



**HAL**  
open science

# Principe d'incertitude qualitatif et reconstruction de phase pour la transformée de Wigner

Philippe Jaming

► **To cite this version:**

Philippe Jaming. Principe d'incertitude qualitatif et reconstruction de phase pour la transformée de Wigner. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1999, 237, pp.249-254. hal-00005819

**HAL Id: hal-00005819**

**<https://hal.science/hal-00005819>**

Submitted on 4 Jul 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**PRINCIPE D'INCERTITUDE QUALITATIF ET  
RECONSTRUCTION DE PHASE POUR LA TRANSFORMÉE DE  
WIGNER**

PHILIPPE JAMING

**Résumé** Nous nous intéressons ici à deux problèmes concernant la distribution de Wigner. Dans un premier temps, nous démontrons ici que, si le support de la distribution de Wigner d'une fonction est de mesure finie, alors cette fonction est nulle, répondant ainsi à une question de Folland et Sitaram [4]. Nous nous inspirons ensuite des méthodes développées dans [5] pour résoudre le problème de reconstruction de phase pour la transformée de Wigner de fonctions à support compact.

**Mots Clé :** principe d'incertitude, fonction d'ambiguïté radar,

**English title :** A qualitative uncertainty principle and phase retrieval for the Wigner distribution.

**English abstract :** In this note, we show that, if the support of the Wigner distribution of a function is of finite measure, then this function is zero, thus answering a question of Folland and Sitaram, [4]. We then solve the phase retrieval problem for the Wigner distribution of a compactly supported function.

**English keywords :** uncertainty principle, phase retrieval, radar ambiguity function, Wigner distribution.

ENGLISH ABRIDGED VERSION

**0.1. Introduction.** In this note, we prove two results concerning the Wigner distribution defined for  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  by

$$W(f, g)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{2i\pi y t} dt$$

The Wigner distribution is the Fourier transform in  $\mathbb{R}^{2n}$  of the radar ambiguity function

$$A(f, g)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{2i\pi y t} dt.$$

Moreover,

$$W(f, g)(x, y) = 2^n A(f, Zg)(2x, -2y) \quad (1)$$

where  $Zg(x) = g(-x)$ .

The first result we prove here is a qualitative uncertainty principle and answers a question of Folland and Sitaram [4]. We prove the following result

**Theorem 1** *For  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , both non identically zero, the Lebesgue measure of the support of  $W(f, g)$  and the Lebesgue measure of the support of  $A(f, g)$  are infinite.*

Next we consider the phase retrieval problem for  $W(f) = W(f, f)$ . More precisely, we consider the following problem :

**Problem** *Let  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  be compactly supported. Determine the set of all  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  such that for every  $x, y \in \mathbb{R}$ ,*

$$|W(g)(x, y)| = |W(f)(x, y)|.$$

*$g$  will be called a Wigner partner of  $f$ .*

Trivial solutions to this problem are  $g = cf$  with  $c \in \mathbb{C}$ ,  $|c| = 1$ . These solutions may be the only ones, but this is not always the case as shows the following theorem :

**Theorem 2** *Let  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  be compactly supported. Then  $f$  has a non trivial Wigner partner if and only if there exists a partition of the support of  $f$  into two measurable sets  $A$  and  $B$  of non zero Lebesgue measure such that  $A + B$  is disjoint from  $(A + A) \cup (B + B)$ .*

*Remark* : A similar problem for  $A(f)$  instead of  $W(f)$  is known as the radar ambiguity problem and has been studied in [5]. However, the description of the set of solutions is more difficult and still partially open. The proofs of this theorem follows the main lines of a similar result in [5].

*Remark* : If the condition is satisfied, then  $g = f\chi_A - f\chi_B$  is a Wigner partner of  $f$ .

The condition is only on the supports of the considered functions. In particular, if the support of  $f$  is connected, then  $f$  has only trivial Wigner partners. On the other hand, in dimension 1, if the support of  $f$  is  $\bigcup_{i=0}^n [3^i, 3^i + \frac{1}{2}]$  then  $f$  has  $n$  Wigner partners mutually non trivial.

