



HAL
open science

Pénalisations of Walsh's Brownian motion

Joseph Najnudel

► **To cite this version:**

| Joseph Najnudel. Pénalisations of Walsh's Brownian motion. 2005. hal-00005413

HAL Id: hal-00005413

<https://hal.science/hal-00005413>

Preprint submitted on 16 Jun 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pénalisations de l'araignée brownienne (Penalizations of Walsh's Brownian motion)

Joseph Najnudel

16 juin 2005

Résumé : Dans cet article, nous pénalisons une araignée brownienne $(A_t)_{t \geq 0}$ sur un ensemble fini E de demi-droites, avec un poids égal à $Z \exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)$, où t est un nombre positif, $(\alpha_k)_{k \in E}$ une famille de réels indexée par E , γ un paramètre réel, X_t la distance de A_t à l'origine, $N_t \in E$ la demi-droite associée à A_t , L_t le temps local de $(A_s)_{0 \leq s \leq t}$ à l'origine, et Z une constante de normalisation. Nous montrons que la famille des mesures de probabilité obtenue par ces pénalisations converge vers une mesure limite quand t tend vers l'infini, et nous étudions le comportement de cette mesure limite.

Abstract : In this paper, we penalize a Walsh's Brownian motion $(A_t)_{t \geq 0}$ on a finite set E of rays, with a weight equal to $Z \exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)$, where t is a positive number, $(\alpha_k)_{k \in E}$ a family of real numbers indexed by E , γ a real parameter, X_t the distance from A_t to the origin, $N_t \in E$ the ray associated to A_t , L_t the local time of $(A_s)_{0 \leq s \leq t}$ at the origin, and Z a constant of normalization. We show that the family of the probability measures obtained by these penalizations converges to a limit measure as t tends to infinity, and we study the behaviour of this limit measure.

Mots-clé : pénalisation, temps local, araignée brownienne.

Key words : penalization, local time, Walsh's Brownian motion.

classifications AMS : 60B10, 60J65 (60G17, 60G44, 60J25, 60J55).

1 Présentation du problème et des résultats principaux obtenus

Récemment, de nombreuses études de pénalisations du mouvement brownien ont été effectuées, en particulier par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor (voir [6], [7], [8]).

Dans [8], les pénalisations étudiées sont fonctions de la valeur X_t atteinte par un mouvement brownien en un temps t , et du suprémum S_t de ce mouvement brownien jusqu'au temps t . Plus précisément, on considère une famille de mesures de probabilité $(\mathbf{W}^{(t)})_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ vérifiant, pour tout Γ_t appartenant à la tribu \mathcal{F}_t engendrée par $(X_s)_{s \in [0, t]}$ ($(X_t)_{t \geq 0}$ étant le processus

canonique de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$:

$$\mathbf{W}^{(t)}(\Gamma_t) = \frac{\mathbf{W}[\mathbf{1}_{\Gamma_t} f(X_t, S_t)]}{\mathbf{W}[f(X_t, S_t)]}$$

où S_t est le maximum de X_s pour $s \in [0, t]$, \mathbf{W} la mesure de Wiener, et f une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}_+ .

B. Roynette, P. Vallois et M. Yor montrent alors que pour certains choix de la fonction f , il existe une mesure de probabilité $\mathbf{W}^{(\infty)}$ sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que pour tout $s \geq 0$ et tout $\Gamma_s \in \mathcal{F}_s$:

$$\mathbf{W}^{(t)}(\Gamma_s) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbf{W}^{(\infty)}(\Gamma_s)$$

Un des cas où cette convergence a lieu est celui où $f(a, y) = \exp(\lambda y + \mu a)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Par un changement de mouvement brownien, les résultats de [8] peuvent alors être adaptés au cas où S_t est remplacé par L_t (temps local en 0 de $(X_u)_{u \leq t}$), et où X_t est remplacé par $L_t - |X_t|$; en effet, d'après le théorème d'équivalence de Lévy : $(S_t - X_t, S_t)_{t \geq 0}$ a même loi que $(|X_t|, L_t)_{t \geq 0}$.

Dans ces conditions, les poids exponentiels étudiés dans [8] prennent la forme : $Z \exp(\alpha |X_t| + \gamma L_t)$ où α et γ sont des paramètres réels et où Z est une constante de normalisation.

Le but de notre article est de généraliser l'étude de ces pénalisations exponentielles à toutes les araignées browniennes dont les trajectoires se situent sur un nombre fini de demi-droites concourantes (voir [1] et [9] pour une description de ces processus).

Soit (E, μ) un espace de probabilité fini; on suppose $\mu(\{m\}) > 0$ pour tout $m \in E$.

On considère, sur l'espace $\mathbf{R}_E = \{(0, 0)\} \cup (\mathbf{R}_+^* \times E)$, la distance d définie par :

$$d((x, k), (y, l)) = |x - y| \mathbf{1}_{k=l} + (x + y) \mathbf{1}_{k \neq l}$$

Cette distance permet de considérer \mathcal{C}_E , espace des fonctions continues de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R}_E , et de munir cet espace de la tribu \mathcal{T}_E de la convergence uniforme.

$(A_t = (X_t, N_t))_{t \geq 0}$ désigne alors le processus canonique (à valeurs dans \mathbf{R}_E) associé à l'espace $(\mathcal{C}_E, \mathcal{T}_E)$ et on note, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, \mathcal{F}_t la sous-tribu de \mathcal{T}_E engendrée par $(A_s)_{0 \leq s \leq t}$, A_s étant donc une application de $(\mathcal{C}_E, \mathcal{T}_E)$ dans (\mathbf{R}_E, d) (muni de sa tribu borélienne).

Pour $(x, k) \in \mathbf{R}_E$, on peut alors considérer, sur \mathcal{C}_E , la mesure de probabilité $\mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}$, sous laquelle $(A_t)_{t \geq 0}$ est une araignée brownienne à trajectoires dans \mathbf{R}_E , issue de (x, k) , et telle que pour tous $s, t, s \leq t$, la loi de N_t sachant $X_s = 0$ est μ .

Rappelons (voir [1]) que cette araignée brownienne est un processus de Feller

qu'il est possible de caractériser par son semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$; pour toute fonction f borélienne bornée :

$$P_t f(x, k) = 2 \sum_{m \in E} \mu_m \int_{\mathbf{R}_+^*} dy p_t(x+y) f(y, m) + \int_{\mathbf{R}_+^*} dy (p_t(x-y) - p_t(x+y)) f(y, k)$$

avec $\mu_m = \mu(\{m\})$ et $p_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/2t}$.

Sous $\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}$, le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien réfléchi (comme on le voit directement avec le semi-groupe).

Soit \mathcal{I} l'ensemble des intervalles d'excursion de $(X_t)_{t \geq 0}$, N_t est alors constant sur chaque intervalle $I \in \mathcal{I}$: on peut donc poser $N_t = N_I$ pour $t \in I$. On montre alors que conditionnellement à $(X_t)_{t \geq 0}$, les $(N_I)_{I \in \mathcal{I}}$ sont des variables aléatoires indépendantes et de loi μ .

A présent, nous allons effectuer un changement de probabilité par rapport à l'araignée brownienne, de la manière suivante : pour $\alpha = (\alpha_i)_{i \in E}$ une famille de réels indexée par E , $\gamma \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose

$$\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(t, \alpha, \gamma)} = \frac{\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)}{\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]} \cdot \mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}$$

où L_t est le temps local de $(X_t)_{t \geq 0}$:

$$L_t = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{X_s \leq \epsilon} ds$$

(en fait, la limite inférieure ci-dessus est presque sûrement une limite). Dans ces conditions, nous allons prouver les deux théorèmes suivants :

Théorème 1 : Il existe une mesure de probabilité $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, \gamma)}$ telle que pour tout $s \in \mathbf{R}_+$ et tout $\Gamma_s \in \mathcal{F}_s$:

$$\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(t, \alpha, \gamma)}(\Gamma_s) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, \gamma)}(\Gamma_s)$$

De plus, pour tout $s \in \mathbf{R}_+$, la restriction de $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, \gamma)}$ à \mathcal{F}_s est équivalente à la loi de l'araignée brownienne sur $[0, s]$ associée à (E, μ) (nous en préciserons la densité dans la suite de cet article).

