

n'est pas définie.
Les références concernant la construction utilisée dans ce paragraphe sont [13, 18, 19, 107]. Soit

$$\Omega^\bullet \mathcal{A}_\theta := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \Omega^p \mathcal{A}_\theta,$$

l'algèbre différentielle graduée universelle sur $\mathcal{A}_\theta$. Par définition, $\Omega^p\mathcal{A}_\theta$, $p \geq 1$, est définie par symboles et relations

$$\Omega^p \mathcal{A}_\theta := \{\, f_0\, \delta f_1 \cdots \delta f_p : f_i \in \mathcal{A}_\theta \,\},$$

et la seule contrainte sur le symbole δ est de satisfaire à la règle de Leibniz

$$\delta(f_1 \star_\theta f_2) = (\delta f_1)\, f_2 + f_1\, \delta f_2,$$

ainsi δ peut être étendue sur tout $\Omega^\bullet\mathcal{A}_\theta$. Etant donné que $\mathcal{A}_\theta$ n'a pas d'unité, on définit [13, III.1.α] $\Omega^0\mathcal{A}_\theta := \mathcal{A}_\theta \oplus \mathbb{C}$, qui est la compactification maximale de $\mathcal{A}_\theta$ et on pose $\delta(0 \oplus 1) := 0$. Pour obtenir une $*$-algèbre graduée, on pose aussi $(\delta f)^* := \delta f^*$.

La représentation π^θ de $\mathcal{A}_\theta$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ s'étend naturellement sur tout $\Omega^\bullet\mathcal{A}_\theta$, par

$$\tilde{\pi}^\theta : \Omega^p\mathcal{A}_\theta \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) : f_0\, \delta f_1 \cdots \delta f_p \mapsto i^p\, \pi^\theta(f_0)\, [\partial\!\!\!/, \pi^\theta(f_1)] \cdots [\partial\!\!\!/, \pi^\theta(f_p)].$$

On a évidemment :

Lemme 3.1.1. *Lorsque $f_i \in \mathcal{A}_\theta$, alors*

$$\tilde{\pi}^\theta(f_0\, \delta f_1 \cdots \delta f_p) = L^\theta(f_0 \star_\theta \partial_{\mu_1} f_1 \star_\theta \cdots \star_\theta \partial_{\mu_p} f_p) \otimes \gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_p}.$$

Preuve. C'est une simple conséquence de $[\partial\!\!\!/, L^\theta_f \otimes 1_{2^N}] = -iL^\theta(\partial_\mu f) \otimes \gamma^\mu$ et de $L^\theta_f\, L^\theta_g = L^\theta(f \star_\theta g)$. □

Pour palier au fait que la représentation $\tilde{\pi}^\theta$ n'est pas a priori fidèle (bien que π^θ le soit), on introduit l'idéal bilatère gradué de $\Omega^\bullet\mathcal{A}_\theta$,

$$\mathrm{Junk} := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} J^p := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} J^p_0 + \delta J^{p-1}_0,$$

où J^p_0 est le noyau de $\tilde{\pi}^\theta$ relevé à $\Omega^p\mathcal{A}_\theta$,

$$J^p_0 := \{\, \omega \in \Omega^p\mathcal{A}_\theta : \tilde{\pi}^\theta(\omega) = 0 \,\},$$

et finalement, on définit l'algèbre quotient

$$\Omega_{\not{D}}\,\mathcal{A}_\theta := \tilde{\pi}^\theta(\Omega^\bullet\mathcal{A}_\theta)/\tilde{\pi}^\theta(\text{Junk}) = \tilde{\pi}^\theta(\Omega^\bullet\mathcal{A}_\theta)/\bigoplus_{p=1}^{\infty}\tilde{\pi}^\theta(\delta J_o^p).$$

Le 2-junk, seule composante non triviale nécessaire à la construction de l'action de Connes–Lott, est dans notre cas particulièrement simple car isomorphe à $\pi^\theta(\mathcal{A}_\theta)$.

En utilisant la base de Wigner $\{f_{mn}\}$, nous allons dans le lemme suivant, exhiber des éléments particuliers de $\tilde{\pi}^\theta(J^2)$, suffisants pour le caractériser entièrement.

Lemme 3.1.2. *Pour $m,n,k,l\in\mathbb{N}^N$, soit $\omega_{mnkl} := f_{mk}\,\delta f_{kn} - f_{ml}\,\delta f_{ln}\in\Omega^1\mathcal{A}_\theta$ (sans sommation sur k et l). Alors*

$$\tilde{\pi}^\theta(\omega_{mnkl}) = 0 \quad \textit{et} \quad \tilde{\pi}^\theta(\delta\omega_{mnkl}) = \tfrac{2}{\theta}(|k|-|l|)\,L^\theta(f_{mn})\otimes 1_{2^N}.$$

La première composante du Junk est par définition triviale

$$\tilde{\pi}^\theta(J^1) = \tilde{\pi}^\theta(J_0^1) + \tilde{\pi}^\theta(\delta J_0^0) = \tilde{\pi}^\theta(\delta J_0^0) = 0,$$

car la représentation π^θ est fidèle : $J_0^0 = \ker\pi = 0$. Les éléments de $\tilde{\pi}^\theta(J^2)$ sont les éléments $\delta\omega\in\Omega^2\mathcal{A}_\theta$ qui sont tels que $\tilde{\pi}^\theta(\omega)=0$, alors que $\tilde{\pi}^\theta(\delta\omega)\neq 0$. Les éléments ω_{mnkl} définis lors de l'énoncé du lemme précédent appartiennent alors à $\tilde{\pi}^\theta(J^2)$.

Preuve du lemme 3.1.2. En utilisant les fonctions de création et d'annihilation (2.2.9), on peut réécrire l'opérateur de Dirac en termes de Moyal-commutateurs ; en adoptant la convention $\partial_{a_j} = \partial/\partial a_j$ et $\partial_{a_j^*} = \partial/\partial a_j^*$, pour $j=1,\dots,N$, on obtient

$$\not{\partial} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sum_j \gamma^j(\partial_{a_j}+\partial_{a_j^*}) + i\gamma^{j+N}(\partial_{a_j}-\partial_{a_j^*}) = -i\sum_j(\gamma^{a_j}\,\partial_{a_j}+\gamma^{a_j^*}\,\partial_{a_j^*}),$$

où $\gamma^{a_j} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^j + i\gamma^{j+N})$ et $\gamma^{a_j^*} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^j - i\gamma^{j+N})$.

La propriété (2.2.6), appliquée à a_j et a_j^* donne

$$\partial_{a_j} = -\frac{1}{\theta}\,\mathrm{ad}_{\star_\theta}\,a_j^* := -\frac{1}{\theta}[a_j^*,\cdot\,]_{\star_\theta}, \qquad \partial_{a_j^*} = \frac{1}{\theta}\,\mathrm{ad}_{\star_\theta}\,a_j := \frac{1}{\theta}[a_j,\cdot\,]_{\star_\theta}$$

et donc

$$\not{\partial} = -\frac{i}{\theta}\sum_j(\gamma^{a_j^*}\,\mathrm{ad}_{\star_\theta}\,a_j - \gamma^{a_j}\,\mathrm{ad}_{\star_\theta}\,a_j^*).$$

Soit $u_j := (0,0,\dots,1,\dots,0)$ le j-ième vecteur de base standard de $\mathbb{R}^N$. A partir de la définition (2.2.8) des éléments de la base de Wigner $\{f_{mn}\}$, on obtient directement

$$a_j^*\star_\theta f_{mn} = \sqrt{\theta(m_j+1)}\,f_{m+u_j,n}, \qquad f_{mn}\star_\theta a_j^* = \sqrt{\theta n_j}\,f_{m,n-u_j}, \tag{3.1.1}$$

$$a_j\star_\theta f_{mn} = \sqrt{\theta m_j}\,f_{m-u_j,n}, \qquad f_{mn}\star_\theta a_j = \sqrt{\theta(n_j+1)}\,f_{m,n+u_j}. \tag{3.1.2}$$

Ainsi,

$$[\partial\!\!\!/, L^\theta(f_{mn})] = -\frac{i}{\theta}\sum_j \gamma^{a_j}\big(\sqrt{\theta n_j}\, L^\theta(f_{m,n-u_j}) - \sqrt{\theta(m_j+1)}\, L^\theta(f_{m+u_j,n})\big) \\ + \gamma^{a_j^*}\big(\sqrt{\theta m_j}\, L^\theta(f_{m-u_j,n}) - \sqrt{\theta(n_j+1)}\, L^\theta(f_{m,n+u_j})\big). \tag{3.1.3}$$

Nous pouvons dorénavant calculer $\tilde{\pi}^\theta(\omega_{mnkl})$ et $\tilde{\pi}^\theta(\delta\omega_{mnkl})$. Premièrement,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}^\theta(\omega_{mnkl}) &= \tilde{\pi}^\theta(f_{mk}\,\delta f_{kn} - f_{ml}\,\delta f_{ln}) = L^\theta(f_{mk}\star_\theta \partial_\mu f_{kn} - f_{ml}\star_\theta \partial_\mu f_{ln}) \otimes \gamma^\mu \\
&= \frac{1}{\theta}\sum_j \big(\sqrt{\theta n_j}\, L^\theta(f_{mk}\star_\theta f_{k,n-u_j}) - \sqrt{\theta(k_j+1)}\, L^\theta(f_{mk}\star_\theta f_{k+u_j,n}) \\
&\qquad - \sqrt{\theta n_j}\, L^\theta(f_{ml}\star_\theta f_{l,n-u_j}) + \sqrt{\theta(l_j+1)}\, L^\theta(f_{ml}\star_\theta f_{l+u_j,n})\big) \otimes \gamma^{a_j} \\
&\quad + \big(\sqrt{\theta k_j}\, L^\theta(f_{mk}\star_\theta f_{k-u_j,n}) - \sqrt{\theta(n_j+1)}\, L^\theta(f_{mk}\star_\theta f_{k,n+u_j}) \\
&\qquad - \sqrt{\theta l_j}\, L^\theta(f_{ml}\star_\theta f_{l-u_j,n}) + \sqrt{\theta(n_j+1)}\, L^\theta(f_{ml}\star_\theta f_{l,n+u_j})\big) \otimes \gamma^{a_j^*} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété d'unités matricielles des f_{mn} pour le produit de Moyal. Deuxièmement,

$$\tilde{\pi}^\theta(\delta\omega_{mnkl}) = \tilde{\pi}^\theta(\delta f_{mk}\,\delta f_{kn} - \delta f_{ml}\,\delta f_{ln}) = L^\theta(\partial_\mu f_{mk}\star_\theta \partial_\nu f_{kn} - \partial_\mu f_{ml}\star_\theta \partial_\nu f_{ln}) \otimes \gamma^\mu\gamma^\nu,$$

qui est égal à

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta^2}\Bigg\{ &\sum_j \Big(\big(\sqrt{\theta k_j}\, L^\theta(f_{m,k-u_j}) - \sqrt{\theta(m_j+1)}\, L^\theta(f_{m+u_j,k})\big) \otimes \gamma^{a_j} \\
&\qquad + \big(\sqrt{\theta m_j}\, L^\theta(f_{m-u_j,k}) - \sqrt{\theta(k_j+1)}\, L^\theta(f_{m,k+u_j})\big) \otimes \gamma^{a_j^*}\Big) \\
&\sum_p \Big(\big(\sqrt{\theta n_p}\, L^\theta(f_{k,n-u_p}) - \sqrt{\theta(k_p+1)}\, L^\theta(f_{k+u_p,n})\big) \otimes \gamma^{a_p} \\
&\qquad + \big(\sqrt{\theta k_p}\, L^\theta(f_{k-u_p,n}) - \sqrt{\theta(n_p+1)}\, L^\theta(f_{k,n+u_p})\big) \otimes \gamma^{a_p^*}\Big) \\
-&\sum_j \Big(\big(\sqrt{\theta l_j}\, L^\theta(f_{m,l-u_j}) - \sqrt{\theta(m_j+1)}\, L^\theta(f_{m+u_j,l})\big) \otimes \gamma^{a_j} \\
&\qquad + \big(\sqrt{\theta m_j}\, L^\theta(f_{m-u_j,l}) - \sqrt{\theta(l_j+1)}\, L^\theta(f_{m,l+u_j})\big) \otimes \gamma^{a_j^*}\Big) \\
&\sum_p \Big(\big(\sqrt{\theta n_p}\, L^\theta(f_{l,n-u_p}) - \sqrt{\theta(l_p+1)}\, L^\theta(f_{l+u_p,n})\big) \otimes \gamma^{a_p} \\
&\qquad + \big(\sqrt{\theta l_p}\, L^\theta(f_{l-u_p,n}) - \sqrt{\theta(n_p+1)}\, L^\theta(f_{l,n+u_p})\big) \otimes \gamma^{a_p^*}\Big)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

En utilisant encore la propriété d'unités matricielles, l'expression précédente se simplifie

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}^\theta(\delta\omega_{mnkl}) &= \frac{1}{\theta}\sum_j \big(k_j L^\theta(f_{mn})\otimes\gamma^{a_j}\gamma^{a_j^*} + (k_j+1)L^\theta(f_{mn})\otimes\gamma^{a_j^*}\gamma^{a_j} \\ &\qquad - l_j L^\theta(f_{mn})\otimes\gamma^{a_j}\gamma^{a_j^*} - (l_j+1)L^\theta(f_{mn})\otimes\gamma^{a_j^*}\gamma^{a_j}\big) \\ &= \frac{1}{\theta}\, L^\theta(f_{mn})\otimes\sum_j (k_j-l_j)\,(\gamma^{a_j}\gamma^{a_j^*}+\gamma^{a_j^*}\gamma^{a_j}) \\ &= \frac{2}{\theta}\sum_j (k_j-l_j)\, L^\theta(f_{mn})\otimes 1_{2^N}. \qquad \square\end{aligned}$$

Proposition 3.1.3. *Il y a une identification naturelle entre $\tilde{\pi}^\theta(J^2)$ et $\pi^\theta(\mathcal{A}_\theta) = L^\theta(\mathcal{A}_\theta)\otimes 1_{2^N}$.*

Preuve. Tout $\omega\in\tilde{\pi}^\theta(J^2)\subset\tilde{\pi}^\theta(\Omega^2\mathcal{A}_\theta)$ peut être écrit comme $\omega=\sum_{j\in I} L^\theta(\partial_\mu f_j)L^\theta(\partial_\nu g_j)\otimes\gamma^\mu\gamma^\nu$ où I est un ensemble fini, et satisfait $\sum_{j\in I} L^\theta(f_j\star_\theta\partial_\mu g_j)\otimes\gamma^\mu = 0$. D'après la règle de Leibniz,

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{j\in I} L^\theta(\partial_\mu(f_j\star_\theta\partial_\nu g_j) - f_j\star_\theta\partial_\mu\partial_\nu g_j)\otimes\gamma^\mu\gamma^\nu = -\sum_{j\in I} L^\theta(f_j\star_\theta\partial_\mu\partial_\nu g_j)\otimes\gamma^\mu\gamma^\nu \\ &= -\sum_{j\in I} L^\theta(f_j\star_\theta\partial_\mu\partial_\nu g_j)\otimes\eta^{\mu\nu}\,1_{2^N}.\end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{\pi}^\theta(J^2)\subset\pi^\theta(\mathcal{A}_\theta) = L^\theta(\mathcal{A}_\theta)\otimes 1_{2^N}$.

Soit maintenant $\omega_{mnkl} := f_{mk}\,\delta f_{kn} - f_{ml}\,\delta f_{ln}$, le lemme précédent montre que $\tilde{\pi}^\theta(\omega_{mnkl}) = 0$ et $\tilde{\pi}^\theta(\delta\omega_{mnkl}) = \frac{2}{\theta}\sum_{j=1}^N (k_j-l_j)\,L^\theta(f_{mn})\otimes 1_{2^N}$, qui est non nul si $|l|\neq|k|$. Ainsi, $L^\theta(f_{mn})\otimes 1_{2^N}$ appartient à $\tilde{\pi}^\theta(J^2)$ pour tout $m,n\in\mathbb{N}^N$. Puisque $\{f_{mn}\}$ est une base de $\mathcal{A}_\theta$, on en déduit que $\pi^\theta(\mathcal{A}_\theta)\simeq L^\theta(\mathcal{A}_\theta)\otimes 1_{2^N}\subset\tilde{\pi}^\theta(J^2)$, qui conclut la preuve. $\square$

Il est aisé de généraliser ce résultat pour caractériser toutes les composantes du Junk.

Corollaire 3.1.4. *Pour $p\geq 2$, $\tilde{\pi}^\theta(J^p)$ est linéairement engendré par les éléments de $\tilde{\pi}^\theta(\Omega^p\mathcal{A}_\theta)$ ayant la forme $L_f^\theta\otimes\gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_k}$, avec $k\leq p-2$ et de même parité que p.*

En particulier, en utilisant l'antisymétrie des matrices de Clifford, on obtient que $\tilde{\pi}^\theta(J^p)=0$ pour $p>2N$.

Remarque 3.1.5. *Pour les triplets spectraux commutatifs $(C^\infty(M), L^2(M,S), \not{D})$ et pour ceux des tores non commutatifs $(C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta), L^2(\mathbb{T}^l)\otimes\mathbb{C}^{2^{\lfloor l/2\rfloor}}, \not{\partial})$ (où $\lfloor l/2\rfloor$ désigne la partie entière de $l/2$), le 2-Junk est aussi isomorphe à l'algèbre de départ. En fait, l'inclusion $\widetilde{\pi}(J^2)\subset\pi(\mathcal{A})$, pour $\mathcal{A}=C^\infty(M)$ ou $\mathcal{A}=C^\infty(\mathbb{T}^l_\Theta)$ est automatiquement satisfaite car elle n'utilise pas la commutativité/non commutativité de l'algèbre mais seulement la règle de Leibniz. Pour obtenir l'inclusion inverse, les éléments caractéristiques du 2-Junk sont, dans les cas commutatifs*

$$(\delta f)f - f(\delta f), \quad \textit{pour} \quad f\in C^\infty(M),$$

et pour les tores non commutatifs

$$u_j(\delta u_j^{-1}) + (\delta u_j)u_j^{-1},\ j=1,\cdots,l,$$

où les u_j sont les unitaires engendrant le tore non commutatif, i.e. satisfaisant à la relation $u_iu_j = e^{-i\Theta_{ij}}\,u_ju_i$.

3.1.2 Fonctionnelle d'action

Ayant identifié les éléments de $\tilde{\pi}^\theta(J^2)$, on va pouvoir caractériser les éléments du quotient $\Omega^2_{\not\partial}\mathcal{A}_\theta$. Pour cependant ne pas avoir à manipuler des classes d'équivalence de 'formes universelles', il est commode d'introduire un produit scalaire, qui permettra de choisir sans ambiguïté un unique représentant dans chaque classe d'équivalence.

Soit $\widetilde{\mathcal{H}}_p$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\tilde{\pi}^\theta(\Omega^p\mathcal{A}_\theta)$ par rapport à la norme induite par le produit scalaire

$$\langle \tilde{\pi}^\theta(\omega) \mid \tilde{\pi}^\theta(\omega')\rangle_p := \mathrm{Tr}_\omega\big(\tilde{\pi}^\theta(\omega)^*\, \tilde{\pi}^\theta(\omega')\, (\not\partial^2 + \varepsilon^2)^{-N}\big),$$

pour $\omega, \omega' \in \Omega^p\mathcal{A}_\theta$. Cette forme sesquilinéaire définit une pré-action $I(\eta)$ lorsque $p = 2$ et $\omega' = \omega = \delta\eta + \eta^2$:

$$I(\eta) := \mathrm{Tr}_\omega\big(\tilde{\pi}^\theta(\omega)^*\, \tilde{\pi}^\theta(\omega)\, (\not\partial^2 + \varepsilon^2)^{-N}\big). \tag{3.1.4}$$

Soit P le projecteur orthogonal sur $\widetilde{\mathcal{H}}_p$ dont l'image est le complément orthogonal de $\tilde{\pi}^\theta(\delta J_0^{p-1})$ et soit $\mathcal{H}_p := P\widetilde{\mathcal{H}}_p$. Alors P prolonge sur $\mathcal{H}_p$, l'application quotient de $\tilde{\pi}^\theta(\Omega^p\mathcal{A}_\theta)$ vers $\Omega^p_{\not\partial}\,\mathcal{A}_\theta$, qui est identifié à un sous-espace dense de $\mathcal{H}_p$. La possible ambiguïté dans (3.1.4) due au fait que $\tilde{\pi}^\theta$ n'est pas fidèle, disparaît en définissant une fonctionnelle d'action (action de Yang–Mills non commutative) par :

$$YM(\alpha) := \frac{N!\,(2\pi)^N}{8g^2}\, \langle P\tilde{\pi}^\theta(F) \mid P\tilde{\pi}^\theta(F)\rangle_2, \tag{3.1.5}$$

où $\Omega^1_{\not\partial}\,\mathcal{A}_\theta \ni \alpha = \tilde{\pi}^\theta(\eta)$ et $F = \delta\eta + \eta^2$ est la courbure de la 1-forme η et g est une constante de couplage. Il est démontré dans [18,107], que $YM(\alpha)$ coïncide avec l'infimum des pré-actions sur l'ensemble des 1-formes $\eta \in \Omega^1\mathcal{A}_\theta$ ayant la même image dans $\Omega^1_{\not\partial}\,\mathcal{A}_\theta$:

$$YM(\alpha) = \frac{N!\,(2\pi)^N}{8g^2}\, \inf\{\, I(\eta) : \tilde{\pi}^\theta(\eta) = \alpha\,\}.$$

Ce résultat justifie la notation $YM(\alpha)$, car cette fonctionnelle positive en η, ne dépend que de sa classe d'équivalence dans $\Omega^1_{\not\partial}\mathcal{A}_\theta$, c'est-à-dire α.

Théorème 3.1.6. *Soit $\eta = -\eta^* \in \Omega^1\mathcal{A}_\theta$. Alors l'action de Yang–Mills non commutative $YM(\alpha)$ de la connection universelle $\delta + \eta$, avec $\alpha = \tilde{\pi}^\theta(\eta)$, est égale à*

$$YM(\alpha) = -\frac{1}{4g^2}\int d^{2N}x\, F^{\mu\nu}\star_\theta F_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{4g^2}\int d^{2N}x\, F^{\mu\nu}(x)\, F_{\mu\nu}(x), \tag{3.1.6}$$

où $F_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]_{\star_\theta})$ et A_μ est défini par $\alpha = L^\theta(A_\mu)\otimes\gamma^\mu$.

Preuve. Si $\eta = \sum_{j\in I} f_j\,\delta g_j$ avec $f_j, g_j \in \mathcal{S}$ pour un ensemble fini I, alors $\alpha = \sum_{j\in I} L^\theta_{f_j} L^\theta_{\partial_\mu g_j}\otimes\gamma^\mu$ $= \sum_{j\in I} L^\theta(f_j\star_\theta\partial_\mu g_j)\otimes\gamma^\mu$ et donc $A_\mu := \sum_{j\in I} f_j\star_\theta\partial_\mu g_j$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}^\theta(\delta\eta + \eta^2) &= \tilde{\pi}^\theta(\delta f_j\,\delta g_j + (f_j\,\delta g_j)(f_k\,\delta g_k)) = \tilde{\pi}^\theta(\delta f_j\,\delta g_j + f_j\,\delta(g_j\star_\theta f_k)\delta g_k - (f_j\star_\theta g_j)\,\delta f_k\,\delta g_k)\\
&= L^\theta(\partial_\mu f_j\star_\theta\partial_\nu g_j + f_j\star_\theta\partial_\mu(g_j\star_\theta f_k)\star_\theta\partial_\nu g_k - f_j\star_\theta g_j\star_\theta\partial_\mu f_k\star_\theta\partial_\nu g_k)\otimes\gamma^\mu\gamma^\nu\\
&= L^\theta(\partial_\mu f_j\star_\theta\partial_\nu g_k + f_j\star_\theta\partial_\mu g_j\star_\theta f_k\star_\theta\partial_\nu g_k)\otimes\gamma^\mu\gamma^\nu\\
&= L^\theta(\partial_\mu(f_j\star_\theta\partial_\nu g_j) + f_j\star_\theta\partial_\mu g_j\star_\theta f_k\star_\theta\partial_\nu g_k)\otimes\gamma^\mu\gamma^\nu - L^\theta(f_j\star_\theta\partial_\mu\partial_\nu g_j)\otimes\eta^{\mu\nu}\,1_{2^N}\\
&= L^\theta(\partial_\mu A_\nu + A_\mu\star_\theta A_\nu)\otimes\tfrac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] + \eta^{\mu\nu}L^\theta(\partial_\mu A_\nu + A_\mu\star_\theta A_\nu)\otimes 1_{2^N}\\
&\qquad - \eta^{\mu\nu}L^\theta(f\star_\theta\partial_\mu\partial_\nu g)\otimes 1_{2^N}.
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes étant dans $\tilde{\pi}^\theta(J^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} P(\tilde{\pi}^\theta(F)) &= P\big(L^\theta(\partial_\mu A_\nu + A_\mu \star_\theta A_\nu) \otimes \tfrac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\big) \\ &= P\big(L^\theta(\tfrac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]_{\star_\theta}) \otimes \gamma^\mu\gamma^\nu\big) \\ &= P(L^\theta(F_{\mu\nu}) \otimes \gamma^\mu\gamma^\nu) = L^\theta(F_{\mu\nu}) \otimes \gamma^\mu\gamma^\nu. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que tout $\omega = \omega_{\mu\nu} \otimes \gamma^\mu\gamma^\nu \in \tilde{\pi}^\theta(\Omega^2\mathcal{A}_\theta)$ peut être uniquement décomposé en

$$\omega = \omega_{\mu\nu} \otimes \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) + \omega_{\mu\nu} \otimes \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

dans $\tilde{\pi}^\theta(\Omega^2\mathcal{A}_\theta)_a \oplus \tilde{\pi}^\theta(\Omega^2\mathcal{A}_\theta)_s = \tilde{\pi}^\theta(\Omega^2\mathcal{A}_\theta)_a \oplus \tilde{\pi}^\theta(J^2)$, somme directe des parties antisymétrique et symétrique. Puisque $A_\mu = -A_\mu^*$, on obtient $F_{\mu\nu}^* = -F_{\mu\nu}$ et $P(\tilde{\pi}^\theta(F))^* = L^\theta(F_{\mu\nu}) \otimes \gamma^\mu\gamma^\nu$.

Finalement, en remarquant que

$$\mathrm{Tr}_\omega\big(L^\theta(F_{\mu\nu}\star_\theta F_{\rho\sigma})\,(-\Delta+\varepsilon^2)^{-N} \otimes \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\big) = \mathrm{Tr}_\omega\big(L^\theta(F_{\mu\nu}\star_\theta F_{\rho\sigma})\,(-\Delta+\varepsilon^2)^{-N}\big)\ \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma),$$

que $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 2^N(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})$ et $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, on obtient à partir de la proposition 2.2.39 (avec $-i\nabla$ à la place de $\not\partial$)

$$YM(\alpha) = -\frac{2\,N!\,(4\pi)^N}{8g^2}\,\mathrm{Tr}_\omega\Big(L^\theta(F_{\mu\nu}\star_\theta F^{\mu\nu})\,(-\Delta+\varepsilon^2)^{-N}\Big) = -\frac{1}{4g^2}\int d^{2N}x\,(F_{\mu\nu}\star_\theta F^{\mu\nu})(x).$$

D'après la propiété de trace (lemme 1.2.7), on peut remplacer le produit de Moyal par celui ordinaire, pour obtenir (3.1.6). □

Remarque 3.1.7. *Dans nos conventions $F_{\mu\nu}^* = -F_{\mu\nu}$ et on peut vérifier la positivité de l'action ainsi définie :*

$$YM(\alpha) = \frac{1}{4g^2}\int d^{2N}x \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} |F_{\mu\nu}(x)|^2.$$

3.2 Action spectrale

Après avoir revu les motivations de Chamseddine et Connes pour définir, dans le cas d'un triplet spectral avec unité, une fonctionnelle d'action à partir du spectre de l'opérateur de Dirac généralisé, nous proposerons une définition de l'action spectrale dans le cas sans unité. Nous nous focaliserons ensuite sur les aspects techniques, permettant de calculer une telle action dans le cas des déformations isospectrales. Faute de temps, nous ne présenterons ici que les résultats obtenus dans le cas des plans de Moyal. Modulo une complexité d'ordre calculatoire grandissante, la stratégie que nous allons suivre sera cependant directement applicable aux cas courbes, périodiques ou non.

