



**HAL**  
open science

# La structure différentielle de l'anneau des formes quasi-modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z})$

Federico Pellarin

► **To cite this version:**

Federico Pellarin. La structure différentielle de l'anneau des formes quasi-modulaires pour  $SL_2(\mathbb{Z})$ .  
Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 2006, 18 (1), pp.241-264. hal-00005554

**HAL Id: hal-00005554**

**<https://hal.science/hal-00005554>**

Submitted on 23 Jun 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La structure différentielle de l'anneau des formes quasi-modulaires pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ .

Federico Pellarin

**Résumé.** Dans ce texte, nous déterminons explicitement les idéaux premiers différentiellement stables dans l'anneau des formes quasi-modulaires pour  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ . Les techniques introduites permettent de raffiner et généraliser des résultats de Nesterenko dans [5] et [6].

## 1 Introduction

Soient  $E_2(z), E_4(z), E_6(z)$  les développements en séries de Fourier complexes des séries d'Eisenstein classiques de poids 2, 4, 6, convergentes pour  $|z| < 1$  :

$$\begin{aligned} E_2(z) &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) z^n, \\ E_4(z) &= 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) z^n, \\ E_6(z) &= 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) z^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Nesterenko a démontré que pour tout nombre complexe  $q$  tel que  $0 < |q| < 1$ , le corps  $\mathbb{Q}(q, E_2(q), E_4(q), E_6(q))$  a degré de transcendance au moins 3 (voir [4], [5] et [6]). L'ingrédient clé de sa preuve est l'estimation de multiplicité qui suit (théorème 2.3 p. 33 de [5]).

**Théorème 1.1 (Nesterenko).** *Il existe une constante  $c_1 > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $M$  un polynôme non nul de  $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ , de degré total au plus  $N$ . Alors, la fonction  $F(z) = M(z, E_2(z), E_4(z), E_6(z))$  s'annule en  $z = 0$  avec une multiplicité au plus  $c_1 N^4$ .*

Le théorème 1.1 s'obtient en utilisant en profondeur certaines propriétés différentielles de l'anneau

$$\mathcal{R}_1 = \mathbb{C}[z, E_2(z), E_4(z), E_6(z)],$$

d'intérêt indépendant : décrivons ci-après ces propriétés. On voit facilement que  $\mathcal{R}_1$ , muni de la dérivation  $z(d/dz)$ , est un anneau différentiel. On a d'une

part  $z(d/dz)z = z$ , et d'autre part, les séries  $E_2(z), E_4(z), E_6(z)$  satisfont au système différentiel non linéaire (cf. théorème 5.3 de [2]) :

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} E_2 &= \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4), \\ z \frac{d}{dz} E_4 &= \frac{1}{3}(E_2 E_4 - E_6), \\ z \frac{d}{dz} E_6 &= \frac{1}{2}(E_2 E_6 - E_4^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Un idéal  $\mathcal{P}$  d'un anneau différentiel  $(\mathcal{A}, D)$  est dit  $D$ -stable si pour tout  $x \in \mathcal{P}$  on a  $Dx \in \mathcal{P}$ . Nesterenko démontre le résultat qui suit (cf. proposition 5.1 p. 161 de [6]), indispensable dans la preuve du théorème 1.1.

**Proposition 1.1.** *Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier non nul et  $z \frac{d}{dz}$ -stable de  $\mathcal{R}_1$ , tel que pour tout  $F \in \mathcal{P}$  on ait  $F(0) = 0$ . Alors  $z\Delta \in \mathcal{P}$ , où  $\Delta = E_4^3 - E_6^2$ .*

Nesterenko a déjà démontré des résultats de même nature, tout à fait généraux, mais valides seulement en présence d'un système différentiel linéaire (cf. théorème 3 de [3]). Le système différentiel (2) n'étant pas linéaire, la théorie de [3] ne s'applique pas ; Nesterenko donne alors une démonstration *ad hoc* de la proposition 1.1 qui est élémentaire, mais difficile à adapter à d'autres situations intéressantes du point de vue arithmétique.

La méthode de Nesterenko est, en citant l'auteur (p. 162 de [6]) "une généralisation d'une idée utilisée par Siegel visée à classifier les solutions algébriques des équations différentielles de Riccati" (cf. paragraphe 1 pp. 214-222 de [10], voir aussi le lemme 3 p. 211 of [9]).

La proposition 1.1 suscite la question naturelle de connaître et caractériser complètement tous les idéaux premiers  $z(d/dz)$ -stables de  $\mathcal{R}$ , mais la méthode de Nesterenko que nous avons mentionné ci-dessus ne semble pas s'y prêter.

Dans ce texte nous donnons une réponse complète à cette question tout en introduisant une approche nouvelle, essentiellement algébrique.

Soit  $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos contenant  $\mathbb{Q}$ , soient  $P, Q, R$  des indéterminées indépendantes sur  $\mathbb{K}$ , notons  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}[P, Q, R]$ . Considérons l'anneau différentiel  $(\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}, D)$ , où la dérivation  $D$  est déterminée par les relations

$$\begin{aligned} DP &= \frac{1}{12}(P^2 - Q), \\ DQ &= \frac{1}{3}(PQ - R), \\ DR &= \frac{1}{2}(PR - Q^2), \end{aligned} \tag{3}$$

et par l'égalité  $D(\mathbb{K}) = (0)$ . Nous nous proposons de caractériser tous les idéaux premiers  $D$ -stables de  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ .

Notons que l'anneau  $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ , différentiellement isomorphe à  $\mathcal{R}$  (et que nous noterons plus simplement  $\mathcal{Y}$ ), est aussi isomorphe (différentiellement) à l'anneau des *formes quasi-modulaires* pour  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$  définies dans [1]. Nos résultats en déterminent la structure différentielle : à travers la classification de tous les idéaux premiers  $D$ -stables de cet anneau, nous caractérisons en fait (par passage au quotient) tous les anneaux différentiels intègres  $(\mathcal{A}, D')$  tels qu'il existe un morphisme différentiel surjectif :

$$(\mathcal{Y}, D) \rightarrow (\mathcal{A}, D').$$

Avant de présenter nos résultats, nous donnons des exemples d'idéaux premiers  $D$ -stables de  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ . Posons  $\Theta := Q^3 - R^2$  ; on vérifie la relation :

$$D\Theta = P\Theta, \quad (4)$$

qui implique que l'idéal principal  $(\Theta)$  est premier et  $D$ -stable.

Notons aussi  $\mathcal{P}_0 := (P^2 - Q, P^3 - R)$  et  $\mathcal{P}_{\infty} := (Q, R)$ . Ce sont deux idéaux premiers de codimension 2.

On vérifie sans aucune difficulté en utilisant (3) que l'idéal  $\mathcal{P}_0$  est l'idéal engendré par l'image de l'application  $D : \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  ; il est donc  $D$ -stable.

En ce qui concerne  $\mathcal{P}_{\infty}$ , on voit facilement que c'est l'idéal engendré par les polynômes nuls sur le lieu singulier de la surface affine d'équation  $\Theta = 0$ . En utilisant l'hypothèse  $D(\Theta) \subset (\Theta)$  et en combinant les théorèmes 2, 5 de [8], on vérifie que  $\mathcal{P}_{\infty}$  est  $D$ -stable <sup>(1)</sup>.

On vérifie par un calcul direct que si  $c \in \mathbb{K}$ , alors l'idéal maximal  $(P - c, Q - c^2, R - c^3)$  est  $D$ -stable.

Mais les idéaux ci-dessus ne couvrent pas le "spectre différentiel", l'ensemble de tous les idéaux premiers  $D$ -stables de  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ . Pour  $d \neq 0$ , soit  $\mathcal{P}_d$  l'idéal engendré par  $\Theta$  et les trois polynômes :

$$\begin{aligned} F_d &= P^2Q + Q^2 - 2PR + dR, \\ G_d &= 2PQ^2 - P^2R - QR - dQ^2, \\ H_d &= P^4 - 2P^2Q + Q^2 + 4dPQ - d^2Q. \end{aligned}$$

Pour tout  $d \neq 0$  l'idéal  $\mathcal{P}_d$  est premier (cf. lemme 3.2 lorsque  $d \neq 0$ ), contient strictement  $\Theta$  et est contenu strictement dans l'idéal  $(P, Q, R)$  ; il a donc codimension 2 <sup>(2)</sup>. De plus il est  $D$ -stable ; en effet, en utilisant les relations (3), on vérifie les égalités :

$$\begin{aligned} DF_d &= \frac{P}{2}F_d + \frac{1}{2}G_d, \\ DG_d &= -\frac{1}{2}\Theta + \frac{2}{3}QF_d + \frac{2}{3}PG_d \\ DH_d &= -\frac{1}{3}(2P - d)F_d + \frac{2}{3}G_d + \frac{P}{3}H_d. \end{aligned} \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>On peut vérifier ces propriétés aussi par un calcul direct.