Remarque : On voit clairement que si le théorème 1 est vrai, la famille des densités de $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, \gamma)}$ par rapport à $\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}$, conditionnellement à $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$, est une $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ -martingale sous la probabilité $\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}$.

Théorème 2 : Le processus canonique $(A_t)_{t \geq 0}$ sous la mesure $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, \gamma)}$ peut être décrit de la manière suivante :

- Si $\gamma \geq \alpha_m$ pour tout m et $\gamma > 0$, $(X_s)_{s \geq 0}$ est la valeur absolue d'un processus bang-bang de paramètre γ , ou encore : $X_t = S_t - Y_t$, où $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec drift γ et S_t son suprémum sur $[0, t]$; et $(N_s)_{s \geq 0}$ est construit à partir de $(X_s)_{s \geq 0}$ de la même manière que pour l'araignée brownienne :

chaque excursion est sur la branche m avec probabilité μ_m , indépendamment des autres excursions (voir également [3]).

- Si $\bar{\alpha} = \max(\alpha) > \gamma$ et $\bar{\alpha} > 0$, $(X_s)_{s \geq 0}$ est un processus dont la loi a une densité égale à $\frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \exp(\gamma L_\infty)$ par rapport à la loi de la valeur absolue d'un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$ (dont L_∞ est le temps local sur \mathbf{R}_+), et $(N_s)_{s \geq 0}$ est obtenu en effectuant la même démarche que pour l'araignée initiale, puis en conditionnant le résultat par le fait que la dernière excursion de $(X_s, N_s)_{s \geq 0}$ se situe sur une branche m vérifiant $\alpha_m = \bar{\alpha}$.

- Si $\gamma = 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout m , $(X_s, N_s)_{s \geq 0}$ est une araignée brownienne associée à (E, μ) .

- Si $\gamma < 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout m , on considère $(Y_s, R_s)_{s \geq 0}$ une araignée brownienne, \mathbf{e} une variable exponentielle de paramètre γ indépendante de $(Y_s, R_s)_{s \geq 0}$, $\tau_{\mathbf{e}}$ l'inverse du temps local de $(Y_s)_{s \geq 0}$ en \mathbf{e} , $(Z_s)_{s \geq 0}$ un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 et indépendant des variables précédentes, et M une variable aléatoire (également indépendante des précédentes) définie sur E .

Si la loi de M est bien choisie (voir la section 4 pour plus de détails sur cette loi), le processus $(X_s, N_s)_{s \geq 0}$ a même loi que $(\tilde{X}_s, \tilde{N}_s)_{s \geq 0}$, avec $(\tilde{X}_s, \tilde{N}_s) = (Y_s, R_s)$ pour $s \leq \tau_{\mathbf{e}}$, et $(\tilde{X}_s, \tilde{N}_s) = (Z_{s - \tau_{\mathbf{e}}}, M)$ pour $s \geq \tau_{\mathbf{e}}$.

Dans la suite de cet article, nous allons tout d'abord évaluer l'expression : $\mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$, puis nous utiliserons cette évaluation pour démontrer les deux théorèmes annoncés.

2 Etude de l'expression $\mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$

Afin de prouver l'existence de $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, \gamma)}$, nous allons commencer par chercher une expression qui majore $\mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$ tout en étant équivalente à cette quantité quand t tend vers l'infini.

Pour cela, nous allons tout d'abord effectuer une étude de deux quantités, $I(\beta, \gamma, x, t)$ et $J(\beta, x, t)$ ($\beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $x, t \in \mathbf{R}_+$), définies de la manière suivante :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \mathbf{E}_x[\exp(\beta|Y_t| + \gamma L_t) \mathbf{1}_{T \leq t}]$$

$$J(\beta, x, t) = \mathbf{E}_x[\exp(\beta Y_t) \mathbf{1}_{T > t}]$$

où $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de x , L_t est le temps local en zéro de $(Y_s)_{0 \leq s \leq t}$, et $T = \inf\{s \geq 0, Y_s = 0\}$.

Comme on le voit dans les expressions définissant I et J , l'étude de ces quantités ne fait intervenir que des propriétés du mouvement brownien.

Etude de $J(\beta, x, t)$: Le principe de réflexion implique :

$$\begin{aligned} J(\beta, x, t) &= \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t} \mathbf{1}_{T > t}] = \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t} \mathbf{1}_{Y_t > 0}] - \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t} \mathbf{1}_{Y_t > 0, T \leq t}] \\ &= \mathbf{E}_x[e^{\beta Y_t} \mathbf{1}_{Y_t > 0}] - \mathbf{E}_x[e^{-\beta Y_t} \mathbf{1}_{Y_t < 0}] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty (e^{-((x-y)^2/2t)+\beta y} - e^{-((x+y)^2/2t)+\beta y}) dy$$

Supposons $\beta < 0$: On a la majoration immédiate :

$$e^{-(x-y)^2/2t} - e^{-(x+y)^2/2t} \leq \frac{(x+y)^2}{2t} - \frac{(x-y)^2}{2t} = \frac{2xy}{t}$$

On en déduit :

$$J(\beta, x, t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} x \int_0^\infty y e^{\beta y} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2}$$

Par ailleurs, on a les encadrements suivants :

$$1 - \frac{(x-y)^2}{2t} \leq e^{-(x-y)^2/2t} \leq 1 - \frac{(x-y)^2}{2t} + \frac{(x-y)^4}{8t^2}$$

$$1 - \frac{(x+y)^2}{2t} \leq e^{-(x+y)^2/2t} \leq 1 - \frac{(x+y)^2}{2t} + \frac{(x+y)^4}{8t^2}$$

La différence entre $J(\beta, x, t)$ et son majorant donné précédemment est donc bornée par :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \frac{(x+y)^4}{8t^2} e^{\beta y} dy = C(x)t^{-5/2}$$

où $C(x)$ ne dépend que de x .

On en déduit que :

$$L(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2}$$

est à la fois un majorant et un équivalent de $J(\beta, x, t)$ quand $t \rightarrow \infty$ (x étant fixé).

Supposons $\beta = 0$: On obtient ici

$$J(\beta, x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-x}^x e^{-y^2/2t} dy$$

expression admettant comme majorant et comme équivalent :

$$L(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} x$$

Supposons $\beta > 0$: On a l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^\infty (e^{-((x-y)^2/2t)+\beta y} - e^{-((x+y)^2/2t)+\beta y}) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^\infty dz e^{-(z^2/2t)+\beta z} (e^{\beta x} - e^{-\beta x}) = 2 \sinh(\beta x) e^{t\beta^2/2}$$

Or :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^0 (e^{-((x-y)^2/2t)+\beta y} - e^{-((x+y)^2/2t)+\beta y}) dy = -J(-\beta, x, t)$$

D'où l'égalité :

$$J(\beta, x, t) = J(-\beta, x, t) + 2 \sinh(\beta x) e^{t\beta^2/2}$$

On a donc le majorant et équivalent suivant :

$$L(\beta, x, t) = 2 \sinh(\beta x) e^{t\beta^2/2} + \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2}$$

On peut alors regrouper tous les cas possibles grâce à l'expression suivante :

$$L(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2} \mathbf{1}_{\beta \neq 0} + \sqrt{\frac{2}{\pi t}} x \mathbf{1}_{\beta=0} + 2 \sinh(\beta x) \exp(t\beta^2/2) \mathbf{1}_{\beta > 0}$$

Etude de la loi de $(|Y_t|, L_t)$

Avant de procéder à l'évaluation de $I(\beta, \gamma, x, t)$, nous allons étudier la loi jointe de $(|Y_t|, L_t)$, lorsque $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de x et $(L_t)_{t \geq 0}$ son temps local en zéro.

Plus précisément, nous allons prouver le lemme suivant :

Lemme : Avec les hypothèses précédentes, on a les deux résultats suivants :

- Pour $z \in \mathbf{R}_+$, $\mathbf{P}[L_t + |Y_t| \in dz, L_t > 0] = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} z(x+z) \exp\left(-\frac{(x+z)^2}{2t}\right) dz$.
- Conditionnellement au fait que $L_t > 0$, $\Theta_t = \frac{|Y_t|}{L_t + |Y_t|}$ est une variable uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de $L_t + |Y_t|$.