3.2.1 Motivations et généralités

Pour un triplet spectral à unité $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, Chamseddine et Connes [6, 7] ont proposé une 'action physique' ne dépendant que du spectre de l'opérateur $\mathcal{D}$; *le principe d'action spectrale*

$$S_\Lambda(\mathcal{D}, A) := \mathrm{Tr}\left(\chi_{[0,1]}(\mathcal{D}_A^2/\Lambda^2)\right), \tag{3.2.1}$$

i.e. le nombre de valeurs propres inférieures à une échelle de masse Λ. Ici, $\mathcal{D}_A$ est l'opérateur de "Dirac" covariant $\mathcal{D}_A := \mathcal{D} + A + \epsilon JAJ^{-1}$, où A est une 1-forme différentielle universelle représentée $A \in \tilde{\pi}(\Omega^1\mathcal{A})$. $\tilde{\pi}$ désigne toujours la représentation relevée à l'algèbre différentielle universelle $\Omega^\bullet\mathcal{A}$:

$$\tilde{\pi}(a_0\delta a_1 \cdots \delta a_p) := \pi(a_0)[\mathcal{D}, \pi(a_1)] \cdots [\mathcal{D}, \pi(a_p)], \;\; a_i \in \mathcal{A}, \; i = 1, \cdots, p.$$

J est la structure réelle du triplet (la conjugaison de charge pour les spineurs dans les cas commutatifs comme pour les déformations isospectrales) et $\epsilon \in \{+1, -1\}$ en fonction de la dimension. Initialement [6, 7], dans le cas presque commutatif du modèle standard, le calcul de cette action utilisait à la place de la fonction caractéristique $\chi_{[0,1]}$, n'importe quelle fonction lisse ϕ l'approximant. Pour pouvoir calculer cette action asymptotiquement par des techniques de transformée de Laplace, de plus amples conditions sur ϕ doivent être imposées [40]. Nous reverrons ces conditions lors de son calcul pour les plans de Moyal. Dans le cas à unité, $\mathcal{D}$ ainsi que sa perturbation bornée $\mathcal{D}_A$ sont à résolvante compacte, donc $\phi(\mathcal{D}_A^2/\Lambda^2)$ est à trace dès que ϕ est suffisamment décroissante à l'infini ; $r^{n-1}\phi(r^2) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est une condition suffisante dans le cas d'un triplet spectral de dimension n.

Concernant l'opérateur de "Dirac" covariant $\mathcal{D}_A$, le point de départ réside dans l'analogie entre le groupe d'invariance d'une théorie de jauge couplée avec la gravitation sur une variété Riemannienne M, $G = U \rtimes \mathrm{Diff}(M)$ et le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \mathrm{Int}(\mathcal{A}) \rtimes \mathrm{Out}(\mathcal{A})$ d'une algèbre $\mathcal{A}$, au travers des suites exactes de groupe

$$1 \to U \to G \to \mathrm{Diff}(M) \to 1,$$

$$1 \to \mathrm{Int}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Out}(\mathcal{A}) \to 1.$$

Les deux constructions coïncident en particulier lorsque $\mathcal{A} = C^\infty(M, M_n(\mathbb{C}))$, $n > 1$: $\mathrm{Out}(\mathcal{A}) = \mathrm{Diff}(M)$, $\mathrm{Int}(\mathcal{A}) = C^\infty(M, SU_n/\mathbb{Z}_n)$. Pour une fonctionnelle d'action définie sur un triplet spectral, il est alors naturel d'imposer que le groupe d'invariance soit le groupe d'automorphismes de l'algèbre.

Pour obtenir une théorie de jauge avec champs de matières lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ est presque commutative, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes A_F$ (où A_F est une algèbre finie, en l'occurrence $\mathbb{H} \oplus \mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C})$ pour le modèle standard de la physique des particules [5–7]), il faut représenter les automorphismes intérieurs sur l'espace de Hilbert fermionique $\mathcal{H}$. En particulier, il faut relever $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ sur le groupe des unitaires $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) \ni u \mapsto \sigma(u) = \pi(u)J\pi(u)J^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{H}).$$

Pour les tores non commutatifs, les plans de Moyal et certaines géométries presque commutatives, cette représentation est la représentation adjointe : $\pi(u)J\pi(u)J^{-1}\psi = u \star_\Theta \psi \star_\Theta u^*$, $\psi \in \mathcal{H}$. Sous cette transformation, l'opérateur $\mathcal{D}$ se transforme comme

$$\mathcal{D} \to \sigma(u)\mathcal{D}\sigma(u)^{-1} = \mathcal{D} + \pi(u)[\mathcal{D}, \pi(u^*)] + \epsilon J\pi(u)[\mathcal{D}, \pi(u^*)]J^{-1}, \tag{3.2.2}$$

où le signe ϵ vient de la relation de commutation $\mathcal{D}J = \epsilon J\mathcal{D}$, (voir [14, 55] pour une table des signes). Ainsi, $\mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{A'}$ avec $A' = \pi(u)A\pi(u^*) + \pi(u)[\mathcal{D}, \pi(u^*)]$ se transforme de manière covariante.

Pour les géométries presque commutatives $C^\infty(M) \otimes A_F$, en particulier pour le modèle standard, avec

$$\mathcal{D} = \not{D} \otimes 1_{\mathcal{H}_F} + 1 \otimes D_F, \;\; \not{D} = -ie^\mu{}_a \gamma^a (\partial_\mu + \omega_\mu),$$

où ω est la connection de spin et D_F une matrice Hermitienne (la matrice de masse fermionique), $S_\Lambda(\mathcal{D}, A)$ est asymptotiquement calculable en utilisant le développement du noyau de la chaleur. Notons dès à présent que $\not{D}_A^2$ peut être vu comme un Laplacien généralisé : $\not{D}_A^2 = -\left(g^{\mu\nu}(\partial_\mu + B_\mu)(\partial_\nu + B_\nu) + E\right) \equiv P$ où $g^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique, B_μ est une connection contenant une partie spin et une partie Yang–Mills et E est un endomorphisme du fibré spinoriel. On peut montrer formellement [6,7], en développant ϕ en série de Taylor, que $S_\Lambda(\mathcal{D}, A)$ est liée aux coefficients de Seeley–DeWitt $a_k(P, p)$ de la trace du semi-groupe de la chaleur

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-tP}\right) \sim_{t\to 0} (4\pi)^{-n/2} \sum_{l\in\mathbb{N}} t^{(l-n)/2} \int_M \mu_g(p)\, a_l(P, p), \tag{3.2.3}$$

par la relation entre la fonction Zéta et la trace de l'opérateur de la chaleur [51] :

$$\zeta_P(s) := \mathrm{Tr}(P^{-s}) = \tfrac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\, \mathrm{Tr}(e^{-tP}). \tag{3.2.4}$$

Sur une variété sans bord, les coefficients de Seeley–De Witt s'annulent $a_l(P, .) = 0$, lorsque l est impair. On obtient alors dans le cas quadri-dimensionnel

$$S_\Lambda(\not{D} \otimes 1_{A_F}, A) = (4\pi)^{-2} \sum_{l=0}^{2} \Lambda^{4-2l}\, \phi_{2l} \int_M \mu_g(p)\, a_{2l}(P, p) + O(\Lambda^{-2}), \tag{3.2.5}$$

où les 'moments' ϕ_i sont définis par

$$\phi_0 = \int_0^\infty dt\, t\, \phi(t), \;\; \phi_2 = \int_0^\infty dt\, \phi(t), \;\; \phi_{2(2l+2)} = (-1)^l \phi^{(l)}(0), \; l \geq 0. \tag{3.2.6}$$

Des dérivations moins formelles de cette relation, nécessitant quelques hypothèses supplémentaires sur ϕ, ont été obtenues dans [40, 82].
Lorsque M est de dimension quatre et $A_F = \mathbb{H} \oplus \mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C})$, *l'action spectrale unifie la gravitation d'Einstein plus Weyl et le modèle standard avec son secteur de Higgs et le mécanisme de brisure spontanée de symétrie* (voir [5–7]). Comme nous le verrons dans le cas des plans de Moyal, il n'y a pas de restriction sur les dimensions, mais l'expression des coefficients (3.2.6) sera sensiblement différente.

Remarque 3.2.1. *La relation (3.2.4) lie aussi la trace de Dixmier avec le développement du noyau de la chaleur et donc l'action de Connes–Lott avec l'action spectrale.*

L'opérateur $\mathcal{D}$ n'est plus à résolvante compacte dans le cas non compact, et il va falloir introduire une régularisation supplémentaire pour définir l'action spectrale. Cette régularisation sera donnée par un élément positif de l'algèbre $\mathcal{A}$ et par analogie avec le cas commutatif non compact, pourra être qualifiée de régularisation spatiale.

Définition 3.2.2. *Pour un triplet spectral sans unité $(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ de dimension spectrale n, l'action spectrale est donnée par*

$$S_\Lambda(\mathcal{D}, A, \rho) := \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(\pi(\rho)\, \phi(\mathcal{D}_A^2/\Lambda^2)\right). \tag{3.2.7}$$

Comme dans le cas unital, $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A + \epsilon JAJ^{-1}$ *(*$\epsilon \in \{+1, -1\}$ *) et* $A \in \Omega^1_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathcal{A}})$ *est dorénavant une 1-forme auto-adjointe de l'algèbre à unité* $\widetilde{\mathcal{A}}$ *représentée*

$$A^* = A = \sum_{i \in I} \pi(b_0^i)\, [\mathcal{D}, \pi(b_1^i)],$$

où I *est un ensemble fini,* $b_0^i, b_1^i \in \widetilde{\mathcal{A}}$*,* $0 \leq \rho \in \mathcal{A}$ *et de plus,* $0 \leq \phi$ *et* Λ *sont comme dans le cas à unité.*

Remarque 3.2.3. *i) Cette définition donne une importance supplémentaire au choix du plongement unifère de l'algèbre. La 1-forme* A *étant maintenant construite à partir de* $\widetilde{\mathcal{A}}$*, toutes les considérations de symétrie discutées dans le cas compact, restent alors valables. Ce point est crucial car l'existence d'unitaires dans l'algèbre est primordiale pour implémenter l'invariance de jauge :* $S_\Lambda(\mathcal{D}, A, \rho)$ *est par construction invariante sous l'action des automorphismes intérieurs relevés sur l'espace de Hilbert* $\pi(u)J\pi(u)J^{-1}$*. Dorénavant la régularisation* ρ *se transforme aussi*

$$\begin{cases} A & \to \; uAu^* + u[\mathcal{D}, u^*], \\ \rho & \to \; u\rho u^*. \end{cases}$$

ii) Les positivités de ρ *et de* ϕ *sont suffisantes pour donner lieu à une action définie positive.*
iii) D'autres régularisations existent. En l'occurrence, $\mathrm{Tr}\left(\phi\big(\mathcal{D}_A^2\, \pi(\rho)^{-1}\big)\right)$ *avec* ρ *un élément inversible et positif de l'algèbre, est aussi bien définie. Cependant, pour les plans de Moyal, ce type de régularisation ne donne pas un accès direct à un développement asymptotique.*

Dans le cas d'une géométrie commutative (ou presque commutative) non compacte et sans bord $\mathcal{A} = C_c^\infty(M)$, il est aisé de montrer que $\rho\, e^{-t\,P}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, où P est un Laplacien généralisé et $\rho \in C_c^\infty(M)$, est à trace. Pour cela, on peut utiliser les mêmes techniques d'opérateur pseudodifférentiel que celles que nous utiliserons lors du paragraphe suivant. La formule (3.2.4) a dans ce cas un analogue

$$\zeta_{\rho,P}(s) := \mathrm{Tr}(\rho\, P^{-s}) = \tfrac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\, \mathrm{Tr}(\rho\, e^{-t\,P}). \tag{3.2.8}$$

Pour $P = (\not{D} + A + \epsilon JAJ^{-1})^2$, on obtient

$$S_\Lambda(\not{D} \otimes 1_{A_F}, A) = (4\pi)^{-n/2} \sum_{l=0}^{m} \Lambda^{n-2l}\, \phi_{2l} \int_M \mu_g(p)\, a_{2l}(P, p)\, \rho(p) + \; O(\Lambda^{n-2(m+1)}),$$

où $\{a_{2l}\}$ désigne toujours les coefficients de Seeley–DeWitt, qui dans le cas d'une variété non compacte ne sont plus que localement intégrables. Cependant, $a_{2l}(P, .)\rho(.)$ est globalement intégrable car $\rho \in C_c^\infty(M)$. Les coefficients $\{\phi_{2l}\}$ ont la forme (3.2.6) dans le cas quadri-dimensionnel ; leurs expressions en dimension quelconque sera établi lorsque l'on traitera le cas des plans de Moyal.

3.2.2 Cas des plans de Moyal

3.2.2.1 Développement du noyau de la chaleur pour Laplaciens non commutatifs

Dans ce paragraphe, nous allons obtenir un développement similaire à celui du noyau de la chaleur, pour la trace d'un semi-groupe régularisé, généré par un Laplacien non commutatif.

Cette formule asymptotique permettra de calculer (une forme préliminaire de) l'action spectrale associée aux triplets spectraux des plans de Moyal génériques, i.e. l'hypothèse d'inversibilité de la matrice de déformation sera relaxée.

Nous commençons par établir un résultat générique concernant la traçabilité de semi-groupes régularisés. Pour ce faire, nous allons utiliser certains faits de la théorie des semi-groupes à un paramètre ; $e^{-t\,A}$ où A est un opérateur non borné (auto-adjoint) et positif, sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$.

Sous la seule hyphothèse de la positivité du générateur A, on montre que $e^{-z\,A}$ est une contraction holomorphe pour $\Re(z) > 0$ [68, exemple 1.25, p.493] [120], c'est-à-dire que le semi-groupe peut être défini par calcul fonctionnel holomorphe :

$$e^{-t\,A} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{-tz}\, \mathcal{R}_A(z)\, dz, \tag{3.2.9}$$

où Γ est un contour (éventuellement infini) orienté entourant le spectre de A et qu'il est contractant :

$$\|e^{-z\,A}\| \leq 1.$$

Lemme 3.2.4. *Soit B un opérateur borné et A un générateur positif, densement défini d'un semi-groupe holomorphe qui soit tel que $B\mathcal{R}_A(z)^l \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ pour un $l \in \mathbb{N}^*$ et un $z \notin \mathrm{sp}(A)$. Alors, pour tout $t > 0$, $Be^{-t\,A}$ est à trace.*

Preuve. Pour un $z_0 \notin \mathrm{sp}(A)$, la propriété de semi-groupe, ensemble avec la première équation résolvante et la présentation (3.2.9), impliquent

$$B\, e^{-t\,A} = B\, (e^{-\frac{t}{l}\,A})^l = B\, \mathcal{R}_A(z_0)^l \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma dz\, e^{-\frac{t}{l}z} (1 + (z - z_0)\mathcal{R}_A(z)) \right)^l,$$

qui conclut la preuve car $\|\mathcal{R}_A(z)\| \leq \frac{M}{|z|}$ pour tout z avec $\Re(z) > 0$ [120, proposition 1.13] et donc

$$\int_\Gamma |dz|\, e^{-\frac{t}{l}\,\Re(z)} \Big(1 + |z - z_0|\, \|\mathcal{R}_A(z)\| \Big) < \infty. \qquad \square$$

Pour les produits de Moyal génériques, $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \star_\Theta)$, $(\mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R}^n), \star_\Theta)$ et $(\mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n), \star_\Theta)$, munis de leurs topologies usuelles, forment des algèbres de Fréchet. En effet, tout produit de Moyal générique se décompose en un produit de Moyal symplectique et un produit point à point ; en décomposant la matrice Θ en une somme directe d'une matrice symplectique de dimension $2k$ et une matrice à entrée nulle de dimension $n - 2k$ [92, proposition 2.7 et corollaire 2.8]. Nous avons déjà montré que chacun des espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n)$ sont stables sous produit de Moyal symplectique. Il suffit alors de vérifier qu'ils le sont aussi sous produit point à point. Pour $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n)$ ce fait est évident, alors que pour $\mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R}^n)$, c'est une conséquence de l'inclusion $\mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n)$ [96]. Ainsi $\Big(\mathcal{C}, L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^{2^m}, \not{\partial}\Big)$ définit aussi un triplet spectral sans unité, si $\mathcal{C} := \Big((\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \star_\Theta), (\mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R}^n), \star_\Theta), (\mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n), \star_\Theta) \Big)$. Dans ce cas, le calcul de l'action de Connes–Lott (3.1.6) n'est pas direct, car fondé sur la base de Wigner qui n'a plus d'analogue dans les cas dégénérés. Nous allons voir que l'action spectrale peut être calculée sans difficultés supplémentaires dans tous les cas de figure (produits de Moyal symplectique ou dégénéré).

Soit $\triangle^\Theta$ un *Laplacien généralisé non commutatif* associé au produit de Moyal

$$\begin{aligned}\triangle^\Theta &:= -\Big(\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu + L^\Theta(\omega_\mu))(\partial_\nu + L^\Theta(\omega_\nu)) + L^\Theta(E)\Big) \otimes 1_{2^m}, \\ \triangle^\Theta &=: \triangle^\Theta_r \otimes 1_{2^m},\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^{2^m} =: \mathcal{H}_r \otimes \mathbb{C}^{2^m}$, où $\omega_\mu^* = -\omega_\mu$ et E sont dans $\mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n)$. Ici 2^m est le rang du fibré des spineurs, i.e. m désigne la partie entière de $n/2$.

Pour $f \in \mathcal{A}_\Theta := (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \star_\Theta)$, soit $L^\Theta(f)e^{-t\triangle^\Theta}$ *le semi-groupe régularisé* par L^Θ_f associé au Laplacien généralisé $\triangle^\Theta$.

Le théorème suivant est le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 3.2.5. *Pour $\triangle^\theta$ défini dans l'équation (3.2.10) et avec $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{Tr}(\pi^\Theta(f)\, e^{-t\triangle^\Theta})$ possède un développement asymptotique*

$$\mathrm{Tr}\left(\pi^\Theta(f)\, e^{-t\triangle^\Theta}\right) \sim_{t\to 0}\ 2^m(\tfrac{1}{4\pi t})^{n/2} \sum_{l\in\mathbb{N}} t^l \int_{\mathbb{R}^n} d^n x\, f(x)\, \tilde{a}_{2l}(x), \tag{3.2.11}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{a}_0(x) =& 1,\\ \tilde{a}_2(x) =& E(x),\\ \tilde{a}_4(x) =& \tfrac{1}{2}\, E\star_\Theta E(x) + \tfrac{1}{6}\, \eta^{\mu\nu} E_{;\mu\nu}(x) + \tfrac{1}{12}\, \Omega^{\mu\nu}\star_\Theta \Omega_{\mu\nu}(x),\\ \tilde{a}_6(x) =& \tfrac{1}{6}\, E\star_\Theta E\star_\Theta E(x) + \tfrac{1}{12}\, \eta^{\mu\nu} E_{;\mu}\star_\Theta E_{;\nu}(x) + \tfrac{1}{6}\, \eta^{\mu\nu} E\star_\Theta E_{;\mu\nu}(x)\\ &+ \tfrac{1}{60}\, \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} E_{;\mu\nu\rho\sigma}(x) + \tfrac{1}{12}\, E\star_\Theta \Omega^{\mu\nu}\star_\Theta \Omega_{\mu\nu}(x) + \tfrac{1}{45}\, \eta^{\rho\sigma}\Omega^{\mu\nu}{}_{;\rho}\star_\Theta \Omega_{\mu\nu;\sigma}(x)\\ &+ \tfrac{1}{180}\, \eta^{\rho\sigma}\Omega^{\mu\nu}{}_{;\nu}\star_\Theta \Omega_{\mu\rho;\sigma}(x) + \tfrac{1}{30}\, \eta^{\rho\sigma}\Omega^{\mu\nu}\star_\Theta \Omega_{\mu\nu;\rho\sigma} - \tfrac{1}{30}\, \Omega^{\mu\nu}\star_\Theta \Omega_{\nu\rho}\star_\Theta \Omega^\rho{}_\mu(x),\end{aligned}$$

où $g_{;\mu} := \partial_\mu g + [\omega_\mu, g]_{\star_\Theta}$ et $\Omega_{\mu\nu} := \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu + [\omega_\mu, \omega_\nu]_{\star_\Theta}$ est la courbure de la connection ω.

Nous allons commencer par montrer que $L^\Theta(f)e^{-t\triangle^\Theta_r}$ est à trace pour tout $t \in \mathbb{R}^*_+$, pour ensuite montrer que sa trace possède un développement en puissance de t, pour $t \to 0$:

$$\mathrm{Tr}\left(L^\Theta(f)e^{-t\triangle^\Theta_r}\right) \sim_{t\to 0}\ (\tfrac{1}{4\pi t})^{n/2} \sum_{l\in\mathbb{N}} t^l \int_{\mathbb{R}^n} d^n x\, f(x)\tilde{a}_{2l}(x),$$

où les 'invariants locaux' $\tilde{a}_l$ sont construits à partir de la connection universelle représentée ω_μ, de l'endomorphisme (non local) E et de leurs dérivées covariantes dans la représentation adjointe :

$$\nabla^\Theta_\mu := \partial_\mu + L^\Theta(\omega_\mu) - R^\Theta(\omega_\mu).$$

Nous allons établir la traçabilité de $L^\Theta(f)e^{-t\triangle^\Theta_r}$ par deux approches. La première utilise la théorie des semi-groupes, alors que la seconde est basée sur des techniques d'opérateurs pseudodifférentiels. Toutes deux seront applicables aux cas commutatifs non compacts, mais seule la première pourra s'étendre aux cas des déformations isospectrales non compactes.

Théorème 3.2.6. *Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_\mu, E \in \mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n)$ avec $\omega_\mu^* = -\omega_\mu$ et $E = -h^*\star_\Theta h$ pour un certain $h \in \mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour tout $t > 0$ le semi-groupe de générateur Δ^Θ, régularisé par L^Θ_f, est à trace.*

Première preuve du théorème 3.2.6. De $(L^\Theta(h))^* = L^\Theta(h^*)$, on en déduit que $L^\Theta(E)$ est positif et donc que $\triangle^\Theta$ l'est aussi. D'après le lemme 3.2.4, il est suffisant de montrer que $L^\Theta(f)R_{\triangle^\Theta_r}(z)^l$ est à trace pour $l > \frac{n}{2}$.

Remarquons que $\triangle^\Theta$ peut s'écrire comme un opérateur de Dirac covariant au carré :

$$\begin{aligned}\triangle^\Theta &= \not\partial_\omega^2 - B,\\ \not\partial_\omega &:= -i\big(\partial_\mu + L^\Theta(\omega_\mu)\big)\otimes\gamma^\mu,\end{aligned}$$

où $B := L^\Theta(E)\otimes 1_{2^m} - L^\Theta(\partial_\mu(\omega_\nu) - \omega_\mu\star_\Theta\omega_\nu)\otimes(\eta^{\mu\nu}1_{2^m} - \gamma^\nu\gamma^\mu)$ est borné.

Supposons tout d'abord que $l = 1$, $z = -1$, $B = 0$. En utilisant les notations

$$\pi^\Theta(\omega) := L^\Theta(\omega_\mu)\otimes\gamma^\mu \quad \text{et} \quad \pi^\Theta(\not\partial(f)) := L^\Theta(\partial_\mu f)\otimes\gamma^\mu$$

et en remarquant que tout $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se factorise comme $f = f_1\star_\Theta f_2$, avec $f_1, f_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [46, proposition 2.7], on obtient

$$\begin{aligned}\pi^\Theta(f)\mathcal{R}_{\triangle^\Theta}(-1) &= -\pi^\Theta(f)\frac{1}{\not\partial - i}\left(1 - \pi^\Theta(\omega)\frac{1}{\not\partial_\omega - i}\right)\frac{1}{\not\partial_\omega + i}\\ &= -\pi^\Theta(f_1)\frac{1}{\not\partial - i}\,\pi^\Theta(f_2)\left(1 - \pi^\Theta(\omega)\frac{1}{\not\partial_\omega - i}\right)\frac{1}{\not\partial_\omega + i}\\ &\quad - \pi^\Theta(f_1)\frac{1}{\not\partial - i}\,\pi^\Theta(\not\partial(f_2))\frac{1}{\not\partial - i}\left(1 - \pi^\Theta(\omega)\frac{1}{\not\partial_\omega - i}\right)\frac{1}{\not\partial_\omega + i}\\ &= -\pi^\Theta(f_1)\frac{1}{\not\partial - i}\,\pi^\Theta(f_2)\frac{1}{\not\partial + i}\left(1 - \pi^\Theta(\omega)\frac{1}{\not\partial_\omega + i}\right)\\ &\quad + \pi^\Theta(f_1)\frac{1}{\not\partial - i}\,\pi^\Theta(f_2)\star_\Theta\omega)\frac{1}{\not\partial - i}\left(1 - \pi^\Theta(\omega)\frac{1}{\not\partial_\omega - i}\right)\frac{1}{\not\partial_\omega + i}\\ &\quad - \pi^\Theta(f_1)\frac{1}{\not\partial - i}\,\pi^\Theta(\not\partial(f_2)\star_\Theta\omega)\frac{1}{\not\partial - i}\left(1 - \pi^\Theta(\omega)\frac{1}{\not\partial_\omega - i}\right)\frac{1}{\not\partial_\omega + i}\,.\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3.6, $\pi^\Theta(g)\mathcal{R}_{\not\partial}(i)\ \pi^\Theta(h)\mathcal{R}_{\not\partial}(i)\in\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ lorsque $g, h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $p > \frac{n}{2}$. Les opérateurs $\pi^\Theta(\omega)$ et $\mathcal{R}_{\not\partial_\omega}(z)$ étant bornés, on obtient alors que $\pi^\Theta(f)\mathcal{R}_{\triangle^\Theta}(-1)\in\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour le même p. Pour $l\geq 1$, on obtient de semblables conclusions en répétant l fois cet algorithme : $(A+C)^{-1} = A^{-1}(1 - CA^{-1}(\cdots(1 - C(A+C)^{-1})\cdots))$.

Le cas avec B non nul est obtenu par la même astuce :

$$\pi^\Theta(f)\,\mathcal{R}_{\triangle^\Theta}(-1) = \pi^\Theta(f)\,\mathcal{R}_{\not\partial_\omega^2}(-1)\left(1 + B\,\mathcal{R}_{\triangle^\Theta}(-1)\right).$$

Pour z quelconque dans l'ensemble résolvant de $\triangle^\Theta$, on obtient le résultat en utilisant la première équation résolvante. □

La deuxième preuve, basée sur un calcul fonctionnel des opérateurs pseudodifférentiels [32], utilise la définition des classes de symboles de Shubin [98] ou classes GLS [60]. Ce type de calcul pseudodifférentiel se trouve être particulièrement pertinent pour l'analyse sous-jacente aux déformations de type Moyal.

Définition 3.2.7. *Soit $S^{\rho,\lambda}$ la classe des symboles de Shubin*

$$\begin{aligned}S^{\rho,\lambda} := \big\{\sigma\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^{2n}) : \forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, \exists\, C_{\alpha\beta}\in\mathbb{R}^+\\ \left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma(\xi,x)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|x|^2)^{(\rho-|\alpha|)/2}(1+|\xi|^2)^{(\lambda-|\beta|)/2}\big\},\end{aligned}$$

et soit $\Psi^{\rho,\lambda} := \left\{A \in \Psi DO : \sigma[A] \in S^{\rho,\lambda}\right\}$ *la classe des* ΨDOs *associés.*

En réalité, $S^{\rho,\lambda}$ s'inscrit dans les classes de symboles d'Hörmander (voir [64, Chapitre XVIII]) $S(m,g)$ de fonction d'ordre

$$m(\xi,x) = (1+|x|^2)^{\rho/2}\,(1+|\xi|^2)^{\lambda/2}$$

et de métrique

$$g_{\xi,x} = (1+|\xi|^2)^{-1}|d\xi|^2 + (1+|x|^2)^{-1}|dx|^2.$$

Deuxième preuve du théorème 3.2.6. Premièrement, l'équation (2.2.13) ainsi que la formule du produit pour les ΨDOs permet de calculer le symbole de $\triangle_r^\theta$:

$$\sigma[\triangle_r^\theta](\xi,x) = \eta^{\mu\nu}\Big(\xi_\mu\xi_\nu + 2i\omega_\mu(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi)\xi_\nu - \partial_\mu\omega_\nu(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi) - \omega_\nu\star_\Theta\omega_\nu(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi)\Big) - E(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi).$$

En utilisant ensuite le fait que $\omega_\mu, E \in \mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n)$, on voit que le 'Laplacien' $\triangle_r^\theta$ appartient à $\Psi^{0,2}$, car $\Psi^{p,q} \subset \Psi^{s,t}$, lorsque $p \le s$, $q \le t$. Soit $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions lisses à supports compacts, définies par $f_N(x) := \chi_N(x)\,e^{-x}$, où $0 \le \chi_N \le 1$, $\chi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $\chi_N(x) = 0$ lorsque $x \in]-\infty,-\epsilon] \cup [N,+\infty[$ pour un $\epsilon > 0$ fixé et $\chi_N(x) = 1$ pour $x \in [0, N-\epsilon]$. D'après [32, théorème 8.7], $f_N(t\triangle_r^\theta) \in \Psi^{0,-\infty}$ et d'après le lemme 2.2.15 $L^\Theta(f) \in \Psi^{-\infty,0}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, d'après [64, lemme 18.4.3] on obtient $L^\Theta(f)f_N(t\triangle_r^\Theta) \in \Psi^{-\infty,-\infty}$ et donc son symbole appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Donc,

$$\begin{aligned} C &:= \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2n+1} \|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma\left[L^\Theta(f)f_N(t\triangle_r^\Theta)\right]\|_1 \\ &\le \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2n+1} C_{\alpha,\beta}\int d^nx\,d^n\xi\,(1+|x|^2)^{(-l-|\alpha|)/2}(1+|\xi|^2)^{(-k-|\beta|)/2}, \end{aligned}$$

pour des constantes $C_{\alpha,\beta} < \infty$ et pour tout $l,k \in \mathbb{N}$, donc $C < \infty$. Finalement, le théorème 9.4 de [32] montre que $L^\Theta(f)f_N(t\triangle_r^\Theta)$ est à trace pour tout $N \in \mathbb{N}$. En regardant les estimations de la preuve du théorème 8.7 de [32], on peut trouver des constantes $C_{\alpha,\beta}$ indépendantes de N (étant donné que e^{-x} est à décroissance rapide lorsque $x \to +\infty$, le support à droite de f_N ne joue aucun rôle), on obtient alors que $L^\Theta(f)f_N(t\triangle_r^\Theta)$ est uniformément (par rapport à N) à trace.

