



On the non additivity of the trace in derived categories

Daniel Ferrand

► To cite this version:

| Daniel Ferrand. On the non additivity of the trace in derived categories. 2005. hal-00005708

HAL Id: hal-00005708

<https://hal.science/hal-00005708>

Preprint submitted on 29 Jun 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

On the non additivity of the trace in derived categories

Daniel Ferrand

In this note we provide an example of an endomorphism of a short exact sequence of perfect complexes, with the trace of the middle map not equal to the sum of the traces of the two other ones. The point is that the squares involved are commutative only up to homotopy. In view of this example I have found in 1968, Deligne immediately created his "categories spectrales", and soon afterwards Illusie introduced the "filtered derived categories" where a satisfactory kind of additivity is restored for the trace.

1. Rappels

Réduisons les rappels au minimum. Soit A un anneau commutatif. On ne considère que des complexes bornés de A -modules projectifs de type fini

$$K = \dots \longrightarrow K^{n-1} \xrightarrow{d} K^n \xrightarrow{d} K^{n+1} \longrightarrow \dots$$

Dans la suite, ils seront nommés *complexes parfaits* (En toute rigueur, il faudrait dire : strictement parfaits). Pour un endomorphisme de complexe parfait $u : K \rightarrow K$, on pose

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum (-1)^i \mathrm{Tr}(u^i).$$

Considérons trois complexes parfaits, K, L et M et une suite exacte courte $0 \rightarrow K \xrightarrow{j} L \xrightarrow{q} M \rightarrow 0$ (ce qui veut dire qu'en chaque degré n , la suite $0 \rightarrow K^n \rightarrow L^n \rightarrow M^n \rightarrow 0$ est exacte). Considérons un endomorphisme de cette suite exacte, c'est-à-dire trois endomorphismes de complexes u, v et w tels que le diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{j} & L & \xrightarrow{q} & M \\ u \downarrow & & v \downarrow & & \downarrow w \\ K & \xrightarrow{j} & L & \xrightarrow{q} & M \end{array}$$

soit *commutatif*. Alors on a la formule d'additivité

$$(2) \quad \mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(u) + \mathrm{Tr}(w),$$

puisque'elle est vraie degré par degré.

On vérifie sans peine que deux endomorphismes homotopes d'un complexe parfait ont la même trace. On a pu espérer que la propriété d'additivité (2) serait conservée lorsque le diagramme (1) ne commute *qu'à homotopie près*. Il n'en est rien.

2.- L'exemple

On suppose que l'anneau A contient un élément ε , non nul et de carré nul, et on considère les complexes (parfaits) suivants :

- K est A placé en degré 1 ;
- $L = (A \xrightarrow{\varepsilon} A)$, en degré 0 et 1 ;
- M est A placé en degré 0.

On a une suite exacte courte de complexes

$$K \longrightarrow L \longrightarrow M$$

$$\begin{array}{c} A \xlongequal{\quad} A \\ \varepsilon \downarrow \\ A \xlongequal{\quad} A \end{array}$$

Finalement, on considère les trois endomorphismes $u = 0$, $w = 0$, et $v = \binom{0}{\varepsilon} : L \rightarrow L$ (c'est-à-dire 0 en degré 0, et ε en degré 1).

L'additivité des traces n'est pas respectée puisque $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(w) = 0$, et $\text{Tr}(v) = -\varepsilon$. Or, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \\ 0 \downarrow & & v \downarrow & & \downarrow 0 \\ K & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \end{array}$$

le carré de droite est commutatif, et le carré de gauche est commutatif à *homotopie près*, comme on le voit en prenant pour homotopie h l'application identique $K^1 = A \rightarrow L^0 = A$, qui est en tirets sur la figure suivante qui résume la situation :

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \xlongequal{\quad} & A \\ & & \varepsilon \downarrow & & \searrow 0 \\ A & \xlongequal{\quad} & A & & \searrow 0 \\ & \searrow 0 & \swarrow \varepsilon & & A \xlongequal{\quad} A \\ & & A & \xlongequal{\quad} & A \\ & & \varepsilon \downarrow & & \end{array}$$

3.- Commentaires

Au milieu des années 60 je suivais le Séminaire de Géométrie Algébrique piloté par Grothendieck. Au début de 1967 il me demanda de faire un exposé, et de le rédiger, sur le déterminant des complexes parfaits (l'exposé XI, manquant dans SGA 6). Ce devait être, me dit-il, un simple travail de vérification à partir de ses notes, lesquelles annonçaient, entre autre, la multiplicativité du déterminant pour les morphismes de triangles distingués *dans la catégorie dérivée des complexes parfaits* (cette multiplicativité entraîne l'additivité de la trace).