Preuve : Dans le calcul suivant, \mathbf{P}_y désigne la loi d'un mouvement brownien issu de y , $(Y_t)_{t \geq 0}$ est le processus canonique de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, L_t son temps local, et $T = \inf\{t \geq 0, Y_t = 0\}$.

On a, pour $y \in \mathbf{R}_+$ et $l > 0$:

$$\mathbf{P}_x(|Y_t| \in dy, L_t \in dl) = \int_{s_1 + s_2 \leq t} \mathbf{P}_x(T \in ds_1) \mathbf{P}_0(|Y_{t-s_1}| \in dy)$$

$$\mathbf{P}_0\left(\sup_{0 \leq u \leq t-s_1} \{u | Y_u = 0\} \in d(t-s_2), L_{t-s_1} \in dl | |Y_{t-s_1}| = y\right)$$

Par renversement du temps effectué sur le pont brownien :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_x(|Y_t| \in dy, L_t \in dl) \\ &= \int_{s_1 + s_2 \leq t} \mathbf{P}_x(T \in ds_1) \mathbf{P}_y(T \in ds_2, L_{t-s_1} \in dl, |Y_{t-s_1}| \in [0, dy]) \\ &= \int_{s_1 + s_2 \leq t} \mathbf{P}_x(T \in ds_1) \mathbf{P}_y(T \in ds_2) \mathbf{P}_0(|Y_{t-s_1-s_2}| \in [0, dy], L_{t-s_1-s_2} \in dl) \\ &= \int_{s_1 + s_2 \leq t} \frac{2dy}{\sqrt{2\pi(t-s_1-s_2)}} \mathbf{P}_x(T \in ds_1) \mathbf{P}_y(T \in ds_2) \mathbf{P}_0(L_{t-s_1-s_2} \in dl | Y_{t-s_1-s_2} = 0) \end{aligned}$$

Or la loi du temps local d'un pont brownien sur $[0, t - s_1 - s_2]$ est connue : c'est la loi de la racine carrée d'une variable exponentielle dont le paramètre est $\frac{1}{2(t-s_1-s_2)}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_x(|Y_t| \in dy, L_t \in dl) &= \int_{s_1+s_2 \leq t} dy dl \frac{2l e^{-l^2/2(t-s_1-s_2)}}{\sqrt{2\pi(t-s_1-s_2)^3}} \mathbf{P}_x(T \in ds_1) \mathbf{P}_y(T \in ds_2) \\
&= 2dy dl \int_{s_1+s_2 \leq t} \mathbf{P}_x(T \in ds_1) \mathbf{P}_y(T \in ds_2) \frac{\mathbf{P}_l(T \in d(t-s_1-s_2))}{d(t-s_1-s_2)} \\
&= 2dy dl \int_{s_1+s_2 \leq t} ds_1 ds_2 D_x(s_1) D_y(s_2) D_l(t-s_1-s_2) \\
&= 2dy dl D_x * D_y * D_l(t) = 2D_{x+y+l}(t) dy dl \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} (l+x+y) \exp\left(-\frac{(l+x+y)^2}{2t}\right) dy dl
\end{aligned}$$

$D_a(u)$ désignant la densité de T en u sous \mathbf{P}_a .

Ces égalités impliquent le lemme annoncé.

Remarquons que ce lemme est fortement lié au théorème de Pitman (voir également [5]).

Étude de $I(\beta, \gamma, x, t)$

Le lemme précédent permet d'écrire la formule suivante :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \mathbf{E} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty z(x+z) \exp\left(\frac{-(x+z)^2}{2t} + \Phi z\right) dz \right]$$

où Φ est une variable uniforme sur $[\beta, \gamma]$.
Distinguons à présent plusieurs cas.

Supposons $\beta, \gamma < 0$: Dans ce cas, le théorème de convergence monotone prouve que $\mathbf{E}[\int_0^\infty z(x+z) e^{-((x+z)^2/2t) + \Phi z} dz]$ croît vers $\mathbf{E}[\int_0^\infty z(x+z) e^{\Phi z} dz]$ quand t tend vers l'infini.

Or pour $\phi \in \mathbf{R}_-, \int_0^\infty z(x+z) e^{\phi z} dz = \frac{x}{\phi^2} + \frac{2}{|\phi|^3}$.

On en déduit que si $\beta \neq \gamma$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left[\int_0^\infty z(x+z) e^{\Phi z} dz \right] &= \frac{1}{\gamma - \beta} \int_\beta^\gamma \left(\frac{x}{\phi^2} + \frac{2}{|\phi|^3} \right) d\phi \\
&= \frac{1}{\gamma - \beta} \left[-\frac{x}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} \right]_\beta^\gamma = \frac{x}{\beta\gamma} + \frac{|\beta| + |\gamma|}{\beta^2\gamma^2}
\end{aligned}$$

et que cette dernière égalité se prolonge en fait au cas où $\beta = \gamma$.

On en déduit que $I(\beta, \gamma, x, t)$ admet comme majorant et comme équivalent :

$$K(\beta, \gamma, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left(\frac{x}{\beta\gamma} + \frac{|\beta| + |\gamma|}{\beta^2\gamma^2} \right)$$

Supposons $\beta = 0, \gamma < 0$: On a, pour tout z ;

$$\mathbf{E}[e^{\Phi z}] = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma}^0 e^{\phi z} d\phi = \frac{1 - e^{\gamma z}}{|\gamma|z}$$

(Φ étant une variable uniforme sur $[\gamma, 0]$).

D'où :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^{\infty} (x+z) e^{-(x+z)^2/2t} dz \\ - \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^{\infty} (x+z) e^{-((x+z)^2/2t) + \gamma z} dz$$

On a $\int_0^{\infty} (x+z) e^{\gamma z} < \infty$, donc le deuxième terme de l'expression ci-dessus, négatif, est dominé par $t^{-3/2}$ quand t tend vers l'infini.

Par ailleurs,

$$\int_0^{\infty} (x+z) e^{-(x+z)^2/2t} dz = \left[-t e^{-(x+z)^2/2t} \right]_0^{\infty} = t e^{-x^2/2t}$$

admet t comme majorant et comme équivalent quand t tend vers l'infini.

Ces deux propriétés permettent d'en déduire que $I(\beta, \gamma, x, t)$ admet comme majorant et équivalent :

$$K(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$$

Supposons $\gamma = 0, \beta < 0$: On a évidemment par symétrie :

$$K(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{|\beta|} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$$

Supposons $\beta = \gamma = 0$: On a :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^{\infty} z(x+z) e^{-(x+z)^2/2t} dz \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left[-t z e^{-(x+z)^2/2t} \right]_0^{\infty} + \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(x+z)^2/2t} dz = 2\mathbf{P}(\mathcal{N} \geq x/\sqrt{t})$$

où \mathcal{N} est une variable gaussienne centrée réduite.

On peut donc prendre :

$$K(\beta, \gamma, x, t) = 1$$

Supposons $\beta > 0$ et $\beta > \gamma$: On a :

$$\mathbf{E}[e^{\Phi z}] = \frac{1}{\beta - \gamma} \int_{\gamma}^{\beta} e^{\phi z} d\phi = \frac{e^{\beta z} - e^{\gamma z}}{(\beta - \gamma)z}$$

(Φ uniforme sur $[\gamma, \beta]$).

On en déduit :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z) e^{-((x+z)^2/2t) + \beta z} dz \\ - \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z) e^{-((x+z)^2/2t) + \gamma z} dz$$

Pour tout $\phi > 0$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty (x+z) e^{-((x+z)^2/2t) + \phi z} dz \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left[-t e^{-((x+z)^2/2t) + \phi z} \right]_0^\infty + \phi \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x+z)^2/2t) + \phi z} dz \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t} + 2\phi e^{-\phi x + t\phi^2/2} - \phi \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x-z)^2/2t) - \phi z} dz$$

avec

$$\int_0^\infty e^{-((x-z)^2/2t) - \phi z} dz \leq \int_0^\infty e^{-\phi z} dz = \frac{1}{\phi}$$

Donc la quantité ci-dessus admet $\sqrt{2/\pi t} + 2\phi e^{-\phi x + t\phi^2/2}$ comme majorant et comme équivalent.