**0.2. Proof of theorem 1.** The key lemma is the following :

**Lemma** *Let  $f, g, h, k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Then, for every  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} A(f, g)(x, y) \overline{A(h, k)(x, y)} e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy = A(f, h)(v, -u) \overline{A(g, k)(v, -u)}.$$

*Proof of theorem 1.* With (1), it is enough to prove the theorem for  $A(f, g)$ . Assume  $A(f, g)$  has a support of finite Lebesgue measure. Then, for every  $k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , the same is true for  $\Phi \equiv A(f, g) \overline{A(g, k)}$ . But  $\mathcal{F}\Phi(u, v) = \Phi(v, -u)$ , ( $\mathcal{F}$  the Fourier transform), thus  $\Phi$  and  $\mathcal{F}\Phi$  both have support of finite Lebesgue measure. By a theorem of Benedicks [2],  $\Phi = 0$  i.e. for every  $x, y \in \mathbb{R}^n$  and every  $k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$A(f, g)(x, y) \overline{A(g, k)(x, y)} = 0. \quad (2)$$

But,  $A(g, k)(x, y) = e^{i\pi xy} \langle g, e^{2i\pi y \cdot} k(\cdot - x) \rangle$  (where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the scalar product in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ) thus if  $g \neq 0$ , for every  $x, y \in \mathbb{R}^n$  there exists  $k \in L^2(\mathbb{R}^n)$  such that  $A(g, k)(x, y) \neq 0$ , but then (2) implies that  $A(f, g) = 0$  thus  $f = 0$ .  $\square \quad \square$

## 1. INTRODUCTION

Dans cette note, nous démontrons deux résultats sur la transformée de Wigner définie pour  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  par

$$W(f, g)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{2i\pi y t} dt$$

La distribution (ou transformée) de Wigner est la transformée de Fourier dans  $\mathbb{R}^{2n}$  de la fonction d'ambiguïté radar

$$A(f, g)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{2i\pi y t} dt.$$

De plus,  $A(f, g)$  et  $W(f, g)$  sont également liés par

$$W(f, g)(x, y) = 2^n A(f, Zg)(2x, -2y) \quad (1)$$

où  $Zg(x) = g(-x)$ .

La transformée de Wigner apparaît naturellement en mécanique quantique alors que la fonction d'ambiguïté radar intervient en traitement du signal (voir par exemple [3]). Le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |A(f, g)(x, y)|^2 dx dy = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$$

est une expression ‘‘macroscopique’’ du principe d'incertitude de Heisenberg connue sous le nom de *principe d'incertitude radar*.

Nous démontrons ici un principe d'incertitude qualitatif pour la fonction d'ambiguïté radar et la distribution de Wigner répondant ainsi à une conjecture de Folland et Sitaram [4]. Nous démontrons le théorème suivant :

**Théorème 1** *Pour  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  non nulles, la mesure de Lebesgue du support de  $W(f, g)$  et la mesure de Lebesgue du support de  $A(f, g)$  sont infinies.*

Nous considérons ensuite le problème de reconstruction de phase pour la distribution de Wigner  $W(f) = W(f, f)$  de  $f$ . Plus précisément, nous considérons le problème suivant :

**Problème** *Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  à support compact. Déterminer l'ensemble des  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  tels que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,*

$$|W(g)(x, y)| = |W(f)(x, y)|.$$

On appellera  $g$  un *partenaire de Wigner* de  $f$ .

Les solutions triviales sont  $g = cf$  avec  $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$ . Ces solutions peuvent être les seules, mais pas nécessairement, comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 2** *Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  à support compact. Alors  $f$  admet un partenaire de Wigner non trivial si et seulement si il existe une partition du support de  $f$  en deux ensembles mesurables  $A$  et  $B$  de mesure non nulle tels que  $A + B$  soit disjoint de  $(A + A) \cup (B + B)$ .*

*Remarque 1 :* Le fait que la condition soit suffisante résulte du fait qu'alors  $g = \chi_A f - \chi_B f$  est un partenaire de Wigner de  $f$ . En effet, pour une telle fonction  $g$ ,  $W(g)(x, y) = W(f)(x, y)$  si  $x \in \left(\frac{A+A}{2}\right) \cup \left(\frac{B+B}{2}\right)$  et  $W(g)(x, y) = -W(f)(x, y)$  si  $x \in \left(\frac{A+B}{2}\right)$ .

*Remarque 2 :* La condition porte uniquement sur les supports des fonctions. En particulier, si le support de  $f$  est connexe, alors  $f$  n'a que des partenaires de Wigner triviaux. Par contre, en dimension 1, si le support de  $f$  est  $\bigcup_{i=0}^n [3^i, 3^i + \frac{1}{2}]$ , alors  $f$  a  $n$  partenaires de Wigner deux à deux non triviaux.

*Remarque 3 :* Comme  $W(f)(x, y)$  est la transformée de Fourier dans la variable  $y$  de la fonction  $t \mapsto f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{f\left(x - \frac{t}{2}\right)}$ , le problème rentre dans la classe des

problèmes de reconstruction de phase étudiés par exemple par Rosenblatt [7]. Le problème similaire pour  $A(f) = A(f, f)$  qui est connu sous le nom de *problème d'ambiguïté radar* a été étudié dans [5]. L'ensemble de solutions y est toutefois plus compliqué. Enfin, rappelons que la fonction d'ambiguïté radar satisfait à l'égalité de Siebert [8] (cf. [3]): pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |A(f)(x, y)|^2 e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy = |A(f)(v, -u)|^2. \quad (2)$$

Ainsi les partenaires d'ambiguïté donnent des solutions du problème de Pauli en dimension paire (c'est à dire des couples  $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$  tels que  $|\varphi| = |\psi|$  et  $|\mathcal{F}\varphi| = |\mathcal{F}\psi|$ ,  $\mathcal{F}$  la transformée de Fourier).