Pour terminer la preuve, il reste à montrer que $\text{s-lim}\, L^\Theta(f)f_N(t\triangle_r^\Theta) = L^\Theta(f)e^{-t\triangle_r^\Theta}$, car la proposition 2 de [30] garantira que $L^\Theta(f)e^{-t\triangle_r^\Theta}$ est à trace pour tout $t > 0$.

Soit $\phi \in \mathcal{H}$ et soit E_λ la famille spectrale de $\triangle_r^\Theta$, alors

$$\begin{aligned} \|(\chi_N(\triangle_r^\Theta)-1)\phi\|_2^2 = \langle\phi|(\chi_N(\triangle_r^\Theta)-1)^2\phi\rangle &= \int_{\mathrm{sp}(\triangle_r^\Theta)} d\langle\phi|E_\lambda\phi\rangle\,(\chi_N(\lambda)-1)^2 \\ &\le \int_{\mathrm{sp}(\triangle_r^\theta)} d\langle\phi|E_\lambda\phi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle. \end{aligned}$$

On obtient alors par convergence dominée, avec $\phi = e^{-t\,\triangle_r^\Theta}\psi$

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty}\|(\chi_N(\triangle_r^\Theta)-1)\,e^{-t\,\triangle_r^\Theta}\psi\|_2^2 &= \lim_{N\to\infty}\int_{\mathrm{sp}(\triangle_r^\Theta)} d\langle e^{-t\triangle_r^\Theta}\psi,\ E_\lambda e^{-t\,\triangle_r^\Theta}\psi\rangle(\chi_N(\lambda)-1)^2 \\ &= \int_{\mathrm{sp}(\triangle_r^\theta)} d\langle e^{-t\triangle_r^\Theta}\psi,\ E_\lambda e^{-t\,\triangle_r^\Theta}\psi\rangle\Big(\lim_{N\to\infty}(\chi_N(\lambda)-1)^2\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, nous avons utilisé la positivité de la mesure spectrale, conséquent à $\mathrm{sp}(\triangle_r^\Theta) \subset \mathbb{R}^+$. □

Nous allons maintenant obtenir un développement asymptotique de la trace du semi-groupe régularisé, en suivant une approche de Vassilevich [110].

Preuve du théorème 3.2.5. Soit

$$\begin{aligned} X &:= 2L^\Theta(\omega_\mu)\partial^\mu + L^\Theta(\partial_\mu\omega^\mu) + L^\Theta(\omega_\mu \star_\Theta \omega^\mu) + L^\Theta(E) \\ Y &:= -\partial_\mu\partial^\mu, \end{aligned}$$

de telle sorte que $\triangle_r^\Theta = Y - X$. La formule de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)

$$e^T\ e^S = e^{T+S+\frac{1}{2}[T,S]+\frac{1}{12}[T,[T,S]]+\frac{1}{12}[S,[S,T]]-\frac{1}{48}[T,[S,[T,S]]]+\cdots},$$

permet de récrire le semi-groupe comme

$$e^{-t\triangle_r^\Theta} = e^{t\,X+\frac{1}{2}t^2[X,Y]+\frac{1}{12}t^3[X,[X,Y]]-\frac{1}{6}t^3[Y,[X,Y]]-\frac{1}{48}t^4[X,[Y,[X,Y]]]+\frac{1}{48}t^4[Y,[Y,[X,Y]]]+\cdots}\ e^{-t\,Y}.$$

Pour obtenir un développement en puissance de t lorsque $t \to 0$, la stratégie consiste à développer la première exponentielle, calculer les commutateurs, réorganiser la suite des termes ainsi obtenus, pour finalement calculer les symboles de ces opérateurs pseudodifférentiels. La trace sera prise en intégrant les symboles sur le fibré cotangent.
En réalité, la réorganisation en puissances homogènes est sensiblement plus élaborée qu'un simple développement d'exponentielle. Tous les opérateurs provenant de ce développement sont du type $L^\Theta(g)\ \partial^\alpha e^{-t\Delta},\ \alpha \in \mathbb{N}^n$, avec $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Certains d'entre eux donneront des contributions nulles car $\int d^n\xi\, \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}\ e^{-t|\xi|^2} = \Pi_i^n\ \frac{1}{2}(1+(-1)^{\alpha_i})\ \Gamma(\frac{n+1}{2})\ t^{-(\alpha_i+1)/2}$ est nul lorsque au moins un des α_i est impair. Lorsqu'ils sont tous pairs, $|\alpha| = \sum_i^n \alpha_i = 2l$ est aussi pair et on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n\xi\, \xi_{\mu_1}\cdots\xi_{\mu_{2l}}\ e^{-t|\xi|^2} = \left(\tfrac{\pi}{t}\right)^{n/2}(2t)^{-l}\sum_{\sigma\in S_{2l}}\tfrac{1}{2^l l!}\ \delta_{\sigma(\mu_1)\sigma(\mu_2)}\cdots\delta_{\sigma(\mu_{2l-1})\sigma(\mu_{2l})},$$

où σ varie dans le groupe des permutations de $2l$ éléments S_{2l}. Ainsi, dans la réorganisation en puissances homogènes, il faut prendre en compte que $t^l\ L^\Theta(g)\ \partial^\alpha$ est un terme d'ordre effectif $t^{l-\frac{|\alpha|}{2}}$ (indépendamment du facteur global $\left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2}$). De plus, pour avoir un développement jusqu'à l'ordre k, il faut utiliser la formule BCH à l'ordre $2k-1$. L'ordre de la formule BCH est défini comme le nombre de commutateurs entrant en jeu dans la première exponentielle. Le terme venant de la formule BCH à l'ordre k, ayant un nombre maximal de dérivées est

$$[t\,\partial^2,\ [t\,\partial^2,\ \cdots,\ [t\,\partial^2,\ t\,L^\Theta(g)\partial]\cdots]\,] \propto t^{k+1}\ L^\Theta(g)\ \partial^{k+1},$$

et il correspond alors à un terme d'ordre effectif $t^{\frac{k+1}{2}}$.

Montrons en détail comment cet algorithme fonctionne à l'ordre un. Nous avons besoin de la formule BCH aussi à l'ordre un : $e^{-t\triangle_r^\Theta} = e^{t\,X-t\,Y} = e^{t\,X+\frac{1}{2}[tX,tY]+\cdots}\ e^{-t\,Y}$. Puisque

$$\begin{aligned} [tX,tY] &= t^2\ \left[\partial_\nu\partial^\nu, 2L^\Theta(\omega_\mu)\partial^\mu + L^\Theta(\partial_\mu\omega^\mu) + L^\Theta(\omega_\mu\star_\Theta\omega^\mu) + L^\Theta(E)\right] \\ &= t^2\Big(2L^\Theta(\partial_\nu\partial^\nu\omega_\mu)\partial^\mu + 4L^\Theta(\partial_\nu\omega_\mu)\partial^\mu\partial^\nu + L^\Theta(\partial_\nu\partial^\nu\partial_\mu\omega^\mu) + 2L^\Theta(\partial_\nu\partial_\mu\omega^\mu)\partial^\nu \\ &\quad + L^\Theta(\partial_\nu\partial^\nu(\omega_\mu\star_\Theta\omega^\mu)) + 2L^\Theta(\partial_\nu(\omega_\mu\star_\Theta\omega^\mu))\partial^\nu + L^\Theta(\partial_\nu\partial^\nu E) + 2L^\Theta(\partial_\nu E)\partial^\nu\Big) \\ &= 4t^2\ L^\Theta(\partial_\nu\omega_\mu)\partial^\mu\partial^\nu + O(t^2), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
L^\Theta(f)\, e^{-t\,\triangle_r^\Theta} &= L^\Theta(f) e^{t\left(2L^\Theta(\omega_\mu)\partial^\mu + L^\Theta(\partial_\mu\omega^\mu) + L^\Theta(\omega_\mu\star_\Theta\omega^\mu) + L^\Theta(E)\right) + 2t^2 L^\Theta(\partial_\nu\omega_\mu)\partial^\mu\partial^\nu + \cdots}\; e^{t\partial_\mu\partial^\mu} \\
&= L^\Theta(f)\Big(1 + t\big(2L^\Theta(\omega_\mu)\partial^\mu + L^\Theta(\partial_\mu\omega^\mu) + L^\Theta(\omega_\mu\star_\Theta\omega^\mu) + L^\Theta(E)\big) \\
&\quad + 2t^2\big(L^\Theta(\partial_\nu\omega_\mu)\partial^\mu\partial^\nu + L^\Theta(\omega_\mu\star_\Theta\omega_\nu)\partial^\mu\partial^\nu\big) + O(t^2)\Big)\; e^{t\,\partial_\mu\partial^\mu}.
\end{aligned}$$

où le dernier terme en facteur de t^2 vient du développement de $e^{t\,X}$ à l'ordre deux. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sigma\left[L^\Theta(f)\, e^{-t\,\triangle_r^\Theta}\right](\xi,x) = \Big(&f(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi) + t\big(2f\star_\Theta\omega_\mu(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi)(-i\xi)^\mu + \; f\star_\Theta\partial_\mu\omega^\mu(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi) \\
&+ f\star_\Theta\omega_\mu\star_\Theta\omega^\mu(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi) + f\star_\Theta E(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi)\big) \\
&+ \; 2t^2\big(f\star_\Theta\partial_\nu\omega_\mu(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi)(-i\xi)^\mu(-i\xi)^\nu \\
&+ \; f\star_\Theta\omega_\mu\star_\Theta\omega_\nu(x-\tfrac{1}{2}\Theta\xi)(-i\xi)^\mu(-i\xi)^\nu\big) + O(t^2)\Big)\; e^{-t\,\xi_\mu\xi^\mu}.
\end{aligned}$$

Il ne reste finalement qu'à intégrer $\sigma\left[L^\Theta(f)\, e^{-t\,\triangle_r^\Theta}\right](\xi,x)$. On obtient, en effectuant la translation $x \to x + \frac{1}{2}\Theta\xi$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left(L^\Theta(f)\, e^{-t\,\triangle_r^\Theta}\right) \\
&= (2\pi)^{-n}\iint d^nx\, d^n\xi\, \Big(f(x) + t\big(2f\star_\Theta\omega_\mu(x)(-i\xi)^\mu + f\star_\Theta\partial_\mu\omega^\mu(x) + f\star_\Theta\omega_\mu\star_\Theta\omega^\mu(x) \\
&\qquad + f\star_\Theta E(x)\big) + \; 2t^2\big(f\star_\Theta\partial_\nu\omega_\mu(x)(-i\xi)^\mu(-i\xi)^\nu + f\star_\Theta\omega_\mu\star_\Theta\omega_\nu(x)(-i\xi)^\mu(-i\xi)^\nu\big)\Big)\; e^{-t\,\xi_\mu\xi^\mu} \\
&\qquad + \; O(t^{-\frac{n}{2}+2}) \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int d^nx\, f(x)\, \Big(1 + t\big(\partial_\mu\omega^\mu(x) + \omega_\mu\star_\Theta\omega^\mu(x) + E(x) - \partial_\mu\omega^\mu(x) - \omega_\mu\star_\Theta\omega^\mu(x)\big)\Big) \\
&\qquad + \; O(t^{-\frac{n}{2}+2}) \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int d^nx\, f(x)\, \big(1 + tE(x)\big) + \; O(t^{-\frac{n}{2}+2}).
\end{aligned}$$

Les autres coefficients sont obtenus par un calcul similaire, c'est-à-dire que l'on obtient génériquement

$$L^\Theta(f)\, e^{-t\,\triangle_r^\Theta} \sim_{t\to 0} L^\Theta(f)\Big(\sum_{l\in\mathbb{N}} t^l \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\le l} L^\Theta(g_{\alpha,l})\; t^{|\alpha|/2}\; \partial^\alpha\Big)\; e^{t\,\partial_\mu\partial^\mu},$$

où $g_{\alpha,l} \in \mathcal{S}$ et la série en puissance de t a été corrigée par l'ordre des dérivées, en accord avec la discussion précédente.
Ici $\sim$ signifie que nous avons un développement asymptotique par rapport à la topologie de la norme trace :

$$\|L^\Theta(f)e^{-t\triangle_r^\Theta} - L^\Theta(f)\Big(\sum_{l\le N} t^l \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\le l} L^\Theta(g_{\alpha,l})\; t^{|\alpha|/2}\; \partial^\alpha\Big)\; e^{t\,\partial_\mu\partial^\mu}\|_1 = O(t^{N+1}),$$

la convergence, pour $t \to 0$, est alors garantie par le théorème 3.2.6 ; ce qui conclut la preuve du théorème 3.2.5. $\square$

Remarque 3.2.8. *Ces calculs systématiques montrent aussi que les autres coefficients* $\tilde{a}_{2l}$, $l > 3$ *ont la même forme canonique : le produit de Moyal remplace le produit point à point dans toutes les expressions.*

Nous allons utiliser ce développement pour calculer l'action spectrale, mais il servira aussi dans le chapitre 4, à calculer des corrections quantiques pour des théories de champs sur déformations isospectrales.

3.2.2.2 Calcul de l'action spectrale

En utilisant le résultat précédent, nous allons calculer une forme préliminaire de l'action spectrale, préliminaire dans le sens où seule la représentation régulière sera utilisée. Les raisons de l'obstruction liée à la représentation adjointe seront explicitées à la fin de ce paragraphe.

La relation (3.2.8) est en fait relativement générale. Pour tout opérateur borné S et tout opérateur inversible T qui sont tels que $S\,T^{-s}$ soit à trace, on a

$$\zeta_{S,T}(s) := \mathrm{Tr}(S\,T^{-s}) = \tfrac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\, \mathrm{Tr}\left(S\, e^{-t\,T}\right). \tag{3.2.12}$$

Avec cette relation et le résultat du paragraphe précédent, on peut obtenir une expression asymptotique (pour $\Lambda \to \infty$) de l'action spectrale des plans de Moyal.
Pour obtenir l'expression des coefficients ϕ_{2k} dans n'importe quelle dimension, nous allons utiliser des techniques de transformée de Laplace, inspirées par l'approche de Nest–Vogt–Werner dans l'article [82]. Aussi, [114] est la référence principale sur la transformée de Laplace qui sera suivie ici. Nous supposerons que ϕ possède la propriété suivante

$$C^\infty(\mathbb{R}^+) \ni \phi = \int_0^\infty ds\, e^{-sz} \hat{\psi}(s), \quad \hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+) := \{\, g \in \mathcal{S} : g(x) = 0, x \leq 0 \,\} \tag{3.2.13}$$

Toute fonction possédant cette propriété admet une extension analytique sur le demi plan complexe $\Re(z) \geq 0$. Par conséquent, toute fonction m fois différentiable ψ qui soit telle que $\psi^{(m)} = \phi$ est la transformée de Laplace d'une fonction $\hat{\psi}$ qui, par différentiation, satisfait à

$$\phi(z) = \psi^{(m)}(z) = (-1)^m \int_0^\infty ds\, e^{-sz}\, s^m\, \hat{\psi}(s),\ \Re z > 0.$$

Avec $\triangle^\Theta$ défini dans l'équation (3.2.10), en utilisant $\phi(\triangle_r^\Theta) = (-1)^m \int_0^\infty ds\, e^{-s\,\triangle_r^\Theta}\, s^m\, \hat{\psi}(s)$ ainsi que la positivité de $\rho = g^* \star_\Theta g$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\mathrm{Tr}\left(L^\Theta(\rho)\, \phi\left(\triangle_r^\Theta/\Lambda^2\right)\right) = (-1)^m\, \mathrm{Tr}\left(L^\Theta(g) \int_0^\infty dt\, e^{-t\,\triangle_r^\Theta/\Lambda^2} t^m \hat{\psi}(t) L^\Theta(g^*)\right).$$

Soit $\{\Phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}_r$ et soit $0 \leq B_t := L^\Theta(g)\, e^{-t\,\triangle_r^\Theta/\Lambda^2}\, L^\Theta(g^*)$, alors

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Tr}\left(L^\Theta(\rho)\, \phi\left(\triangle_r^\Theta/\Lambda^2\right)\right)\right| &= \Big|\lim_{N\to\infty} \int_0^\infty dt \sum_{p\leq N} \langle \Phi_p,\ B_t\, \Phi_p\rangle\, t^m \hat{\psi}(t)\Big| \\ &\leq \int_0^\infty dt\, \|B_t\|_1\, t^m |\hat{\psi}(t)| = \int_0^\infty dt\, \|B_t\|_1\, t^m |\hat{\psi}(t)|.\end{aligned}$$

Nous allons estimer $\|B_t\|_1$. Pour $t > \epsilon$, avec ϵ fixé et arbitrairement petit, on a

$$\|B_t\|_1 = \|L^\Theta(g)e^{-t\,\triangle_r^\Theta/2\Lambda^2}\|_2^2 \leq \|L^\Theta(g)e^{-\epsilon\,\triangle_r^\Theta/2\Lambda^2}\|_2^2\ \|e^{-(t-\epsilon)\,\triangle_r^\Theta/2\Lambda^2}\|.$$

Vu que $(t-\epsilon)\triangle_r^\Theta$ est positif, on obtient $\|e^{-(t-\epsilon)\,\triangle_r^\Theta/2\Lambda^2}\| \leq 1$. Ainsi, pour tout $t > \epsilon$, $\|B_t\|_1 \leq C$ uniformément en t. Pour $t \leq \epsilon$, le calcul asymptotique du paragraphe précédent montre que $\|B_t\|_1 = O(t^{-n/2})$. Ainsi $\mathrm{Tr}\left(\int_0^\infty dt B_t\ t^m\hat{\psi}(t)\right) < \infty$ et par convergence dominée on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left(L^\Theta(\rho)\ \phi(\triangle_r^\Theta/\Lambda^2)\right)\\
&\quad= (-1)^m \int_0^\infty dt\,\mathrm{Tr}\left(L^\Theta(\rho)e^{-t\,\triangle_r^\Theta/\Lambda^2}\right) t^m\hat{\psi}(t)\\
&\quad= (-1)^m(4\pi)^{-n/2}\int_0^\infty dt\sum_{l=0}^m \Lambda^{n-2l}\ t^{m+l-n/2}\hat{\psi}(t)\int_{\mathbb{R}^n} d^nx\,\rho\star_\Theta\ \tilde{a}_{2l}(x) +\ O(\Lambda^{n-2(m+1)})\\
&\quad= (4\pi)^{-n/2}\ \sum_{l=0}^m \Lambda^{n-2l}\,\phi_{2l}\int_{\mathbb{R}^n} d^nx\,\rho\star_\Theta\ \tilde{a}_{2l}(x)\ +\ O(\Lambda^{n-2(m+1)}),
\end{aligned}$$

où ϕ_{2l} est défini par

$$\phi_{2l} := (-1)^m\int_0^\infty dt\,t^{m+l-n/2}\,\hat{\psi}(t). \tag{3.2.14}$$

Lorsque $n = 2m$, ϕ_{2l} peut être mis sous la forme plus familière (3.2.6) :

$$\phi_{2l} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-l)}\ \int_0^\infty dt\,\phi(t)\ t^{m-1-l}, & \text{pour } l = 0,\cdots,m-1,\\ (-1)^l\ \phi^{(l-m)}(0), & \text{pour } l = m,\cdots,n.\end{cases} \tag{3.2.15}$$

Lorsque n est impair, la forme des coefficients ϕ_{2l} n'est pas aussi explicite car faisant intervenir des dérivées fractionnaires de ϕ. Il est alors préférable de s'en tenir à la définition (3.2.14).

En résumé :

Théorème 3.2.9. *Soient $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $A = -iL^\Theta(A_\mu)\otimes\gamma^\mu$, $A_\mu^* = -A_\mu \in \mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ une fonction positive satisfaisant à la condition (3.2.13) et $\not\partial_A = \not\partial + A$. Alors $L^\Theta(\rho)\,\phi(\not\partial_A^2/\Lambda^2)$ est à trace. De plus, pour $\Lambda \to \infty$:*

$$S_\Lambda(\not\partial, A, \rho) = 2^m\ (4\pi)^{-n/2}\ \sum_{l=0}^m \Lambda^{n-2l}\ \phi_{2l}\ \int_{\mathbb{R}^n} d^nx\,\rho(x)\ \tilde{a}_{2l}(x)\ +\ O(\Lambda^{n-2(m+1)}),$$

où les 'moments' ϕ_{2l} sont définis dans (3.2.14) ou dans (3.2.15) suivant la parité de la dimension et les coefficients $\tilde{a}_{2l}(x)$ sont donnés dans le théorème 3.2.5, avec le remplacement suivant dans l'équation (3.2.10) :

$$\begin{cases} L^\Theta(\omega_\mu) & \to\ L^\Theta(A_\mu),\\ L^\Theta(E)\otimes 1_{2^m} & \to\ \left(L^\Theta(\partial_\mu A_\nu) + L^\Theta(A_\mu\star_\Theta A_\nu)\right)\otimes\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu).\end{cases}$$

De plus, tous les termes linéaires en E dans $\tilde{a}_{2l}$ sont nuls.

Remarque 3.2.10. *Lorsque l'opérateur de Dirac est symétrisé, $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A + \epsilon J A J^{-1}$, il faut remplacer $L^\Theta(A_\mu)$ par $L^\Theta(A_\mu) - R^\Theta(A_\mu)$, vu que $\epsilon J\ (L^\Theta(A_\mu) \otimes \gamma^\mu)\ J^{-1} = R^\Theta(A_\mu^*) \otimes \gamma^\mu$. Le comportement en t des termes du type $\mathrm{Tr}\left(L^\Theta(f) R^\Theta(g)(-i\partial)^\alpha e^{t\partial_\mu\partial^\mu}\right)$ doit alors être établi. Plus précisément,*

$$\sigma[L^\Theta(f)R^\Theta(g)](\xi, x) = (2\pi)^{-n} \int d^n y\, d^n\eta\, e^{i(\eta-\xi).(x-y)}\, f(x - \tfrac{1}{2}\Theta\eta)\, g(y + \tfrac{1}{2}\Theta\xi),$$

et on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(L^\Theta(f)R^\Theta(g)(-i\partial)^\alpha e^{t\partial_\mu\partial^\mu}\right) &= \int d^n x\, d^n\xi\, \sigma[L^\Theta(f)R^\Theta(g)(-i\partial)^\alpha e^{t\partial_\mu\partial^\mu}](\xi, x) \\ &= \int d^n x\, d^n\xi\, f(x - \tfrac{1}{2}\Theta\xi)\, g(x + \tfrac{1}{2}\Theta\xi)\, \xi^\alpha\, e^{-t|\xi|^2},\end{aligned}$$

l'invariance par translation $x \to x + \frac{1}{2}\Theta\xi$ crucialement utilisée dans la preuve du théorème 3.2.5 n'est maintenant plus valable. Nous verrons dans le chapitre suivant (paragraphe 4.1.3), que ce point est intimement lié au phénomène de mélange UV/IR.

3.2.2.3 Application au cas quadri-dimensionnel

Dans le cas quadri-dimensionnel, en ne gardant que les termes en puissance positive de Λ, on obtient

$$S_\Lambda(\partial\!\!\!/, A, \rho) = \tfrac{1}{4\pi^2}\left(\Lambda^4\phi_0 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x\, \rho(x) + \tfrac{\phi(0)}{6} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x\, \rho(x)\ F^{\mu\nu} \star_\Theta F_{\mu\nu}(x)\right) + O(\Lambda^{-2}),$$

où $F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + [A^\mu, A^\nu]_{\star_\Theta}$.

En prenant, pour la régularisation, la fonction caractéristique χ_V d'un sous-ensemble borné $V \subset \mathbb{R}^4$, la propriété de trace du produit de Moyal donne

$$S_\Lambda(\partial\!\!\!/, A, \chi_V) = \tfrac{1}{4\pi^2}\left(\Lambda^4\, \phi_0 \int_V d^4x + \tfrac{\phi(0)}{6} \int_V d^4x\, F^{\mu\nu} \star_\Theta F_{\mu\nu}(x)\right) + O(\Lambda^{-2}). \tag{3.2.16}$$

Modulo un terme cosmologique, c'est l'action de Yang–Mills non commutative spatialement localisée. Cette expression est sensiblement différente du résultat de l'action de Connes–Lott pour Θ symplectique, à cause de la brisure de la propriété de trace due à la présence de la régularisation ρ. En effet, dans le cas de l'action de Connes–Lott, le produit de Moyal entre les deux tenseurs de courbure peut être omis :

$$YM(\alpha) = -\tfrac{1}{4g^2} \int d^4x\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x).$$

Chapitre 4

Mélange UV/IR et noyau de la chaleur

Dans ce chapitre, nous allons étudier certains aspects de la théorie quantique des champs sur déformation isospectrale. Nous nous restreindrons à l'étude d'une théorie scalaire en dimension quatre, mais les techniques que nous allons développer peuvent être aisément généralisées en dimensions supérieures et pour les théories de jauge. Le point essentiel sur lequel nous allons nous focaliser est le phénomène de mélange des divergences infrarouges et ultraviolettes (mélange UV/IR). Nous donnerons une interprétation nouvelle de ce phénomène, en terme de noyau de la chaleur sur et hors de sa diagonale. La vertu principale de l'approche que nous allons considérer (représentation en position), en plus de reproduire les résultats connus des paradigmes plats (plans de Moyal et tores non commutatifs), est d'être directement applicable aux espaces courbes déformés. Nous ferons alors une étude systématique de ce phénomène pour tous les types de déformation isospectrale.

Une des motivations premières pour l'étude des théories des champs sur espace non commutatif, proche d'être obsolète aujourd'hui, était la construction de théories sans divergence ultraviolette. En effet, la notion de points (et donc celle de petites distances) n'existant plus sur un espace non commutatif, il semble raisonnable de s'attendre, lorsque l'on substitue un espace non commutatif à un espace ordinaire, à ce que les théories quantiques ne soient pas affectées par des divergences ultraviolettes.
Ce ne fut pas le cas pour les premiers exemples étudiés, les plans de Moyal ainsi que les tores non commutatifs [11, 42, 69, 76, 79, 108], où en plus des divergences UV usuelles, des singularités d'un type nouveau apparurent, mélangeant courtes et grandes distances.

Pour ces déformations plates, la principale nouveauté en rapport avec la renormalisation fut la coexistence de deux types de diagrammes de Feynman, respectivement appelés planaires et non planaires (cf. paragraphe 4.1.1.2). Cette terminologie puise son origine dans le fait que les diagrammes en question sont des rubans, pouvant être représentés sur des surfaces de Riemann. Ces deux secteurs de la théorie ont un comportement drastiquement différent. Alors que les diagrammes planaires reproduisent à l'identique les divergences des théories commutatives, les diagrammes non planaires sont caractérisés par des vertex qui dépendent des moments externes au travers d'une phase. Ils sont génériquement finis mais divergents pour des valeurs exceptionnelles des moments. Par exemple, pour une théorie scalaire en dimension quatre avec un terme d'interaction en $\varphi^{\star\Theta 4}$, les diagrammes non planaires présents dans la fonction à deux points

divergent lorsque l'impulsion externe tend vers zéro. C'est le fameux mélange infrarouge ultraviolet, qui rend problématique la renormalisation de la théorie, indépendamment du schéma de régularisation choisi.

En utilisant la représentation de Schwinger de l'action effective dans l'approximation à une boucle, nous allons montrer qu'en toute généralité, deux secteurs aux comportements fondamentalement différents, que nous appellerons planaire et non planaire par analogie avec les cas plats, coexistent pour les théories scalaires sur toutes les déformations isospectrales. On donnera une interprétation purement algébrique de la présence de ces deux secteurs en termes d'opérateurs de multiplications twistées à droite et à gauche. La différence de leurs comportements, en particulier le phénomène de mélange UV/IR, sera comprise en termes de noyau de la chaleur sur et hors de sa diagonale.
Une vertu supplémentaire de cette approche 'sur espace de configuration', est de mettre en lumière de nouvelles et/ou plus fines manifestations du phénomème UV/IR, liées à la géométrie ainsi qu'aux propriétés arithmétiques des paramètres de déformation.
Dans le cas non périodique, seules les déformations de rang supérieur ou égal à quatre donneront lieu à un secteur non planaire sans divergence.
Par conséquent, lorsque que le rang de la matrice de déformation est égal à deux, la théorie ne sera pas renormalisable, déjà dans son approximation à une boucle.
Ce résultat semble être contradictoire avec ceux obtenus à partir des règles de Feynman modifiées dans l'espace des moments, mais l'apparente contradiction est simplement due au fait que la singularité IR (du mélange UV/IR) n'est pas localement intégrable dans ces circonstances ; la fonction de Green associée ne définit alors pas une distribution.
Nous verrons dans le cas périodique, pour que la théorie soit renormalisable, qu'il est nécessaire que *les entrées de la matrice de déformation soient de nature arithmétique bien particulière.* Nous verrons aussi que *la possible existence de points fixes pour l'action du groupe peut être responsable d'un nouveau type de divergences.* Cette nouvelle manifestation du mélange UV/IR apparaît déjà pour les archétypes des déformations isospectrales périodiques courbes que sont les sphères de Connes–Landi et leurs espaces ambiants.