On peut en particulier en déduire que le second terme de $I(\beta, \gamma, x, t)$, négatif, est négligeable devant le premier quand t tend vers l'infini (quel que soit le signe de γ).

Tout ceci permet de prendre :

$$K(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \frac{2\beta}{\beta - \gamma} \exp(-\beta x + t\beta^2/2)$$

Supposons $\gamma > 0$ et $\gamma > \beta$: La symétrie permet d'obtenir immédiatement :

$$K(\beta, \gamma, x, t) = \frac{1}{\gamma - \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \frac{2\gamma}{\gamma - \beta} \exp(-\gamma x + t\gamma^2/2)$$

Supposons $\gamma = \beta > 0$: On a ici :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^\infty z(x+z) e^{-((x+z)^2/2t) + \gamma z} dz$$

Or

$$\int_0^\infty (z(x+z) - \gamma t z - t) e^{-((x+z)^2/2t) + \gamma z} dz = \left[-t z e^{-((x+z)^2/2t) + \gamma z} \right]_0^\infty = 0$$

On en déduit :

$$I(\beta, \gamma, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty (\gamma z + 1) e^{-((x+z)^2/2t) + \gamma z} dz$$

Par ailleurs, on a :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} dz = 2e^{-\gamma x+t\gamma^2/2} - \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x-z)^2/2t)-\gamma z} dz$$

quantité équivalente et inférieure à $2e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$.

La quantité $-\gamma x \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} dz$ est donc négative et équivalente à $-2\gamma x e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$.

De plus, d'après un calcul précédemment effectué, $\gamma \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty (x+z) e^{-((x+z)^2/2t)+\gamma z} dz$ est équivalent et inférieur à $\gamma \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + 2t\gamma^2 e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$ (voir l'étude du cas $\beta > 0$ et $\beta > \gamma$).

En additionnant les trois termes évalués ci-dessus, on obtient :

$$K(\beta, \gamma, x, t) = \gamma \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + 2(t\gamma^2 + 1) \exp(-\gamma x + t\gamma^2/2)$$

On a donc le tableau suivant :

Conditions sur β et γ	$K(\beta, \gamma, x, t)$	Equivalent le plus simple quand $t \rightarrow \infty$
$\beta, \gamma < 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left(\frac{x}{\beta\gamma} + \frac{ \beta + \gamma }{\beta^2\gamma^2} \right)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \left(\frac{x}{\beta\gamma} + \frac{ \beta + \gamma }{\beta^2\gamma^2} \right)$
$\beta = 0, \gamma < 0$	$\frac{1}{ \gamma } \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$	$\frac{1}{ \gamma } \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$
$\gamma = 0, \beta < 0$	$\frac{1}{ \beta } \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$	$\frac{1}{ \beta } \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$
$\beta = \gamma = 0$	1	1
$\beta > 0, \beta > \gamma$	$\frac{1}{\beta-\gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \frac{2\beta}{\beta-\gamma} e^{-\beta x+t\beta^2/2}$	$\frac{2\beta}{\beta-\gamma} e^{-\beta x+t\beta^2/2}$
$\gamma > 0, \gamma > \beta$	$\frac{1}{\gamma-\beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} + \frac{2\gamma}{\gamma-\beta} e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$	$\frac{2\gamma}{\gamma-\beta} e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$
$\gamma = \beta > 0$	$\gamma \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + 2(t\gamma^2 + 1) e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$	$2t\gamma^2 e^{-\gamma x+t\gamma^2/2}$

A présent, nous avons obtenu des majorants et des équivalents pour les quantités I et J et nous sommes en mesure d'évaluer l'expression $\mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)]$.

En effet, on a :

$$\mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)] = A_1 + A_2$$

avec

$$A_1 = \mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t) \mathbf{1}_{T \leq t}]$$

$$A_2 = \mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t) \mathbf{1}_{T > t}]$$

où $T = \inf\{s \geq 0, X_s = 0\}$. D'après la propriété de Markov de l'araignée, conditionnellement au fait que $(X_s)_{s \geq 0}$ s'annule avant t , N_t est une variable de

loi μ , indépendante de (X_t, L_t) . D'où :

$$A_1 = \sum_{m \in E} \mu_m I(\alpha_m, \gamma, x, t)$$

Par ailleurs, si $(X_s)_{s \geq 0}$ ne s'annule pas avant t , il est évident que $L_t = 0$ et $N_t = k$.

On a donc $A_2 = J(\alpha_k, x, t)$, et on en déduit :

$$\mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t}] = \sum_{m \in E} \mu_m I(\alpha_m, \gamma, x, t) + J(\alpha_k, x, t)$$

Cette égalité permet de prouver la proposition suivante :

Proposition : La quantité

$$Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, x, k, t) = \sum_{m \in E} \mu_m K(\alpha_m, \gamma, x, t) + L(\alpha_k, x, t)$$

où $K(\alpha_m, \gamma, x, t)$ et $L(\alpha_k, x, t)$ ont été définis précédemment dans cette section, vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)] \leq Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, x, k, t)$$

$$\mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t)] \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, x, k, t)$$

3 Preuve de l'existence de la mesure $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, \gamma)}$

On observe, tout d'abord, que quels que soient β et γ , il existe $C(\beta, \gamma)$ tel que pour tous x, t :

$$K(\beta, \gamma, x, t) \leq C(\beta, \gamma)(1+x)K(\beta, \gamma, 0, t)$$

(en fait, $K(\beta, \gamma, x, t) \leq K(\beta, \gamma, 0, t)$ dès que $\sup(\beta, \gamma) \geq 0$).

On en déduit l'existence de $C_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma)$, tel que pour tous t, x :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in E} \mu_m K(\alpha_m, \gamma, x, t) &\leq C_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma)(1+x) \sum_{m \in E} \mu_m K(\alpha_m, \gamma, 0, t) \\ &= C_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma)(1+x) Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t) \end{aligned}$$

A présent, fixons β et γ dans \mathbf{R} , et supposons $t \geq 1$.

Si $\beta < 0$ et $\gamma < 0$, $L(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2}$ et $K(\beta, \gamma, 0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{|\beta| + |\gamma|}{\beta^2 \gamma^2}$, ce qui implique :

$$L(\beta, x, t) = \frac{x \gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} K(\beta, \gamma, 0, t)$$

Si $\beta < 0$ et $\gamma = 0$, $K(\beta, \gamma, 0, t) = \frac{1}{|\beta|} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \geq \frac{1}{|\beta|} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}$, et donc :

$$L(\beta, x, t) \leq \frac{x}{|\beta|} K(\beta, \gamma, 0, t)$$

Si $\beta < 0$ et $\gamma > 0$, $K(\beta, \gamma, 0, t) \geq \frac{1}{\gamma - \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \geq \frac{1}{\gamma - \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}$, d'où :

$$L(\beta, x, t) \leq x \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta^2} \right) K(\beta, \gamma, 0, t)$$

Si $\beta = 0$ et $\gamma < 0$, $L(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} x$ et $K(\beta, \gamma, 0, t) = \frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$, d'où :

$$L(\beta, x, t) = |\gamma| x K(\beta, \gamma, 0, t)$$

Si $\beta = \gamma = 0$, $K(\beta, \gamma, 0, t) = 1 \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$, et :

$$L(\beta, x, t) \leq x K(\beta, \gamma, 0, t)$$

Si $\beta = 0$ et $\gamma > 0$, $K(\beta, \gamma, 0, t) \geq \frac{1}{\gamma - \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$, d'où :

$$L(\beta, x, t) \leq x(\gamma - \beta) K(\beta, \gamma, 0, t)$$

Si $\beta > 0$ et $\gamma < \beta$, $L(\beta, x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \frac{x}{\beta^2} + 2 \sinh(\beta x) e^{t\beta^2/2}$ et $K(\beta, \gamma, 0, t) \geq \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} + \frac{2\beta}{\beta - \gamma} e^{t\beta^2/2}$.