<sup>2</sup>La notation  $\mathcal{P}_d$  suggère que, lorsque  $d = 0$ , un lien existe avec  $\mathcal{P}_0$  ; on vérifie que l'idéal  $\mathcal{P}_d$  avec  $d = 0$ , qui n'est pas premier, est  $\mathcal{P}_0$ -primaire d'exposant 2.

La liste d'idéaux premiers  $D$ -stables de  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  est décrite par les diagrammes suivants, paramétrés par  $c \in \mathbb{K}$  et  $d \in \mathbb{K}^{\times}$  ; ceci est le résultat principal de cet article.

$$\begin{array}{ccc}
 (P - c, Q - c^2, R - c^3) & \leftarrow & \mathcal{P}_0 \\
 & & \swarrow \\
 & & \mathcal{P}_d \leftarrow (\Delta) \\
 & \swarrow & \searrow \\
 (P, Q, R) & \leftarrow & \mathcal{P}_{\infty}
 \end{array}$$

**Théorème 1.2.** *Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier non nul  $D$ -stable de  $(\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}, D)$  ; on a les faits suivants.*

- Si  $\mathcal{P}$  a codimension 3 alors il existe un élément  $c \in \mathbb{K}$  tel que  $\mathcal{P} = (P - c, Q - c^2, R - c^3)$ .
- Si  $\mathcal{P}$  a codimension 2 alors il existe  $d \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$  tel que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_d$ .
- Si  $\mathcal{P}$  est principal, alors  $\mathcal{P} = (\Theta)$ .

Ce théorème permet de classifier tous les idéaux radicaux  $D$ -stables de  $(\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}, D)$  car d'après le théorème 1 de [8], ils sont tous intersection d'idéaux premiers  $D$ -stables.

L'anneau

$$\mathcal{R}_2 := \mathcal{R}_1[\log(z)] = \mathbb{C}[z, \log(z), E_2(z), E_4(z), E_6(z)],$$

muni de la dérivation  $z(d/dz)$  (et pour un choix quelconque d'une détermination de  $\log$ ), est un anneau différentiel, car

$$z \frac{d}{dz} \log(z) = 1$$

sur un ouvert de  $\mathbb{C}$  ; de plus les fonctions  $\log(z), z, P(z), Q(z), R(z)$  sont algébriquement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 1.3.** *Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier non nul et  $z \frac{d}{dz}$ -stable de  $\mathcal{R}_2$ . Alors  $z\Delta \in \mathcal{P}$ .*

On en déduit un raffinement de la proposition 1.1.

**Théorème 1.4.** *Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier non nul et  $z \frac{d}{dz}$ -stable de  $\mathcal{R}_1$ . Alors  $z\Delta \in \mathcal{P}$ .*

Voici le plan de cet article. Dans les paragraphes 2 et 3 nous démontrons le théorème 1.2. La structure de la preuve est en gros la suivante. Une application des propriétés des *crochets de Rankin* permet de démontrer que tout idéal premier non nul  $D$ -stable  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  contient  $\Theta$ .

Considérons ensuite le quotient  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}/(\Theta)$  ; c'est un anneau différentiel d'après la première formule (5). Le point crucial est que  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}/(\Theta)$  est essentiellement un anneau de fonctions algébriques sur un corps de fonctions rationnelles  $\mathbb{K}(U)$ . Ceci permet de décrire avec précision l'image de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}/(\Theta)$ , et le théorème 1.2 s'obtient ensuite en "relevant" les informations obtenues. Pour pouvoir utiliser facilement ces propriétés, nous allons travailler d'abord dans un sur-anneau différentiel auxiliaire  $\mathcal{A} \supset \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  (étude développée au paragraphe 2). La démonstration des théorèmes 1.3 et 1.4 sera traitée dans le paragraphe 4.

Ces deux derniers théorèmes peuvent être utilisés pour démontrer une généralisation du théorème 1.1. On peut démontrer qu'il existe une constante  $c_2 > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $\log$  la détermination principale du logarithme. Pour tout polynôme  $F \in \mathcal{R}_2$  non nul, de degré au plus  $N$  en  $\log(z)$ ,  $z$ ,  $E_2(z)$ ,  $E_4(z)$ ,  $E_6(z)$ , et pour tout  $\xi \in B \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ , où  $B$  désigne la boule ouverte complexe de centre 0 et rayon 1, l'ordre d'annulation de  $F$  en  $\xi$  satisfait :

$$\text{ord}_{\xi}(F) \leq c_2 N^5.$$

Si de plus  $F \in \mathcal{R}_1$ , alors pour tout  $\xi \in B$ , l'ordre d'annulation de  $F$  en  $\xi$  satisfait :

$$\text{ord}_{\xi}(F) \leq c_2 N^4.$$

La démonstration de cette propriété apparaîtra ailleurs. Ce sont exactement la suppression de l'hypothèse d'annulation dans la proposition 1.1, et le fait que  $\Delta$  ne s'annule pas dans  $B \setminus \{0\}$ , qui impliquent les majorations uniformes de cette estimation de multiplicité.

Nous pouvons aussi étendre le théorème 1.1 au cadre de fonctions liées à des groupes fuchsien triangulaires co-compacts ; ce sujet sera développé dans [7].

## 2 Etude différentielle d'un anneau auxiliaire.

Il convient de travailler dans un anneau auxiliaire  $\mathcal{A}$  un peu plus grand que  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ . D'après (3) on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 D\left(\frac{R}{Q}\right) &= -\frac{Q}{2} + \frac{PR}{6Q} + \frac{R^2}{3Q^2} \\
 &= \frac{1}{6}\frac{R}{Q}\left(P - \frac{R}{Q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{Q^2} - Q\right), \\
 DQ &= \frac{1}{3}(PQ - R) \\
 &= \frac{1}{3}Q\left(P - \frac{R}{Q}\right), \\
 D\left(P - \frac{R}{Q}\right) &= \frac{P^2}{12} + \frac{5Q}{12} - \frac{PR}{6Q} - \frac{R^2}{3Q^2} \\
 &= \frac{1}{12}\left(P - \frac{R}{Q}\right)^2 - \frac{5}{12}\left(\frac{R^2}{Q^2} - Q\right).
 \end{aligned}$$

En d'autres termes, si l'on pose :

$$X_1 = \frac{R}{Q}, \quad X_2 = Q, \quad X_3 = P - \frac{R}{Q},$$

alors :

$$\begin{aligned}
 DX_1 &= \frac{1}{6}X_1X_3 + \frac{1}{2}(X_1^2 - X_2), \\
 DX_2 &= \frac{1}{3}X_2X_3, \\
 DX_3 &= \frac{1}{12}X_3^2 - \frac{5}{12}(X_1^2 - X_2).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Notons :

$$\mathcal{A} = \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3].$$

D'après les formules (6) c'est un anneau différentiel pour la dérivation  $D$ . Cet anneau contient  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  : en effet,  $R = Q(R/Q)$ ,  $P = P - (R/Q) + (R/Q) \in \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  d'où  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}} \subset \mathcal{A}$ .

L'anneau  $(\mathcal{A}, D)$  possède deux idéaux principaux premiers non nuls  $D$ -stables car :

$$\begin{aligned}
 DX_2 &= \frac{1}{3}X_2X_3, \\
 D(X_1^2 - X_2) &= \frac{1}{3}(3X_1 + X_3)(X_1^2 - X_2).
 \end{aligned}$$

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 2.1.** *Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier  $D$ -stable non nul de  $\mathcal{A}$  ne contenant pas  $X_2$ . Alors  $\mathcal{P}$  est l'un des idéaux premiers suivants :*

$$\begin{aligned} & (X_1^2 - X_2) \\ & (X_1 - c, X_2 - c^2, X_3) \\ & (X_3, X_1^2 - X_2) \\ & (X_1^2 - X_2, X_3^2 + dX_1), \end{aligned}$$

pour  $c, d \in \mathbb{K}^\times$ .

Le lecteur peut vérifier que tous ces idéaux sont premiers et  $D$ -stables en utilisant (6). La proposition 2.1 s'obtient en combinant les propositions 2.2, 2.3 et 2.4 qui suivent, et qui classifient les idéaux premiers  $D$ -stables de codimension respectivement 1, 2, 3.

L'anneau  $\mathcal{A}$  est gradué en assignant à  $X_1, X_3$  le poids 2 et à  $X_2$  le poids 4. Un élément  $M$  de  $\mathcal{A}$  est dit *isobare de poids*  $p(M) \in 2\mathbb{N}$  s'il est homogène de degré  $p(M)$  par rapport à cette graduation. Cette graduation provient des poids des formes quasi-modulaires ; les poids de  $E_2, E_4, E_6$  sont respectivement 2, 4, 6. Si on assigne à  $P, Q, R$  les poids 2, 4, 6, alors  $p(X_1) = p(R) - p(Q) = 2$ ,  $p(X_2) = p(Q) = 4$  et  $p(X_3) = 2$ .

Un idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{A}$  est dit *isobare* s'il admet un système de générateurs isobares (de poids non nécessairement égaux). La dérivation  $D$  est *isobare* (ou  $p$ -homogène) de poids 2 ; si  $X \in \mathcal{A}$  est un élément isobare de poids  $p(X)$ , alors  $DX$  est isobare de poids  $p(X) + 2$ .