4.1 Théorie $\varphi^{\star_\Theta 4}$ sur déformations isospectrales

4.1.1 Action effective à une boucle

Par souci de simplicité mais aussi pour son intérêt physique, nous nous restreignons au cas quadri-dimensionnel ; $n = \dim(M) = 4$. Il est néanmoins clair que nos techniques s'appliquent aux dimensions supérieures sans modification essentielle. Nous considérons ici une fonctionnelle d'action classique pour un champ scalaire réel φ

$$S[\varphi] := \int_M \mu_g \left[\tfrac{1}{2}(\nabla^\mu\varphi)\star_\Theta(\nabla_\mu\varphi) + \tfrac{1}{2}m^2\varphi\star_\Theta\varphi + \frac{\lambda}{4!}\varphi^{\star_\Theta 4}\right]. \tag{4.1.1}$$

Nous pouvons ajouter un terme de couplage avec la gravitation du type $\xi R(\varphi\star_\Theta\varphi)$, où R est la courbure scalaire et ξ une constante de couplage, sans aucun changement dans nos conclusions. De plus, vu que le scalaire de courbure est invariant sous l'action α, ce terme n'est pas affecté par la déformation car $R\star_\Theta f = R.f$ pour tout $f \in C_c^\infty(M)$ et donc en utilisant la propriété de trace

$$\int_M \mu_g\, R.(\varphi\star_\Theta\varphi) = \int_M \mu_g\, R\star_\Theta\varphi\star_\Theta\varphi = \int_M \mu_g\, (R\star_\Theta\varphi).\varphi = \int_M \mu_g\, R\,.\varphi\,.\varphi.$$

Pour les mêmes raisons, le terme cinétique de l'action n'est pas non plus affecté par la déformation et $S[\varphi]$ peut être réécrite comme

$$S[\varphi] = \int_M \mu_g \left[\tfrac{1}{2}\varphi\Delta\varphi \ + \tfrac{1}{2}m^2\varphi\,\varphi + \frac{\lambda}{4!}(\varphi\star_\Theta\varphi)\,(\varphi\star_\Theta\varphi)\right]. \tag{4.1.2}$$

(Rappelons que dans nos conventions le Laplacien est positif $\Delta = -\nabla^\mu\nabla_\mu$.)

Remarque 4.1.1. *Nous ne travaillons ici que dans le contexte de la théorie quantique des champs Euclidienne. L'extension au régime pseudo-Riemannien, par prolongement analytique des quantités Euclidiennes, nécessitant de plus amples hypothèses sur la quadri-variété M, ne sera pas considérée ici. Nous verrons cependant que le régime Euclidien est suffisant pour l'étude du phénomène de mélange UV/IR.*

4.1.1.1 Calcul du potentiel effectif

Notre objectif est de calculer la partie divergente de l'action effective $\Gamma_{1l}[\varphi]$ associée à l'action classique $S[\varphi]$, dans son approximation à une boucle. Dans la méthode du champ de 'background' (voir [121] par exemple), la contribution à une boucle de l'action effective, résultant de l'intégration fonctionnelle de l'exponentielle de la partie quadratique en φ_q de $S[\varphi_q + \varphi_c]$, est donnée par le déterminant du potentiel effectif. Ici φ_q est la partie quantique (sur laquelle l'intégration fonctionnelle opère) d'un champ quelconque développé au voisinage du champ de 'background' φ_c (partie classique). Pour que cette méthode soit valable, il faut en principe que le champ φ_c soit une solution classique 'des équations du mouvement'. L'existence de solutions pour de 'telles équations d'évolution' non linéaires, est garantie par des théorèmes généraux [86]. Nous n'utiliserons pas explicitement ce fait car la méthode du champ de 'background' nous servira essentiellement à extraire les parties divergentes des fonctions de Green à n points dans l'approximation à une boucle. Dans la suite, nous supprimerons l'indice c et il sera toujours entendu que φ est le champ de 'background'.

Ainsi, $\Gamma_{1l}[\varphi]$ est formellement donné par $\frac{1}{2}\ln(\det H)$, où H est le potentiel effectif. Dans notre cas (ainsi que dans le cas commutatif $\Theta = 0$), nous verrons que $H = \Delta + m^2 + B$, où B est un opérateur positif et borné ; lorsque que la variété M n'est pas compacte, le spectre essentiel de H n'est pas vide (typiquement l'intervalle $[m^2, +\infty[$). Afin de manipuler des opérateurs ayant un spectre purement ponctuel (discret et de multiplicité finie) et indépendamment de tout schéma de régularisation, nous devons redéfinir (formellement pour l'instant) l'action effective à une boucle comme

$$\Gamma_{1l}[\varphi] := \tfrac{1}{2}\ln\det\left(HH_0^{-1}\right),$$

où $H_0^{-1} := (\Delta + m^2)^{-1}$ est le propagateur libre. Nous ne sommes alors pas "si loin" d'avoir un déterminant bien défini, car

$$HH_0^{-1} = (H_0 + B)H_0^{-1} = 1 + BH_0^{-1},$$

et nous verrons que BH_0^{-1} appartient à toutes les classes de Schatten pour $p > 2$. Les conséquences physiques du remplacement de H par HH_0^{-1} sont bénignes, cette normalisation correspondant à soustraire les amplitudes vide/vide (diagrammes sans patte externe).
Nous définirons le logarithme du déterminant, par la représentation en 'temps propre' de Schwinger

$$\Gamma_{1l}[\varphi] = \frac{1}{2}\ln\left(\det(HH_0^{-1})\right) := -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\ \mathrm{Tr}\left(e^{-tH} - e^{-tH_0}\right). \tag{4.1.3}$$

Avant de donner une signification précise à cette expression, c'est-à-dire avant de choisir un schéma de régularisation, nous allons calculer le potentiel effectif H. Rappelons que le potentiel effectif (voir par exemple [121]) est l'opérateur dont le noyau distributionnel est donné par la dérivée fonctionnelle seconde de l'action classique

$$K_H(p,p') := \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(p)\delta\varphi(p')}, \qquad K_{H_0}(p,p') := \left.\frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(p)\delta\varphi(p')}\right|_{\lambda=0},$$

où les dérivées fonctionnelles sont définies au sens faible

$$\left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi}, \psi \right\rangle := \left.\frac{dS[\varphi+t\psi]}{dt}\right|_{t=0},$$

et où le couplage est donné par l'intégrale avec la forme volume Riemannienne $\langle f,h\rangle = \int_M \mu_g\, f\, h$.

En utilisant la propriété de trace on obtient alors

$$\left.\frac{dS[\varphi+t\psi]}{dt}\right|_{t=0} = \left\langle \Delta\varphi + m^2\varphi + \frac{\lambda}{3!}\varphi^{\star_\Theta 3}, \psi \right\rangle.$$

D'où

$$\tilde{S}_p[\varphi] := \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(p)} = \Delta\varphi(p) + m^2\varphi(p) + \frac{\lambda}{3!}\varphi^{\star_\Theta 3}(p).$$

La dérivée fonctionnelle seconde donne quant à elle

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(p)\delta\varphi}, \psi \right\rangle &:= \left.\frac{d\tilde{S}_p[\varphi+t\psi]}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \left\langle \big(\Delta + m^2 + \frac{\lambda}{3!}(L_{\varphi\star_\Theta\varphi} + R_{\varphi\star_\Theta\varphi} + R_\varphi L_\varphi)\big)\delta_p^g, \psi \right\rangle,\end{aligned}$$

où la distribution δ_p^g a été définie lors du paragraphe 1.2.2. Finalement, en utilisant la relation

$$K_A(p,p') = (A^*\delta_p^g)(p'),$$

valable pour tout opérateur fermable sur $L^2(M,\mu_g)$, on obtient pour le potentiel effectif

$$H = \Delta + m^2 + \frac{\lambda}{3!}(L_{\varphi\star_\Theta\varphi} + R_{\varphi\star_\Theta\varphi} + R_\varphi L_\varphi).$$

Puisque φ est une fonction réelle, les opérateurs L_φ et R_φ sont auto-adjoints ; on peut alors vérifier la stricte positivité de H :

$$L_{\varphi\star_\Theta\varphi} + R_{\varphi\star_\Theta\varphi} + L_\varphi R_\varphi = \tfrac{1}{2}(L_\varphi + R_\varphi)^*(L_\varphi + R_\varphi) + \tfrac{1}{2}L_\varphi^* L_\varphi + \tfrac{1}{2}R_\varphi^* R_\varphi.$$

Nous arrivons au point crucial :
l'existence du phénomène de mélange des divergences ultraviolettes et infrarouges, vient de la présence simultanée des opérateurs de multiplication twistée à droite et à gauche dans le potentiel effectif.
Plus spécifiquement, le produit des opérateurs de multiplication twistée à gauche et à droite $L_f R_h$ jouit de propriétés régularisantes importantes. La conséquence primordiale, qui sera employée au paragraphe 4.1.3, est que la trace de $L_f\, R_h\, e^{-t(\Delta+m^2)}$ est régulière lorsque t tend vers zéro, contrairement à $\mathrm{Tr}(L_f\, e^{-t(\Delta+m^2)})$, $\mathrm{Tr}(R_f\, e^{-t(\Delta+m^2)})$, $\mathrm{Tr}(M_f\, e^{-t(\Delta+m^2)})$, qui en n dimensions se comportent comme $t^{-n/2}$ lorsque $t \to 0$. Nous verrons qu'en fait, ces trois dernières traces sont identiques.

Remarque 4.1.2. *Pour une théorie $\varphi^{\star\Theta 3}$ sur une variété de dimension six, le potentiel effectif a la forme suivante*

$$H = \Delta + m^2 + \frac{\lambda}{2!}(L_\varphi + R_\varphi).$$

Même en l'absence du terme "mixte" $R_\varphi L_\varphi$, la théorie possède un secteur non planaire, mais les diagrammes non planaires ne sont présents qu'au niveau de la fonction à deux points ; le 'tadpole' n'est pas affecté par le mélange UV/IR.

4.1.1.2 Graphe planaire/non planaire versus représentation régulière gauche/droite

La notion de diagramme de Feynman planaire et non planaire provient des théories matricielles [56, 93]. Considérons par exemple un champ scalaire réel à valeurs matricielles sur une variété Riemannienne M, i.e. $\phi^* = \phi \in M_N\big(C_c^\infty(M)\big)$, et une action classique

$$S[\phi] := \int_M \mu_g \operatorname{Tr}\big(\tfrac{1}{2}\phi(\Delta + m^2)\phi\big) + \frac{\lambda}{k!}\operatorname{Tr}\big(\phi^k\big),$$

où le Laplacien agit sur chaque composante du champ ϕ_{ij}, $i, j = 1, \cdots, N$. Le propagateur de cette théorie, i.e. le noyau de l'inverse de l'opérateur $(\Delta + m^2)$ agissant sur l'espace vectoriel $M_N\big(C_c^\infty(M)\big)$, porte des indices matriciels. Il sera graphiquement représenté par une double ligne (un ruban), chacune portant un indice matriciel à chaque extrémités. Le vertex de cette théorie, le noyau du terme d'interaction, i.e. le noyau de la forme k-linéaire $\int_M \mu_g \operatorname{Tr}\big(\phi_1 \cdots \phi_k\big)$, sera lui aussi représenté par k doubles lignes, une ligne pour chaque indice matriciel, se joignant à l'une de leurs extrémités. Les diagrammes de Feynman sont ensuite obtenus par contraction des vertex avec les propagateurs. L'idée est qu'un tel diagramme est dit planaire lorsque qu'il peut être tracé sur un plan (évidemment en l'absence de croisement de ruban), et non planaire sinon. Plus précisément [93, paragraphe II.5], ces diagrammes engendrent des surfaces de Riemann, en identifiant les pattes externes avec 'un point à l'infini'. Les diagrammes planaires seront ceux pour lesquels la surface générée est de genre $g = 0$ (une 2-sphère), et non planaire lorsque $g > 0$.

En utilisant la caractérisation matricielle du produit de Moyal symplectique (cf. proposition 2.2.4), on peut appliquer directement ces considérations. On pourra alors représenter les amplitudes de transitions de ces théories par des diagrammes en ruban [11, 42, 57–59].

Le concept de graphes planaires et non planaires, ou plus simplement de contribution planaires et non planaires, se généralise à n'importe quelle théorie quantique des champs non commutative, en particulier aux théories scalaires sur déformations isospectrales. Par théorie quantique non commutative (scalaire), nous entendons une théorie où les champs classiques sont vus comme les éléments d'une algèbre non commutative, avec une action classique construite à partir d'une trace sur l'algèbre. Le cas vectoriel, pour lequel les champs classiques sont les éléments d'un module projectif de type fini est sensiblement plus compliqué.
En effet, la caractéristique essentielle utilisée dans le cas matriciel est l'invariance par permutation cyclique des arguments du vertex (dans une base ou une représentation donnée), conséquente à la cyclicité de la trace. On représentera alors les propagateurs et les vertex par des rubans, par analogie avec le cas matriciel. Après contraction des vertex avec les propagateurs, on obtient deux types de graphes : planaires lorsque seuls les rubans des vertex qui sont adjacents ont été contractés et non planaires sinon.

Nous allons évoquer maintenant le lien entre les secteurs planaire et non planaire et les opérateurs de représentation régulière gauche et droite.
Considérons pour cela une algèbre non commutative $\mathcal{A}$ munie d'une trace finie τ, ainsi qu'un 'opérateur cinétique' $M \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ (non nécessairement borné) jouant le rôle du Laplacien. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on définit une action classique par

$$S[a] := \frac{1}{2}\tau\big(aMa\big) + \frac{\lambda}{k!}\tau\big(a^k\big).$$

Tout d'abord, il est facile de montrer que la structure du potentiel effectif, c'est-à-dire la présence simultanée d'opérateurs de multiplication à gauche et à droite, donc l'existence de deux secteurs distincts dans la théorie, est tout à fait générale : le potentiel effectif contiendra toujours des sommes et produits d'opérateurs de représentation régulière gauche L et droite R :

$$H_a = M + \frac{\lambda}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-2} L(a^j)\, R(a^{k-2-j}).$$

Dans la méthode du champ de 'background', les contributions à une boucle sont données par l'intégrale fonctionnelle sur la partie quantique a_q, d'un champ quelconque $\mathcal{A} \ni a = a_q + a_c$ développé autour d'un champ classique a_c, de l'exponentielle (réelle dans le régime Euclidien) de la partie quadratique en a_q de $S[a_q + a_c]$. Elles sont données par le logarithme du déterminant du potentiel effectif. Un 'développement en puissance de a_c' de $\frac{1}{2}\ln\det^{reg}\big(H_{a_c}H_0^{-1}\big)$, où $\det^{reg}$ est un déterminant régularisé correspondant au schéma de régularisation choisi et $H_0 := M$, fournit la correspondance avec les parties divergentes des diagrammes de Feynman (régularisés) à une boucle en présence d'un champs de 'background' a_c.
En effet, les diagrammes de Feynman à une boucle en présence d'un champs de 'background' sont obtenus par contraction des vertex et des propagateurs donnés par l'action $S_{quad}[a_q]$, partie quadratique en a_q de $S[a_q + a_c]$:

$$S_{quad}[a_q] = \frac{1}{2}\tau\big(a_q M a_q\big) + \frac{\lambda}{2(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-2}\tau\big(a_q\, a_c^j\, a_q\, a_c^{k-2-j}\big).$$

Dans ce cas, le propagateur est encore donné par M^{-1}, les vertex par des graphes consistant en $k-2$ rubans externes (attachés en leurs extrémités à a_q) alternés avec deux rubans internes (avec des indices libres à leurs extrémités).
La similitude entre H_{a_c} et $S_{quad}[a_q]$ donne ainsi la correspondance entre les diagrammes planaire/non planaire et les opérateurs de représentation régulière gauche/droite.

Nous allons terminer par une petite digression, dans le but d'illustrer le caractère régularisant des opérateurs $L_f R_h$. Nous allons observer ce phénomène dans les cas 'limites' des plans de Moyal non dégénérés ($n = 2N, \Theta$ inversible), pour lesquels il est particulièrement éloquent car les opérateurs $L_f R_h$ sont à trace lorsque $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$. Ce fait, connu des experts, n'a été que rarement rapporté dans la littérature (à ma connaissance, la seule publication le mentionnant est [3]). Plusieurs arguments peuvent être invoqués pour démontrer cette propriété. Par exemple, on peut considérer la décomposition polaire $f_i = u_i \star_\theta |f_i|_{alg}$ de $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$, $i = 1, 2$ (ici $|.|_{alg}$ désigne le module au sens de la C^*-algèbre unifère A_θ et non pas au sens des fonctions) et utiliser

le fait que $|f_i|_{alg} = g_i^* \star_\theta g_i$ pour certains $g_i \in \mathcal{S}$. Alors, en utilisant la commutation de L avec R, on obtient

$$\begin{aligned}\|L_{f_1} R_{f_2}\|_1 &\leq \|L_{u_1}\| \, \|R_{u_2}\| \, \|L_{g_1^*} R_{g_2^*} R_{g_2} L_{g_1}\|_1 \\ &\leq \|L_{u_1}\| \, \|R_{u_2}\| \, \|R_{g_2} L_{g_1}\|_2^2,\end{aligned}$$

pour finalement vérifier que le noyau de $R_f L_g$, $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$, est de carré sommable.
Il existe une manière de procéder encore plus éloquente, utilisant la base de Wigner de l'oscillateur harmonique, qui montre à quel point ce phénomène est proche de celui des opérateurs de Toeplitz. En développant $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ dans cette base,

$$f = \sum_{m,n} c_{mn} f_{mn}, \qquad\qquad h = \sum_{m,n} d_{mn} f_{mn},$$

et en utilisant leurs propriétés d'unités matricielles $f_{mn} \star_\Theta f_{kl} = \delta_{nk} f_{ml}$ et de base orthonormée $(2\pi\theta)^{-N} \langle f_{mn}, f_{kl} \rangle = \delta_{m,k} \delta_{n,l}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(L_f R_h\right) &= (2\pi\theta)^{-N} \sum_{m,n,k,l,s,t} c_{kl} \, d_{st} \, \langle f_{mn}, f_{kl} \star_\Theta f_{mn} \star_\Theta f_{st} \rangle \\ &= \sum_{m,n} c_{mm} \, d_{nn} \\ &= (2\pi\theta)^{-N} \int d^{2N}x \, f(x) \int d^{2N}y \, h(y) < \infty.\end{aligned}$$

On peut alors factoriser HH_0^{-1} et extraire une partie finie dans l'action effective :

$$\begin{aligned}H_0 H^{-1} = \Big(1 - \frac{\lambda}{3!}(L_{\varphi\star_\theta\varphi} + R_{\varphi\star_\theta\varphi}) \frac{1}{\Delta + m^2 + \frac{\lambda}{3!}(L_{\varphi\star_\theta\varphi} + R_{\varphi\star_\theta\varphi})}\Big) \\ \times \Big(1 - \frac{\lambda}{3!} L_\varphi R_\varphi \frac{1}{\Delta + m^2 + \frac{\lambda}{3!}(L_{\varphi\star_\theta\varphi} + R_{\varphi\star_\theta\varphi} + L_\varphi R_\varphi)}\Big).\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Or,

$$1 - \frac{\lambda}{3!} L_\varphi R_\varphi \frac{1}{\Delta + M^2 + \frac{\lambda}{3!}(L_{\varphi\star_\theta\varphi} + R_{\varphi\star_\theta\varphi} + L_\varphi R_\varphi)} \in 1 + \mathcal{L}^1(\mathcal{H}),$$

son déterminant est donc parfaitement bien défini. Seul le déterminant de la première parenthèse de l'équation (4.1.4) a besoin d'être régularisé. Nous verrons que déterminant de la deuxième parenthèse de (4.1.4) contient l'intégralité de la contribution non planaire à la fonction à deux points. Pour la fonction à quatre points, la partie non planaire finie réside dans les deux termes.

4.1.1.3 Schémas de régularisation

Retournons au calcul de $\Gamma_{1l}[\varphi]$ dans le cas général. L'intégrale sur t dans (4.1.3) est divergente à cause du comportement du noyau de la chaleur sur sa diagonale pour t tendant vers zéro. On définit l'action effective à une boucle régularisée par

$$\Gamma_{1l}^{\varepsilon}[\varphi] := -\frac{1}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t} \; \mathrm{Tr}\left(e^{-tH} - e^{-tH_0}\right). \tag{4.1.5}$$

D'autres schémas de régularisation existent. Par exemple la régularisation ζ, le pendant en espace courbe de la régularisation dimensionnelle, obtenue en remplaçant dans l'expression de l'action effective $1/t$ par $\mu^{2\sigma}/t^{1-\sigma}$, où μ est une échelle de masse (nécessaire pour conserver la bonne dimension) et σ est un nombre complexe :

$$\Gamma_{1l}^{\sigma,\mu}[\varphi] := -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(t\mu^2\right)^\sigma \ \mathrm{Tr}\left(e^{-tH} - e^{-tH_0}\right). \tag{4.1.6}$$

En dimension n (paire), l'intégrale (4.1.6) est bien définie pour $\Re(\sigma) > n/2-1$. On peut montrer qu'elle possède un prolongement analytique en σ sur $\mathbb{C} \setminus \{n/2-1, n/2-2, \cdots\}$.
Nous n'utiliserons cependant cette régularisation que lorsque l'on voudra comparer nos résultats avec ceux obtenus dans le cas du plan de Moyal, par règles de Feynman modifiées (dans l'espace des impulsions) et régularisation dimensionnelle. Pour les autres applications, en particulier pour l'étude du mélange UV/IR, la régularisation (4.1.5) sera suffisante. Notons que ε peut être pensé comme un cut-off en impulsion, i.e. $\varepsilon = \Lambda^{-2}$.

Pour montrer que les expressions (4.1.5) et (4.1.6) sont maintenant bien définies, il est nécessaire que la différence de semi-groupe $e^{-tH} - e^{-tH_0}$ soit à trace pour tout $t > 0$. Notons aussi que la convergence de l'intégrale en $t \to \infty$ est assurée par le facteur global e^{-tm^2}. Aussi, lorsque le spectre du Laplacien est borné inférieurement par une constante strictement positive, on pourra construire des théories sans masse et sans divergence infrarouge. C'est en particulier le cas pour le plan hyperbolique twisté $\mathbb{H}^n_\Theta$, vu que le spectre (L^2) de Δ sur $\mathbb{H}^n$ est la demi-droite $[n^2/4, \infty[$.

Lemme 4.1.3. *La différence de semi-groupe $e^{-tH} - e^{-tH_0}$ est à trace pour tout $t > 0$.*

Preuve. En utilisant la positivité de H ainsi que celle de H_0, la propriété de semi-groupe et le calcul fonctionnel holomorphe avec un chemin γ entourant les spectres $\mathrm{sp}(H) \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{sp}(H_0) \subset \mathbb{R}^+$, on a

$$e^{-tH} - e^{-tH_0} = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\gamma\times\gamma} dz_1\, dz_2\, e^{-t(z_1+z_2)/2}\left(R_H(z_1)R_H(z_2) - R_{H_0}(z_1)R_{H_0}(z_2)\right),$$

où $R_A(z) = (z-A)^{-1}$ est la résolvante de A. Or $H = H_0 + B$ où B est borné. Puisque $R_H(z) = R_{H_0}(z)(1 + BR_H(z))$, on obtient

$$\begin{aligned} R_H(z_1)R_H(z_2) - R_{H_0}(z_1)R_{H_0}(z_2) = {} & R_{H_0}(z_1)R_{H_0}(z_2)BR_H(z_2) + R_{H_0}(z_1)BR_H(z_1)R_{H_0}(z_2) \\ & + R_{H_0}(z_1)BR_H(z_1)R_{H_0}(z_2)BR_H(z_2). \end{aligned}$$

La première équation résolvante et le fait que $L_f(z-\Delta)^{-k}, R_f(z-\Delta)^{-k} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, pour $p > 2/k, f \in C_c^\infty(M)$ (proposition 2.3.6), utilisée avec l'inégalité de Hölder pour les classes de Schatten, permettent de montrer que

$$\int_{\gamma\times\gamma} dz_1\, dz_2\, e^{-t(z_1+z_2)/2} R_{H_0}(z_1)R_{H_0}(z_2)BR_H(z_2)$$

ainsi que les autres termes, sont des intégrales au sens de Bochner pour la norme trace. Ainsi, $e^{-tH} - e^{-tH_0}$ est à trace comme énoncé. □

4.1.2 Développement en puissance du champ

Pour décrire les divergences, nous allons étudier le comportement de $\Gamma^{\varepsilon}_{1l}[\varphi]$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Nous allons ensuite montrer qu'il existe pour toutes les déformations isospectrales deux types de contributions pour les fonctions de Green : les contributions planaires donnant lieu à des singularités UV ordinaires et celles non planaires exhibant le phénomène de mélange UV/IR.
Travaillant en espace courbe, il n'est plus possible de définir des diagrammes de Feynman dans l'espace des moments. Nous allons cependant continuer à parler de contributions planaires et non planaires (cf. paragraphe 4.1.1.2), en utilisant le clivage entre les opérateurs de multiplication twistée à droite et à gauche, clivage qui coïncide avec celui entre les diagrammes planaires et non planaires dans les cas plats connus. Ce point deviendra plus limpide dans les prochains paragraphes.

Intéressés par le comportement en ε de $\Gamma^{\varepsilon}_{1l}[\varphi]$ (nous ne considérons que la partie potentiellement divergente de l'action effective), nous avons besoin d'un développement en puissance de t pour $\mathrm{Tr}\left(e^{-tH} - e^{-tH_0}\right)$ lorsque $t \to 0$. Ce développement est obtenu par des techniques déjà utilisées dans le calcul de l'action spectrale. Parce que la dimension est quatre, la formule de Baker–Campbell–Hausdorff (BCH) à l'ordre deux

$$e^{-tH} = e^{-tB+\frac{t^2}{2}[\Delta,B]-\frac{t^3}{6}[\Delta,[\Delta,B]]-\frac{t^3}{12}[B,[\Delta,B]]+\cdots}\, e^{-tH_0},$$

est suffisante pour capturer la structure des divergences. Il faut ensuite développer la première exponentielle et ne garder que les termes qui, sous la trace, donneront des termes d'ordre inférieur ou égal à zéro en t. Seuls quelques termes seront important, car en dimension n

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(L_f\Delta^k e^{-t\Delta}) \simeq t^{-n/2-k},\ t \to 0,\\ &\mathrm{Tr}(R_f\Delta^k e^{-t\Delta}) \simeq t^{-n/2-k},\ t \to 0. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

En effet, pour le cas "gauche" (le cas droit étant similaire), étant donné que $L_f(1+\Delta)^{-k} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour tout $p > n/2k$ d'après la proposition 2.3.6, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|L_f\Delta^k e^{-t\Delta}\|_1 &\leq \|L_f(1+\Delta)^{-n/2-\varepsilon}\|_1\ \|\frac{\Delta^k}{(1+\Delta)^k}\|\|(1+\Delta)^{n/2+k+\varepsilon}e^{-t\Delta}\|\\ &\leq C(\varepsilon)t^{-(n/2+k+\varepsilon)} \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

où la dernière estimation a été obtenue par calcul fonctionnel. Dans le développement en puissance du champ, il faut alors corriger la puissance en t par l'ordre de l'opérateur différentiel et donc

$$e^{-tH} = \left(1 - tB + \frac{t^2}{2}[\Delta,B] - \frac{t^3}{6}[\Delta,[\Delta,B]] + \frac{t^2}{2}B^2\right)e^{-tH_0}\ + O(t);$$

qui signifie que nous avons le développement suivant pour $t \to 0$:

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-tH} - e^{-tH_0}\right) = \mathrm{Tr}\left((-tB + \frac{t^2}{2}[\Delta,B] - \frac{t^3}{6}[\Delta,[\Delta,B]] + \frac{t^2}{2}B^2)e^{-tH_0}\right)\ + O(t). \tag{4.1.9}$$

Nous allons commencer par montrer que les commutateurs présents dans l'expression (4.1.9) fournissent des contributions nulles à l'action effective.
Considérons pour cela les termes $\mathrm{Tr}\left([\Delta,C]e^{-tH_0}\right)$, avec $C = B$ ou $C = [\Delta,B]$.

En effet, à la condition que chacun des termes $\Delta C e^{-tH_0}$ et $C\Delta e^{-tH_0}$ soit à trace, on obtient le résultat en utilisant la cyclicité de la trace ainsi que la commutation du Laplacien avec le semi-groupe de la chaleur :

$$\mathrm{Tr}\left(\Delta\, C\, e^{-tH_0} - C\,\Delta\, e^{-tH_0}\right) = \mathrm{Tr}\left(\Delta\, C\, e^{-tH_0} - \Delta\, C\, e^{-tH_0}\right) = 0.$$

La traçabilité des opérateurs $C\Delta e^{-tH_0}$ s'obtient facilement par calcul fonctionnel et en invoquant les mêmes arguments que ceux utilisés pour établir l'estimation (4.1.8). Pour celle des termes $\Delta C e^{-tH_0}$, nous allons utiliser la relation tautologique

$$\Delta\, C\, e^{-tH_0} = C\,\Delta\, e^{-tH_0} + [\Delta, C]\, e^{-tH_0}.$$

Ainsi, il ne reste qu'à montrer que les opérateurs $[\Delta, C]\, e^{-tH_0}$ sont eux aussi à trace.
Il est suffisant pour cela de calculer les commutateurs $[\Delta, L_{\varphi\star_\Theta\varphi}]$, $[\Delta, R_{\varphi\star_\Theta\varphi}]$, $[\Delta, L_\varphi R_\varphi]$, etc..
La méthode la plus simple est d'utiliser les formules (1.2.7) et (1.2.8). Par $[V_z, \Delta] = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^l$ (signature concrète de la propriété d'isométrie de l'action) et en choisissant un système de coordonnées locales $\{x^\mu\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
[\Delta, L_{\varphi\star_\Theta\varphi}] &= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\; e^{-i<y,z>}\; V_{\frac{1}{2}\Theta y}\, [\Delta, M_{\varphi\star_\Theta\varphi}]\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z} \\
&= (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\; e^{-i<y,z>}\; V_{\frac{1}{2}\Theta y}\, \left(M_{\Delta(\varphi\star_\Theta\varphi)} - 2M_{\nabla^\mu(\varphi\star_\Theta\varphi)}\nabla_\mu\right)\, V_{-\frac{1}{2}\Theta y - z} \\
&= L_{\Delta(\varphi\star_\Theta\varphi)} - 2L_{\nabla^\mu(\varphi\star_\Theta\varphi)}\nabla_\mu,
\end{aligned}$$

et similairement,

$$\begin{aligned}
[\Delta, R_{\varphi\star_\Theta\varphi}] &= R_{\Delta(\varphi\star_\Theta\varphi)} - 2R_{\nabla^\mu(\varphi\star_\Theta\varphi)}\nabla_\mu, \\
[\Delta, R_\varphi L_\varphi] &= R_\varphi[\Delta, L_\varphi] + [\Delta, R_\varphi]L_\varphi \\
&= R_\varphi L_{\Delta\varphi} + R_{\Delta\varphi}L_\varphi - 2R_{\nabla^\mu\varphi}L_{\nabla_\mu\varphi} - 2(R_\varphi L_{\nabla^\mu\varphi} + R_{\nabla^\mu\varphi}L_\varphi)\nabla_\mu.
\end{aligned}$$

Le système de coordonnées utilisé doit être compatible avec la déformation, c'est-à-dire qu'il doit être défini sur un voisinage $U \subset M$ invariant par α. On peut obtenir un tel système, en choisissant n'importe quel recouvrement d'ouverts $\{U_I\}_{i\in I}$ de M, pour définir $\{\widetilde{U}_I\}_{i\in I}$ en laissant $\mathbb{R}^l$ agir dessus : $\widetilde{U}_i := \mathbb{R}^l.U_i$.