On en déduit que :

$$L(\beta, x, t) \leq \max \left(\frac{x(\beta - \gamma)}{\beta^2}, \sinh(\beta x) \frac{\beta - \gamma}{\beta} \right) K(\beta, \gamma, 0, t)$$

Or $x \leq \frac{\sinh(\beta x)}{\beta}$, d'où :

$$L(\beta, x, t) \leq \max \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta^3}, \frac{\beta - \gamma}{\beta} \right) \sinh(\beta x) K(\beta, \gamma, 0, t)$$

Si $\beta > 0$ et $\gamma = \beta$, on a $K(\beta, \gamma, 0, t) \geq \beta \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} + 2e^{t\beta^2/2}$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} L(\beta, x, t) &\leq \max \left(\frac{x}{\beta^3}, \sinh(\beta x) \right) K(\beta, \gamma, 0, t) \\ &\leq \max \left(\frac{1}{\beta^4}, 1 \right) \sinh(\beta x) K(\beta, \gamma, 0, t) \end{aligned}$$

Si $\beta > 0$ et $\gamma > \beta$, on a $K(\beta, \gamma, 0, t) \geq \frac{1}{\gamma - \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} + \frac{2\gamma}{\gamma - \beta} e^{t\beta^2/2}$ d'où :

$$\begin{aligned} L(\beta, \gamma, x) &\leq \max \left(x \frac{\gamma - \beta}{\beta^2}, \sinh(\beta x) \frac{\gamma - \beta}{\gamma} \right) K(\beta, \gamma, 0, t) \\ &\leq \max \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta^3}, \frac{\gamma - \beta}{\gamma} \right) \sinh(\beta x) K(\beta, \gamma, 0, t) \end{aligned}$$

Tout cela prouve que pour tous β, γ , il existe $D(\beta, \gamma)$ tel qu'on ait, pour tout $t \geq 1$ et tout $x \geq 0$:

$$L(\beta, x, t) \leq D(\beta, \gamma) \sinh((\beta^+ + 1)x)K(\beta, \gamma, 0, t)$$

Maintenant, posons $\delta(\alpha) = \max\{\alpha_m^+, m \in E\}$, $\nu_{(E, \mu)} = \min\{\mu_m, m \in E\}$ ($\nu_{(E, \mu)} > 0$ puisque $\mu_m > 0$ pour tout $m \in E$), et $D(\alpha, \gamma) = \max\{D(\alpha_m, \gamma), m \in E\}$.

On obtient les inégalités :

$$\begin{aligned} L(\alpha_k, x, t) &\leq D(\alpha_k, \gamma) \sinh((\alpha_k^+ + 1)x)K(\alpha_k, \gamma, 0, t) \\ &\leq D(\alpha, \gamma) \sinh((\delta(\alpha) + 1)x) \sum_{m \in E} \frac{\mu_m}{\nu_{(E, \mu)}} K(\alpha_m, \gamma, 0, t) \\ &\leq \frac{D(\alpha, \gamma)}{\nu_{(E, \mu)}} \sinh((\delta(\alpha) + 1)x) Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, x, k, t) \leq \left(\frac{D(\alpha, \gamma)}{\nu_{(E, \mu)}} + C_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma) \right) \exp[(\delta(\alpha) + 1)x] Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$$

inégalité valable dès que $t \geq 1$, et que nous noterons :

$$Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, x, k, t) \leq H_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma) \exp(\psi(\alpha)x) Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$$

Cette inégalité nous permet de démontrer l'existence de la mesure cherchée. En effet, si $s \geq 0$ et $\Gamma_s \in \mathcal{F}_s$, on a, pour tout $t \geq s + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(t, \alpha, \gamma)}[\Gamma_s] &= \mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)} \left[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \frac{e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t}}{\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t}]} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)} \left[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \frac{\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t} | \mathcal{F}_s]}{\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t}]} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)} \left[\mathbf{1}_{\Gamma_s} e^{\gamma L_s} \frac{\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma(L_t - L_s)} | X_s, N_s]}{\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}[e^{\alpha_{N_t} X_t + \gamma L_t}]} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)} \left[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \exp(\gamma L_s) \frac{R_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s)}{R_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)} \right] \end{aligned}$$

où $R_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, x, k, u) = \mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}[\exp(\alpha_{N_u} X_u + \gamma L_u)]$.

On sait que $\exp(\gamma L_s) \frac{R_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s)}{R_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)}$ est équivalent à $\exp(\gamma L_s) \frac{Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s)}{Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)}$ quand t tend vers l'infini (L_s, X_s, N_s étant fixés).

Or $Q_{(E, \mu)}(\alpha, \gamma, x, k, u) = \sum_{m \in E} \mu_m K(\alpha_m, \gamma, x, u) + L(\alpha_k, x, u)$ pour tous x, k, u , donc d'après les estimations précédentes de K et L , on a les équivalents suivants :

Conditions sur α, γ	Equivalent de $Q_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, x, k, u)$ pour $u \rightarrow \infty$
$\gamma \geq \alpha_m$ pour tout m , $\gamma = \alpha_m$ ssi $m \in J$, J sous-ensemble non vide de E , et $\gamma > 0$	$2 \left(\sum_{m \in J} \mu_m \right) u \gamma^2 e^{-\gamma x + u \gamma^2 / 2}$
$\gamma > \alpha_m$ pour tout $m \in E$ et $\gamma > 0$	$\left(\sum_{m \in E} \frac{2\gamma \mu_m}{\gamma - \alpha_m} \right) e^{-\gamma x + u \gamma^2 / 2}$
$\alpha_m = \max(\alpha) = \bar{\alpha}$ ssi $m \in J$ (J sous-ensemble non vide de E), $\bar{\alpha} > \gamma$ et $\bar{\alpha} > 0$	$e^{u \bar{\alpha}^2 / 2} \left(\frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \gamma} \left(\sum_{m \in J} \mu_m \right) e^{-\bar{\alpha} x} + 2 \sinh(\bar{\alpha} x) \mathbf{1}_{k \in J} \right)$
$\gamma = 0$, $\alpha_m = 0$ si $m \in J$ (sous-ensemble non vide de E) et $\alpha_m < 0$ sinon	$\sum_{m \in J} \mu_m$
$\gamma = 0$, $\alpha_m < 0$ pour tout $m \in E$	$\sqrt{\frac{2}{\pi u}} \left(\sum_{m \in E} \frac{\mu_m}{ \alpha_m } \right)$
$\alpha_m = 0$ si $m \in J$ (sous-ensemble non vide de E), $\alpha_m < 0$ sinon, et $\gamma < 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi u}} \left(\frac{\sum_{m \in J} \mu_m}{ \gamma } + x \mathbf{1}_{k \in J} \right)$
$\alpha_m < 0$ pour tout $m \in E$ et $\gamma < 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi u^3}} \left(\sum_{m \in E} \mu_m \frac{ \alpha_m + \gamma }{\alpha_m^2 \gamma^2} + x \left(\frac{1}{\alpha_k^2} + \sum_{m \in E} \frac{\mu_m}{\alpha_m \gamma} \right) \right)$

On en déduit aisément que l'expression $\exp(\gamma L_s) \frac{R_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t-s)}{R_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)}$ converge, quand t tend vers l'infini (à L_s, X_s, N_s fixés) vers $M_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, L_s)$, donné par le tableau suivant :

Conditions sur α, γ	$M_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, L_s)$
$\gamma \geq \alpha_m$ pour tout m et $\gamma > 0$	$e^{\gamma(L_s - X_s) - s \gamma^2 / 2}$
$\alpha_m = \max(\alpha) = \bar{\alpha}$ ssi $m \in J$ ($J \subset E$ et $J \neq \emptyset$), $\bar{\alpha} > \gamma$ et $\bar{\alpha} > 0$	$e^{\gamma L_s - s \bar{\alpha}^2 / 2} \left(e^{-\bar{\alpha} X_s} + \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha} \sum_{m \in J} \mu_m} \sinh(\bar{\alpha} X_s) \mathbf{1}_{N_s \in J} \right)$
$\gamma = 0$, $\alpha_m \leq 0$ pour tout $m \in E$	1
$\alpha_m = 0$ si $m \in J$ ($J \subset E$ et $J \neq \emptyset$), $\alpha_m < 0$ sinon, et $\gamma < 0$	$e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{ \gamma }{\sum_{m \in J} \mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s \in J} \right)$
$\alpha_m < 0$ pour tout $m \in E$ et $\gamma < 0$	$e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{\frac{1}{\alpha_k^2} + \sum_{m \in E} \frac{\mu_m}{\alpha_m \gamma}}{\sum_{m \in E} \mu_m \frac{ \alpha_m + \gamma }{\alpha_m^2 \gamma^2}} X_s \right)$

Par ailleurs, comme $t - s \geq 1$, on a les inégalités :

$$\begin{aligned} R_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s) &\leq Q_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s) \\ &\leq H_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma) e^{\psi(\alpha)X_s} Q_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t - s) \end{aligned}$$

et

$$R_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t) \geq \frac{1}{2} Q_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$$

pour t assez grand (à α, γ, E, μ fixés), puisque $R_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$ est équivalent à $Q_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)$ quand t tend vers l'infini.