## 2. PREUVE DU THÉORÈME 1

Nous nous intéressons ici à un principe d'incertitude de type qualitatif. Le premier résultat de ce type est dû à Benedicks [2] :

**Théorème 3** *Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $p \geq 1$ ) est tel que le support de  $f$  et le support de la transformée de Fourier  $\mathcal{F}f$  de  $f$  soient tous deux de mesure de Lebesgue finie, alors  $f = 0$ .*

Par suite, il est naturel de vouloir généraliser ce théorème aux outils temps-fréquence que sont la transformée de Wigner et la fonction d'ambiguïté radar. Pour cela, nous aurons besoin des propriétés suivantes bien connues (cf. [1]) :

- i:  $\overline{A(f, g)(x, y)} = A(g, f)(-x, -y)$ .
- ii:  $A(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)(x, y) = A(f, g)(y, -x)$ .
- iii: Si  $A(f, g) = 0$ , alors  $f$  ou  $g$  est nulle.

**Lemme 4** *Soient  $f, g, h, k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors, pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} A(f, g)(x, y) \overline{A(h, k)(x, y)} e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy = A(f, h)(v, -u) \overline{A(g, k)(v, -u)}.$$

*Remarque :* Ce lemme généralise à la fois l'égalité de Moyal ( $u = v = 0$ , cf. [1]) et l'égalité de Siebert ( $f = g = h = k$ ).

*Preuve.* On note qu'avec i/ et ii/,  $\overline{A(h, k)(x, y)} = A(\mathcal{F}k, \mathcal{F}h)(y, -x)$  donc, en utilisant la définition de  $A$  et en changeant l'ordre d'intégration, on obtient le résultat.  $\square$

Démo non publiée:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{2n}} A(f, g)(x, y) \overline{A(h, k)(x, y)} e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f\left(s + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(s - \frac{x}{2}\right)} e^{-2i\pi y s} \mathcal{F}k\left(t + \frac{y}{2}\right) \overline{\mathcal{F}h\left(t - \frac{y}{2}\right)} e^{2i\pi x t} \\ & \quad e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(s) \mathcal{F}k(t) \overline{g(s+x)} e^{2i\pi x(t-u)} \overline{\mathcal{F}h(t+y)} e^{-2i\pi y(s+v)} dx dy ds dt \end{aligned}$$

avec un changement de variables. Un second changement de variables donne

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(s+x)} e^{2i\pi x(t-u)} dx = e^{-2i\pi s(t-u)} \overline{\mathcal{F}g(t-u)} \\ & \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}h(t+y)} e^{-2i\pi y(s+v)} dy = e^{2i\pi t(s+v)} \overline{f(s+v)} \end{aligned}$$

donc, par Fubini

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} A(f, g)(x, y) \overline{A(h, k)(x, y)} e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(s) \overline{h(s+v)} e^{2i\pi s u} ds \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}k(t) \overline{\mathcal{F}g(t-u)} e^{2i\pi t v} dt \\
 &= A(f, h)(v, -u) A(\mathcal{F}k, \mathcal{F}g)(-u, -v) \\
 &= A(f, h)(v, -u) \overline{A(k, g)(v, -u)}
 \end{aligned}$$

par (1) et (2). □ □

*Preuve du théorème 1.* Avec l'égalité (1), il suffit évidemment de démontrer le théorème pour  $A(f, g)$ . Supposons que le support de  $A(f, g)$  soit de mesure de Lebesgue finie. Alors, quel que soit  $k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , il en va de même pour  $\Phi \equiv A(f, g) \overline{A(g, k)}$ . Mais  $\mathcal{F}\Phi(u, v) = \Phi(v, -u)$ , qui a donc également un support de mesure de Lebesgue finie. Ainsi, par le théorème de Benedicks,  $\Phi = 0$  i.e. pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et tout  $k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$A(f, g)(x, y) \overline{A(g, k)(x, y)} = 0. \quad (3)$$

Mais,  $A(g, k)(x, y) = e^{i\pi x y} \langle g, e^{2i\pi y \cdot} k(\cdot - x) \rangle$  (avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ) donc si  $g \neq 0$ , pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  il existe  $k \in L^2(\mathbb{R}^n)$  tel que  $A(g, k)(x, y) \neq 0$  donc avec (3),  $A(f, g) = 0$  donc  $f = 0$ . □ □

*Remarque :* Notons que le théorème 3 avec l'égalité de Siebert (2) implique directement que si  $A(f)$  a un support de mesure finie, alors  $A(f) = 0$  donc  $f = 0$ .