Les derniers commutateurs dont on a besoin sont :

$$\begin{aligned}
[\Delta, [\Delta, L_{\varphi\star_\Theta\varphi}]] &= L_{\Delta\Delta(\varphi\star_\Theta\varphi)} - 4L_{\nabla^\mu\Delta(\varphi\star_\Theta\varphi)}\nabla_\mu + 4L_{\nabla^\mu\nabla^\nu(\varphi\star_\Theta\varphi)}\nabla_\mu\nabla_\nu, \\
[\Delta, [\Delta, R_{\varphi\star_\Theta\varphi}]] &= R_{\Delta\Delta(\varphi\star_\Theta\varphi)} - 4R_{\nabla^\mu\Delta(\varphi\star_\Theta\varphi)}\nabla_\mu + 4R_{\nabla^\mu\nabla^\nu(\varphi\star_\Theta\varphi)}\nabla_\mu\nabla_\nu, \\
[\Delta, [\Delta, R_\varphi L_\varphi]] &= R_\varphi L_{\Delta\Delta\varphi} + R_{\Delta\Delta\varphi}L_\varphi + 2R_{\Delta\varphi}L_{\Delta\varphi} \\
&\quad - 4R_{\nabla^\mu\varphi}L_{\nabla_\mu\Delta\varphi} - 4R_{\nabla^\mu\Delta\varphi}L_{\nabla_\mu\varphi} + 4R_{\nabla^\mu\nabla^\nu\varphi}L_{\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi} \\
&\quad - 4(R_\varphi L_{\nabla^\mu\Delta\varphi} + R_{\nabla^\mu\Delta\varphi}L_\varphi + R_{\Delta\varphi}L_{\nabla^\mu\varphi} \\
&\quad + R_{\nabla^\mu\varphi}L_{\Delta\varphi} - 2R_{\nabla^\nu\varphi}L_{\nabla_\nu\nabla^\mu\varphi} - 2R_{\nabla^\nu\nabla^\mu\varphi}L_{\nabla_\nu\varphi})\nabla_\mu \\
&\quad + 4(R_\varphi L_{\nabla^\mu\nabla^\nu\varphi} + R_{\nabla^\mu\nabla^\nu\varphi}L_\varphi + 2R_{\nabla^\mu\varphi}L_{\nabla^\nu\varphi})\nabla_\mu\nabla_\nu.
\end{aligned}$$

Par calcul fonctionnel, on obtient alors que chaque terme des développements précédents de $[\Delta, C]e^{-tH_0}$, avec $C = B$ ou $C = [\Delta, B]$ sont à trace, et donc $\mathrm{Tr}\left([\Delta, C]e^{-tH_0}\right) = 0$.

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(e^{-tH}-e^{-tH_0}\right) = &-t\frac{\lambda}{3!}\,\mathrm{Tr}\left(\left(L_{\varphi\star\Theta\varphi}+R_{\varphi\star\Theta\varphi}+R_\varphi L_\varphi\right)e^{-t(\Delta+m^2)}\right)\\ &+\frac{t^2}{2}\frac{\lambda^2}{(3!)^2}\,\mathrm{Tr}\Big(\big(L_{\varphi^\star\Theta^4}+R_{\varphi^\star\Theta^4}+3R_{\varphi\star\Theta\varphi}L_{\varphi\star\Theta\varphi}\\ &\qquad+2R_\varphi L_{\varphi^\star\Theta^3}+2R_{\varphi^\star\Theta^3}L_\varphi\big)e^{-t(\Delta+m^2)}\Big)+O(t).\end{aligned}$$

4.1.3 Contributions planaires et non planaires

Nous allons séparer l'expression précédente en deux parties. Dans la première, nous ne garderons que les termes du type $L_f e^{-t\Delta}$ et $R_f e^{-t\Delta}$. Ces derniers constituent "la partie planaire", car donnant des contributions du même type que celles des théories commutatives, comme on peut s'en persuader en regardant l'équation (4.1.10) ci-dessous. Le deuxième type de contribution, correspondant à la partie non planaire, consiste en les termes de la forme $L_f R_h e^{-t\Delta}$.

La contribution planaire à (la partie divergente de) l'action effective à une boucle est alors donnée par

$$\begin{aligned}\Gamma^\varepsilon_{1l,P}[\varphi] := \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty dt\, e^{-tm^2}\Big\{&\frac{\lambda}{3!}\,\mathrm{Tr}\left(\left(L_{\varphi\star\Theta\varphi}+R_{\varphi\star\Theta\varphi}\right)e^{-t\Delta}\right)\\ &-\frac{t}{2}\frac{\lambda^2}{(3!)^2}\,\mathrm{Tr}\left(\left(L_{\varphi^\star\Theta^4}+R_{\varphi^\star\Theta^4}\right)e^{-t\Delta}\right)\Big\}+O(\varepsilon^0).\end{aligned}$$

Pour calculer ces traces, montrons que la trace est un déquantificateur pour le produit déformé :

$$\mathrm{Tr}\left(L_f\, e^{-t\Delta}\right) = \mathrm{Tr}\left(R_f\, e^{-t\Delta}\right) = \mathrm{Tr}\left(M_f\, e^{-t\Delta}\right). \tag{4.1.10}$$

Nous répétons les arguments pour l'obtention de l'équation (4.1.10), dans le cas de $L_f e^{-t\Delta}$. Pour $R_f e^{-t\Delta}$ les arguments sont similaires. A partir de l'expression du noyau distributionnel de l'opérateur $L_f\, e^{-t\Delta}$

$$K_{L_f\, e^{-t\Delta}}(p,p') = (2\pi)^{-l}\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, f(-\tfrac{1}{2}\Theta y.p)\, K_t(z.p,p'),$$

on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(L_f\, e^{-t\Delta}\right) &= \int_M \mu_g(p)\, K_{L_f\, e^{-t\Delta}}(p,p)\\ &= (2\pi)^{-l}\int_M \mu_g(p)\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, f(-\tfrac{1}{2}\Theta y.p)\, K_t(z.p,p).\end{aligned}$$

En utilisant l'invariance de la forme volume sous l'isométrie $p\to\frac{1}{2}\Theta y.p$ ainsi que $[e^{-t\Delta},V_z]=0$, traduit en terme de l'invariance de son noyau

$$K_t(z.p,z.p') = K_t(p,p'), \tag{4.1.11}$$

on obtient

$$\mathrm{Tr}\left(L_f\, e^{-t\Delta}\right) = \int_M \mu_g(p)\, f(p)\, K_t(p,p) = \mathrm{Tr}\left(M_f\, e^{-t\Delta}\right).$$

La partie planaire de l'action effective à une boucle est alors

$$\Gamma^{\varepsilon}_{1l,P}[\varphi] = \int_{\varepsilon}^{\infty} dt\, e^{-tm^2} \Big\{ \frac{\lambda}{3!} \operatorname{Tr}\Big(M_{\varphi\star_\Theta\varphi} e^{-t\Delta} \Big) - \frac{t}{2} \frac{\lambda^2}{(3!)^2} \operatorname{Tr}\Big(M_{\varphi^{\star_\Theta 4}} e^{-t\Delta} \Big) \Big\} + O(\varepsilon^0). \quad (4.1.12)$$

D'après la relation

$$K_{M_f e^{-t\Delta}}(x,x) = f(x) K_t(x,x),$$

et le développement du noyau de la chaleur sur sa diagonale à l'ordre un

$$K_t(x,x) = (4\pi t)^{-2}\big(1 - \frac{t}{6} R(x)\big) + O(t^0),$$

on obtient modulo des termes d'ordre $O(\varepsilon^0)$:

$$\Gamma^{\varepsilon}_{1l,P}[\varphi] = \int_{\varepsilon}^{\infty} dt\, \frac{e^{-tm^2}}{(4\pi t)^2} \int_M \mu_g \Big(\frac{\lambda}{3!} \varphi\star_\Theta\varphi - t\Big(\frac{1}{6}\frac{\lambda}{3!}(\varphi\star_\Theta\varphi) R + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{(3!)^2} \varphi^{\star_\Theta 4} \Big)\Big) + O(\varepsilon^0). \quad (4.1.13)$$

La partie planaire reproduit alors les divergences ordinaires en $\frac{1}{\varepsilon}$ et $|\ln\varepsilon|$ correspondant, dans le langage des diagrammes de Feynman, aux fonctions à deux et quatre points.

La contribution non planaire est quant à elle

$$\begin{aligned}\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP}[\varphi] :=& \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} dt\, e^{-tm^2} \Big\{ \frac{\lambda}{3!} \operatorname{Tr}\Big(R_\varphi L_\varphi\, e^{-t\Delta} \Big) \\ &- \frac{t}{2} \frac{\lambda^2}{(3!)^2} \operatorname{Tr}\Big(\big(3 R_{\varphi\star_\Theta\varphi} L_{\varphi\star_\Theta\varphi} + 2 R_\varphi L_{\varphi^{\star_\Theta 3}} + 2 R_{\varphi^{\star_\Theta 3}} L_\varphi \big) e^{-t\Delta} \Big) \Big\} + O(\varepsilon^0). \quad (4.1.14)\end{aligned}$$

En utilisant l'expression des noyaux des opérateurs L_f et R_f

$$K_{L_f}(p,p') = (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} f(-\tfrac{1}{2}\Theta y.p)\, \delta^g_{z.p}(p'),$$

$$K_{R_f}(p,p') = (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} f(z.p)\, \delta^g_{-\frac{1}{2}\Theta y.p}(p').$$

on obtient le noyau de $L_f R_h e^{-t\Delta}$ en terme de celui du semi-groupe de la chaleur K_t :

$$K_{L_f R_h e^{-t\Delta}}(p,p') = (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, f((-\tfrac{1}{2}\Theta y - z).p)\, h(z.p)\, K_t(-\tfrac{1}{2}\Theta y.p, p').$$

Après quelques changements de variables, la trace de $L_f R_h e^{-t\Delta}$ devient

$$\operatorname{Tr}\big(L_f R_h e^{-t\Delta} \big) = (2\pi)^{-l} \int_M \mu_g(p) \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, f(p)\, h(z.p)\, K_t(-\Theta y.p, p). \quad (4.1.15)$$

Puisque K_t est symétrique et invariant sous α, l'isométrie $p \mapsto -z.p$ entraîne

$$\operatorname{Tr}\big(L_f R_h e^{-t\Delta} \big) = \operatorname{Tr}\big(R_f L_h e^{-t\Delta} \big). \quad (4.1.16)$$

En utilisant cette dernière relation, on obtient finalement pour $\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP}[\varphi]$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP}[\varphi] =& \frac{1}{2(2\pi)^l} \int_{\varepsilon}^{\infty} dt\, e^{-tm^2} \int_M \mu_g(p) \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>} \Big\{ \frac{\lambda}{3!} \varphi(p)\varphi(z.p) \\ &- \frac{t}{2} \frac{\lambda^2}{(3!)^2} \Big(3\varphi\star_\Theta\varphi(p)\varphi\star_\Theta\varphi(z.p) + 4\varphi(p)\varphi^{\star_\Theta 3}(z.p) \Big) \Big\} K_t(-\Theta y.p, p) + O(\varepsilon^0). \quad (4.1.17)\end{aligned}$$

Nous verrons que le meilleur comportement du secteur non planaire ainsi que le mélange UV/IR viennent de la présence du noyau de la chaleur hors diagonale dans l'expression précédente.

4.2 Déformations non périodiques

4.2.1 NCQFT sur plan de Moyal dans l'espace de configuration

4.2.1.1 Cas non dégénéré

Lorsque $M = \mathbb{R}^4$ avec la métrique plate, $l = 4$ et lorsque $\mathbb{R}^4$ agit sur lui-même par translation, la déformation isospectrale correspondante coïncide avec le plan de Moyal quadri-dimensionnel non dégénéré $\mathbb{R}^4_\Theta$. Dans ce cas, le noyau de la chaleur est exactement donné par

$$K_t(x,y) = (4\pi t)^{-2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

$\Gamma^\varepsilon_{1l,P}(\varphi)$ et $\Gamma^\varepsilon_{1l,NP}(\varphi)$ sont alors calculables explicitement.
Pour la partie planaire, nous obtenons à partir de (4.1.13)

$$\Gamma^\varepsilon_{1l,P}[\varphi] = \int_\varepsilon^\infty dt \frac{e^{-tm^2}}{(4\pi t)^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left(\frac{\lambda}{3!}\varphi^2(x) - \frac{t}{2}\frac{\lambda^2}{(3!)^2}(\varphi\star_\Theta\varphi)^2(x)\right) + O(\varepsilon^0),$$

qui donne des divergences ordinaires en ε^{-1} et $|\ln\varepsilon|$ pour, respectivement, les fonctions à deux et quatre points.

La partie non-planaire est alors donnée par

$$\begin{aligned}\Gamma^\varepsilon_{1l,NP}[\varphi] = (2\pi)^{-4} \int_\varepsilon^\infty dt\, \frac{e^{-tm^2}}{(4\pi t)^2} \int_{\mathbb{R}^{12}} d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{-i<y,z>}\, e^{-\frac{|\Theta y|^2}{4t}} \Big(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{3!}\varphi(x)\varphi(x+z) \\ - \frac{\lambda^2}{(3!)^2}\frac{t}{4}\big(3\varphi\star_\Theta\varphi(x)\varphi\star_\Theta\varphi(x+z) + 4\varphi(x)\varphi^{\star\Theta 3}(x+z)\big)\Big) + O(\varepsilon^0).\end{aligned}$$

L'intégration Gaussienne sur y peut être effectuée

$$\begin{aligned}\Gamma^\varepsilon_{1l,NP}[\varphi] = (2\pi\theta)^{-4} \int_\varepsilon^\infty dt\, e^{-tm^2} \int_{\mathbb{R}^8} d^4x\, d^4z\, e^{-t|\Theta^{-1}(z-x)|^2} \\ \times \Big(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{3!}\varphi(x)\varphi(z) - \frac{\lambda^2}{(3!)^2}\frac{t}{4}\big(3\varphi\star_\Theta\varphi(x)\varphi\star_\Theta\varphi(z) + 4\varphi(x)\varphi^{\star\Theta 3}(z)\big)\Big) + O(\varepsilon^0),\end{aligned}$$

où $\theta := (\det\Theta)^{1/4}$. Finalement, l'intégration sur t aboutit à

$$\begin{aligned}\Gamma^\varepsilon_{1l,NP}[\varphi] = (2\pi\theta)^{-4} \int_{\mathbb{R}^8} d^4x\, d^4z\, \frac{e^{-\varepsilon(m^2+|\Theta^{-1}(z-x)|^2)}}{m^2+|\Theta^{-1}(z-x)|^2} \\ \times \Big(\frac{\lambda}{2.3!}\varphi(x)\varphi(z) - \frac{\lambda^2}{(3!)^2}\frac{3\varphi\star_\Theta\varphi(x)\varphi\star_\Theta\varphi(z) + 4\varphi(x)\varphi^{\star\Theta 3}(z)}{4(m^2+|\Theta^{-1}(z-x)|^2)}\Big) + O(\varepsilon^0).\end{aligned}$$

Cette expression est régulière lorsque ε tend vers zéro. Nous verrons que malgré ce qui est communément admis, ce n'est pas le cas lorsque $l = 2$.

Rappelons que l'action effective 1PI (une particule irréductible) est reliée aux fonctions de Green 1PI par

$$\Gamma^\varepsilon_{1l}[\varphi] = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle G^\varepsilon_n; \varphi, \cdots, \varphi\rangle,$$

où le couplage multilinéaire est donné par

$$\langle G_n^\varepsilon; \varphi_1, \cdots, \varphi_n \rangle := \int_{M\times\cdots\times M} \mu_g(p_1)\cdots\mu_g(p_n)\, G_n^\varepsilon(p_1,\cdots,p_n)\,\varphi_1(p_1)\cdots\varphi_n(p_n).$$

On peut alors extraire des formules précédentes, par dérivation fonctionnelle, les fonctions de Green non planaires à deux et quatre points dans l'espace de configuration dans la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
G^2_{1l,NP}(x,y) &= (\pi\theta)^{-4}\frac{\lambda}{96}\frac{1}{m^2+|\Theta^{-1}(x-y)|^2},\\
G^4_{1l,NP}(x,y,z,u) &= -(\pi\theta)^{-8}\frac{\lambda^2}{24}\Big(\frac{3}{2}\delta(x-y+z-u)\int d^4v\,\frac{e^{2i<v,\Theta^{-1}(u-z)>}}{(m^2+|\Theta^{-1}(z-v-x)|^2)^2}\\
&\qquad\qquad + \frac{e^{2i<x-y,\Theta^{-1}(z-y)>}}{(m^2+|\Theta^{-1}(x-y+z-u)|^2)^2}\Big).
\end{aligned}$$

Le phénomène de mélange UV/IR dans l'espace de positions se manifeste dans le comportement à l'infini des fonctions de corrélations :
Par transformée de Fourier, on observe que la lente décroissance à l'infini de ces fonctions équivaut à une singularité infrarouge

$$\widehat{G^2}_{1l,NP}(\xi,\eta) \propto \frac{m}{|\Theta\xi|}K_1(m|\Theta\xi|)\delta(\xi+\eta),$$

où $K_n(z)$ désigne la n-ième fonction de Bessel modifiée. On retrouve le mélange UV/IR dans sa forme habituelle (voir par exemple [94]) car

$$\frac{m}{|\Theta\xi|}K_1(m|\Theta\xi|) \sim (|\Theta\xi|)^{-2},\ |\xi| \to 0.$$

Ce dernier résultat coïncide avec celui usuellement obtenu par calcul de diagrammes de Feynman dans l'espace des moments.
Pour la fonction à quatre points, les deux approches ne coïncident pas tout à fait : le développement que nous avons utilisé ici n'est qu'équivalent au développement en diagrammes de Feynman, dans le sens où ils diffèrent d'une quantité finie. On a cependant coïncidence pour la fonction à deux points.

Les comportements des amplitudes en position et en impulsion pour $\theta \downarrow 0$ présentent aussi d'intéressantes différences. Supposons pour simplifier que Θ ait la forme canonique :

$$\Theta = \theta\, S,$$

où la matrice S a été définie dans l'équation (2.2.3). En développant la fonction à deux points en puissance de θ, on trouve

$$\frac{1}{\theta^4 m^2 + \theta^2|x|^2} = \frac{1}{\theta^2|x|^2}\Big(1 - \frac{\theta^2 m^2}{|x|^2} + \frac{\theta^4 m^4}{|x|^4} - \cdots\Big).$$

On remarque que la dépendance logarithmique en θ du mélange UV/IR dans l'espace des moments (en addition à celle quadratique), trouvée dans [94], est apparemment absente dans l'espace de configuration. Aussi, à la seule exception du premier terme, la série précédente est

composée de fonctions qui ne sont pas des distributions tempérées ; elles n'ont alors pas de transformées de Fourier. En d'autres termes, *la 'limite commutative' ne commute pas avec la transformée de Fourier.*

Le problème est en fait plus subtil. On peut se demander à quel type de divergences le développement précédent est associé. La réponse est que le premier terme diverge dans l'infrarouge (en position), le deuxième dans l'infrarouge et l'ultraviolet et tous les autres dans l'ultraviolet. Il est peut être surprenant que l'on puisse retrouver le résultat exact à partir de cette série mal définie, en invoquant précisément une correction aux divergences UV indiquées. On peut en effet "renormaliser" (dans le sens d'Epstein et Glaser) les fonctions $1/|x|^{2k+4}$, avec pour résultat des distributions tempérées $[1/|x|^{2k+4}]_R$, qui dépendent d'une échelle de masse μ. Leurs transformées de Fourier, $[\widehat{1/|x|^{2k+4}}]_R$, ont été calculées dans [52, 95] :

$$[\widehat{1/|x|^{2k+4}}]_R(\xi) = \frac{(-)^{k+1}|\xi|^{2k}}{4^{k+1}k!(k+1)!}\left[2\ln\frac{|\xi|}{2\mu} - \Psi(k+1) - \Psi(k+2)\right].$$

Le paramètre de masse naturel dans notre contexte étant $1/\theta m$, c'est en l'identifiant avec le paramètre libre μ, que l'on peut retrouver exactement le résultat en re-sommant la série des transformées de Fourier des distributions $[1/|x|^{2k+4}]_R$:

$$\frac{1}{\theta^2|\xi|^2} + \frac{m^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n}m^{2n}|\xi|^{2n}}{4^n\, n!(n+1)!}\left(\ln\frac{\theta m|\xi|}{2} - \Psi(n+1) - \Psi(n+2)\right) = \frac{m}{\theta|\xi|}K_1(\theta m|\xi|).$$

4.2.1.2 Cas dégénérés

L'effet du rang de la matrice de déformation sur la renormalisabilité de la théorie, devient lui aussi plus clair dans l'espace de configuration. Pour un plan de Moyal de dimension n avec une matrice de déformation de rang l et une théorie $\varphi^{\star\Theta 4}$ à une boucle, la fonction à deux points dans l'espace des moments se comporte comme $|\Theta\xi|^{-n+2}$, lorsque $\xi \to 0$. Cependant, étant donné que $\Theta\xi \in \mathrm{Im}(\Theta) = \mathbb{R}^l$, la singularité infrarouge n'est pas localement intégrable si $l \leq n-2$. Il s'ensuit que la fonction de Green à deux points ne définit pas une distribution tempérée et n'a pas de transformée de Fourier.
Pour le 'tadpole', en dimension quatre, la contribution non planaire en position reste alors divergente lorsque $l = 2$.
La situation est plus clémente pour la fonction à quatre points, car la singularité IR est intégrable dès que $l \neq 0$. Cet aspect du mélange va aussi se manifester dans le cas général des déformations isospectrales non périodiques où nous verrons que la partie non planaire de l'action effective reste divergente pour $l = 2$.

Nous allons terminer ce paragraphe consacré aux déformations isospectrales non périodiques plates, en illustrant cette discussion par le calcul de la fonction à deux points en régularisation ζ. Cela permettra de comparer nos résultat avec ceux présents dans la littérature. Pour le restant du paragraphe, nous allons considérer une matrice de déformation du type

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta S_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sera alors commode d'introduire la notation $\mathbb{R}^4 \ni x = (\tilde{x}, \bar{x})$, avec $\tilde{x} = (x^0, x^1)$ et $\bar{x} = (x^2, x^3)$. De même, on écrira $p = (\tilde{p}, \bar{p})$ dans l'espace des moments.

Considérons la régularisation ζ :

$$\Gamma^{\sigma}_{1l}[\varphi] = -\frac{\mu^{2\sigma}}{2}\int_0^\infty dt\, t^{\sigma-1}\ \mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-tH} - \mathrm{e}^{-tH_0}\right).$$

La fonction complexe ainsi définie possède un prolongement analytique en la variable σ sur $\mathbb{C}\setminus\{1,0,-1,-2,\cdots\}$.

En effectuant le même développement que précédemment, on obtient pour la contribution correspondant à la fonction à deux points

$$\begin{aligned}\Gamma^{\sigma}_{1l,2P}[\varphi] &= \frac{\lambda\,\mu^{2\sigma}}{12}\int_0^\infty dt\, t^{\sigma}\,\mathrm{e}^{-tm^2}\ \mathrm{Tr}\left[\left(L_{\varphi\star\varphi} + R_{\varphi\star\varphi} + L_\varphi\, R_\varphi\right)\mathrm{e}^{-t\Delta}\right]\\ &= \frac{\lambda m^2}{96\pi^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\sigma}\Gamma(\sigma-1)\int d^4x\,\varphi^2(x)\\ &\quad+\frac{\lambda}{192\pi^3\,\theta^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\sigma}\Gamma(\sigma)\int d^4x\int d^2\bar{u}\,\varphi(\tilde{x},\bar{x})\varphi(\tilde{x},\bar{x}+\bar{u})\left(1+\frac{\bar{u}^2}{m^2\theta^2}\right)^{-\sigma}.\end{aligned}$$

On peut alors extraire les fonctions de Green associées. On obtient pour la partie planaire,

$$\Gamma^{\sigma}_{1l,2P,P}(x_1-x_2) = \frac{\lambda m^2}{48\pi^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\sigma}\Gamma(\sigma-1)\ \delta^{(4)}(x_1-x_2)\,,$$

et pour celle non planaire

$$\Gamma^{\sigma}_{1l,2P,NP}(x_1-x_2) = \frac{\lambda}{96\pi^3\theta^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\sigma}\Gamma(\sigma)\ \delta^{(2)}(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)\left[1+\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{m^2\theta^2}\right]^{-\sigma}.$$

La contribution non planaire est alors ni finie ni locale lorsque σ tend vers 0. *Cette non-localité rend alors la théorie à une boucle non-renormalisable par adjonction de contre-termes locaux*, au sens où de tels termes ne sont pas présents dans l'action classique.

Pour comparer ce résultat avec ceux de la littérature, il est commode de calculer la transformée de Fourier de cette fonction de Green :

$$G^{\sigma}_{1l,2P,NP}(\tilde{p},\bar{p}) := \int d^4z\ \mathrm{e}^{-ipz}\,\Gamma^{\sigma}_{2P,NP}(z) = \frac{\lambda m^2}{24\pi^2}\left(\frac{\mu^2}{2m^2}\right)^{\sigma}\frac{K_{1-\sigma}(\theta m|\bar{p}|)}{(\theta m|\bar{p}|)^{1-\sigma}}\,.$$

Apparemment, la limite $\sigma\to 0$ de cette dernière expression existe et on est tenté d'écrire

$$\lim_{\sigma\to 0} G^{\sigma}_{1l,2P,NP}(\tilde{p},\bar{p}) = \frac{\lambda m^2}{24\pi^2}\,\frac{K_1(\theta m|\bar{p}|)}{\theta m|\bar{p}|}\ .$$

Bien que finie, cette limite n'existe pas au sens des distributions, car encore une fois la singularité infrarouge n'est pas intégrable.

4.2.2 Les divergences dans le cas général non périodique

Dans cette partie, nous supposerons que $\varphi\in C^\infty_c(M)$ et que l'une des hypothèses (I) ou (II) du paragraphe 2.3.1 soit satisfaite, de manière à ce que l'une des estimations (2.3.1) ou (2.3.2) sur le noyau de la chaleur soit valable.

Dans le cas général (périodique ou non), nous avons vu que $\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP}[\varphi]$ est donnée par

$$\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP}[\varphi] = \frac{1}{2(2\pi)^l}\int_{\varepsilon}^{\infty} dt\, e^{-tm^2}\int_M \mu_g(p)\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\, K_t(-\Theta y.p,p)$$
$$\times\Big\{\frac{\lambda}{3!}\varphi(p)\varphi(z.p) - \frac{t}{2}\frac{\lambda^2}{(3!)^2}\big(3\varphi\star_\Theta\varphi(p)\varphi\star_\Theta\varphi(z.p) + 4\varphi(p)\varphi^{\star_\Theta 3}(z.p)\big)\Big\} + O(\varepsilon^0).$$

Nous allons montrer que cette expression ne peut pas produire de divergences plus importantes que celles du secteur planaire. Encore une fois, la régularité de ces intégrales dépend uniquement des données géométriques, à savoir du rang l de la matrice de déformation (que l'on pourrait appeler la dimension non commutative effective) et de la métrique par l'intermédiaire de la distance Riemannienne.