Sur  $\mathcal{A}$  il existe une autre graduation  $q$ , qui est déterminée en assignant à  $X_1, X_2, X_3$  les degrés  $q(X_1) = 2, q(X_2) = 4, q(X_3) = 1$  ; la dérivation  $D$  n'est pas  $q$ -isobare mais on vérifie, en utilisant (6), que pour tout élément  $q$ -homogène  $X \in \mathcal{A}$ , il existe un unique élément  $Y \in \mathbb{C}[X_1, X_3]$  qui est  $q$ -homogène tel que  $q(Y) = q(X) + 1$ , et tel que  $Y \equiv DX \pmod{(X_1^2 - X_2)}$ .

La proposition 2.1 implique que si  $\mathcal{P}$  est un idéal premier  $D$ -stable de  $\mathcal{A}$  de codimension 2, alors ou bien il est engendré par deux éléments  $p$ -homogènes non nuls, ou bien il est engendré par un élément  $p$ -homogène non nul et un élément  $q$ -homogène non nul, d'où l'intérêt d'introduire la graduation  $q$ .

## 2.1 Idéaux principaux $D$ -stables.

Ici nous démontrons la proposition suivante.

**Proposition 2.2.** *Soit  $H$  un polynôme non constant, irréductible de  $\mathcal{A} = \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$  qui ne soit pas de la forme  $c(X_1^2 - X_2)$  avec  $c \in \mathbb{K}^\times$  et tel que  $DH = VH$  avec  $V \in \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$ . Alors  $V = (1/3)X_3$  et  $(H) = (X_2)$ .*

Avant de démontrer la proposition 2.2, nous introduisons un anneau différentiel quotient de  $\mathcal{A}$  (de type “parabolique”) muni de deux graduations compatibles avec la structure différentielle, et nous démontrons un lemme qui caractérise le corps des constantes de son corps différentiel de fractions et ses idéaux principaux différentiellement stables.

On considère l’anneau  $\mathcal{A}/(X_1^2 - X_2)$  et la projection

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/(X_1^2 - X_2).$$

Posons

$$Y_1 := \pi(X_1), \quad Y_3 := \pi(X_3),$$

de telle sorte que  $Y_1^2 = \pi(X_2)$  ; alors

$$\mathcal{A}/(X_1^2 - X_2) = \mathbb{K}[Y_1, Y_3].$$

Puisque  $(X_1^2 - X_2)$  est  $D$ -stable, l’anneau  $(\mathbb{K}[Y_1, Y_3], \delta)$  est un anneau différentiel, avec la dérivation induite  $\delta = D + (X_1^2 - X_2)$ . De plus,  $\delta \circ \pi = \pi \circ D$  et on a les relations :

$$\begin{aligned} \delta Y_1 &:= \frac{1}{6} Y_1 Y_3 \\ \delta Y_3 &:= \frac{1}{12} Y_3^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Sur  $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$  nous considérons deux graduations. La première graduation  $\mathcal{F}$  est induite par la graduation  $p$  sur  $\mathcal{A}$ , de telle sorte que les degrés de  $Y_1$  et  $Y_3$  soient égaux à 2. La deuxième graduation  $\mathcal{G}$  est induite par la graduation  $q$  en assignant à  $Y_1$  le degré 2 et à  $Y_3$  le degré 1 (noter que  $X_1^2 - X_2$  est  $q$ -homogène de degré 4).

Les éléments non nuls de  $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$  de  $\mathcal{F}$ -degré 0, tout aussi comme les éléments non nuls de  $\mathcal{G}$ -degré 0, sont tous et seulement les éléments de  $\mathbb{K}^\times$ .

La dérivation  $\delta$  a la propriété d’envoyer un élément  $\mathcal{F}$ -homogène de degré  $m$  sur un élément  $\mathcal{F}$ -homogène de degré  $m + 2$ , et un élément  $\mathcal{G}$ -homogène de degré  $n$  sur un élément  $\mathcal{G}$ -homogène de degré  $n + 1$  ; en d’autres termes  $\delta$  est à la fois  $\mathcal{F}$ -homogène de degré 2 et  $\mathcal{G}$ -homogène de degré 1.

**Lemme 2.1.** *Le corps des fractions différentiel  $(\mathbb{K}(Y_1, Y_3), \delta)$  <sup>(3)</sup> a pour sous-corps des constantes  $C$  le corps  $\mathbb{K}(Y_1/Y_3^2)$ . On a  $C \cap \mathbb{K}[Y_1, Y_3] = \mathbb{K}$ . Soit  $L \in \mathbb{K}[Y_1, Y_3] \setminus \mathbb{K}$  : on a que  $L$  divise  $\delta L$  dans  $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$  si et seulement si  $L$  est un polynôme de  $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$  homogène par rapport à  $\mathcal{G}$ . Dans ce cas,  $\delta L/L = \mu Y_3$  avec  $\mu \in (1/12)\mathbb{Z}$ .*

<sup>3</sup>On considère l’extension naturelle de  $\delta$  fournie par la règle de dérivation des fractions :  $\delta(a/b) = (b(\delta a) - a(\delta b))/b^2$ .

**Démonstration.** Noter que  $\delta(Y_1/Y_3^2) = 0$ , donc  $\delta F = 0$  pour tout  $F \in C$  d'après (7). Posons  $U = Y_1/Y_3^2, V = Y_3$  : on a  $\mathbb{K}(Y_1, Y_3) = \mathbb{K}(U, V)$  et  $\delta U = 0, \delta V = (1/12)V^2$ . Soit  $R \in \mathbb{K}(U, V)$  ; on a

$$\begin{aligned}\delta R &= \frac{\partial R}{\partial U}(\delta U) + \frac{\partial R}{\partial V}(\delta V) \\ &= \frac{\partial R}{\partial V} \frac{V^2}{12}.\end{aligned}$$

Donc  $\delta R = 0$  si et seulement si  $\partial R/\partial V = 0$ , d'où  $C = \mathbb{K}(Y_1/Y_3^2)$  ; on en déduit que  $C \cap \mathbb{K}[Y_1, Y_3] = \mathbb{K}$ .

Soit  $L \in \mathbb{K}[Y_1, Y_2]$  homogène de degré  $n$  par rapport à la graduation  $\mathcal{G}$  ; on peut écrire ( $c_{a,b} \in \mathbb{K}$ ) :

$$L = \sum_{2a+b=n} c_{a,b} Y_1^a Y_3^b.$$

On a :

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial Y_1}(\delta Y_1) + \frac{\partial L}{\partial Y_3}(\delta Y_3) \\ &= \frac{1}{6} Y_3 \left( Y_1 \frac{\partial L}{\partial Y_1} + \frac{Y_3}{2} \frac{\partial L}{\partial Y_3} \right) \\ &= \frac{1}{6} Y_3 \sum_{2a+b=n} c_{a,b} (a + b/2) Y_1^a Y_3^b \\ &= \frac{n}{12} Y_3 L.\end{aligned}\tag{8}$$

Soit maintenant  $L \in \mathbb{K}[Y_1, Y_3]$  tel que  $\delta L = ML$  avec  $M \in \mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ . Si  $L \notin \mathbb{K}$ , alors  $M \neq 0$ , car  $C \cap \mathbb{K}[Y_1, Y_3] = \mathbb{K}$ . On peut écrire :

$$L = L_h + L_{h+1} + \cdots + L_k, \quad M = M_s + M_{s+1} + \cdots + M_t \tag{9}$$

avec  $L_h, L_k, M_s, M_t$  non nuls,  $L_i$   $\mathcal{F}$ -homogène de degré  $i$  et  $M_j$   $\mathcal{F}$ -homogène de degré  $j$ . On a :

$$\delta L = \delta L_h + \cdots + \delta L_k = (M_s + M_{s+1} + \cdots + M_t)(L_h + L_{h+1} + \cdots + L_k),$$

d'où  $\delta L_h = M_s L_h$  et  $\delta L_k = M_t L_k$ . Comme  $\delta$  est homogène de degré 2 par rapport à  $\mathcal{F}$ , on en déduit que  $L_h \notin \mathbb{K}$  et  $s = t = 2$ . Donc  $\delta L = (\lambda Y_1 + \mu Y_3)L$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Ecrivons  $L = Y_3^l L'$  avec  $L' \in \mathbb{K}[Y_1, Y_3]$  non divisible par  $Y_3$ . On a aussi :

$$\begin{aligned}\lambda Y_1 Y_3^l L' + \mu Y_3^{l+1} L' = \delta L &= \delta(Y_3^l L') \\ &= (l/12) Y_3^{l+1} L' + Y_3^l \delta L'.\end{aligned}$$