De plus, pour t assez grand :

$$\frac{Q_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t - s)}{Q_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)} \leq 2M_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, 0) \leq 2$$

On en déduit que pour t supérieur à une valeur ne dépendant que de E, μ, α, γ et s , on a :

$$e^{\gamma L_s} \frac{R_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, t - s)}{R_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, 0, 0, t)} \leq 4H_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma) \exp(\psi(\alpha)X_s + \gamma L_s)$$

Ce majorant étant intégrable sous $\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}$, on en déduit, par le théorème de convergence dominée :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(t,\alpha,\gamma)}(\Gamma_s) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[\mathbf{1}_{\Gamma_s} M_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, L_s)]$$

On a donc prouvé l'existence d'une mesure $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$ vérifiant :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(t,\alpha,\gamma)}(\Gamma_s) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}(\Gamma_s)$$

dès que $\Gamma_s \in \mathcal{F}_s$ avec $s \geq 0$.

De plus, il existe, sous $\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}$, une martingale $(M_s^{(E,\mu,\alpha,\gamma)})_{s \geq 0}$, notée plus simplement $(M_s)_{s \geq 0}$, égale à $M_{(E,\mu)}(\alpha, \gamma, X_s, N_s, L_s)$ et vérifiant (pour $\Gamma_s \in \mathcal{F}_s$) :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}(\Gamma_s) = \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[\mathbf{1}_{\Gamma_s} M_s^{(E,\mu,\alpha,\gamma)}]$$

Ces dernières propriétés correspondent exactement à l'énoncé du théorème 1, qui vient donc d'être démontré.

4 Etude du processus associé à $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$

L'étude du processus associé à $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$ se sépare en plusieurs cas, selon l'expression de la martingale $(M_s)_{s \geq 0}$ précédemment donnée ; ces cas correspondent à la distinction effectuée dans l'énoncé du théorème 2.

Cas où $\gamma \geq \alpha_m$ pour tout m et $\gamma > 0$

Sous $\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}$, $(Z_s = L_s - X_s)_{s \geq 0}$ est un mouvement brownien. La densité de la loi de $(Z_u)_{0 \leq u \leq s}$ sous $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$, par rapport à celle d'un mouvement brownien sur $[0, s]$, est donc égale à $M_s = \exp(\gamma Z_s - s\gamma^2/2)$.

$(Z_s)_{s \geq 0}$ est alors un mouvement brownien avec drift γ sous $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$, et on retrouve $(X_s)_{s \geq 0}$ à partir de $(Z_s)_{s \geq 0}$ grâce à l'expression : $X_s = \left(\sup_{u \in [0,s]} Z_u \right) - Z_s$.

Autrement dit, $(X_s)_{s \geq 0}$ est la valeur absolue d'un processus bang-bang de paramètre γ .

Par ailleurs, N_s n'intervient pas dans l'expression de M_s , donc le processus $(N_s)_{s \geq 0}$, conditionné à $(X_s)_{s \geq 0}$, est obtenu de la même manière sous $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$ que sous $\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}$: on choisit $(N_s)_{s \in I}$ pour chaque intervalle I d'excursion de $(X_s)_{s \geq 0}$, indépendamment et avec la loi μ .

Cas où $\alpha_m = \max(\alpha) = \bar{\alpha}$ ssi $m \in J$ ($J \subset E$ et $J \neq \emptyset$), $\bar{\alpha} > \gamma$ et $\bar{\alpha} > 0$

Avant de traiter ce deuxième cas en général, nous allons tout d'abord supposer $J = \{m\}$ pour un m dans E , et $\gamma = 0$.

On a alors :

$$M_s = e^{-s\bar{\alpha}^2/2} \left(e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m} \right)$$

pour tout $s \geq 0$.

Considérons à présent un processus $(Y_t, R_t)_{t \geq 0}$ sur \mathbf{R}_E défini de la manière suivante :

- $(Y_t)_{t \geq 0}$ est la valeur absolue d'un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$.

- Soit \mathcal{I} l'ensemble des intervalles d'excursion de $(Y_t)_{t \geq 0}$. R_t est alors défini comme étant constant sur chaque intervalle $I \in \mathcal{I}$ ($R_t = R_I$ pour $t \in I$), avec $R_I = m$ p.s. si I est l'unique intervalle d'excursion non borné de $(Y_t)_{t \geq 0}$, et avec les autres $(R_I)_{I \in \mathcal{I}}$ indépendants et de loi μ .

Montrons alors que $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}$ est la loi du processus $(Y_t, R_t)_{t \geq 0}$.

Pour cela, observons que la loi de $(Y_s, R_s)_{s \leq t}$, conditionnellement à $(Y_t, R_t) = (x, k) \in E$, est égale à la loi de $(X_s, N_s)_{s \leq t}$ sous $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}$, conditionnellement à $(X_t, N_t) = (x, k)$.

Ces deux lois conditionnelles sont en effet égales à la loi du processus $(Z_s, S_s)_{s \leq t}$ défini de la manière suivante :

- $(Z_s)_{s \leq t}$ est la valeur absolue d'un pont brownien de 0 vers x .

- $(S_s)_{s \leq t}$ est constant sur les intervalles d'excursions de $(Z_s)_{s \leq t}$; si on note \mathcal{I} l'ensemble de ces intervalles, et $S_s = S_I$ pour $s \in I$ et $I \in \mathcal{I}$, alors les variables $(S_I)_{I \in \mathcal{I}}$ sont indépendantes et de loi μ , sauf pour l'intervalle I de la forme $[a, t]$ ($a \in [0, t]$), pour lequel on a $S_I = k$ p.s.

L'égalité des lois conditionnelles précédentes (assez simple à démontrer), entraîne que si pour tout t , la loi de (Y_t, R_t) est égale à celle de (X_t, N_t) sous $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, 0)}$, alors le processus $(Y_t, R_t)_{t \geq 0}$ a pour loi $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, 0)}$, comme annoncé.