### 3. PREUVE DU THÉORÈME 2

La preuve de ce théorème étant similaire au résultat sur la fonction d'ambiguïté radar dans [5], nous ne donnons ici que les grandes étapes de la preuve.

*Première étape :* Fixons  $n - 1$  coordonnées de  $x$ , disons  $x_2, \dots, x_n$  et supposons que

$$\{x_1 : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{supp } f\} \subset [-a, b].$$

Alors  $\{x_1 : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{supp } g\}$  est également inclus dans  $[-a, b]$ . En particulier,  $g$  est à support compact.

*Deuxième étape :* A  $x$  fixé, par le théorème de Paley-Wiener,  $W(f)$  est entière en  $y$  de type exponentiel. Par une généralisation à  $\mathbb{C}^n$  du théorème de Hadamard, une telle fonction est déterminée par ses zéros, à un facteur  $e^{a+b \cdot y}$  près ( $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^n$ ).

*Troisième étape :*  $W(f)$  et  $W(g)$  sont toutes deux réelles, leurs zéros sont donc symétriques par rapport à  $\mathbb{R}^n$ . Comme pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $|W(f)(x, y)| = |W(g)(x, y)|$ , elles ont même zéros, donc

$$W(g)(x, y) = \varphi(x) e^{i\tau(x) \cdot y} W(f)(x, y)$$

avec  $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \{-1, 1\}$  et  $\tau : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ .

*Quatrième étape :* D'après la première étape, les supports de  $f$  et de  $g$  ont même taille. Donc, par le théorème de Paley-Wiener,  $\tau(x) = 0$ . En utilisant le fait que  $W$  est une transformée de Fourier dans la variable  $y$ , il en résulte que

$$g\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} = \varphi(x) f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{f\left(x - \frac{t}{2}\right)}. \quad (4)$$

*Étape 5 :* Comme  $W$  est une fonction continue, on peut supposer que  $\varphi$  est continue sur l'ouvert

$$\Omega = \{x : W(f)(x, y) \text{ n'est pas identiquement nulle}\}.$$

On montre facilement que  $\Omega = \frac{S+S}{2}$  où  $S$  est l'ensemble des points de Lebesgue dans le support de  $f$ .

On déduit alors de (4) que  $\varphi = 1$  sur  $S$  et que pour  $x, y, z \in S$ ,

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi\left(\frac{y+z}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x+z}{2}\right). \quad (5)$$

Enfin, avec (4), on montre qu'il existe  $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$  et  $x_0 \in S$  tels que

$$g(x) = c\varphi\left(\frac{x+x_0}{2}\right)f(x).$$

*Dernière étape :* Soient  $A = \{x \in S : \varphi\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = 1\}$  et  $B = \{x \in S : \varphi\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = -1\}$ . Alors  $A \cup B = S$  et  $A \cap B = \emptyset$ , mais si  $x, z \in A$  ou si  $x, z \in B$ , (5) donne  $\varphi\left(\frac{x+z}{2}\right) = 1$  avec  $y = x_0$ . Enfin, si  $x \in A, z \in B$  alors (5) donne  $\varphi\left(\frac{x+z}{2}\right) = -1$  avec  $y = x_0$ . Ainsi  $\varphi^{-1}(1) = \frac{A+A}{2} \cup \frac{B+B}{2}$  et  $\varphi^{-1}(-1) = \frac{A+B}{2}$ , ce qui donne la nécessité de la condition du théorème.  $\square$

## REFERENCES

- [1] L. AUSLANDER AND R. TOLIMIERI *Radar Ambiguity Functions and Group Theory* SIAM J. Math. Anal. **16** (1985) 577–601.
- [2] M. BENEDICKS *On Fourier Transforms of Functions Supported on Sets of Finite Measure* J. Math. Anal. Appl. **106** (1985) 180–183.
- [3] C.E. COOK AND M. BERNFELD *Radar Signals - An introduction to theory and application* Academic Press (1967).
- [4] G.B. FOLLAND AND A. SITARAM *The Uncertainty Principle : A Mathematical Survey* J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997) 207–238.
- [5] P. JAMING *Phase Retrieval Technics for Radar Ambiguity Problems* J. Fourier Anal. Appl. à paraître.
- [6] L. I. RONKIN *Introduction to the theory of entire functions of several complex variables*. Nauka, Moscow (1971).
- [7] J. ROSENBLATT *Phase retrieval* Comm. Math. Phys. **95** (1984) 317–343.
- [8] W.M. SIEBERT *Studies of Woodward's uncertainty function* Mass. Inst. Technol. Research Lab. Electronics, Quart. Progr. Rept. **T-92** (April 1958).