La définition de  $\delta$  implique que  $Y_3$  divise  $\delta L'$  (d'après (7) l'image de  $\delta$  est contenue dans l'idéal engendré par  $Y_3$ ). Donc  $Y_3$  divise  $\lambda Y_1$ , ce qui implique  $\lambda = 0$  et

$$\delta L = \mu Y_3 L. \quad (10)$$

Ecrivons  $L = L_{i_1} + \dots + L_{i_r}$  avec  $L_{i_k}$  non nul et homogène de degré  $i_k$  par rapport à la graduation  $\mathcal{G}$ , les  $i_k$  distincts et  $r \geq 1$ . En appliquant (8) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta L_{i_1} + \dots + \delta L_{i_r} \\ &= Y_3 \left( \frac{i_1}{12} L_{i_1} + \dots + \frac{i_r}{12} L_{i_r} \right). \end{aligned}$$

En combinant cette égalité avec (10) on trouve :

$$\frac{i_1}{12} L_{i_1} + \dots + \frac{i_r}{12} L_{i_r} = \mu (L_{i_1} + \dots + L_{i_r}).$$

Si  $r > 1$  on trouve une contradiction ; si  $r = 1$  alors  $\mu = i_1/12$  et  $L$  est homogène par rapport à  $\mathcal{G}$ .  $\square$

### Démonstration de la proposition 2.2.

Supposons que la relation  $DH = VH$  soit satisfaite et montrons l'homogénéité de  $V$  pour la graduation  $p$ . Ecrivons :

$$H = H_h + H_{h+1} + \dots + H_k, \quad V = V_s + V_{s+1} + \dots + V_t$$

avec  $H_h, H_k, V_s, V_t$  non nuls et pour tout  $i, j$ ,  $H_i$  isobare de poids  $i$  et  $V_j$  isobare de poids  $j$ . On a :

$$\begin{aligned} DH &= DH_h + \dots + DH_k \\ &= (V_s + V_{s+1} + \dots + V_t)(H_h + H_{h+1} + \dots + H_k), \end{aligned}$$

d'où  $DH_h = V_s H_h$  et  $DH_k = V_t H_k$ . On en déduit que  $s = t = 2$ . Donc  $V = V_2 = \lambda X_1 + \mu X_3$  (non nul car  $H$  n'est pas constant) avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

Montrons ensuite que  $V = \mu X_3$  avec  $\mu \in \mathbb{Q}^\times$ . On a que  $\pi(DH) = \delta(\pi(H)) = \pi(V)\pi(H)$  dans  $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ . Posons  $L = \pi(H)$  et  $M = \pi(V)$  : on a  $\delta L = ML$ . D'après le lemme 2.1,  $L$  est  $\mathcal{G}$  homogène de degré  $n$  et  $V = \lambda X_1 + \mu X_3$  est congru à  $\mu X_3$  modulo  $(X_1^2 - X_2)$  avec  $\mu = n/12$  ; comme il est de poids 2,  $V = \mu X_3$ . En particulier,  $\mu \in \mathbb{Q}^\times$ . Ainsi :

$$DH/H = \mu X_3, \quad DX_2/X_2 = (1/3)X_3$$

sont  $\mathbb{Z}$ -linéairement dépendants, ce qui implique l'existence d'entiers  $\alpha, \beta$ , non tous nuls, avec  $H^\alpha X_2^\beta \in \mathbb{K}^\times$ . Comme  $H$  est un polynôme irréductible en  $X_1, X_2, X_3$ , ceci implique  $(H) = (X_2)$  et  $\mu = 4/12 = 1/3$ .  $\square$

## 2.2 Idéaux $D$ -stables de codimension 2.

Dans cette partie, nous démontrons la proposition suivante.

**Proposition 2.3.** *Soit  $\mathcal{Q}$  un idéal premier de  $\mathcal{A}$  de codimension 2,  $D$ -stable, ne contenant pas  $X_2$ . Alors, soit  $\mathcal{Q} = (X_3, X_1^2 - X_2)$ , soit il existe un élément  $d \in \mathbb{K}^\times$  tel que*

$$\mathcal{Q} = (X_1^2 - X_2, X_3^2 + dX_1).$$

Pour démontrer cette proposition, nous allons distinguer deux cas, selon que  $\mathcal{Q}$  est isobare ou non. Si  $\mathcal{Q}$  est isobare, alors le lemme 2.3 ci-dessous implique que  $X_1^2 - X_2 \in \mathcal{Q}$ . Si  $\mathcal{Q}$  n'est pas isobare, alors le lemme 5.2 de l'appendice implique que  $\mathcal{Q}$  contient un idéal non nul, isobare principal et  $D$ -stable, égal à  $(X_1^2 - X_2)$  d'après la proposition 2.2. Dans tous les cas donc,  $\mathcal{Q}$  contient l'idéal  $(X_1^2 - X_2)$  et l'image de  $\mathcal{Q}$  par  $\pi$  est un idéal principal  $\delta$ -stable non nul de  $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$  que nous étudions ensuite, en appliquant les résultats du paragraphe 2.1.

Nous démontrons le lemme qui suit, où nous utilisons les crochets de Rankin, qui sont définis uniquement sur des polynômes isobares de  $\mathcal{A}$ , mais pas sur des polynômes quelconque. Le crochet de Rankin  $[U, V]$  de deux polynômes isobares  $U, V$  est défini par

$$[U, V] = p(U)U(DV) - p(V)V(DU).$$

Voici les propriétés principales du crochet.

**Lemme 2.2.** *Soient  $X, Y, M$  des éléments isobares de  $\mathcal{A}$ .*

- *Si  $X \in \mathcal{A}$  est de poids  $x$  et  $Y$  est de poids  $y$ , alors  $[X, Y] = -[Y, X]$  est isobare de poids  $x + y + 2$ .*
- *Si  $X, Y$  ont même poids, alors l'application  $d_M(X) := [X, M]$  satisfait  $d_M(X + Y) = d_M(X) + d_M(Y)$ .*
- *On a  $d_M(XY) = d_M(X)Y + Xd_M(Y)$ .*
- *Si  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$  qui est  $D$ -stable, et  $X \in \mathcal{I}$ , alors  $d_M(X) \in \mathcal{I}$ .*

Les premières deux propriétés sont triviales. Démontrons la troisième propriété. On a :

$$\begin{aligned} d_M(XY) = [XY, M] &= p(XY)XYDM - p(M)MD(XY) \\ &= (p(X) + p(Y))XYDM - \\ &\quad p(M)M((DX)Y + XDY) \\ &= (p(X)XDM - p(M)MDX)Y + \\ &\quad X(p(Y)YDM - p(M)MDY) \\ &= d_M(X)Y + Xd_M(Y). \end{aligned}$$

Démontrons la quatrième propriété. Si  $X \in \mathcal{I}$  et  $M$  est isobare, alors  $DX \in \mathcal{I}$  car  $\mathcal{I}$  est  $D$ -stable. Donc  $XDM, MDX \in \mathcal{I}$ , et  $d_M(X) = p(X)XDM - p(M)MDX \in \mathcal{I}$ .  $\square$

**Lemme 2.3.** *Tout idéal premier isobare  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{A}$ ,  $D$ -stable et de codimension 2, ne contenant pas  $X_2$ , contient l'idéal principal  $(X_1^2 - X_2)$ .*

**Démonstration.** Nous pouvons supposer que  $\mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_2] = (0)$ . En effet, si  $\mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_2] \neq (0)$  alors  $X_2 - a \in \mathcal{Q}$  avec  $a \in \mathbb{K}$  car  $\mathcal{Q}$  est premier. Mais  $a = 0$  car  $\mathcal{Q}$  est isobare, d'où  $X_2 \in \mathcal{Q}$  et  $d_{X_1}(X_2) \in \mathcal{Q}$  grâce au lemme 2.2, car  $\mathcal{Q}$  est  $D$ -stable. Or :

$$\begin{aligned} d_{X_1}(X_2) &= 4X_2DX_1 - 2X_1DX_2 \\ &= 2(X_1^2 - X_2)X_2 \end{aligned}$$

d'où le lemme dans ce cas car comme  $\mathcal{Q}$  est premier, il contient un des facteurs de  $(X_1^2 - X_2)X_2$ .

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, qu'il existe un polynôme isobare et non nul  $M \in \mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_1, X_2]$ . En effet, si  $\mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_1, X_2] = (0)$ , alors  $\mathcal{Q}$  serait principal. Donc  $\mathcal{Q}$  contient un élément non nul  $F$  de  $\mathbb{K}[X_1, X_2]$  ; écrivons  $F = \sum_i F_i$  avec  $F_i \in \mathbb{K}[X_1, X_2]$  isobare de poids  $i$ . Comme  $\mathcal{Q}$  est isobare,  $F_i \in \mathcal{Q}$  pour tout  $i$  (voir le lemme 5.2 de l'appendice), d'où l'existence de  $M$ .

Remarquons que  $M$  dépend de  $X_1$  car  $\mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_2] = (0)$  : choisissons  $M$  de degré minimal par rapport à  $X_1$ .