Effectuons donc le calcul de la loi de (Y_t, R_t) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_t \in dy, R_t = k) &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_{Y_t \in dy} \mathbf{P}(R_t = k | (Y_s)_{s \in \mathbf{R}_+})] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_{Y_t \in dy} (\mathbf{1}_{k=m} \mathbf{1}_{\forall s \geq t, Y_s > 0} + \mu_k \mathbf{1}_{\exists s \geq t, Y_s = 0})] \\ &= \mathbf{P}(Y_t \in dy) (\mathbf{1}_{k=m} \mathbf{P}(\forall s \geq t, Y_s > 0 | Y_t = y) + \mu_k \mathbf{P}(\exists s \geq t, Y_s = 0 | Y_t = y)) \end{aligned}$$

Rappelons que $Y_t = |B_t^{(\bar{\alpha})}|$ où $(B_t^{(\bar{\alpha})})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$. On a donc :

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\exists s \geq t, Y_s = 0 | Y_t = y) \\ &= \mathbf{P}(\exists s \geq t, B_s^{(\bar{\alpha})} = 0 | B_t^{(\bar{\alpha})} = y) \mathbf{P}(B_t^{(\bar{\alpha})} = y | |B_t^{(\bar{\alpha})}| = y) \\ &+ \mathbf{P}(\exists s \geq t, B_s^{(\bar{\alpha})} = 0 | B_t^{(\bar{\alpha})} = -y) \mathbf{P}(B_t^{(\bar{\alpha})} = -y | |B_t^{(\bar{\alpha})}| = y) \\ &= e^{-2\bar{\alpha}y} \cdot \frac{e^{\bar{\alpha}y}}{e^{\bar{\alpha}y} + e^{-\bar{\alpha}y}} + 1 \cdot \frac{e^{-\bar{\alpha}y}}{e^{\bar{\alpha}y} + e^{-\bar{\alpha}y}} = \frac{e^{-\bar{\alpha}y}}{\cosh(\bar{\alpha}y)} \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{P}(\forall s \geq t, Y_s > 0 | Y_t = y) = 1 - \frac{e^{-\bar{\alpha}y}}{\cosh(\bar{\alpha}y)} = \frac{\sinh(\bar{\alpha}y)}{\cosh(\bar{\alpha}y)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_t \in dy, R_t = k) &= \mathbf{P}(Y_t \in dy) \left(\mathbf{1}_{k=m} \frac{\sinh(\bar{\alpha}y)}{\cosh(\bar{\alpha}y)} + \mu_k \frac{e^{-\bar{\alpha}y}}{\cosh(\bar{\alpha}y)} \right) \\ &= \mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}(X_t \in dy) \cosh(\bar{\alpha}y) e^{-t\bar{\alpha}^2/2} \left(\mathbf{1}_{k=m} \frac{\sinh(\bar{\alpha}y)}{\cosh(\bar{\alpha}y)} + \mu_k \frac{e^{-\bar{\alpha}y}}{\cosh(\bar{\alpha}y)} \right) \\ &= e^{-t\bar{\alpha}^2/2} \mathbf{W}_{(E, \mu, x, k)}(X_t \in dy, N_t = k) \left(e^{-\bar{\alpha}y} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}y) \mathbf{1}_{k=m} \right) \end{aligned}$$

L'égalité des lois est donc démontrée.

Ainsi, nous avons traité le cas particulier où $J = \{m\}$ ($m \in E$) et $\gamma = 0$.

On remarque que si $E = \{-1, 1\}$, $\mu_1 = \mu_{-1} = 1/2$ et $m = 1$, le processus $(X_t, N_t)_{t \geq 0}$, qui est un mouvement brownien sous $\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}$, est un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$ sous $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, 0)}$.

Cela se vérifie aussi bien avec la martingale $(M_s)_{s \geq 0}$ qu'avec la description du processus $(R_t, Y_t)_{t \geq 0}$ que nous avons donnée ensuite.

A présent, traitons le cas, plus général, où $J = \{m\}$ mais où γ n'est plus nécessairement nul.

Dans ces conditions :

$$M_s = \exp(\gamma L_s - s\bar{\alpha}^2/2) \left(e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m} \right)$$

D'après le cas particulier précédent, la loi sous $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}$ du temps local L_∞ de $(X_t, N_t)_{t \geq 0}$ est la même que celle du temps local d'un mouvement brownien avec drift $\bar{\alpha}$: L_∞ est une variable exponentielle de paramètre $\bar{\alpha}$.

On en déduit l'existence de la mesure de probabilité ν , donnée par :

$$\nu = \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \exp(\gamma L_\infty) \cdot \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}$$

(et sous laquelle L_∞ est une variable exponentielle de paramètre $\bar{\alpha} - \gamma$).

Montrons que ν est exactement la mesure $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$ que nous étudions, celle-ci étant donc absolument continue par rapport à $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}$.

Pour prouver ce résultat, fixons $s \geq 0$ et $\Gamma_s \in \mathcal{F}_s$. On a :

$$\begin{aligned} \nu(\Gamma_s) &= \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)} \left[\frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \mathbf{1}_{\Gamma_s} e^{\gamma L_s} e^{\gamma(L_\infty - L_s)} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)} \left[\frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \mathbf{1}_{\Gamma_s} e^{\gamma L_s} \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)} [e^{\gamma(L_\infty - L_s)} | \mathcal{F}_s] \right] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} \left[\frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}} \mathbf{1}_{\Gamma_s} e^{\gamma L_s - s\bar{\alpha}^2/2} \left(e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m} \right) \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)} [e^{\gamma(L_\infty - L_s)} | \mathcal{F}_s] \right] \end{aligned}$$

On observe alors les faits suivants (valables sous $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}$) :

- Conditionnellement à \mathcal{F}_s et au fait que X_t ne s'annule pour aucun $t \geq s$, $L_\infty - L_s$ est nul.
- Conditionnellement à \mathcal{F}_s et au fait que X_t s'annule pour au moins un $t \geq s$, $L_\infty - L_s$ est une variable exponentielle de paramètre $\bar{\alpha}$.

Calculons maintenant la probabilité de chacun de ces deux cas, conditionnellement à \mathcal{F}_s .

Pour cela, posons $T = \inf \{t \geq s, X_t = 0\}$ et $A \in \mathcal{F}_s$ (T est un temps d'arrêt). Pour $t \geq s$, on a :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)} [T \leq t, A] = \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [M_t^{(E,\mu,\alpha,0)} \cdot \mathbf{1}_{T \leq t} \cdot \mathbf{1}_A]$$

puisque $\{T \leq t\}$ et A sont \mathcal{F}_t -mesurables.

De plus, $\{T \leq t\}$ et A sont également $\mathcal{F}_{T \wedge t}$ -mesurables, donc d'après le théorème d'arrêt :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}[T \leq t, A] &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[M_{T \wedge t}^{(E,\mu,\alpha,0)} \mathbf{1}_{T \leq t} \mathbf{1}_A] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[M_T^{(E,\mu,\alpha,0)} \mathbf{1}_{T \leq t} \mathbf{1}_A] \end{aligned}$$

Par convergence monotone :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}[T < \infty, A] &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[M_T^{(E,\mu,\alpha,0)} \mathbf{1}_{T < \infty} \mathbf{1}_A] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[M_T^{(E,\mu,\alpha,0)} \mathbf{1}_A] \end{aligned}$$

puisque $T < \infty$ p.s. sous $\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}[T < \infty, A] &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[\mathbf{1}_A \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[M_T^{(E,\mu,\alpha,0)} | \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)} \left[\mathbf{1}_A \frac{\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[M_T^{(E,\mu,\alpha,0)} | \mathcal{F}_s]}{M_s^{(E,\mu,\alpha,0)}} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)} \left[\mathbf{1}_A \frac{\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[e^{-(T-s)\bar{\alpha}^2/2} | \mathcal{F}_s]}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}} \right] \end{aligned}$$

Or, conditionnellement à \mathcal{F}_s , $T - s$ est le temps d'atteinte de zéro d'un mouvement brownien issu de X_s et indépendant de X_s . On en déduit :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[e^{-(T-s)\bar{\alpha}^2/2} | \mathcal{F}_s] = e^{-\bar{\alpha}X_s}$$

et

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}[T < \infty, A] = \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)} \left[\mathbf{1}_A \frac{e^{-\bar{\alpha}X_s}}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}} \right]$$

autrement dit :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}[T < \infty | \mathcal{F}_s] = \frac{e^{-\bar{\alpha}X_s}}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}[e^{\gamma(L_\infty - L_s)} | \mathcal{F}_s] = \frac{\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \gamma} e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}}{e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{1}{\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m}}$$

compte tenu des lois conditionnelles de $L_\infty - L_s$ précédemment données.

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \nu(\Gamma_s) &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} \left[\mathbf{1}_{\Gamma_s} e^{\gamma L_s - s\bar{\alpha}^2/2} \left(e^{-\bar{\alpha}X_s} + \frac{\bar{\alpha} - \gamma}{\bar{\alpha}\mu_m} \sinh(\bar{\alpha}X_s) \mathbf{1}_{N_s=m} \right) \right] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[\mathbf{1}_{\Gamma_s} M_s^{(E,\mu,\alpha,\gamma)}] \end{aligned}$$

On a donc l'égalité cherchée :

$$\nu = \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$$

Nous venons donc de traiter le cas où J est un singleton.