Deux difficultés m'empêchèrent d'avancer.

- Tenir compte des signes - omniprésents - dont on doit affecter les isomorphismes liés à des permutations des facteurs.
- Passer à la catégorie dérivée, c'est-à-dire essentiellement envisager des diagrammes qui ne commutent qu'à homotopie près.

Pour surmonter la première difficulté et rendre compréhensible le destin de ces signes, Grothendieck eut, peu après, l'idée lumineuse de faire du déterminant, non un simple module inversible, mais un module

inversible *gradué* (concentré en un seul degré si $\mathrm{Spec}(A)$ est connexe) : le déterminant du complexe parfait $\cdots \longrightarrow K^n \longrightarrow K^{n+1} \longrightarrow \cdots$ où K^n est projectif de rang $r(n)$, devient le couple (L, r) , où

$$L = \bigotimes_n (\wedge^{r(n)} K^n)^{(-1)^n}, \quad \text{et} \quad r = \sum (-1)^n r(n).$$

L'isomorphisme de commutativité $(L, r) \otimes (M, s) \simeq (M, s) \otimes (L, r)$ doit être affecté du signe « de Koszul » $(-1)^{rs}$. Voir [KM] (il s'agit bien du produit rs , et non de la somme, comme une coquille p.20 de cet article pourrait le laisser croire).

Que les questions d'homotopie me g  nassent à ce point montrait, aux yeux de Grothendieck, mon inaptitude flagrante. Mais, finalement, j'ai os   penser que c'était peut-être faux, ce qui me conduisit alors très vite au contre-exemple trivial signalé plus haut. C'était en juillet 1968. Deligne se mit au travail, et dès septembre, il présenta ses « catégories spectrales » où les triangles, les « vrais », sont assujétis à des conditions fortes qui rendent une théorie du déterminant possible.

   ma connaissance, ce texte n'a pas été publié.

Voici un extrait de son introduction : *L'idée est la suivante : les triangles qu'on rencontre « en pratique » sont toujours déduits d'un objet plus fin : « un vrai triangle » et, plus important, les endomorphismes de triangles qu'on rencontre « en pratique » proviennent toujours d'endomorphismes de vrais triangles. Pour de tels endomorphismes, la formule [d'additivité des traces] redevient correcte.*

Malheureusement, les « vrais triangles » de $D(A)$ forment une catégorie triangulée, de même que les catégories des « vrais triangles » de « vrais triangles ». . . Cette machine infernale explique la complication du formalisme de compatibilité requis pour définir les « catégories spectrales ». . .

Pour mener à bien cette rédaction il m'aurait fallu alors tout reprendre dans ce nouveau contexte, et d'abord le comprendre. Une certaine lassitude, et un intérêt pour des sujets plus directement géométriques m'ont fait abandonner ce travail, et SGA 6 est paru sans l'exposé XI.

Peu après, Illusie introduisit ses « catégories dérivées filtrées » [II] ch. V, où « la construction du cône, non fonctorielle, est remplacée par celle de gradué associé, qui l'est. » Dans ce cadre l'additivité de la trace est restaurée sous la forme suivante (V 3.7.7, p.310) : la trace d'un endomorphisme d'un complexe filtré dont le gradué est parfait, est égale à la trace de l'endomorphisme induit sur le complexe gradué associé.

En 1975, Knudsen et Mumford publièrent un article sur le déterminant des complexes parfaits [KM]. Ils établissent sa multiplicativité pour les endomorphismes de suites exactes courtes (p.41), et ils soulignent en note que les carrés en jeu doivent être « vraiment » commutatifs, et non pas seulement à homotopie près. L'exemple signalé plus haut justifie cette mise en garde. De plus, p.44, ils montrent que si le schéma de base est *réduit*, il suffit de supposer la commutativité    homotopie près. L'emploi d'un nilpotent dans l'exemple est donc inévitable.

Bibliographie

- [D] DELIGNE P., *Catégories spectrales*, Manuscrit, (Sept. 1968).
- [II] ILLUSIE L., *Complexe cotangent et déformations, I*, LNM 239, Springer (1971).
- [KM] KNUDSEN F. and MUMFORD D., *The projectivity of the moduli space of stable curves. I : Preliminaries on "det" and "Div"*, Math. Scand. 39 (1976) 19-55.

IRMAR, UNIVERSITÉ DE RENNES 1, CAMPUS DE BEAULIEU, F-35040 RENNES CEDEX
E-mail address : daniel.ferrand@univ-rennes1.fr