A nouveau, grâce au lemme 2.2, on a  $d_{X_2}(M) \in \mathcal{Q}$ . On a :

$$\begin{aligned} d_{X_2}(M) &= \frac{\partial M}{\partial X_1}d_{X_2}(X_1) + \frac{\partial M}{\partial X_2}d_{X_2}(X_2) + \frac{\partial M}{\partial X_1}d_{X_2}(X_1) \\ &= \frac{\partial M}{\partial X_1}d_{X_2}(X_1) \\ &= -\frac{\partial M}{\partial X_1}d_{X_1}(X_2) \\ &= -2\frac{\partial M}{\partial X_1}(X_1^2 - X_2)X_2, \end{aligned}$$

car  $\partial M/\partial X_1 = 0$  et  $d_{X_2}(X_2) = 0$ . Comme  $\mathcal{Q}$  est premier, on a soit  $\partial M/\partial X_1 \in \mathcal{Q}$ , soit  $X_1^2 - X_2 \in \mathcal{Q}$  car  $X_2 \notin \mathcal{Q}$ . Si  $X_1^2 - X_2 \in \mathcal{Q}$  nous avons terminé. Sinon, on a  $M' = \partial M/\partial X_1 \in \mathcal{Q}$  : comme  $M$  est de degré minimal par rapport à  $X_1$ , il faut que  $M' = 0$ . Dans ce cas,  $M \in \mathbb{K}[X_2] \setminus \{0\}$ , mais ceci est impossible car nous avons supposé que  $\mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_2] = (0)$ .  $\square$

### Démonstration de la proposition 2.3.

Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathcal{A}$  ; on note  $\tilde{\mathcal{I}}$  l'idéal engendré par les polynômes isobares de  $\mathcal{I}$ . D'après le lemme 5.2 de l'appendice,  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est non nul, premier et  $D$ -stable. Si  $\mathcal{Q}$  n'est pas isobare, alors  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est de codimension 1 donc principal non nul et  $\tilde{\mathcal{Q}} = (X_1^2 - X_2)$  d'après la proposition 2.2. Si  $\mathcal{Q}$  est isobare alors le lemme 2.3 implique que  $\mathcal{Q}$  contient  $X_1^2 - X_2$ . Dans les deux cas,  $\mathcal{Q}$  contient  $X_1^2 - X_2$  et donc  $\pi(\mathcal{Q})$  est un idéal principal non nul et  $\delta$ -stable de  $(\mathbb{K}[Y_1, Y_3], \delta)$ . Soit  $L$  un de ses générateurs ; d'après le lemme 2.1,  $L$  est  $\mathcal{G}$ -homogène. La projection  $\pi$  induit un isomorphisme  $\mathbb{K}[X_1, X_3] \cong \mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ , et puisque  $\mathcal{Q}$  contient  $X_1^2 - X_2$ , on a que  $\mathcal{Q}$  contient aussi un élément non nul  $W \in \mathbb{K}[X_1, X_3]$ ,  $q$ -homogène, tel que  $\pi(W) = L$ .

La  $q$ -homogénéité de  $W$  implique :

$$W = X_3^s \prod_{i=1}^t (\alpha_i X_1 - \beta_i X_3^2),$$

avec  $s \in \{0, 1\}$  et  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$  pour tout  $i = 1, \dots, t$ . Mais  $\mathcal{Q}$  est premier, et contient un facteur irréductible de  $W$ . Ainsi, il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  (non tous nuls) tels que  $\alpha X_1 - \beta X_3^2 \in \mathcal{Q}$ . On en déduit dans ce cas que :

$$\mathcal{Q} = (X_1 - X_2^2, X_3), \quad \text{ou} \quad \mathcal{Q} = (X_1^2 - X_2, X_3^2 + dX_1) \text{ avec } d \in \mathbb{K}^\times.$$

□

### 2.3 Idéaux $D$ -stables de codimension 3.

La proposition suivante complète la description des idéaux premiers  $D$ -stables de  $\mathcal{A}$  ne contenant pas  $X_2$ , et permet de terminer la preuve de la proposition 2.1.

**Proposition 2.4.** *Soit  $\mathcal{Q}$  un idéal premier de codimension 3,  $D$ -stable de  $\mathcal{A}$ . Alors  $\mathcal{Q}$  est égal à l'un des idéaux suivants :*

$$\mathcal{Q} = (X_1 - c, X_2 - c^2, X_3).$$

avec  $c \in \mathbb{K}$ .

**Démonstration.** Ici,  $\mathcal{Q}$  est un idéal maximal  $\mathcal{Q} = (X_1 - u, X_2 - v, X_3 - w)$ , pour quelques  $u, v, w \in \mathbb{K}$ . Pour que  $D(X_1 - u), D(X_2 - v), D(X_3 - w) \in \mathcal{Q}$ , il faut que ces polynômes s'annulent tous en  $(u, v, w)$ . On doit résoudre les équations :

$$\begin{aligned} uw + u^2 - v &= 0 \\ vw &= 0 \\ w^2 - 2(u^2 - v) &= 0, \end{aligned}$$

pour obtenir les nécessaires conditions de compatibilité sur  $u, v, w$ . On trouve :  $u = c, v = c^2, w = 0$  avec  $c \in \mathbb{K}$ . Mais pour ce choix,  $\mathcal{Q}$  est  $D$ -stable :

$$\begin{aligned} D(X_1 - c) &= \frac{1}{6}((c + X_1 + X_3)(X_1 - c) - (X_2 - c^2) + cX_3) \\ D(X_2 - c^2) &= \frac{1}{3}(X_3(X_2 - c^2) + c^2X_3) \\ DX_3 &= \frac{1}{12}(-2(c + X_1)(X_1 - c) + 2(X_2 - c^2) + X_3^2). \end{aligned}$$

□

### 3 Démonstration du théorème 1.2.

Nous commençons avec deux lemmes préliminaires.

**Lemme 3.1.** *Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier de  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  ne contenant pas  $Q$  : on a que  $\mathcal{A}\mathcal{P} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = \mathcal{P}$ .*

**Démonstration.** Posons  $\mathcal{T} = \mathcal{A}\mathcal{P}$  ; on a clairement  $\mathcal{P} \subset \mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ . Soit  $q \in \mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  ; on a

$$q = a_1p_1 + \cdots + a_s p_s \quad (11)$$

avec  $a_i \in \mathcal{A}$  et  $p_i \in \mathcal{P}$  pour tout  $i$ . Il existe un entier  $l \geq 0$  tel que  $r_i := Q^l a_i \in \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  pour tout  $i$ . Donc

$$Q^l q = \sum_i r_i p_i \in \mathcal{P}.$$

Mais  $Q^l \notin \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}$  est premier. Donc  $q \in \mathcal{P}$ , d'où  $\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} \subset \mathcal{P}$ . □

**Lemme 3.2.** *Si  $d \in \mathbb{K}^\times$ , alors l'idéal  $\mathcal{P}_d$  est premier de codimension 2, et son lieu de zéros est la sextique affine lisse image de la paramétrisation  $t \mapsto (\sqrt{-d}t + t^2, t^4, t^6)$ .*

**Démonstration.** On commence par déterminer le lieu des zéros de  $\mathcal{P}_d$  dans l'espace affine  $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ . Puisque  $\Theta \in \mathcal{P}_d$  et  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, on se ramène à déterminer les zéros de la forme  $(s, t^4, t^6)$  avec  $s, t \in \mathbb{K}$ . Observons que :

$$F_d(s, t^4, t^6) = t^4 U, \quad G_d(s, t^4, t^6) = -t^6 U, \quad H_d(s, t^4, t^6) = UV,$$

avec

$$\begin{aligned} U &= s^2 + t^4 - t^2(2s - d) \\ V &= s^2 + t^4 + t^2(2s - d). \end{aligned}$$

Comme  $t$  ne divise pas  $V$ , on a  $F_d(s, t^4, t^6) = G_d(s, t^4, t^6) = H_d(s, t^4, t^6) = 0$  si et seulement si  $U = 0$ , c'est-à-dire :

$$s = \pm\sqrt{-dt} + t^2.$$

Puisque  $\sqrt{-dt} + t^2 = -\sqrt{-d}(-t) + (-t)^2$ , le lieu des zéros de  $\mathcal{P}_d$  est égal à la sextique affine lisse  $\mathcal{C}_d$  image de la paramétrisation :

$$t \mapsto (\sqrt{-dt} + t^2, t^4, t^6)$$

(isomorphe à la droite affine). Comme  $\mathcal{C}_d$  est irréductible,  $\mathcal{P}_d$  est primaire.

Montrons que  $\mathcal{P}_d$  est réduit ; il suffit de montrer que la matrice jacobienne  $J$  des polynômes  $\Theta, F_d, G_d, H_d$  par rapport aux inconnues  $P, Q, R$  a rang 2 partout dans  $\mathcal{C}_d$ . Tout d'abord, on a :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial P} & \frac{\partial \Theta}{\partial Q} \\ \frac{\partial F_d}{\partial P} & \frac{\partial F_d}{\partial Q} \end{pmatrix} = 4R(PQ - R),$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial P} & \frac{\partial \Theta}{\partial R} \\ \frac{\partial F_d}{\partial P} & \frac{\partial F_d}{\partial R} \end{pmatrix} = -6Q^2(Q^2 - PR).$$

Si  $(P, Q, R) \neq (0, 0, 0)$ , ces deux mineurs de  $J$  ne peuvent pas être tous les deux nuls sur  $\mathcal{C}_d$  car cela reviendrait à dire que  $P = c, Q = c^2, R = c^3$  pour quelques  $c \in \mathbb{K}^\times$  et  $\mathcal{C}_d$  ne contient aucun point de cette forme si  $d \neq 0$ .