Avant d'estimer la partie à deux points de $\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP}[\varphi]$, qui est le propos principal de ce paragraphe, il est intéressant de remarquer que la fonction de Green à deux points non planaire, a la forme suivante

$$G^{\varepsilon}_{1l,NP,2P}(p,p') = \frac{\lambda}{6(2\pi)^l}\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y\, d^l z\, e^{-i<y,z>}\int_{\varepsilon}^{\infty} dt\, e^{-tm^2}\, K_t(-\Theta y.p,p)\,\delta^g_{z.p}(p').$$

Dans cette expression distributionnelle, on peut alors lire qualitativement le phénomène de mélange : en utilisant les estimations du noyau de la chaleur hors diagonale [8, 27], valables lorsque la courbure de Ricci est bornée inférieurement et lorsque soit l'inverse du volume soit de la constante isopérimétrique d'une boule de rayon fixé est uniformément bornée :

$$(4\pi t)^{-2}e^{-d_g^2(p,p')/4t} \le K_t(p,p') \le C(4\pi t)^{-2}e^{-d_g^2(p,p')/4(1+c)t}. \tag{4.2.1}$$

On obtient alors l'inégalité

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} dt\, e^{-tm^2}\, K_t(\Theta y.p,p) &\le C\int_0^{\infty} dt\,\frac{e^{-tm^2}}{(4\pi t)^2}e^{-d_g^2(\Theta y.p,p)/4(1+c)t}\\ &= \frac{C}{16\pi^2}\,\frac{4m\sqrt{1+c}}{d_g(\Theta y.p,p)}\,K_1\Big(\frac{m\, d_g(\Theta y.p,p)}{\sqrt{1+c}}\Big)\\ &\sim C'\, d_g^{-2}(\Theta y.p,p), \qquad y\to 0,\end{aligned}$$

ainsi que celle inverse :

$$\int_0^{\infty} dt\, e^{-tm^2}\, K_t(\Theta y.p,p) \ge C''\, d_g^{-2}(\Theta y.p,p).$$

Ces estimations mettent en lumière le mélange UV/IR, car $y\in\widehat{\mathbb{R}^l}$ doit être interprété comme un moment.

Pour la partie à deux points de $\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP}[\varphi]$, on a

$$\begin{aligned}\left|\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP,2P}[\varphi]\right| &\leq \frac{C\,\lambda}{12(2\pi)^l}\sup_{p\in M}\left\{\int_{\mathbb{R}^l} d^l z\,|\varphi(z.p)|\right\}\\ &\qquad\times\int_{\varepsilon}^{\infty} dt\,\frac{e^{-tm^2}}{(4\pi t)^2}\int_M \mu_g(p)\;|\varphi(p)|\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\,e^{-d_g^2(-\Theta y.p,p)/4(1+c)t}\\ &\leq \frac{C\,\lambda}{12(2\pi)^l}\sup_{p\in M}\left\{\int_{\mathbb{R}^l} d^l z\,|\varphi(z.p)|\right\}\|\varphi\|_1\\ &\qquad\times\sup_{p\in\mathrm{supp}(\varphi)}\left\{\int_{\varepsilon}^{\infty} dt\,\frac{e^{-tm^2}}{(4\pi t)^2}\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\,e^{-d_g^2(-\Theta y.p,p)/4(1+c)t}\right\}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.2.4, $\sup_{p\in M}\left\{\int_{\mathbb{R}^l} d^l z\,|\varphi(z.p)|\right\} < \infty$. De plus, α agissant isométriquement, la métrique induite sur les orbites est constante, orbites qui sont des sous-variétés fermées car l'action est propre [78]. Par conséquent,

$$d_g^2(y.p,p) = \sum_{i,j=1}^{l}\tilde{g}_{ij}(p)y^i y^j,$$

où les fonctions $\tilde{g}_{ij}(p)$ ne dépendent que de l'orbite du point p et sont strictement positives et continues ; dans le cas non périodique, l'action est libre et donc $\{(0,p)\in\mathbb{R}^l\times M\}$ est le seul ensemble pour lequel $F(y,p) := d_g(y.p,p)$ s'annule. Notons aussi que l'on peut trouver un système de coordonnées globales sur chaque orbite, en choisissant une base de $\mathbb{R}^l$ rendant la métrique induite $\tilde{g}_{ij}(p)$ diagonale. Ainsi, avec $\theta := (\det\Theta)^{1/l}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^l} d^l y\,e^{-d_g^2(-\Theta y.p,p)/4(1+c)t} = \left(\frac{4\pi(1+c)t}{\theta^2}\right)^{l/2}(\det\tilde{g}(p))^{-1/2}.$$

On obtient alors

$$\left|\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP,2P}[\varphi]\right| \leq \frac{\lambda}{6}C(l,\tilde{g},\varphi,\varphi)\,\theta^{-l}\int_{\varepsilon}^{\infty} dt\,t^{l/2-2}e^{-tm^2},$$

avec

$$\begin{aligned}C(l,\tilde{g},\varphi_1,\varphi_2)\;:=&\\ &\frac{C(4\pi)^{l/2-2}(1+c)^{l/2}}{2(2\pi)^l}\|\varphi_1\|_1\sup_{p\in M}\left\{\int_{\mathbb{R}^l} d^l z\,|\varphi_2(z.p)|\right\}\sup_{p\in\mathrm{supp}(\varphi_1)}\left\{(\det\tilde{g}(p))^{-1/2}\right\}.\end{aligned}$$

Des estimations similaires sont valables pour la fonction à quatre points :

$$\left|\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP,4P}[\varphi]\right| \leq \frac{\lambda^2}{72}\,\theta^{-l}\left(3C(l,\tilde{g},\varphi\star_\Theta\varphi,\varphi\star_\Theta\varphi)+4C(l,\tilde{g},\varphi,\varphi\star_\Theta\varphi\star_\Theta\varphi)\right)\int_{\varepsilon}^{\infty} dt\,t^{l/2-1}e^{-tm^2}.$$

Nous avons alors démontré le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. *Lorsque M est non compacte, satisfait à une des hypothèses (I) ou (II), et munie d'une action isométrique lisse et propre du groupe $\mathbb{R}^l$, alors pour tout $\varphi\in C_c^{\infty}(M)$ on a :*

i)

$$\left|\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP,2P}[\varphi]\right| \leq \begin{cases} C_1(\varphi,\Theta) & \textit{pour } l=4, \\ C_2(\varphi,\Theta)|\ln\varepsilon| & \textit{pour } l=2, \end{cases}$$

ii)

$$\left|\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP,4P}[\varphi]\right| \leq C_3(\varphi,\Theta) \quad \textit{pour } l=4 \textit{ ou } l=2.$$

Les possibles divergences restantes réfèrent au fait que la singularité IR peut ne pas être localement intégrable, comme illustré précédemment.

Corollaire 4.2.2. *Sous les hypothèses du théorème précédent, lorsque $l=2$, la théorie quantique à une boucle n'est pas renormalisable par adjonction de contre-termes 'locaux'.*

4.3 Déformations périodiques

Les théories quantiques des champs sur déformations périodiques se comportent différemment des non périodiques. La raison vient de la différence structurelle de l'espace des 'moments', défini via l'action α. En effet, le groupe dual du groupe agissant sur la variété étant discret pour les déformations périodiques (compactes ou non), les divergences dans l'infrarouge du secteur non planaire n'apparaissent que pour certaines valeurs discrètes des impulsions. Le phénomène du mélange UV/IR est alors bien moins problématique. Nous verrons, dans les cas favorables en utilisant la décomposition de Peter–Weyl du champ de 'background', que l'on peut extraire les modes divergents des fonctions de Green non planaires, pour les renormaliser ensemble avec le secteur planaire.

Bien que la décomposition en sous-espaces spectraux (par rapport à l'action de $\mathbb{T}^l$ sur l'espace de Hilbert) existe dans tous les cas périodiques, nous ne serons capable de décrire le comportement individuel des 'graphes de Feynman' (définis via cette décomposition) que dans le cas compact. Cette obstruction d'ordre technique provient du fait que le noyau de la chaleur ne peut s'écrire comme une somme discrète (d'éléments de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$) que lorsque la variété est compacte. Cependant, nous verrons que les aspects analytiques fins de la théorie sont justement liés aux propriétés collectives des graphes de Feynman. Les conséquences de cette obstruction sur notre analyse ne seront alors que minimes. Ainsi, nous verrons comment intervient la nature arithmétique des paramètres de déformation sur le comportement analytique de l'action effective.

Nous supposons dans ce paragraphe que le noyau de l'action α soit un réseau entier, $\ker\alpha = \beta\mathbb{Z}^l$ avec $\beta\in M_l(\mathbb{Z})$ et que son rang soit maximal (i.e. $\mathbb{R}^l/\beta\mathbb{Z}^l =: \mathbb{T}^l_\beta$ est compact). Pour simplifier les notations, nous supprimerons l'indice β.

4.3.1 Comportement individuel des graphes non planaires

Revisitons tout d'abord le cas du tore non commutatif. Soit $M=\mathbb{T}^4$ munie de la métrique plate, avec une action de $\mathbb{R}^4$ par rotation. En utilisant la base orthonormée $\left\{\frac{e^{i<k,x>}}{(2\pi)^2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^4}$ de $L^2(\mathbb{T}^4,d^4x)$, on peut écrire le noyau de la chaleur comme

$$K_t(x,y) = (2\pi)^{-4}\sum_{k\in\mathbb{Z}^4} e^{-t|k|^2}e^{i<k,x-y>}.$$

Rappelons aussi que le produit déformé devient sur les modes de Fourier

$$e^{i<k,x>} \star_\Theta e^{i<q,x>} = e^{-\frac{i}{2}\Theta(k,q)}\, e^{i<k+q,x>},$$

avec $\Theta(k,q) := \langle k, \Theta q\rangle$. En développant le champ de 'background' φ dans la base des modes de Fourier $\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^4} c_k\, e^{i<k,x>}$, avec $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^4} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^4)$ lorsque $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^4)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma^\varepsilon_{NP}[\varphi] = \frac{1}{2}\sum_k \frac{e^{-\varepsilon(m^2+|k|^2)}}{m^2+|k|^2}\Big\{\frac{\lambda}{3!}\sum_r c_r\, c_{-r}\, e^{i\Theta(k,r)} - \frac{\lambda^2}{2(3!)^2}\frac{1}{m^2+|k|^2} \\ \times \sum_{r,s,u} c_r\, c_s\, c_{u-s}\, c_{-r-u} e^{-\frac{i}{2}\Theta(r+s,u)}\Big(3\, e^{i\Theta(k,r+s)} + 4\, e^{i\Theta(k,r+u)}\Big)\Big\} + O(\varepsilon^0).\end{aligned}$$

On peut alors analyser le comportement individuel des diagrammes de Feynman non planaires. La présence des phases dans l'expression précédente rend finie la somme sur les impulsions, lorsque les entrées de $(2\pi)^{-1}\Theta$ sont irrationnelles et lorsque $r \neq 0$ pour la fonction à deux points, $r+s \neq 0$ et $r+u \neq 0$ pour celle à quatre points. En effet, en retournant à la paramétrisation de Schwinger, qui échange les divergences aux grands moments k contre des divergences aux petits temps t, on obtient en appliquant la formule de sommation de Poisson par rapport à la somme sur k :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^4} \frac{e^{i\Theta(k,r)}}{m^2+|k|^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^4}\int_0^\infty dt\, \frac{e^{-tm^2}}{(4\pi t)^2}\, e^{-|2\pi k-\Theta r|^2/4t}.$$

L'intégrale sur t est alors finie lorsque $r \neq 0$ et $\frac{\Theta r}{2\pi} \notin \mathbb{Q}^l$. A partir de considérations similaires, on obtient de semblables conclusions pour la fonction à quatre points.

Dans le cas générique périodique et compact, pour pouvoir faire des calculs quasiment aussi explicites que dans le cas plat, nous allons tirer profit de l'invariance du noyau de la chaleur sous α. Décomposons $\mathcal{H} = L^2(M,\mu_g)$ en sous-espaces spectraux par rapport à l'action induite de $\mathbb{T}^l$ par les opérateurs unitaires V_z :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}^l} \mathcal{H}_k.$$

Chaque $\mathcal{H}_k$ est stable sous V_z pour tout $z \in \mathbb{R}^l$ et tout $\psi \in \mathcal{H}_k$ satisfait à $V_z\psi = e^{-i<z,k>}\psi$. Notons aussi que si $\psi \in \mathcal{H}_k$ alors $|\psi| \in \mathcal{H}_0$. Soit P_k le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}_k$. Le Laplacien commutant avec V_z, le semi-groupe de la chaleur commute avec P_k ; il est alors diagonalisable en bloc par rapport à la décomposition $\mathcal{H} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}^l}\mathcal{H}_k$:

$$e^{-t\Delta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^l} P_k\, e^{-t\Delta}\, P_k.$$

L'opérateur $0 \leq P_k\, e^{-t\Delta}\, P_k$ étant à trace, il peut être décomposé dans chaque $\mathcal{H}_k$ comme

$$P_k\, e^{-t\Delta}\, P_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-t\lambda_{k,n}} |\psi_{k,n}\rangle\langle\psi_{k,n}|,$$

où $\{\psi_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_k$ consistant de vecteurs propres de $P_k\Delta P_k$ avec valeurs propres $\lambda_{k,n}$. Le semi-groupe de la chaleur étant aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt,

son noyau peut s'écrire comme la série (convergente pour la topologie normique de l'espace de Hilbert $L^2(M \times M, \mu_g \times \mu_g)$) :

$$K_t(p,p') = \sum_{k\in\mathbb{Z}^l} \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-t\lambda_{k,n}} \psi_{k,n}(p)\overline{\psi_{k,n}}(p'). \tag{4.3.1}$$

Puisque chaque $\psi_{k,n}(p)$ appartient à $\mathcal{H}_k$, la propriété d'invariance du noyau de la chaleur $K_t(z.p, z.p') = K_t(p,p')$ est explicite.

Tout $\varphi \in C^\infty(M)$ possède une unique décomposition en 'mode de Fourier' $\varphi = \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} \varphi_r$, telle que $\{\|\varphi_r\|_\infty\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^l)$ et $\alpha_z(\varphi_r) = e^{-i<z,r>}\varphi_r$. Cette décomposition définit aussi une notion de diagrammes de Feynman, c'est-à-dire l'amplitude associée à une configuration de champ fixée. On obtient alors pour l'action effective (non planaire, régularisée et à une boucle) :

$$\begin{aligned}\Gamma^\varepsilon_{1l,NP}[\varphi] = \frac{1}{2}\int_M \mu_g(p) \sum_{k\in\mathbb{Z}^l}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\varepsilon(m^2+\lambda_{k,n})}}{m^2+\lambda_{k,n}} |\psi_{k,n}|^2(p)\Big\{\frac{\lambda}{3!}\sum_{r,s\in\mathbb{Z}^l} \varphi_r(p)\,\varphi_s(p)\,e^{-i\Theta(k,s)} \\ - \frac{\lambda^2}{2(3!)^2}\frac{1}{m^2+\lambda_{k,n}} \sum_{r,s,u,v\in\mathbb{Z}^l} \varphi_r(p)\,\varphi_s(p)\,\varphi_u(p)\,\varphi_v(p) \\ \times \Big(3\,e^{-\frac{i}{2}(\Theta(r,s)+\Theta(u,v))}e^{-i\Theta(k,u+v)} + 4\,e^{-\frac{i}{2}\Theta(r+s,u+s)}e^{-i\Theta(k,v)}\Big)\Big\} + O(\varepsilon^0).\end{aligned}$$

Bien que ne connaissant pas l'expression explicite des vecteurs propres $\psi_{k,n}$, les sommes précédentes se réduisent par conservation des moments, comme pour le tore non commutatif.

Lemme 4.3.1 (Conservation des moments). *Soient $\psi_i \in \mathcal{H}_{k_i} \cap L^q(M,\mu_g)$ pour $i = 1,\dots,q$. Alors*

$$\int_M \mu_g\,\psi_1\cdots\psi_q = C(\psi_1,\cdots,\psi_q)\,\delta_{k_1+\cdots+k_q,0}.$$

Preuve. En utilisant l'invariance de la forme volume sous α et la relation $\alpha_z(\psi_i) = e^{-i<z,k_i>}\psi_i$, on obtient

$$\int_M \mu_g\,\psi_1\cdots\psi_q = e^{i<z,k_1+\cdots+k_q>}\int_M \mu_g\,\psi_1\cdots\psi_q,$$

pour tout $z \in \mathbb{T}^l$ et le résultat s'ensuit. □

Vu que $|\psi_{k,n}|^2(p)$ est constant sur les orbites de l'action et que $\varphi_r \in C^\infty(M) \subset L^q(M,\mu_g)$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, le lemme 4.3.1 donne

$$\begin{aligned}\Gamma^\varepsilon_{1l,NP}[\varphi] = \frac{1}{2}\int_M \mu_g(p) \sum_{k\in\mathbb{Z}^l}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\varepsilon(m^2+\lambda_{k,n})}}{m^2+\lambda_{k,n}} |\psi_{k,n}|^2(p)\Big\{\frac{\lambda}{3!}\sum_{r\in\mathbb{Z}^l} \varphi_r(p)\,\varphi_{-r}(p)\,e^{i<k,\Theta r>} \\ - \frac{\lambda^2}{2(3!)^2}\frac{1}{m^2+\lambda_{k,n}} \sum_{r,s,u\in\mathbb{Z}^l} \varphi_r(p)\,\varphi_s(p)\,\varphi_{u-s}(p)\,\varphi_{-r-u}(p) \\ \times e^{-\frac{i}{2}\Theta(r+s,u)}\Big(3\,e^{i\Theta(k,r+s)} + 4\,e^{i\Theta(k,r+u)}\Big)\Big\} + O(\varepsilon^0).\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Pour analyser les divergences d'une configuration de champ fixée lorsque $\varepsilon \to 0$, il suffit de remarquer en renumérotant de manière usuelle (par ordre croissant en en comptant les multiplicités) les valeurs propres du Laplacien $\lambda_{k,n}$ que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^l}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\psi_{k,n}|^2(p)}{(m^2+\lambda_{k,n})^N} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\psi_n(p)|^2}{(m^2+\lambda_n)^N} = K_{(m^2+\Delta)^{-N}}(p,p)$$

qui est fini si $N > 2$ car le Théorème de Weyl affirme que $\lambda_n \sim n^{1/2}$. Ainsi, les sommes sur n et sur k dans (4.3.2) divergent dans la limite $\varepsilon \to 0$ pour certaines valeurs des moments ($r = 0$ pour la fonction à deux points, $r + s = 0$ et $r + u = 0$ pour celle à quatre points) si les entrées de $(2\pi)^{-1}\Theta$ sont irrationnelles. Lorsqu'elles sont rationnelles, il y a un nombre infini de configurations divergentes, car $e^{-i<k,\Theta r>} = 1$ pour une infinité de k lorsque $\frac{\Theta r}{2\pi} \in \mathbb{Q}^l$. Nous verrons dans le paragraphe suivant que la convergence est garantie pour les autres configurations par les estimations (2.3.1), (2.3.2).

En résumé, nous avons montré que pour toutes les déformations isospectrales périodiques compactes, les configurations individuelles du secteur non planaire reproduisent les principales particularités du tore non commutatif.

Dans le paragraphe suivant, nous verrons l'importance de la nature arithmétique des entrées de la matrice de déformation ainsi que de la structure des points fixes pour l'action.

4.3.2 Condition Diophantienne et points fixes

Nous supposons toujours l'action périodique, mais maintenant M peut être compact ou non. Lorsque que M ne l'est pas, nous supposerons aussi qu'une des hypothèses (I) ou (II) sur le comportement de la géométrie à l'infini (voir paragraphe 2.3.1) soit satisfaite. Sous ces hypothèses, la décomposition de Peter-Weyl existe toujours, mais le semi-groupe de la chaleur n'est plus a priori un opérateur compact ; l'écriture (4.3.1) n'est alors plus valable. Nous retournons donc aux estimations du noyau de la chaleur hors diagonale. En utilisant la conservation des moments (lemme 4.3.1) ainsi que l'invariance de K_t sous α, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma^{\varepsilon}_{1l,NP}[\varphi] = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty} dt\, e^{-tm^2} \int_M \mu_g(p)\Big\{ \frac{\lambda}{3!} \sum_{r\in\mathbb{Z}^l} K_t(\Theta r.p,p)\varphi_r(p)\,\varphi_{-r}(p) \\ - \frac{t\,\lambda^2}{2(3!)^2} \sum_{r,s,u\in\mathbb{Z}^l} \varphi_r(p)\,\varphi_s(p)\,\varphi_{u-s}(p)\,\varphi_{-r-u}(p)\; e^{-\frac{i}{2}\Theta(r+s,u)} \\ \times \Big(3\,K_t(\Theta(r+s).p,p) + 4\,K_t(\Theta(r+u).p,p)\Big)\Big\} + O(\varepsilon^0).\end{aligned}$$

Le cas rationnel ayant déjà été discuté au paragraphe précédent, nous nous restreindrons ici au cas irrationnel. Le mélange UV/IR n'apparaissant que lorsque $r = 0$ pour la fonction à deux points et lorsque $r + s = 0$, $r + u = 0$ pour celle à quatre points, il est naturel de définir *l'action effective non-planaire réduite* $\Gamma^{\varepsilon,red}_{1l,NP}[\varphi]$, en soustrayant les configurations divergentes. Ces dernières doivent être traitées pour la renormalisation avec le secteur planaire.

$$\begin{aligned}\Gamma^{\varepsilon,red}_{1l,NP}[\varphi] \;:= \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty} dt\, e^{-tm^2} \int_M \mu_g(p)\Big\{ \frac{\lambda}{3!} \sum{}' K_t(\Theta r.p,p)\varphi_r(p)\,\varphi_{-r}(p) \\ - \frac{t\,\lambda^2}{2(3!)^2} \sum{}' \varphi_r(p)\,\varphi_s(p)\,\varphi_{u-s}(p)\,\varphi_{-r-u}(p) e^{-\frac{i}{2}\Theta(r+s,u)} \\ \times \Big(3\,K_t(\Theta(r+s).p,p) + 4\,K_t(\Theta(r+u).p,p)\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Ici $\sum'$ est une notation qui signifie $\sum_{r\in\mathbb{Z}^l,\, r\neq 0}$ dans la partie à deux points, $\sum_{r,s,u\in\mathbb{Z}^l,\, r+s\neq 0}$ et $\sum_{r,s,u\in\mathbb{Z}^l,\, r+u\neq 0}$ dans respectivement le premier et le second terme de la partie à quatre points.

En utilisant les estimations du noyau de la chaleur et en effectuant l'intégrale sur t, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big|\Gamma^{\varepsilon,red}_{1l,NP}[\varphi]\Big| \leq \frac{C}{32\pi^2}\int_M \mu_g(p)\Big\{\frac{\lambda}{3!}\sum{}' |\varphi_r(p)|\,|\varphi_{-r}(p)|\frac{4m\sqrt{1+c}}{d_g(\Theta r.p,p)}K_1\big(\frac{m\,d_g(\Theta r.p,p)}{\sqrt{1+c}}\big)\\ + \frac{\lambda^2}{2(3!)^2}\sum{}' |\varphi_r(p)|\,|\varphi_s(p)|\,|\varphi_{u-s}(p)|\,|\varphi_{-r-u}(p)|\\ \times\Big(3K_0\big(\frac{m\,d_g(\Theta(r+s).p,p)}{\sqrt{1+c}}\big)+4K_0\big(\frac{m\,d_g(\Theta(r+u).p,p)}{\sqrt{1+c}}\big)\Big)\Big\}. \qquad (4.3.3)\end{aligned}$$

Définition 4.3.2. *$\theta\in\mathbb{R}^l\setminus\mathbb{Q}^l$ satisfait à une condition Diophantienne s'il existe deux constantes $C>0$, $\beta\geq 0$ qui soient telles que pour tout $n\in\mathbb{Z}^l\setminus\{0\}$, on ait :*

$$\|\theta n\|_{\mathbb{T}^l} := \inf_{k\in\mathbb{Z}^l}|\theta n+k| \geq C|n|^{-(l+\beta)}.$$

Cette condition caractérise les nombres irrationnels qui sont "loin des rationnels", car mal approximés par les rationnels. Notons que l'ensemble des nombres satisfaisant à une condition Diophantienne est de mesure de Lebesgue pleine [85].
Cette notion de condition Diophantienne s'étend naturellement aux matrices à coefficients irrationels.

Définition 4.3.3. *Une Matrice $\Theta\in M_l(\mathbb{R}^l\setminus\mathbb{Q}^l)$, de rang l, satisfait à une condition Diophantienne s'il existe deux constantes $C>0$, $\beta\geq 0$ qui soient telles que pour tout $n\in\mathbb{Z}^l\setminus\{0\}$, on ait :*

$$\|\Theta n\|_{\mathbb{T}^l} := \inf_{k\in\mathbb{Z}^l}|\Theta n+k| \geq C|n|^{-(l+\beta)}.$$

La métrique induite sur les orbites est constante comme dans le paragraphe 4.2.2, et la distance géodésique sur chaque orbite est par conséquent donnée par

$$d_g^2(y.p,p) = \inf_{k\in\mathbb{Z}^l}\left(\sum_{i,j=1}^{l}\tilde{g}_{ij}(p)(y^i+k^i)(y^j+k^j)\right).$$

Nous allons avoir besoin du comportement au voisinage de l'origine des fonctions de Bessel modifiées

$$K_1(x)=\frac{1}{x}+O(x^0), \qquad K_0(x)=-\gamma+\ln(2)-\ln(x)+O(x),$$

où γ est la constante d'Euler.
Utilisons le fait que $\{\|\varphi_r\|_\infty\}\in\mathcal{S}(\mathbb{Z}^l)$, avec $\varphi_r\in C_c^\infty(M)$ où $\mathrm{supp}(\varphi_r)\subset\mathrm{supp}(\varphi)$: si la fonction $d_g^{-2}(\alpha_y(.),.)$ est localement intégrable pour tout $0\neq y\in\mathbb{T}^l$, par rapport à la mesure donnée par la forme volume Riemannienne, *on a la convergence des sommes dans (4.3.3) si et seulement si $d_g^{-2}(\Theta r.p,p)\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^l)$, c'est-à-dire, si et seulement si la matrice Θ satisfait à une condition Diophantienne relativement à (2π).*
Ce résultat semble nouveau, bien que conjecturé par Connes dans le cas du tore non commutatif il y a quelques années. Cette condition joue aussi un rôle primordial dans le calcul de la cohomologie de Hochschild du tore non commutatif [13] et en théorie des champs conforme, dans les modèles de Melvin à paramètre de twist irrationnel [70].

Cependant, *l'intégrabilité locale de la fonction $d_g^{-2}(\alpha_y(.),.)$ pour un $y\in\mathbb{T}^l$ non nul n'est en aucun cas garantie.* Les problèmes sont à attendre dans un voisinage de l'ensemble des points

ayant un groupe d'isotropie non trivial, où $d_g^{-2}(\alpha_y(.),.)$ n'est pas bornée. En fait, par une simple analyse dimensionnelle, nous allons voir que des troubles sérieux devraient n'apparaître que lorsque les stabilisateurs sont uni-dimensionnels.
Soit H_p le groupe d'isotropie de $p \in M$ et soit $M_{sing} := \{p \in M : H_p \neq \{0\}\}$. Rappelons que M_{sing} est fermé (pour la topologie métrique) et est de mesure nulle dans M car l'action est propre (voir [78, théorème 6.15]). Notons aussi que pour $0 \neq y \in \mathbb{T}^l$, $d_g(y.p,p) = 0$ si et seulement si $p \in M_{sing}$ et $y \in H_p$. Sur $M_{reg} := M \setminus M_{sing}$ (l'ensemble des orbites de type principal), l'action étant libre, on peut définir des coordonnées normales dans un voisinage tubulaire d'une orbite $\mathbb{T}^l.p$ à un point $p \in M$. Soit $(\hat{x}^\mu, \tilde{x}^i)$, $\mu = 1, \cdots, n-l$, $i = 1, \cdots, l$ respectivement les coordonnées transverses et celles données par le groupe, d'un point $p \in M_{reg}$. L'action étant isométrique, la métrique s'écrit dans ce système de coordonnées

$$g(\hat{x}, \tilde{x}) = \begin{pmatrix} h(\hat{x}) & l(\hat{x}) \\ l(\hat{x}) & \tilde{g}(\hat{x}) \end{pmatrix},$$

où $\tilde{g}$ est la métrique (constante) induite sur les orbites. Un tel système de coordonnées est singulier, avec des singularités localisées en chaque point de M_{sing}. Lorsque $x \equiv (\hat{x}^\mu, \tilde{x}^i)$ approche un point p_0 de M_{sing}, $\tilde{g}(\hat{x})$ se réduit à une matrice de rang $l - dim(H_{p_0})$. Dans ce système de coordonnées $\mu_g(p)\, d_g^{-2}(y.p,p)$ s'écrit

$$\frac{\sqrt{\det g(\hat{x}, \tilde{x})}}{\sum_{i,j=1}^{l} \tilde{g}_{ij}(\hat{x}) y^i y^j} d^l\tilde{x}\, d^{n-l}\hat{x},$$

lorsque $dim(H_{p_0}) = 1$ la singularité de $d_g^{-2}(y.p,p)$ pour $p \to p_0$ ne peut être compensée par le facteur $\sqrt{\det g}$.
Nous venons de mettre en lumière un nouvel aspect du phénomène de mélange UV/IR pour les déformations isospectrales périodiques génériques, qui nécessite d'être analysé dans chaque modèle spécifique. Comme nous le verrons au paragraphe suivant, ces divergences apparaissent d'ores et déjà dans les sphères de Connes–Landi et leurs espaces ambiants, mais pas dans les tores non commutatifs pour lesquels l'action est libre.
Notons finalement que l'intégrabilité de l'application $p \to d_g^{-2}(y.p,p)$, pour tout $0 \neq y \in \mathbb{T}^l$, est une condition nécessaire pour que la fonction à deux points non planaire puisse définir une distribution et donc pour que la théorie soit renormalisable.

Théorème 4.3.4. *Pour M compacte ou non (avec les hypothèses du paragraphe 2.3.1 lorsque M n'est pas compacte), munie d'une action lisse et isométrique de $\mathbb{T}^l$, $l = 2$ ou $l = 4$ et avec une matrice de déformation satisfaisant à une condition Diophantienne (relativement à 2π), alors pour tout $\varphi \in C_c^\infty(M)$ s'annulant dans un voisinage de M_{sing}, l'action effective à une boucle non planaire réduite est finie.*

Corollaire 4.3.5. *Sous les hypothèses du théorème précédent, la théorie quantique à une boucle n'est pas renormalisable par adjonction de contre-termes locaux si la matrice $(2\pi)^{-1}\Theta$ ne satisfait pas à une condition Diophantienne, ou si la fonction $d_g^{-2}(\alpha_y(.),.)$, pour un $0 \neq y \in \mathbb{T}^l$, n'est pas localement intégrable par rapport à la mesure donnée par la forme volume Riemannienne.*

4.4 Points fixes et divergences : un exemple

Nous allons illustrer la discussion du paragraphe précédent sur les conséquences de la non intégrabilité de la fonction $p \mapsto d_g^{-2}(y.p,p)$, en regardant le cas de l'espace ambiant de la trois-

sphère de Connes–Landi $\mathbb{S}^3_\theta$.

En paramétrant $\mathbb{R}^4$ en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} x_1 &= R\,\cos\phi\,\cos\kappa \\ x_2 &= R\,\sin\phi\,\cos\rho \\ x_3 &= R\,\cos\phi\,\sin\kappa \\ x_4 &= R\,\sin\phi\,\sin\rho, \end{aligned}$$

avec $R \in [0,\infty[$, $\phi \in [o,\pi/2[$, $\kappa,\rho \in [0,2\pi[$, on obtient l'espace non commutatif ambiant des sphères de Connes–Landi cf. paragraphe 1.1.1 (pour lequel la condition d'homogénéité, $\sum_i x_i^2 = 1$ a été relaxée) en twistant le produit usuel par l'action de $\mathbb{T}^2$. Cette action est donnée dans ce système de coordonnées par

$$\mathbb{T}^2 \ni y : (R,\phi,\kappa,\rho) \mapsto y.(R,\phi,\kappa,\rho) := (R,\phi,\kappa + y_1 \bmod 2\pi, \rho + y_2 \bmod 2\pi).$$

Pour cette action, l'ensemble des points singuliers se décompose en :

$$\mathbb{R}^4_{sing} = \{(0,\phi,\kappa,\rho)\} \cup \{(R,0,\kappa,\rho)\} \cup \{(R,\pi/2,\kappa,\rho)\},$$

et correspond a l'union des plans $x_2 = x_4 = 0$ et $x_1 = x_3 = 0$. Le premier sous-ensemble consiste en un seul point : c'est le seul point fixe pour l'action proprement dit. Il ne posera aucun problème pour l'intégrabilité, car son groupe d'isotropie est bi-dimensionnel. Les stabilisateurs des points des deux derniers ensembles, qui sont des plans privés de l'origine, sont uni-dimensionnels et l'application $p \mapsto d_g^{-2}(y.p,p)$ n'est pas intégrable dans leur voisinage. En effet, dans ce système de coordonnées, la distance géodésique entre un point (R,ϕ,κ,ρ) et son translaté $y.(R,\phi,\kappa,\rho)$, s'écrit

$$d_g^2\big((R,\phi,\kappa,\rho); y.(R,\phi,\kappa,\rho)\big) = 2R^2(1-\cos^2\phi\,\cos y_1 - \sin^2\phi\,\cos y_2).$$

Pour $y_1 = 0$, $d_g^{-2}(p,y.p)$ devient alors

$$\frac{1}{2R^2\,\sin^2\phi(1-\cos y_2)},$$

qui n'est pas intégrable en $\phi = 0$ par rapport à la mesure donnée par $R^3 \sin\phi\,\cos\phi\,dR\,d\phi\,d\kappa\,d\rho$. Par contre, la singularité en $R = 0$ de l'application $p \mapsto d_g^{-2}(y.p,p)$ est intégrable.

En conclusion, la fonction de Green non planaire à deux points de ce modèle ne définit pas une distribution. La théorie à une boucle n'est alors pas renormalisable.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons commencé par étudier les plans de Moyal, les plus anciens espaces non commutatifs connus, dans le cadre axiomatique d'Alain Connes de la géométrie non commutative. Nous avons montré que l'on peut construire des triplets spectraux, objets centraux dans l'interface entre la GNC et la physique des interactions fondamentales, à partir d'algèbres construites avec le produit de Moyal. Le défi était important car ce type de déformations, d'espaces non commutatifs, a longtemps souffert de critiques, souvent heuristiques ou inexactes (par exemple la soi-disant trivialité de leurs dimensions spectrale et homologique), visant à les déconsidérer.

Pour ce faire, nous avons tout d'abord étendu la notion de triplet spectral aux d'algèbres sans unité, i.e. espaces Riemannien quantiques non compacts. Les premières pierres, les plus naturelles, avaient déjà été posées par Connes. Un grand nombre de détails techniques devaient cependant être ajustés. En particulier, il résulte que non pas une mais trois algèbres doivent être considérées. En effet, en plus d'une algèbre sans unité, codant la topologie d'un espace non commutatif non compact, il faut pour des raisons d'ordre aussi bien analytique qu'homologique, invoquer un plongement dans une algèbre unifère, i.e. une compactification de l'espace quantique. Les aspects analytiques, en particulier spectraux, étant plus subtiles dans le cas non compact, une troisième algèbre (dense dans la première) doit aussi être considérée pour formuler l'axiome de dimension spectrale.

Pour vérifier ces axiomes modifiés, de nombreux outils d'analyse fonctionnelle ont été développés. Ce fut principalement des extensions, dans le contexte du produit de Moyal, des outils de base de la théorie de la diffusion et de la théorie des semi-groupes. L'ensemble des outils mathématiques développés dans la première moitié du siècle dernier en connection avec la formulation de la mécanique quantique sur espace de phase, dont est originaire le produit de Moyal, a aussi été largement utilisé.

Dans une première partie qui concerne l'interface entre les aspects mathématiques de la GNC et ses applications en physique fondamentale, deux types de fonctionnelles d'action pour champs de jauge non commutatifs ont été calculés. Les résultats obtenus ne sont pas révolutionnaires ; ils reproduisent les actions usuellement prises comme point de départ dans les programmes d'étude des théories de jauge sur plans de Moyal. Cependant, ils démontrent la puissance et la robustesse des concepts de la GNC ainsi que la faisabilité de ces programmes dans des situations complètement non commutatives (par opposition aux situations presque commutatives).

L'action de Connes–Lott est une généralisation directe dans le langage de la GNC de celle de Yang–Mills, cette dernière donnant une interprétation géométrique du mécanisme de Higgs lorsque l'on considère le triplet spectral presque commutatif du modèle standard de la physique

des particules (MS). Pour les plans de Moyal symplectiques, i.e. avec des matrices de déformation inversible, cette action reproduit l'action de Yang–Mills pour laquelle le produit de Moyal remplace celui ordinaire. Les techniques que nous avons utilisées ne sont cependant pas directement applicable aux plans de Moyal génériques et/ou pour les déformations courbes.

Le principe d'action spectrale est un principe unificateur en GNC. En définissant une fonctionnelle d'action $\mathrm{Tr}\left(\chi(\not{D}^2/\Lambda^2)\right)$ à partir du spectre de l'opérateur de Dirac, on dispose directement d'une action invariante sous le groupe de jauge du triplet (le groupe des automorphismes de l'algèbre), qui génère par fluctuation de la métrique le Lagrangien du MS couplé avec la gravitation d'Einstein–Weyl (dans le cas du triplet presque commutatif du MS). Pour calculer cette action dans le cas des plans de Moyal génériques, il a fallut étendre sa définition aux triplets spectraux sans unité. Ce programme n'a été que partiellement réalisé, mais les techniques développées, modulo une complexité calculatoire grandissante, sont directement applicables aux déformations isospectrales courbes. L'obstruction à laquelle nous avons été confronté est due, d'une part à la régularisation supplémentaire invoquée, une forme de régularisation spatiale, mais surtout à la manifestation d'un phénomène caractéristique à ce type d'espaces quantiques : le mélange UV/IR. Ce point est intrigant car ce phénomène se manifeste habituellement au niveau quantique, or l'action spectrale est une action classique !

Dans la deuxième partie de ce travail de recherche, non pas celle de ce mémoire car la présentation ne suit pas l'ordre chronologique, nous avons étudié les aspects principaux pour la construction de triplets spectraux à partir des déformations isospectrales courbes non compactes. Ces variétés non commutatives, généralisant les plan de Moyal et les tores NC en espace courbe, s'inscrivent dans une théorie des déformations bien plus générale due à Rieffel : la déformation des algèbres de Fréchet munies d'une action (isométrique) de $\mathbb{R}^l$.

A partir de techniques d'analyse sur les variétés Riemannienne non compactes, principalement une estimation du noyau du semi-groupe de la chaleur, nous avons obtenu des résultats concernant l'appartenance aux classes de Schatten (ordinaires et faibles) pour les opérateurs du type $L_f^{\Theta}(1+\Delta)^{-k}$. Ces estimations ont permis de montrer que la dimension spectrale de ces déformations (périodiques ou non), est égale à la dimension classique, i.e. la dimension de la variété non déformée. C'est le point central dans la construction de triplets spectraux sans unité.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous nous sommes intéressé aux théories quantiques des champs sur les déformations isospectrales courbes. Au travers d'une théorie scalaire, nous avons démontré l'existence et le caractère intrinsèque du phénomène de mélange UV/IR.
Pour les déformations périodiques, le mélange ne concerne (au niveau de la fonction à deux points) que le mode zéro du champ, dans sa décomposition en sous-espaces spectraux. Dans ce cas, le mélange UV/IR n'est pas tellement problématique ; les modes affectés par le mélange UV/IR peuvent être traitées pour la renormalisation avec le secteur planaire.
Dans le cas non périodique, on obtient des fonctions de Green non planaires qui présentent le mélange sous une forme très proche de celle du paradigme qu'est le plan de Moyal.
De plus, notre approche donne une interprétation algébrique de la présence du secteur non planaire de ces théories : il vient des produits d'opérateurs de représentation régulière droite et gauche. Nous avons aussi obtenu que le meilleur comportement du secteur non planaire est une conséquence de la présence du noyau de la chaleur hors diagonale dans les intégrales de Feynman.

Cependant, son caractère régularisant dépend fortement des données géométriques. Pour les déformations non périodiques, la conclusion est que lorsque le rang de la matrice de déformation est égal à deux, la singularité infrarouge (du mélange UV/IR) n'est pas localement intégrable. Il s'ensuit que la fonction de Green 1PI non planaire à deux points ne définit pas une distribution ; la théorie n'est alors pas renormalisable. Seules les actions de groupe de rang quatre donnent lieu à un secteur non planaire sans divergence.
Lorsque l'action est périodique, nous avons montré qu'il est nécessaire que la matrice de déformation satisfasse à une condition Diophantienne (relativement à 2π) pour que les fonctions de Green non planaires définissent des distributions. Des divergences additionnelles peuvent exister à cause des possibles points fixes de l'action du groupe.

Plusieurs autres directions de recherches sont envisageables.

- *Construction de triplets spectraux pour les déformations isospectrales non compactes*
  A partir de nos résultats sur la Dixmier-traçabilité (et sur la valeur de leurs traces de Dixmier) des opérateurs $L^{\Theta}(f)(1+\not{D})^{-n/2}$ (corollaire 2.3.14, théorème 2.3.15) nous avons déjà une vérification de l'axiome de dimension. Pour terminer la construction, il reste à définir des 'algèbres lisses' (pré-C^*-algèbres) à partir du produit twisté. Le point de passage obligé est la construction de semi-normes, isométrique pour l'action du groupe. L'arsenal développé par Rieffel dans [92] pourra alors être pleinement employé.

- *Etude du mélange UV/IR pour les théories de jauge*
  Notre traitement du comportement générique du mélange UV/IR peut être généralisé pour les déformations de variétés de dimension supérieure et/ou pour les théories de jauge. Nous nous sommes restreint au cas quadri-dimensionnel par souci de simplicité et pour son intérêt physique. Il est cependant clair que les techniques du noyau de la chaleur s'appliquent aux théories scalaires de dimension supérieure.
  Pour les théories de jauges sur déformations isospectrales de dimensions quelconques, il existe un moyen intrinsèque, ne passant ni par la construction de Connes–Lott ni par celle de Chamseddine–Connes, de définir des fonctionnelles d'action de type Yang–Mills :
  Pour toutes formes différentielles $\omega \in \Omega^p(M)$, $\eta \in \Omega^q(M)$, à supports compacts, on peut définir un produit extérieur twisté par

$$\omega \wedge_\Theta \eta := (2\pi)^{-l} \int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l y \, d^l z \, e^{-i<y,z>} \, (\alpha^*_{-\frac{1}{2}\Theta y}\omega) \wedge (\alpha^*_z \eta),$$

  où α^*_z désigne dorénavant le pull-back de l'action. En se donnant ensuite un fibré vectoriel associé $\pi : E \to M$ de groupe de structure $G \subset U(N)$, ainsi qu'une forme de connection $A \in \Omega^1(M, \mathrm{Lie}(G))$, on peut définir l'analogue non commutatif de l'action de Yang–Mills

$$S_{YM}(A) := \int_M \mathrm{tr}(F_\Theta \wedge_\Theta *_H F_\Theta),$$

  où $F_\Theta := dA + A \wedge_\Theta A$ et $*_H$ est l'étoile de Hodge. Dans ce contexte, on peut aussi établir une identité de 'trace' :

$$\int_M \omega \wedge_\Theta *_H \eta = \int_M \omega \wedge *_H \eta, \qquad \forall \omega, \eta \in \Omega^p(M).$$

  Ainsi, $S_{YM}(A)$ est égale à $\int_M \mathrm{tr}(F_\Theta \wedge *_H F_\Theta)$. Pour entreprendre la quantification, on peut une fois encore utiliser la méthode du champ de 'background', dans la jauge de

'background'. Si on ignore l'ambiguïté de Gribov, l'action effective à une boucle se réduit au calcul de déterminants d'opérateurs (partie quadratique en A de $S_{YM}+S_{gf}$ et déterminant de Faddeev–Popov) qui peuvent être exprimés localement par

$$(\nabla_\mu + L_{A_\mu} - R_{A_\mu})(\nabla^\mu + L_{A^\mu} - R_{A^\mu}) + B,$$

où B est borné et contient des sommes et produits d'opérateurs de multiplication twistée à gauche et à droite. Il est alors clair que le phénomène de mélange UV/IR se manifestera identiquement aux situations plates (voir par exemple [69, 76, 79]) et que les phénomènes liés au propriétés arithmétiques, au rang de la matrice de déformation ainsi qu'aux points fixes de l'action seront eux aussi présents.

- *Calcul de l'action spectrale pour les déformations isospectrales périodiques compactes*
  Pour les déformations isospectrales périodiques compactes, les obstructions auquelles nous nous sommes heurtés lors du calcul de l'action spectrale pour les plans de Moyal, sont facilement surmontables. En effet, il n'y a d'une part plus lieu d'introduire une régularisation 'spatiale' ; le spectre de l'opérateur de Dirac covariant $\not{D}_A = \not{D} + L^\Theta(A) + \epsilon J L^\Theta(A) J^{-1}$ est discret et de multiplicité finie pour les variétés Riemanniennes compactes. Les techniques de développement asymptotique, via la formule BCH, sont aussi directement applicables dans ces cas. D'autres développements sont envisageables, en particulier celui de Duhamel (voir [48, 49] pour des applications de la formule de Duhamel). D'autre part, le phénomène de mélange UV/IR est bien moins problématique pour les déformations périodiques : la décomposition en sous-espaces spectraux des composantes du champs de jauge $A \in \Omega^1_{\not{D}}$, la relation

$$\mathrm{Tr}\left(L_{f_r}\, R_{g_s}\, e^{-t\Delta}\right) = Cte\, \delta_{r,-s}\, e^{-\frac{i}{2} r\Theta s} \int_M \mu_g(p)\, f_r(p)\, h_s(p)\, K_t(\Theta r.p, p),$$

  ainsi que la majoration du noyau de la chaleur hors diagonale (2.3.1), (2.3.2), montrent que (si Θ satisfait à une condition Diophantienne et si $d_g^{-2}\big(\alpha_y(.), .\big) \in L^1_{loc}(M, \mu_g)$) seule certaines composantes du champs de jauge contribueront à l'action spectrale. En d'autres termes, les valeurs des résidus des pôles de la fonction Zéta de l'opérateur $\not{D}_A^2$ sont hautement modifiées par la présence du secteur non planaire dans l'action spectrale ; présence venant de la représentation adjointe $\mathrm{ad}^\Theta(.) := L^\Theta(.) - R^\Theta(.)$.

- *Généralisation des résultats de Grosse et Wulkenhaar*
  Ce projet consiste à appliquer nos techniques au modèle de Grosse et Wulkenhaar et d'essayer de généraliser leurs résultats pour les déformations isospectrales courbes non périodiques.
  Dans la série d'articles [57–59], il est démontré que si on ajoute un couplage avec un potentiel confinant (oscillateur harmonique dans leur travail) à la théorie $\varphi^{\star_\theta 4}$ sur le plan de Moyal quadri-dimensionnel, i.e. si l'on considère l'action de Grosse et Wulkenhaar

$$\begin{aligned} S_{GW}[\varphi] \;:=\; \int d^4x \Big[\tfrac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \star_\theta \partial^\mu \varphi)(x) + 2\frac{\Omega^2}{\theta^2}(x_\mu \varphi) \star_\theta (x^\mu \varphi) \\ + \frac{m^2}{2}\varphi \star_\theta \varphi(x) + \frac{\lambda}{4!}\varphi \star_\theta \varphi \star_\theta \varphi \star_\theta \varphi(x) \Big], \end{aligned}$$

  alors la théorie est perturbativement renormalisable à tout les ordres en λ. Si la signification profonde de ce résultat n'est pas encore entièrement comprise, quelques explications peuvent toutefois être mentionnées. Premièrement, ajouter un potentiel effectif est équivalent

à une compactification du plan de Moyal ; on passe de spectre essentiel à spectre purement ponctuel. Aussi, le choix particulier du potentiel correspond à une 'Moyal-déformation' de l'espace des moments en même temps que celui de configuration. Ceci peut être vu à partir de l'invariance (à des changements d'échelle près) de cette action sous transformée de Fourier :

$$p_\mu \longleftrightarrow 2(\Theta^{-1})_{\mu\nu}x^\nu, \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}(p) \longleftrightarrow (\pi\theta)^2\,\varphi(x).$$

On pourrait alors refaire notre analyse du comportement des fonctions de Green non planaires de cette théorie, en utilisant à la place du noyau de la chaleur le noyau de Mehler, i.e. celui du semi-groupe de l'oscillateur harmonique :

$$K_M(t,x,y) = (2\pi)^{-n/2}\frac{1}{\big(\sinh(4t)\big)^{n/2}}\exp\left[\frac{1}{\sinh(4t)}x.y - \tfrac{1}{2}\frac{1}{\tanh(4t)}(|x|^2+|y|^2)\right].$$

La dernière étape consiste à comprendre le degré de liberté existant dans le choix du potentiel (tout en conservant la renormalisabilité), afin de voir si ce résultat peut être généralisé aux déformations isospectrales non périodiques courbes.

- *Sphères de Connes–Dubois-Violette*
  Il serait intéressant de comprendre si le phénomène UV/IR (ou un analogue) est une caractéristique générale des théories des champs sur espace non commutatif (nous avons déjà montré au paragraphe 4.1.1 que deux secteurs différents existent forcément) ou si c'est une particularité des déformations isospectrales. Les sphères de Connes–Dubois-Violette [25], une famille à trois paramètres de variétés non commutatives sphériques ne rentrant pas dans le cadre des déformations de Rieffel, sont de bons exemples pour tester ce point. Pour ce faire, il faudrait trouver une base particulière de leurs algèbres, permettant de dériver les règles de Feynman. Cette question est complètement ouverte.

Annexe A

Traces de Dixmier

J. Dixmier a réussi à disjoindre les notions de trace et de normalité dans les applications sur les opérateurs d'un espace de Hilbert en construisant des traces non normales [33]. Ces traces éponymes, $\mathrm{Tr}_{\alpha,\omega}$, sont des fonctionnelles linéaires positives, invariantes sous conjugaison par des unitaires, définies sur un domaine et s'annulant sur l'idéal des opérateurs de rang fini.

L'idée est de définir une trace via le coefficient d'un certain type de divergence, en l'occurrence logarithmique, de la trace usuelle : se donnant une suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on veut définir une trace sur un idéal du cône positif des opérateurs compacts $\mathcal{K}^+(\mathcal{H})$ d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ par

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_N(T)}{\alpha_N}, \qquad T \in \mathcal{K}^+(\mathcal{H}),$$

où les sommes partielles des valeurs singulières (qui sont égales aux valeurs propres car $T \geq 0$) sont définies par

$$\sigma_N(T) := \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T).$$

En se restreignant aux opérateurs pour lesquels les sommes partielles régularisées forment des suites bornées, $\{\sigma_N(T)/\alpha_N\} \in l^\infty(\mathbb{N})$, deux problèmes sont à résoudre : la linéarité et la convergence.
L'invariance sous conjugaison par des unitaires est automatique, étant directement implémentée au niveau des valeurs singulières :

$$\mu_n(uTu^*) = \mu_n(T), \qquad \forall u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}).$$

Pour obtenir la linéarité, il va falloir définir un processus limite, $\lim_\omega$, qui ait du sens lorsque $\{\beta_n\} \in l^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas convergente. Une condition nécessaire est qu'il soit invariant d'échelle : $\lim_\omega(\tilde{\beta}) = \lim_\omega(\beta)$ avec $\tilde{\beta} := (\beta_1, \beta_1, \cdots, \beta_n, \beta_n, \cdots)$. On demandera aussi qu'il coïncide avec la limite usuelle lorsque la suite est convergente. En particulier, ceci impliquera que $\lim_\omega(\beta) = 0$, lorsque $\beta_n \to 0$, $n \to \infty$. Ces conditions pourront être satisfaites seulement pour des divergences vérifiant les propriétés suivantes :

Soit α une suite croissante positive, telle que

$$\begin{aligned}
&i)\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty,\\
&ii)\ \alpha_0 > \alpha_1 - \alpha_2,\ \ \alpha_{n+1} - \alpha_n > \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N},\\
&iii)\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-1}\alpha_{2n} = 1.
\end{aligned}$$

Soit ensuite $I_\alpha(\mathcal{H})$ l'idéal des opérateurs compacts défini par :

$$I_\alpha(\mathcal{H}) := \left\{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \frac{\sigma_N(T)}{\alpha_N} \in l^\infty(\mathbb{N}) \right\}.$$

La propriété d'idéal de cette famille d'opérateurs compacts est une conséquence de la sous-multiplicativité des valeurs singulières (voir par exemple [100, théorème 1.5]) :

$$\mu_{m+n}(TS) \leq \mu_m(T)\mu_n(S).$$

Cela implique alors

$$\mu_n(TS) \leq \|T\|\, \mu_n(S),$$

et donc

$$\sigma_N(TS) \leq \|T\|\, \sigma_N(S).$$

L'idéal $I_\alpha(\mathcal{H})$ possède une structure naturelle d'algèbre de Banach, pour la norme

$$\|T\|_\alpha := \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\sigma_N(T)}{\alpha_N} \right\}.$$

Pour T appartenant au cône positif de $I_\alpha(\mathcal{H})$, on définit sa trace de Dixmier $\mathrm{Tr}_{\alpha,\omega}(T)$ par

$$\mathrm{Tr}_{\alpha,\omega}(T) := \lim_\omega \Big(\frac{\sigma_N(T)}{\alpha_N} \Big),$$

où le processus de limite $\lim_\omega$ est donné par

$$\lim_\omega(\beta) := \omega\big(M(f_\beta)\big), \qquad \beta \in l^\infty(\mathbb{N}).$$

Ici, $0 \leq \omega \in \Big(C_b(\mathbb{R}_+^*)\Big)^*$ est une forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues et bornées sur la demi-droite $\mathbb{R}_+^*$, dont le noyau contient $C_0(\mathbb{R}_+^*)$, l'idéal des fonctions continues s'annulant à l'infini, i.e. $\omega(f) = 0$ lorsque $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. L'application M désigne la moyenne de Cesàro associée au groupe (multiplicatif) $\mathbb{R}_+^*$ avec mesure de Haar $x^{-1}dx$:

$$\big(Mg\big)(x) := \frac{1}{\log x} \int_1^x g(t) \frac{dt}{t},$$

et f_α est la fonction simple (constante par morceaux) associée à la suite α :

$$f : l^\infty(\mathbb{N}) \to L^\infty(\mathbb{R}_+^*),\ f_\alpha(x) := \alpha_n, \quad \text{pour} \quad x \in]n, n+1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Théorème A.0.1 (Dixmier 1966 [33]). $\mathrm{Tr}_{\alpha,\omega}$ *est une forme linéaire positive sur* $I_\alpha(\mathcal{H})$ *qui est invariante sous conjugaison par les unitaires de* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Esquisse de démonstration. Que l'application $I_\alpha^+(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \mathrm{Tr}_{\alpha,\omega}(T)$, soit invariante par conjugaison sous unitaires, est une conséquence de l'invariance des valeurs singulières. La positivité vient de la positivité de la fonctionnelle ω ainsi que de celle de la moyenne de Cesàro.

Nous allons montrer la linéarité. A cette fin, notons tout d'abord que $\lim_\omega$ est invariante d'échelle :

$$\lim_\omega(\beta) = \lim_\omega(\tilde{\beta}), \quad \text{avec} \quad \tilde{\beta} := (\beta_1, \beta_1, \cdots, \beta_n, \beta_n, \cdots).$$

En effet, avec $\theta_a : C(\mathbb{R}_+^*) \to C(\mathbb{R}_+^*)$ l'opérateur d'échelle $\big(\theta_a g\big)(x) := g(ax)$, défini pour tout $a > 0$, on a :

$$f_{\tilde{\beta}}(x) = f_\beta(\tfrac{1}{2}x) = \big(\theta_{1/2} f_\beta\big)(x).$$

Puisque la moyenne de Cesàro est asymptotiquement invariante d'échelle, i.e. pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, tout $a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \big|M\big(\theta_a g\big)(x) - M\big(g\big)(x)\big| = 0,$$

on obtient en utilisant le fait que $\omega(g) = 0$ lorsque $\lim_{x\to\infty} g = 0$:

$$\lim_\omega(\tilde{\beta}) = \omega\big(M(f_{\tilde{\beta}})\big) = \omega\big(M(\theta_{1/2} f_\beta)\big) = \omega\big(M(f_\beta)\big) = \lim_\omega(\beta).$$

Posons pour $T, S \in I_\alpha^+(\mathcal{H})$:

$$\gamma_N := \frac{1}{\alpha_N}\sigma_N(T+S),\ \beta_N := \frac{1}{\alpha_N}\sigma_N(T),\ \delta_N := \frac{1}{\alpha_N}\sigma_N(S).$$

On remarque que les sommes partielles $\sigma_N(.)$ sont aussi des normes, car pouvant aussi être exprimées en termes de suprema sur des normes traces :

$$\sigma_N(T) = \sup_E \|TE\|_1, \tag{A.0.1}$$

où E varie dans l'ensemble des opérateurs auto-adjoints de rang N. On obtient alors

$$\sigma_N(T+S) \le \sigma_N(T) + \sigma_N(S),$$

et donc $\gamma_N \le \beta_N + \delta_N$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Tr}_{\omega,\alpha}(T+S) \le \mathrm{Tr}_{\omega,\alpha}(T) + \mathrm{Tr}_{\omega,\alpha}(S).$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, nous allons nous servir de la relation

$$\sigma_N(T) + \sigma_M(S) \le \sigma_{N+M}(T+S).$$

Cette relation s'obtient en considérant E, F et G, projecteurs de rang n, m et $n+m$, qui soient tels que l'image de $E+F$ soit contenue dans celle de G. On a alors pour $0 \le T, S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

$$\mathrm{Tr}(ET) + \mathrm{Tr}(FS) \le \mathrm{Tr}(GT) + \mathrm{Tr}(GS) = \mathrm{Tr}(G(T+S)),$$

qui donne le résultat d'après la caractérisation (A.0.1) des sommes partielles. Il en résulte que

$$\sigma_N(T) + \sigma_N(S) \le \sigma_{2N}(T+S),$$

et donc $\beta_N + \delta_N \le \frac{\alpha_{2N}}{\alpha_N}\gamma_{2N}$. Ceci conclut la preuve, car par hyphothèse

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha_{2N}}{\alpha_N} = 1,$$

et d'après l'invariance d'échelle du processus de limite, on a $\lim_\omega(\gamma_{2N}) = \lim_\omega(\gamma_N)$. $\square$

Les fonctionnelles $\mathrm{Tr}_{\omega,\alpha}$ s'étendent ensuite par linéarité à tout $I_\alpha(\mathcal{H})$, en utilisant la décomposition de tout opérateur borné en une somme à coefficients complexe de (quatre) éléments positifs.