D'autre part, si  $(P, Q, R) = (0, 0, 0)$ , le mineur de  $J$  :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_d}{\partial Q} & \frac{\partial F_d}{\partial R} \\ \frac{\partial H_d}{\partial Q} & \frac{\partial H_d}{\partial R} \end{pmatrix} = -(2P - d)(2P^2 - 2Q - 4Pd + d^2)$$

vaut  $d^3 \neq 0$ , donc  $\mathcal{P}_d$  est réduit.

Comme  $\mathcal{P}_d$  est primaire et réduit, il est premier.  $\square$

Nous pouvons compléter la démonstration du théorème 1.2. Supposons que  $\mathcal{P}$  soit un idéal premier  $D$ -stable de  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ . Supposons d'abord que  $Q \in \mathcal{P}$  ; l'égalité  $DQ = (1/3)(PQ - R)$  implique que  $R \in \mathcal{P}$ , et  $\mathcal{P}$  a codimension  $\geq 2$ . Si la codimension de  $\mathcal{P}$  est 2 alors  $\mathcal{P} = (Q, R)$ . Si la codimension de  $\mathcal{P}$  est 3 alors  $\mathcal{P}$  est un idéal maximal qui contient  $Q, R$ , donc il contient  $P - c$  pour une constante  $c \in \mathbb{K}$ . On vérifie facilement que  $c = 0$  est le seul élément de  $\mathbb{K}$  tel que  $(P - c, Q, R)$  soit  $D$ -stable.

Les seuls idéaux premiers non nuls  $D$ -stables de  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  qui contiennent  $Q$  sont donc :

$$(Q, R), \quad (P, Q, R).$$

Supposons maintenant que  $Q \notin \mathcal{P}$ . D'après le lemme 3.1, l'idéal  $\mathcal{T} = \mathcal{A}\mathcal{P}$  satisfait  $\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = \mathcal{P}$  ; il est de plus  $D$ -stable. Le lemme 5.3 de l'appendice implique qu'il existe un idéal premier  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{A}$ ,  $D$ -stable, tel que  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = \mathcal{P}$  et donc  $\mathcal{Q}$  est l'un des idéaux décrits dans la proposition 2.1 pour quelque  $c$  ou  $d$ .

Pour terminer la preuve du théorème 1.2 il faut calculer, pour chaque  $\mathcal{Q}$  idéal premier de  $\mathcal{A}$  décrit dans la proposition 2.1, l'idéal premier  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  qui est forcément  $D$ -stable ; nous considérons quatre cas.

(1). Comme  $\Theta = X_2^2(X_2 - X_1^2)$ , on voit tout de suite l'égalité  $(X_2 - X_1^2) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = (\Theta)$ .

(2). En utilisant les égalités  $P = X_3 + X_1, Q = X_2, R = X_1X_2$  on vérifie facilement que l'idéal  $(X_1 - c, X_2 - c^2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ , qui est premier, contient  $P - c, Q - c^2$  et  $R - c^3$ . Comme l'idéal  $(P - c, Q - c^2, R - c^3)$  est maximal, on trouve :

$$\mathcal{A}(X_1 - c, X_2 - c^2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = (P - c, Q - c^2, R - c^3).$$

(3). En faisant comme au point (2), on vérifie aussi que l'idéal premier  $(X_1^2 - X_2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  contient  $P^2 - Q$  et  $P^3 - R$ . Comme  $\mathcal{A}(X_1^2 - X_2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  est de codimension 2 et comme l'idéal  $(P^2 - Q, P^3 - R)$  est premier de codimension 2, on a :

$$\mathcal{A}(X_1^2 - X_2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = (P^2 - Q, P^3 - R).$$

(4). Pour terminer la démonstration du théorème 1.2 nous devons encore démontrer que, pour  $d$  un élément non nul de  $\mathbb{K}$ , si l'on pose

$$\mathcal{Q}_d := (X_1^2 - X_2, X_3^2 + dX_1) \subset \mathcal{A}$$

alors  $\mathcal{Q}_d \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = \mathcal{P}_d$ . On a les égalités :

$$\begin{aligned} \Theta &= X_2(X_1^2 - X_2), \\ F_d &= X_2(-(X_1^2 - X_2) + (X_3 + dX_1)), \\ G_d &= X_2((d - X_1 - 2X_3)(X_1^2 - X_2) - X_1(X_3 + dX_1)), \\ H_d &= (X_1^2 + 4X_1X_3 + 6X_3^2 - X_2 - 4dX_3 + d^2)(X_1^2 - X_2) + \\ &\quad (4X_1X_3 + X_3^2 + 4X_2 - dX_1)(X_3 + dX_1), \end{aligned}$$

ce qui implique  $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{Q}_d \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ . Comme l'idéal premier  $\mathcal{Q}_d \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  a codimension 2, le lemme 3.2 implique l'égalité  $\mathcal{P}_d = \mathcal{Q}_d \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ . La preuve du théorème 1.2 est terminée.  $\square$

## 4 Démonstration des théorèmes 1.3 et 1.4.

Nous démontrons d'abord le théorème 1.3. On considère l'anneau de polynômes en cinq indéterminées

$$\mathcal{N} := \mathbb{C}[L, Z, P, Q, R],$$

et ses sous-anneaux

$$\mathcal{Y} = \mathbb{C}[P, Q, R], \quad \mathcal{L} := \mathbb{C}[L, Z].$$

Nous étudions la dérivation  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{N}$  définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}S &= \\ &= \frac{1}{12}(P^2 - Q)\frac{\partial S}{\partial P} + \frac{1}{3}(PQ - R)\frac{\partial S}{\partial Q} + \frac{1}{2}(PR - Q^2)\frac{\partial S}{\partial R} + Z\frac{\partial S}{\partial Z} + \frac{\partial S}{\partial L}, \end{aligned}$$

pour  $S \in \mathcal{N}$ . Les sous-anneaux  $\mathcal{Y}, \mathcal{L}$ , munis de la dérivation  $\mathcal{E}$ , sont des sous-anneaux différentiels. Puisque  $\log(z), z, E_2(z), E_4(z), E_6(z)$  sont des fonctions algébriquement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ , on a l'isomorphisme d'anneaux différentiels

$$(\mathcal{N}, \mathcal{E}) \cong \left( \mathcal{R}_2, z \frac{d}{dz} \right) \quad (12)$$

défini en associant  $\log(z) \mapsto L, z \mapsto Z, E_2 \mapsto P, E_4 \mapsto Q, E_6 \mapsto R$ . Soit  $\mathbb{K}$  une clôture algébrique du corps des fractions de  $\mathcal{L}$ . Sur

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{K}} := \mathbb{K}[P, Q, R] \supset \mathcal{N}$$

nous avons la dérivation  $D$  définie par les relations (3) et par  $D(\mathbb{K}) = 0$ . Sur  $\mathcal{N}$  nous avons aussi la dérivation  $D'$  définie par  $D'(\mathcal{Y}) = 0$  et par les relations  $D'Z = Z, D'L = 1$ . Clairement, pour  $S \in \mathcal{N}$ , on a :

$$\mathcal{E}S = DS + D'S.$$

Un élément de  $\mathcal{N}$  est dit *isobare de poids  $s$*  s'il s'exprime comme une somme de monômes

$$L^a Z^b P^{t_1} Q^{t_2} R^{t_3}$$

avec  $2t_1 + 4t_2 + 6t_3 = s$ .

Si  $F \in \mathcal{N}$  alors nous notons  $p(F)$  le plus grand poids d'un monôme de  $F$  ; on a  $p(DF) \leq p(F) + 2$ . D'autre part, pour  $F \in \mathcal{N}$  non nul, on a clairement  $\deg_Z(DF) \leq \deg_Z(F)$  et  $\deg_L(DF) \leq \deg_L(F)$ . Nous démontrons le lemme qui suit, qui généralise le lemme 5.2 p. 161 de [6].

**Lemme 4.1.** *Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier principal non nul de  $\mathcal{N}$  qui est  $\mathcal{E}$ -stable. Alors  $\mathcal{P} = (\Theta)$  ou  $\mathcal{P} = (Z)$ .*

**Démonstration.** Soit  $M \in \mathcal{N}$  un polynôme non nul et irréductible tel que

$$\mathcal{E}M = FM, \quad (13)$$

avec  $F \in \mathcal{N}$  ; nous devons démontrer que soit  $M = c\Theta$ , soit  $M = cZ$ , avec  $c \in \mathbb{C}^\times$ .

Comme  $p(\mathcal{E}M) = p(F) + p(M)$ , on a que  $p(F) \leq 2$ . Comme  $\deg_Z(\mathcal{E}M) = \deg_Z(F) + \deg_Z(M)$  et  $\deg_L(\mathcal{E}M) = \deg_L(F) + \deg_L(M)$ , on a que  $\deg_Z(F) = \deg_L(F) = 0$  et

$$F = \lambda_1 P + \lambda_2 \quad (14)$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . On a aussi  $F \neq 0$  car  $M$  étant irréductible, il est non constant, et d'après l'isomorphisme (12), le sous-corps des constantes du corps des fractions de  $\mathcal{N}$  pour la dérivation  $\mathcal{E}$  est  $\mathbb{C}$ .

Notre but est maintenant de montrer que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$  dans (14). Nous commençons par démontrer que  $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ .

Ecrivons

$$M = M_h + M_{h+1} + \cdots + M_k, \quad (15)$$

avec  $0 \leq h \leq k$ ,  $M_i$  homogène de poids  $i$  et  $M_h, M_k$  non nuls.

Ecrivons également

$$M_k = \sum_{j=1}^t c_j V_j,$$

avec  $V_1, \dots, V_t \in \mathcal{Y}$  isobares de poids  $k$ , et  $c_j \in \mathcal{L}$ . On a

$$\mathcal{E}M_k = \sum_{j=1}^t c_j \mathcal{E}V_j + \sum_{j=1}^t (\mathcal{E}c_j) V_j.$$

En comparant les poids des termes isobares dans (13), on vérifie :

$$\mathcal{E}M_k = \lambda_1 P M_k + \lambda_2 M_k + \lambda_1 P M_{k-1},$$

d'où :

$$DM_k = \lambda_1 P M_k. \quad (16)$$

D'après la troisième affirmation du théorème 1.2, il existe un unique idéal premier principal non nul et  $D$ -stable de  $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$  qui est l'idéal  $(\Theta)$ . Donc tout idéal principal non nul  $D$ -stable est de la forme  $(\Theta^m)$  et  $M_k = c\Theta^m$  avec  $c \in \mathbb{K}^\times$ , d'où l'égalité  $\lambda_1 = m \in \mathbb{Z}$  dans (14).

Montrons ensuite que  $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$  dans (14). Nous pouvons supposer dans la suite que  $M_h \notin \mathcal{Y}$  car si  $M_h \in \mathcal{Y}$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Ecrivons maintenant

$$M_h = \sum_{j=1}^t c_j U_j,$$

avec  $U_1, \dots, U_t \in \mathcal{Y}$  isobares de poids  $h$ , et  $c_1, \dots, c_t \in \mathcal{L}$ . Si  $h = 0$ , alors  $M_h \in \mathcal{L}$ . Si  $h > 0$ , on a

$$\mathcal{E}M_h = \sum_{j=1}^t c_j \mathcal{E}U_j + \sum_{j=1}^t (\mathcal{E}c_j)U_j.$$

Donc si  $h \geq 0$  (après comparaison des termes de même poids dans (13)) :

$$\frac{\partial M_h}{\partial L} + \frac{\partial M_h}{\partial Z} = \lambda_2 M_h,$$

et

$$D'M_h = \lambda_2 M_h. \quad (17)$$

On voit tout de suite que si  $M_h \notin \mathcal{Y}$ , alors  $M_h$  dépend de  $Z$ . Ecrivons :

$$\begin{aligned} M_h &= \sum_{a,b \geq 0} c_{a,b} L^a Z^b \\ &= \sum_{a,b > 0} c_{a,b} L^a Z^b + \sum_{b > 0} d_b Z^b + \sum_{a > 0} e_a L^a + f_0, \quad c_{a,b}, d_b, e_a, f_0 \in \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} D'M_h &= \sum_{a,b > 0} (bc_{a,b} + (a+1)c_{a+1,b}) L^a Z^b + \sum_{b > 0} (bd_b + c_{1,b}) Z^b + \\ &\quad \sum_{a > 0} (a+1)e_{a+1} L^a + e_1 + f_0. \end{aligned}$$

Soit  $a_0$  maximal avec  $c_{a_0, b_0} \neq 0$  pour quelques  $b_0 \geq 0$ .

Si  $a_0 = 0$ , alors  $M_h \in \mathcal{Y}[Z]$ . Donc  $M_h = k_0 + k_1 Z + \dots + k_r Z^r$  ( $k_j \in \mathcal{Y}$  et  $k_r \neq 0$ ), et  $D'M_h = k_1 Z + \dots + rk_r Z^r$ , d'où  $rk_r = \lambda_2 k_r$  et  $\lambda_2 = r \in \mathbb{Z}$ .

Si  $a_0 > 0$  alors  $b_0 > 0$  et :

$$\begin{aligned} b_0 c_{a_0, b_0} &= b_0 c_{a_0, b_0} + (a_0 + 1) c_{a_0+1, b_0} \\ &= \lambda_2 c_{a_0, b_0}, \end{aligned}$$

puisque  $c_{a_0+1, b_0} = 0$ . Donc  $\lambda_2 = b_0$  et aussi dans ce cas,  $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$ .

Terminons la démonstration du lemme. Nous avons montré que

$$\mathcal{E}M = (\lambda_1 P + \lambda_2)M$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{E}\Theta = P\Theta$  et  $\mathcal{E}Z = Z$ . Donc

$$\frac{\mathcal{E}M}{M} = \lambda_1 \frac{\mathcal{E}\Theta}{\Theta} + \lambda_2 \frac{\mathcal{E}Z}{Z}.$$

On en déduit que  $\mathcal{E}(M\Theta^{-\lambda_1}Z^{-\lambda_2}) = 0$ , d'où  $M\Theta^{-\lambda_1}Z^{-\lambda_2} \in \mathbb{C}^\times$  (le corps des fractions de  $\mathcal{N}$  a  $\mathbb{C}$  comme sous-corps des constantes pour la dérivation  $\mathcal{E}$ ). L'irréductibilité de  $M$  implique  $M = c\Theta$  ou  $M = cZ$ , avec  $c \in \mathbb{C}^\times$ .  $\square$

**Démonstration du théorème 1.3.** Soit  $\mathcal{J}$  un idéal premier de  $\mathcal{N}$ . Si  $\mathcal{J} \cap \mathcal{Y}[Z] = (0)$ , alors  $\mathcal{J}$  est principal et ne peut pas être  $\mathcal{E}$ -stable d'après le lemme 4.1.

Donc, si  $\mathcal{J}$  est  $\mathcal{E}$ -stable, alors  $\mathcal{J}_1 := \mathcal{J} \cap \mathcal{Y}[Z]$  est un idéal premier  $\mathcal{E}$ -stable non nul de  $\mathcal{Y}[Z]$ .

Si  $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{Y} = (0)$  alors  $\mathcal{J}_1$  est principal, donc  $\mathcal{J}_1 \mathcal{N}$  est un idéal premier principal  $\mathcal{E}$ -stable de  $\mathcal{N}$ , et le lemme 4.1 implique  $Z \in \mathcal{J}$ .

Sinon,  $\mathcal{I} = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{Y}$  est un idéal premier  $D$ -stable non nul de  $\mathcal{Y}$ ; il contient  $\Theta$  d'après le théorème 1.2 (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

La preuve du théorème 1.3 se termine en considérant l'isomorphisme différentiel (12).  $\square$

**Démonstration du théorème 1.4.** Ce théorème est un corollaire du théorème 1.3. Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier non nul et  $z(d/dz)$ -stable de  $\mathcal{R}_1$ . L'idéal  $\mathcal{T} := \mathcal{N}\mathcal{P}$  est un idéal  $z(d/dz)$ -stable de  $\mathcal{N}$  tel que  $\mathcal{T} \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{P}$ . Le lemme 5.3 de l'appendice implique qu'il existe un idéal premier  $z(d/dz)$ -stable  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{N}$  tel que  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{P}$ . Le théorème 1.3 implique que  $z\Delta \in \mathcal{Q}$ , donc  $z\Delta \in \mathcal{P}$ .  $\square$

## 5 Appendice : lemmes auxiliaires.

Soient  $X_0, \dots, X_s$  des indéterminées. On considère sur  $\mathbb{K}[X_0, X_1, \dots, X_s]$  une graduation  $p$  déterminée par  $p(k) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{K}^\times$ , et en assignant à  $X_i$  un degré  $p(X_i) = p_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Supposons que  $p_0$  soit égal au plus petit commun diviseur de  $p_1, \dots, p_s$ . Nous démontrons deux lemmes.