La propriété remarquable des traces de Dixmier, héritée de celle de la fonctionnelle ω définissant le processus de limite ($\omega(g) = 0$ lorsque $\lim_{x\to\infty} g = 0$), est de posséder un noyau consistant en la fermeture en norme $\|.\|_\alpha$ de l'idéal des opérateurs de rang fini, dans lequel est inclus l'idéal des opérateurs à trace :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_{\omega,\alpha}) = \overline{O.R.F^{\|.\|_\alpha}} \supset \mathcal{L}^1(\mathcal{H}).$$

Les suites donnant lieu à d'intéressantes traces de Dixmier sont typiquement les polylogarithmes et les puissances de logarithme (voir par exemple [83]). Ces suites satisfont évidemment aux propriétés requises.
En géométrie non commutative, c'est la divergence logarithmique qui est la plus pertinente : $\alpha_n = \log n$, $\mathrm{Tr}_\omega := \mathrm{Tr}_{\omega,log}$. En particulier, l'idéal $I_{log}(\mathcal{H})$ coïncide avec la première classe de Schatten faible $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$. Notons aussi que les classes de Schatten faibles ainsi que leurs duaux

$$\mathcal{L}^{(\infty,k)}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}); \mu_m(T) = o(m^{-1/k}), \forall m \in \mathbb{N}\}, \qquad k \geq 1,$$

peuvent être alternativement définis à partir des classes de Schatten ordinaires par interpolation réelle [13, IV.2.α]. Aussi, il existe une inégalité de Hölder pour les classes de Schatten faibles avec la 'trace de Dixmier logarithmique' [55, proposition 7.16].

Les traces des Dixmier sont évidemment très difficiles à calculer lorsque, comme dans la majeure partie des cas, on ne connat pas explicitement les valeurs propres d'un opérateur. Heureusement, les résidus des fonctions Zétas donnent, sous certaines conditions, un accès rapide aux valeurs des 'traces de Dixmier logarithmiques'.

Théorème A.0.2 (Connes [13]). *Pour $0 \leq T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$, soit $\zeta_T(s) := \mathrm{Tr}(T^s)$ sa fonction Zéta. Si $\lim_{s\to 1^+}(s-1)\zeta_T(s) = L < \infty$ alors $\mathrm{Tr}_\omega(T) = L$, indépendamment de ω.*

Ce résultat caractérise le fait que si la suite $\sigma_N(T)/\log N$ converge, alors $\lim_\omega$ coïncide avec la limite ordinaire. Notons finalement que ce résultat a été généralisé comme suit :

Théorème A.0.3 ([4, 73]). *Pour $0 \leq T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, soit $\tilde{\zeta}_T(s) := \mathrm{Tr}(ST^s)$. Si $\lim_{s\to 1^+}(s-1)\tilde{\zeta}_T(s) = L < \infty$ alors $\mathrm{Tr}_\omega(ST) = L$, indépendamment de ω.*

Annexe B

Base de Wigner

B.1 Limite $\theta \to 0$

Rappelons que les éléments de la base de Wigner de l'oscillateur harmonique ont été définis par

$$f_{mn} := \frac{1}{\sqrt{\theta^{|m|+|n|}\, m!n!}}\, (a^*)^m \star_\theta f_{00} \star_\theta a^n, \tag{B.1.1}$$

où f_{00} est la Gaussienne

$$f_{00}(x) := 2^N \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{2N} x_i^2\right),$$

et les fonctions de création et d'annihilation sont

$$a_l := \frac{1}{\sqrt{2}}(x_l + i\, x_{l+N}) \quad \text{et} \quad a_l^* := \frac{1}{\sqrt{2}}(x_l - i\, x_{l+N}).$$

Les produits $\star_\theta$ et ponctuel sont reliés par

$$\begin{aligned} a_l \star_\theta f &= a_l.f + \frac{\theta}{2}\frac{\partial f}{\partial a_l^*} \qquad & f \star_\theta a_l &= a_l.f - \frac{\theta}{2}\frac{\partial f}{\partial a_l^*} \\ a_l^* \star_\theta f &= a_l^*.f - \frac{\theta}{2}\frac{\partial f}{\partial a_l} \qquad & f \star_\theta a_l^* &= a_l^*.f + \frac{\theta}{2}\frac{\partial f}{\partial a_l}, \end{aligned}$$

où

$$\frac{\partial}{\partial a_l} := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_l} - i\,\frac{\partial}{\partial x_{l+N}}\Big) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial a_l^*} := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_l} + i\,\frac{\partial}{x_{l+N}}\Big).$$

Ainsi

$$(a_l^*)^{\star_\theta m} \star_\theta f_{00} = 2^m a_l^{*m} f_{00} \quad \text{et} \quad f_{00} \star_\theta a_l^{\star_\theta m} = 2^m a_l^m f_{00}.$$

En dimension $2N$, avec d'évidentes notations multi-indicielle, il en résulte que

$$\begin{aligned}
f_{mn} &= \frac{1}{\sqrt{\theta^{|m|+|n|}\, m!n!}} \big(a^{*m} \star_\theta f_{00}\big) \star_\theta a^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{\theta^{|m|+|n|}\, m!n!}} \Big(a - \frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial a^*}\Big)^n \big(a^{*m} \star_\theta f_{00}\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\theta^{|m|+|n|}\, m!n!}} \Big(a - \frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial a^*}\Big)^n \big(2^m a^{*m} f_{00}\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\theta^{|m|+|n|}\, m!n!}} \Big(\Big(2a - \frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial a^*}\Big)^n 2^m a^{*m}\Big) f_{00} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\theta^{|m|+|n|}\, m!n!}} \sum_{\mathbb{N}^N \ni p=0}^{\min(m,n)} (-1)^{|p|} \binom{m}{p}\binom{n}{p}\, p!\, 2^{|n|+|m|-2|p|}\, \theta^{|p|}\, a^{*m-p}\, a^{n-p}\, f_{00}. \qquad \text{(B.1.2)}
\end{aligned}$$

En utilisant

$$\lim_{\theta\to 0} (\pi\theta)^{-N} \exp\Big(-\frac{1}{\theta}\sum_{\mu=1}^{2N} x_\mu^2\Big) = \delta^{2N}(x),$$

on obtient que pour m et n fixés, seuls les termes de la somme (B.1.2) pour lesquels $|p| = \frac{1}{2}(|n|+|m|) - N$ donnent des contributions finies et non identiquement nulles dans la limite $\theta \to 0$ (au sens des distributions). Lorsque $|p| > \frac{1}{2}(|n|+|m|) - N$ les contributions sont nulles et lorsque $|p| < \frac{1}{2}(|n|+|m|) - N$ elles sont infinies.

B.2 f_{mn} et opérateur d'Euler

Nous allons voir un étrange lien entre l'opérateur d'Euler

$$\widehat{\mathcal{E}}_c := \theta\partial_\theta + \sum_{i=1}^N c\, x_i \partial_{x_i} + (1-c)\, x_{i+N}\partial_{x_{i+N}}, \quad \text{avec} \quad c \in [0,1],$$

agissant sur le champs continu de C^*-algèbre $\prod_{\theta\in\mathbb{R}^+} A_\theta^0$ (A_θ^0 est la C^*-complétion de $\mathcal{A}_\theta$), et l'exponentielle imaginaire quadratique

$$h_\beta(x) := \exp\Big(i\beta \sum_{i=1}^N x_i x_{i+N}\Big).$$

Nous avons vu au paragraphe 2.2.1.3, que cette exponentielle appartient à $\mathcal{M}^\theta$ (l'algèbre des multiplicateurs bilatères de $\mathcal{A}_\theta$) si est seulement si $|a| \neq 2/\theta$. Nous allons démontrer que $\widehat{\mathcal{E}}_c$ est une dérivation sur $\prod_{\theta\in\mathbb{R}^+} A_\theta^0$ et qu'elle est "intérieure" sur une de ses sous-algèbres. L'automorphisme correspondant sera justement donné par l'élément 'pathologique' $h_{2/\theta}$.

Montrons tout d'abord que $\widehat{\mathcal{E}}_c$ satisfait à la règle de Leibniz. Par définition, la C^*-algèbre $\prod_{\theta\in\mathbb{R}^+} A_\theta^0$ consiste en les fonctions sur $\mathbb{R}^+$ à valeur dans A_θ^0, pour lesquelles la norme

$$\|f\| := \sup_{\theta\in\mathbb{R}^+} \|f(\theta)\|_{A_\theta^0},$$

est finie. Ici $\|.\|_{A^0_\theta}$ désigne la norme opératorielle de A^0_θ. Il suffit alors de vérifier que $\widehat{\mathcal{E}}_c$ satisfait à la règle de Leibniz pour le produit de Moyal de deux fonctions f et g dépendant a priori de θ.

D'une part nous avons

$$\begin{aligned}\theta\partial_\theta\big(f\star_\theta g\big)(x) &= \theta\partial_\theta\int\frac{d^{2N}y}{(\pi\theta)^N}\frac{d^{2N}z}{(\pi\theta)^N}\,f(y)\,g(z)\,e^{\frac{2i}{\theta}(x-y).S(x-z)}\\ &= -2N\,\big(f\star_\theta g\big)(x)+\big(\theta\partial_\theta f\star_\theta g\big)(x)+\big(f\star_\theta\theta\partial_\theta g\big)(x)\\ &+\frac{2i}{\theta}\sum_{\mu=1}^{2N}\big((x^\mu.f)\star_\theta g\big)(x).(Sx)^\mu-\big(f\star_\theta(x^\mu.g)\big)(x).(Sx)^\mu-\big((x^\mu.f)\star_\theta((Sx)^\mu.g)\big)(x).\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la règle de 'produit mixte' (2.2.6) ainsi que le fait $x.(Sx)=0$, on obtient

$$\theta\partial_\theta\big(f\star_\theta g\big)(x)=\big(\theta\partial_\theta f\star_\theta g\big)(x)+\big(f\star_\theta\theta\partial_\theta g\big)(x)-\frac{2i}{\theta}\sum_{\mu=1}^{2N}\big(\partial_{(Sx)^\mu}f\big)\star_\theta\big(\partial_{x^\mu}g\big)(x).$$

D'après la règle de Leibniz pour le produit de Moyal (1.2.4) et encore (2.2.6), on a d'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N x_i.\partial_{x_i}\big(f\star_\theta g\big)(x) &= \sum_{i=1}^N x_i.\Big(\big(\partial_{x_i}f\big)\star_\theta g(x)+f\star_\theta\big(\partial_{x_i}g\big)(x)\Big)\\ &= \sum_{i=1}^N\Big(\big(x_i.\partial_{x_i}f\big)\star_\theta g(x)+f\star_\theta\big(x_i.\partial_{x_i}g\big)(x)\Big)+\frac{2i}{\theta}\sum_{\mu=1}^{2N}\big(\partial_{(Sx)^\mu}f\big)\star_\theta\big(\partial_{x^\mu}g\big)(x).\end{aligned}$$

Par un calcul similaire

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N x_{i+N}.\partial_{x_{i+N}}\big(f\star_\theta g\big)(x) &= \sum_{i=1}^N\Big(\big(x_{i+N}.\partial_{x_{i+N}}f\big)\star_\theta g(x)+f\star_\theta\big(x_{i+N}.\partial_{x_{i+N}}g\big)(x)\Big)\\ &+\frac{2i}{\theta}\sum_{\mu=1}^{2N}\big(\partial_{(Sx)^\mu}f\big)\star_\theta\big(\partial_{x^\mu}g\big)(x).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $c\in[0,1]$, $\widehat{\mathcal{E}}_c$ satisfait à la règle de Leibniz :

$$\widehat{\mathcal{E}}_c\big(f\star_\theta g\big)=\big(\widehat{\mathcal{E}}_c f\big)\star_\theta g+f\star_\theta\big(\widehat{\mathcal{E}}_c g\big). \tag{B.2.1}$$

Nous allons voir dans quel sens, et pour quelle sous-algèbre de $\prod_{\theta\in\mathbb{R}^+}A^0_\theta$, cette dérivation est intérieure. En utilisant l'écriture (B.1.1) des f_{mn} ainsi que la propriété de dérivation, on va établir l'action de l'opérateur d'Euler sur les f_{mn} (qui dépendent de θ) :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{E}}_c\big(f_{mn}\big) &= -\frac{|n|+|m|}{2}f_{mn}+(\theta^{|n|+|m|}m!n!)^{-1/2}\Big\{(a^*)^m\star_\theta\widehat{\mathcal{E}}_c\big(f_{00}\big)\star_\theta a^n\\ &+\sum_{j=1}^m(a^*)^{m-j}\star_\theta\widehat{\mathcal{E}}_c(a^*)\star_\theta(a^*)^{j-1}\star_\theta f_{00}\star_\theta a^n\\ &+\sum_{j=1}^m(a^*)^m\star_\theta f_{00}\star_\theta a^{m-j}\star_\theta\widehat{\mathcal{E}}_c(a)\star_\theta a^{j-1}\Big\}.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{E}}_c(f_{00}) &= \frac{1-2c}{4\theta}\sum_{i=1}^{N}(a_i^*)^2\star_\theta f_{00} + f_{00}\star_\theta a_i^2,\\
\widehat{\mathcal{E}}_c(a_i) &= \frac{1}{2}\big(a_i - (1-2c)a_i^*\big),\\
\widehat{\mathcal{E}}_c(a_i^*) &= \frac{1}{2}\big(a_i^* - (1-2c)a_i\big).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{E}}_c(f_{mn}) = \frac{1-2c}{4}\sum_{i=1}^{N}\Big\{&\sqrt{(m_i+1)(m_i+2)}f_{m+2u_i,n} + \sqrt{(n_i+1)(n_i+2)}f_{m,n+2u_i}\\
&-\sqrt{m_i(m_i-1)}f_{m-2u_i,n} - \sqrt{n_i(n_i-1)}f_{m,n-2u_i}\Big\},
\end{aligned}$$

où u_i désigne le i-ième vecteur de base de $\mathbb{N}^N$. En utilisant la définition des f_{mn} en termes de produit de Moyal itéré des fonctions de création et d'annihilation, cf. équations (3.1.1) et (3.1.2), on identifie la dernière expression à une action adjointe :

$$\widehat{\mathcal{E}}_c(f_{mn}) = \frac{1-2c}{4\theta}\sum_{i=1}^{N}\big(L(a_i^*\star_\theta a_i^* - a_i\star_\theta a_i) - R(a_i^*\star_\theta a_i^* - a_i\star_\theta a_i)\big)f_{mn}.$$

Ainsi, sur la sous-algèbre de $\prod_{\theta\in\mathbb{R}^+}A_\theta^0$ engendrée par les combinaisons de f_{mn} à coefficients constants (indépendants de θ), $\widehat{\mathcal{E}}_c$ est une dérivation intérieure :

$$\widehat{\mathcal{E}}_c = \mathrm{ad}_b,$$

avec

$$b = \frac{1-2c}{4\theta}\sum_{i=1}^{N}a_i^*\star_\theta a_i^* - a_i\star_\theta a_i = \frac{-2i(1-2c)}{\theta}\sum_{i=1}^{N}x_i\,x_{i+N},$$

qui est justement l'argument de l'exponentielle 'pathologique' $h_{\pm 2/\theta}$, pour $c=0$ ou $c=1$.
Pour $c=1/2$, les f_{mn} sont dans le noyau de $\widehat{\mathcal{E}}_c$ et sont des points fixes pour l'automorphisme associé.

Bibliographie

[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, "Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures, II. Physical applications", Ann. Phys. (NY) **111** (1978) 61–151.

[2] M. Sh. Birman, G. E. Karadzhov, M. Z. Solomyak, "Boundness conditions and spectrum estimates for the operators $b(X)a(D)$ and their analogs", Adv. in Soviet Math. **7** (1991), 61–151.

[3] G. Braunss, "On the regular Hilbert space representation of a Moyal quantization", J. Math. Phys. **35** (1994), 2045–2056.

[4] A. Carey, J. Phillips and F. Sukochev, "Spectral flow and Dixmier traces", Adv. Math. **173** (2003), 68–113.

[5] L. Carminati, B. Iochum and T. Schücker, "Noncommutative Yang–Mills and noncommutative relativity : a bridge over troubled water", Eur. Phys. J. **C8** (1999), 697–709.

[6] A. H. Chamseddine and A. Connes, "Universal formula for noncommutative geometry actions : unification of gravity and the Standard Model", Phys. Rev. Lett. **177** (1996), 4868–4871.

[7] A. H. Chamseddine and A. Connes, "The spectral action principle", Commun. Math. Phys. **186** (1997), 731–750.

[8] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, London and San Diego, 1984.

[9] I. Chavel, *Riemannian Geometry, a Modern Introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, **108**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[10] J. Cheeger, M. Gromov and M. Taylor, "Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds", J. Diff. Geom. **17** (1982), 15–53.

[11] I. Chepelev and R. Roiban, "Renormalization of quantum fields theories on noncommutative $\mathbb{R}^d$. I. Scalar", J. High Energy Phys. **5** (2000), 137–168.

[12] A. Connes, "The action functional in noncommutative geometry", Commun. Math. Phys. **117** (1988), 673–683.

[13] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London and San Diego, 1994.

[14] A. Connes, "Noncommutative geometry and reality", J. Math. Phys. **36** (1995), 6194–6231.

[15] A. Connes, "La notion de variété et les axiomes de la géométrie", Course at the Collège de France, January–March 1996.

[16] A. Connes, “Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative geometry”, Commun. Math. Phys. **182** (1996), 155–176.

[17] A. Connes, “A short survey of noncommutative geometry”, J. Math. Phys. **41** (2000), 3832–3866.

[18] A. Connes and J. Lott, “Particle models and noncommutative geometry”, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **18** (1990), 29–47.

[19] A. Connes and J. Lott, “The metric aspect of noncommutative geometry”, Cargèse Summer Conference, J. Fröhlich et al. (eds.) Plenum Press (1992), 53–93.

[20] A. Connes and M. Marcolli, “Renormalization and motivic Galois theory”, Int. Math. Res. Not. **76** (2004), 4073–4091.

[21] A. Connes and M. Marcolli, “From physics to number theory via noncommutative geometry. Part I : quantum statistical mechanics of Q-lattices”, math.NT/0404128.

[22] A. Connes and M. Marcolli, “From physics to number theory via noncommutative geometry. Part II : Renormalization, the Riemann-Hilbert correspondence, and motivic Galois theory”, hep-th/0411114.

[23] A. Connes and H. Moscovici, “The local index formula in noncommutative geometry”, Geom. Func. Anal. **5** (1995), 174–243.

[24] A. Connes and G. Landi, “Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations”, Commun. Math. Phys. **221** (2001), 141–159.

[25] A. Connes and M. Dubois-Violette, “Noncommutative finite-dimensional manifolds. I. Spherical manifolds and related examples”, Commun. Math. Phys. **230** (2002), 539–579.

[26] M. Cwikel, “Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators”, Ann. Math. **106** (1977), 93–100.

[27] E. B. Davies, *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[28] E. B. Davies, “Gaussian upper bounds for the heat kernels of second-order operators on Riemannian manifolds“”, J. Funct. Anal. **80** (1998), 16–32.

[29] E. B. Davies and B. Simon, “Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and the Dirichlet Laplacian”, J. Funct. Anal. **59** (1984), 335–395.

[30] P. Deift and B. Simon, “On the decoupling of finite singularities from the question of asymptotic completness in two body quantum system”, J. Func. Anal. **23** (1996), 218–238.

[31] J. A. Dieudonné, *Treatise on Analysis III*, Academic Press, New York, 1972.

[32] M. Dimassi and J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[33] J. Dixmier, “Existence de traces non normales”, C. R. Acad. Sci. Paris **262** (1966), 1107–1108.

[34] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, “The quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum physics”, Commun. Math. Phys. **172** (1995), 187–220.

[35] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, “Noncommutative fields theory”, Rev. Modern Phys. **73** (2001), 977–1024.

[36] M. Dubois-Violette, A. Kriegl, Y. Maeda and P. W. Michor, "Smooth $*$-algebras", Prog. Theor. Phys. Suppl. **144** (2001), 54–78.

[37] M. Dubois-Violette, communication privée.

[38] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, *Lie Groups*, Springer, New York, 1996.

[39] R. Estrada, J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, "On asymptotic expansions of twisted products", J. Math. Phys. **30** (1989), 2789–2796.

[40] R. Estrada, J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, "On summability of distributions and spectral geometry", Commun. Math. Phys. **191** (1998), 219–248.

[41] H. Figueroa, "Function algebras under the twisted product", Bol. Soc. Paranaense Mat. **11** (1990), 115–129.

[42] T. Filk, "Divergences in a field theory on quantum space", Phys. Lett. B **376** (1996), 53–58.

[43] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[44] V. Gayral, "The action functional for Moyal planes", Lett. Math. Phys. **65** (2003), 147–157.

[45] V. Gayral, "Heat-Kernel Approach to UV/IR Mixing on Isospectral Deformation Manifolds", to appear in Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., hep-th/0412233.

[46] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondía, B. Iochum, T. Schücker and J. C. Várilly, "Moyal planes are spectral triples", Commun. Math. Phys. **246** (2004), 569–623.

[47] V. Gayral and B. Iochum, "The spectral action for Moyal planes", J. Math. Phys. **46** (2005).

[48] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondía and F. Ruiz-Ruiz, "Trouble with space-like noncommutative field theory", Phys. Lett. **B610** (2005), 141–146.

[49] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondía and F. Ruiz-Ruiz, "Position-dependent noncommutative products : classical construction and field theory", hep-th 0405022.

[50] V. Gayral, B. Iochum and J. C. Várilly, "Dixmier trace on non-compact isospectral deformations", in preparation.

[51] P. B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah–Singer Index Theorem*, 2nd edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[52] J. M. Gracia-Bondía, "Improved Epstein–Glaser renormalization in coordinate space I. Euclidean framework", Math. Phys. Analysis Geom. **6** (2003), 59–88.

[53] J. M. Gracia-Bondía, F. Lizzi, G. Marmo and P. Vitale, "Infinitely many star products to play with", J. High Energy Phys. **04** (2002) 026.

[54] J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, "Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics I", J. Math. Phys. **29** (1988), 869–879.

[55] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly and H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Boston, 2001.

[56] D. J. Gross and Y. Kitazawa, "A quenched momentum prescription for large-N theories", Nucl. Phys. **B206** (1982), 440–472.

[57] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "Renormalisation of ϕ^4-theory on noncommutative $\mathbb{R}^2$ in the matrix base", J. High Energy Phys. **12** (2003), 26 pp.

[58] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "Renormalisation of ϕ^4-theory on noncommutative $\mathbb{R}^4$ in the matrix base", hep-th 0401128, to appear in Commun. Math. Phys.

[59] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "Renormalisation of ϕ^4-theory on noncommutative $\mathbb{R}^4$ to all order", hep-th 0403232.

[60] A. Grossmann, G. Loupias and E. M. Stein, "An algebra of pseudodifferential operators and quantum mechanics in phase space", Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** (1968), 343–368.

[61] A, Grothendieck, "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires", Memoirs Amer. Math. Soc. **16**, Providence, RI, 1966.

[62] N. Higson, "On the Connes–Moscovici residue cocycle", preprint, Penn. State University, 2003 ; lectures at the Clay Mathematics Institute Spring School on Noncommutative Geometry and Applications, Nashville, May 2003.

[63] N. Higson and J. Roe, *Analytic K-Homology*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[64] L. Hörmander, *The Analysis of Partial Differential Operators III*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[65] R. Howe, "Quantum mechanics and partial differential equations", J. Funct. Anal. **38** (1980), 188–254.

[66] B. Iochum and T. Schücker, "A left-right symmetric model à la Connes–Lott", Lett. Math. Phys. **32** (1994), 153–166.

[67] J.-B. Kammerer, "Analysis of the Moyal product in flat space", J. Math. Phys. **27** (1986), 529–535.

[68] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[69] T. Krajewski and R. Wulkenhaar, "Perturbative quantum gauge fields on the noncommutative torus", Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000), 1011–1030.

[70] D. Kutasov, J. Marklof and G. W. Moore, "Melvin models and Diophantine approximation", hep-th 0407150.

[71] G. Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometries*, Lecture Notes in Physics : Monographs m51, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[72] E. Langmann and J. Mickelsson, "Scattering matrix in external field problems", J. Math. Phys. **37** (1996), 3933–3953.

[73] S. Lord, A. Sedaev and F. Sukochev, "Dixmier traces, measurability and the Riesz seminorm on Marcinkiewicz spaces", math.FA/0501131.

[74] C. P. Martín, "The UV and IR origin of non-Abelian chiral gauge anomalies on noncommutative Minkowski spacetime", J. Phys. A : Math. Gen. **34** (2001), 9037–9055.

[75] C. P. Martín, J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, "The standard model as a noncommutative geometry : the low energy regime", Phys. Reports **294** (1998), 363–406.

[76] C.P. Martin and D. Sanchez–Ruiz, "The One Loop UV divergent stucture of $U(1)$ Yang–Mills theory on noncommutative $\mathbb{R}^4$", Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 476–479.

[77] S. T. Melo and M. I. Merklen, "On a conjectured noncommutative Beals–Cordes-type characterization", Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1997–2000.

[78] P. W. Michor, "Isometric actions of Lie groups and invariants", Notes of a lecture course at the University of Vienna, July 1997.

[79] S. Minwalla, M. V. Raamsdonk and N. Seiberg, "Noncommutative perturbative dynamics", J. High Energy Phys., **2** (2000), 20–31.

[80] J. E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory", Proc. Camb. Philos. Soc. **45** (1949), 99–124.

[81] J. von Neumann, "Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren", Mathematische Annalen **104** (1931), 570–578.

[82] R. Nest, E. Vogt, W. Werner, "Spectral action and the Connes–Chamseddine model", p. 109-132 in *Noncommutative Geometry and the Standard Model of Elementary Particle Physics*, F. Scheck, W. Werner, H. Upmeier eds., Lecture Notes in Phys., **596**, Spinger, Berlin, 2002.

[83] F. Nicola, "Trace functionals for a class of pseudo-differential operators in $\mathbb{R}^n$", Math. Phys. Anal. Geom. **6** (2003), 89–105.

[84] N. Ortner and P. Wagner, "Applications of weighted $\mathcal{D}'_{L^p}$ spaces to the convolution of distributions", Bull. Acad. Pol. Sci. Math. **37** (1989), 579–595.

[85] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, Berlin, 1972.

[86] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, II : Fourier Analysis, Self Adjointness*, Academic Press, New York, 1975.

[87] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. IV, Academic Press, New York, 1978.

[88] A. Rennie, "Commutative geometries are spin manifolds", Rev. Math. Phys. **13** (2001), 409–464.

[89] A. Rennie, "Poincaré duality and spin^c structures for complete noncommutative manifolds", math-ph/0107013.

[90] A. Rennie, "Smoothness and locality for nonunital spectral triples", K-Theory **28** (2003), 127–165.

[91] A. Rennie, "Summability for nonunital spectral triples", K-Theory **31** (2004), 71–100.

[92] M. A. Rieffel, *Deformation Quantization for Actions of* $\mathbb{R}^d$, Memoirs Amer. Math. Soc. **506**, Providence, RI, 1993.

[93] V. Rivasseau, *From Perturbative to Constructive Renormalization*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, Princeton 1991.

[94] F. Ruiz Ruiz, "UV/IR mixing and the Goldstone theorem in noncommutative field theory", Nucl. Phys. **B637** (2002), 143–167.

[95] O. Schnetz, "Natural renormalization", J. Math. Phys. **38** (1997) 738–758.

[96] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[97] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and noncommutative geometry", J. High Energy Phys. **09** (1999) 032.

[98] M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[99] M. A. Shubin, "Spectral theory of elliptic operators on noncompact manifolds", Astérisque **207** (1992), 37–108.

[100] B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[101] A. Sitarz, "Rieffel's deformation quantization and isospectral deformations", Int. J. Theor. Phys. **40** (2001), 1693–1696.

[102] H. S. Snyder, "Quantized space-time", Phys. Rev. **71** (1947), 38–41.

[103] R. J. Szabo, "Quantum fields theory on noncommutative space", Phys. Rep. **37** (2003), 207–299.

[104] J. C. Várilly, "Quantum symmetry groups of noncommutative spheres", Commun. Math. Phys. **221** (2001), 511–523.

[105] J. C. Várilly, "Hopf algebras in noncommutative geometry", in *Geometrical and Topological Methods in Quantum Field Theory*, A. Cardona, H. Ocampo and S. Paycha, eds., World Scientific, Singapore, 2003.

[106] J. C. Várilly and J. M. Gracia-Bondía, "Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics II : Topologies on the Moyal algebra", J. Math. Phys. **29** (1988), 880–887.

[107] J. C. Várilly and J. M. Gracia-Bondía, "Connes' noncommutative differential geometry and the Standard Model", J. Geom. Phys. **12** (1993), 223–301.

[108] J. C. Várilly and J. M. Gracia-Bondía, "On the ultraviolet behavior of quantum fields over noncommutative manifolds", Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999), 1305–1323.

[109] D. V. Vassilevich, "Heat kernel expansion : user's manual", Phys. Rept. **388** (2003), 279–360.

[110] D. V. Vassilevich, "Non-commutative heat kernel", Lett. Math. Phys. **67** (2004), 185–194.

[111] D. V. Vassilevich, "Spectral problem from quantum field theory", Contemp. Math. **366** (2005), 3–22.

[112] T. Weidl, "Another look at Cwikel's inequality", Amer. Math. Soc. Transl. **189** (1999), 247–254.

[113] H. Weyl, *The theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York, 1931.

[114] D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[115] A. S. Wightman and L. Gårding, "Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory", Arkiv för Fysik **28** (1965), 129–189.

[116] E. P. Wigner, "Quantum corrections for thermodynamic equilibrium", Phys. Rev. **40** (1932), 749–759.

[117] M. Wodzicki, "Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory", Ann. of Math. **129** (1989), 591–639.

[118] J. Wolf, "Essential selfadjointness for the Dirac operator and its square", Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 611–640.

[119] C. N. Yang, "On quantized space-time", Phys. Rev. **72** (1947), 874.

[120] V. A. Zagrebnov, *Topics in the Theory of Gibbs Semigroups*, Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics, Vol. 10, Series A, Leuven University Press, Leuven, 2003.

[121] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 2002.