**Lemme 5.1.** *Soient  $F, G \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \dots, X_s]$  deux polynômes  $p$ -homogènes. Si le résultant  $R = \text{Rés}_{X_0}(F, G) \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_s]$  est non nul, alors il est  $p$ -homogène.*

**Démonstration.** On écrit :

$$F = F_0 + F_1 X_0 + \dots + F_m X_0^m, \quad G = G_0 + G_1 X_0 + \dots + G_n X_0^n,$$

avec  $F_m, G_n$  non nuls, et  $F_i, G_j \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_s]$  pour tout  $i, j$ . Il est bien connu que le résultant  $R$  est homogène par rapport à chaque groupe de variables  $(F_i)_{i=1, \dots, m}$  et  $(G_j)_{j=1, \dots, n}$  de degrés respectifs  $n, m$ . De plus, d'après [11], théorème 6.1,  $R$  est " $\nu$ -homogène de degré  $mn$ ", avec  $\nu = (0, 1, \dots, n, 0, 1, \dots, m)$ . Ceci veut dire que si le monôme

$$M_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} = F_0^{\alpha_0} \dots F_m^{\alpha_m} G_0^{\beta_0} \dots G_n^{\beta_n}$$

apparaît avec un coefficient non nul dans l'expression de  $R$ , alors :

$$\sum_{i=1}^m i\alpha_i + \sum_{j=1}^n j\beta_j = mn. \quad (18)$$

La  $p$ -homogénéité de  $F, G$  implique que tous les  $F_i$  et  $G_j$  sont  $p$ -homogènes. Il existe deux entiers  $k, h$  tels que  $p(F_i) = m + k - i$  et  $p(G_j) = n + h - j$  pour tout  $i, j$  (on applique l'hypothèse sur  $p_0$ ).

Donc si le monôme  $M_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}$  apparaît avec coefficient non nul dans l'écriture de  $R$ , alors il est  $p$ -homogène ; calculons son degré.

$$\begin{aligned}
p(M_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}) &= \sum_{i=0}^m \alpha_i p(F_i) + \sum_{j=0}^n \beta_j p(G_j) \\
&= (k+m) \sum_{i=0}^m \alpha_i + (h+n) \sum_{j=0}^n \beta_j - \sum_{i=1}^m i \alpha_i - \sum_{j=1}^n j \beta_j \\
&= (k+m)n + (h+n)m - mn \\
&= kn + hm + mn,
\end{aligned}$$

en appliquant (18). Ainsi, tous les monômes qui interviennent dans l'écriture de  $R$  avec un coefficient non nul ont même  $p$ -degré  $kn + hm + mn$ , ce qui implique que  $R$  est  $p$ -homogène de degré  $kn + hm + mn$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_s]$  et notons  $\tilde{\mathcal{I}}$  l'idéal engendré par les éléments  $p$ -homogènes de  $\mathcal{I}$ . Soit  $D$  une dérivation  $p$ -homogène de poids  $d$  sur  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_s]$ .

**Lemme 5.2.** *Nous avons les propriétés suivantes.*

1. Si  $\mathcal{I}$  est  $D$ -stable, alors  $\tilde{\mathcal{I}}$  est  $D$ -stable.
2. Si  $\mathcal{I}$  est premier, alors  $\tilde{\mathcal{I}}$  est premier.
3. Si  $\mathcal{I}$  est premier et n'est pas principal, alors  $\tilde{\mathcal{I}} \neq (0)$ .

**Démonstration.** 1. Soit  $U \in \tilde{\mathcal{I}}$  ; alors  $U = U_0 + \dots + U_k$  pour certains polynômes  $p$ -homogènes  $U_0, \dots, U_k \in \mathcal{I}$ . Pour tout  $j$  on a  $DU_j \in \mathcal{I}$  car  $\mathcal{I}$  est  $D$ -stable. De plus  $DU_j$  est  $p$ -homogène, donc  $DU = DU_0 + \dots + DU_k \in \tilde{\mathcal{I}}$ .

2. C'est bien connu : voir chapitre 7, paragraphe 2 de [12].
3. Notons, pour tout polynôme non nul  $F \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_s]$  :

$${}^h F = X_0^{p/p_0} F \left( \frac{X_1}{X_0^{p_1}}, \dots, \frac{X_s}{X_0^{p_s}} \right) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \dots, X_s],$$

où  $p$  est le plus grand degré d'un monôme non nul de  $F$  par rapport à la graduation  $p$ .

Il faut montrer que  $\mathcal{I}$  contient un polynôme  $p$ -homogène non nul. Par hypothèse il existe  $U, V \in \mathcal{I}$  premiers entre eux ; donc  ${}^h U$  et  ${}^h V$  sont premiers entre eux. Donc  $T := \text{Rés}_{X_0}({}^h U, {}^h V) \in \mathcal{A}$  est non nul, et  $p$ -homogène d'après le lemme 5.1. De plus  $T \in \mathcal{I}$  car il existe  $A, B \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \dots, X_s]$  tels que  $T = A{}^h U + B{}^h V$  d'où, en prenant  $X_0 = 1$ ,  $T = aU + bV$  pour  $a, b \in \mathcal{A}$ , on obtient  $T \in \mathcal{I}$ .  $\square$

**Lemme 5.3.** *Soient  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  deux anneaux noethériens, soit  $D$  une dérivation de  $\mathcal{A}$  telle que  $(\mathcal{B}, D)$  soit un anneau différentiel. Soit  $\mathcal{T}$  un idéal  $D$ -stable de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{P} := \mathcal{T} \cap \mathcal{B}$  soit premier. Il existe alors un idéal premier  $D$ -stable  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{B} = \mathcal{P}$ .*

**Démonstration.** D'après le théorème 1 p. 24 de [8], les idéaux premiers  $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_t$  associés de  $\mathcal{T}$  sont  $D$ -stables, et  $\mathcal{T}$  admet une décomposition primaire :

$$\mathcal{T} = \bigcap_{j=1}^t \mathcal{T}_j$$

avec  $\mathcal{T}_j$  qui est  $\mathcal{Q}_j$ -primaire, et  $D$ -stable, pour tout  $j$ . On a :

$$\mathcal{P} = \left( \bigcap_{j=1}^t \mathcal{T}_j \right) \cap \mathcal{B} = \bigcap_{j=1}^t (\mathcal{T}_j \cap \mathcal{B}).$$

Donc il existe  $j$  tel que  $\mathcal{T}_j \cap \mathcal{B} = \mathcal{P}$  (tous les idéaux  $\mathcal{T}_j \cap \mathcal{B}$  sont primaires). Soit  $x \in \mathcal{B}$  tel que  $x^n \in \mathcal{T}_j$  pour quelques  $n$ . Alors  $x \in \mathcal{P}$ , d'où  $x \in \mathcal{Q}_j = \sqrt{\mathcal{T}_j}$ . Ainsi l'idéal  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_j$ , qui est premier et  $D$ -stable, satisfait  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{B} = \mathcal{P}$ .  $\square$

**Rémerciements.** L'auteur souhaite remercier S. David pour des commentaires très utiles, et F. Amoroso pour une relecture minutieuse du texte, et pour m'avoir suggéré l'argument du résultant dans la preuve du lemme 5.2, ce qui a apporté des simplifications par rapport à une version précédente.

## References

- [1] M. Kaneko & D. Zagier. *A generalized Jacobi theta function and quasi-modular forms*. Dijkgraaf, R. H. (ed.) et al., The moduli space of curves. Basel: Birkhäuser. Prog. Math. 129, 165-172 (1995).
- [2] S. Lang, *Introduction to modular forms*, (Avec deux appendices, par D. B. Zagier et par W. Feit). Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 222. (1976)
- [3] Yu. V. Nesterenko. *On the algebraic dependence of the components of solutions of a system of linear differential equations*. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 38, pp. 495-512 (1974).
- [4] Yu. V. Nesterenko. *Modular functions and transcendence questions*. Sb. Math. 187, No.9, 1319-1348 (1996).
- [5] Yu. V. Nesterenko. *Algebraic independence for values of Ramanujan functions*. Dans *Introduction to algebraic independence theory*. Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 3, pp. 27-43, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).

- [6] Yu. V. Nesterenko. *Multiplicity estimates for solutions of algebraic differential equations*. Dans *Introduction to algebraic independence theory*. Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 10, pp. 149-165, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
- [7] F. Pellarin. *Les nilradicaux différentiels de certains anneaux différentiels associés aux groupes triangulaires de Riemann-Schwarz*. Manuscrit.
- [8] A. Seidenberg. *Differential ideals in rings of finitely generated type*. Am. J. Math. 89, 22-42 (1967).
- [9] AA. B. Shidlovskij. *Transcendental numbers*. De Gruyter Studies in Mathematics, 12, (1989).
- [10] C. L. Siegel. *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Dans *Gesammelte Abhandlungen I*, pp. 210-266.
- [11] B. Sturmfels. *On the Newton polytope of the resultant*. J. Algebraic Combin. 3:2, pp. 207-236, (1994).
- [12] O. Zariski & P. Samuel. *Commutative algebra. Vol. II*. Reprint of the 1958-1960 Van Nostrand edition. Graduate Texts in Mathematics, 29, Springer-Verlag.

Federico Pellarin,  
 L.M.N.O., Université de Caen,  
 Campus II - Boulevard Maréchal Juin,  
 BP 5186 - F14032 Caen Cedex.  
 E-mail : pellarin@math.unicaen.fr