Le cas général est alors facile à étudier ; en effet la loi de $(X_t, N_t)_{t \geq 0}$, dans le cas général, est une moyenne des lois précédemment données, avec une pondération $\frac{\mu_m}{\sum_{k \in J} \mu_k}$ pour chaque $m \in J$.

Autrement dit, le processus canonique sous $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$ se décrit de la même manière qu'avant, sauf que sa dernière excursion se situe sur une branche quelconque appartenant à J , choisie aléatoirement à l'aide de la mesure μ .

Cas où $\gamma < 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout $m \in E$

Dans ce cas, on a :

$$M_s = e^{\gamma L_s} (1 + \theta_{N_s} X_s)$$

où les $(\theta_k)_{k \in E}$, positifs, dépendant de α , sont tels que :

$$\sum_{k \in E} \mu_k \theta_k = |\gamma|$$

Nous allons tout d'abord supposer que $\theta_k = \frac{|\gamma|}{\mu_m}$ si $k = m$, m étant un élément de E , et $\theta_k = 0$ si $k \neq m$.

On a, dans ces conditions :

$$M_s = e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right)$$

Considérons alors des réels positifs l et s , une variable aléatoire \mathcal{F}_{τ_l} -mesurable bornée Y (τ_l étant l'inverse du temps local de $(X_t)_{t \geq 0}$ pris en l), et une fonction F mesurable bornée de $\mathcal{C}([0, s], \mathbf{R}_E)$ vers \mathbf{R} .

On a alors, lorsque $t \geq 0$ (en utilisant le théorème d'arrêt pour la deuxième égalité) :

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [\mathbf{1}_{\tau_l \leq t} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s})] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [M_{t+s}^{(E,\mu,\alpha,\gamma)} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s})] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [M_{(t+s) \wedge (\tau_l+s)}^{(E,\mu,\alpha,\gamma)} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s})] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [M_{\tau_l+s}^{(E,\mu,\alpha,\gamma)} F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s}) \mathbf{1}_{\tau_l \leq t} Y] \end{aligned}$$

La convergence monotone entraîne alors (compte tenu du fait que $\tau_l < \infty$ p.s. sous $\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}$) :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [\mathbf{1}_{\tau_l < \infty} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s})]$$

$$e^{\gamma l} \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} \left[e^{\gamma(L_{\tau_l+s}-L_{\tau_l})} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_{\tau_l+s} \mathbf{1}_{N_{\tau_l+s}=m} \right) F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s}) Y \right]$$

D'après la propriété de Markov de l'araignée, $(X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s}$ est indépendant de \mathcal{F}_{τ_l} sous $\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}$ et a la même loi que $(X_u, N_u)_{0 \leq u \leq s}$.

On en déduit facilement :

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [\mathbf{1}_{L_\infty \geq l} Y F((X_{\tau_l+u}, N_{\tau_l+u})_{0 \leq u \leq s})] \\ &= e^{\gamma l} \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [F(X_u, N_u)_{0 \leq u \leq s}] \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [Y] \end{aligned}$$

En particulier, pour F et Y égaux à 1, on obtient :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [L_\infty \geq l] = \exp(\gamma l)$$

On a donc les caractéristiques suivantes :

- L_∞ est une variable exponentielle de paramètre $|\gamma|$.

- Conditionnellement à $L_\infty \geq l$, $(X_s, N_s)_{0 \leq s \leq \tau_l}$ est une araignée brownienne arrêtée en τ_l , et $(X_{\tau_l+s}, N_{\tau_l+s})_{s \geq 0}$ admet pour loi $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$; de plus, ces deux processus sont indépendants.

On déduit de ce qui précède que conditionnellement à $L_\infty = l$, $(X_s, N_s)_{0 \leq s \leq \tau_l}$ est encore une araignée arrêtée en τ_l , et $(X_{\tau_l+s}, N_{\tau_l+s})_{s \geq 0}$ est un processus de loi $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$, conditionné par le fait qu'il ne s'annule qu'au temps zéro; les deux processus étant encore indépendants.

Pour décrire le deuxième processus, considérons $s \geq 0$, $\Gamma_s \in \mathcal{F}_s$, $l \geq 0$ et $t \geq s$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [\Gamma_s, \tau_l \leq t] &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [M_t^{(E,\mu,\alpha,\gamma)} \mathbf{1}_{\Gamma_s} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t}] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [M_{\tau_l \vee s}^{(E,\mu,\alpha,\gamma)} \mathbf{1}_{\Gamma_s} \mathbf{1}_{\tau_l \leq t}] \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [\Gamma_s, \tau_l < \infty] = \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [M_{\tau_l \vee s}^{(E,\mu,\alpha,\gamma)} \mathbf{1}_{\Gamma_s}]$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [\Gamma_s, L_\infty \leq l] &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [(M_s^{(E,\mu,\alpha,\gamma)} - M_{\tau_l \vee s}^{(E,\mu,\alpha,\gamma)}) \mathbf{1}_{\Gamma_s}] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} \left[\left(e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l} \right) \mathbf{1}_{L_s \leq l} \mathbf{1}_{\Gamma_s} \right] \\ &= \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} [L_s \leq l] \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} \left[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \left(e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l} \right) | L_s \leq l \right] \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [L_\infty \leq l] = 1 - e^{\gamma l}$, on a :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)} [\Gamma_s | L_\infty \leq l]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[L_s \leq l]}{1 - e^{\gamma l}} \mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)} \left[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \left(e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l} \right) | L_s \leq l \right] \\
&= \frac{\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[L_s \leq l]}{1 - e^{\gamma l}} \tilde{\mathbf{W}}(l) \left[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \left(e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l} \right) \right]
\end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{W}}(l)$ désigne la loi de $(X_s, N_s)_{s \geq 0}$ conditionnée par le fait que $L_s \leq l$.

Quand l tend vers zéro, $\frac{\mathbf{W}_{(E,\mu,0,0)}[L_s \leq l]}{1 - e^{\gamma l}}$ tend vers $\frac{1}{|\gamma|} \sqrt{\frac{2}{\pi s}}$.

D'autre part, si l et L_s tendent vers zéro à (X_s, N_s) fixé, $e^{\gamma L_s} \left(1 + \frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m} \right) - e^{\gamma l}$ tend vers $\frac{|\gamma|}{\mu_m} X_s \mathbf{1}_{N_s=m}$.

Ceci permet de démontrer :

$$\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}[\Gamma_s | L_\infty = 0] = \tilde{\mathbf{W}}(0) \left[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \frac{X_s}{\mu_m} \mathbf{1}_{N_s=m} \right]$$

où $\tilde{\mathbf{W}}(0)$ est la loi d'une araignée sur $[0, s]$, conditionnée par sa non-annulation en dehors du temps 0; on remarque que sous $\tilde{\mathbf{W}}(0)$, $(X_u)_{u \leq s}$ est un méandre brownien.

On en déduit alors que sous $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,\gamma)}$, et conditionnellement au fait que $X_s > 0$ pour tout $s > 0$, $(X_s)_{s \geq 0}$ est un processus de Bessel de dimension 3, et $N_s = m$ pour tout s .

On a donc la description de $(X_t, N_t)_{t \geq 0}$ dans le cas où un seul des θ_k précédemment donnés est nul.

Le cas général est simple à étudier à présent; en effet, il suffit de faire une moyenne pondérée des mesures précédemment décrites pour chacun des $m \in E$ (avec la pondération $\frac{\mu_m \theta_m}{|\gamma|}$).

Cas où $\gamma = 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout $m \in E$

Ce cas est le plus simple de tous : $\mathbf{W}_{(E,\mu)}^{(\infty,\alpha,0)}$ est exactement la loi d'une araignée brownienne, puisque $M_s^{(E,\mu,\alpha,0)}$ est constante et égale à 1.

Nous avons maintenant étudié tous les cas possibles pour γ et α , et il est facile de vérifier que cette étude entraîne le théorème 2.

De plus, si $\gamma < 0$ et $\alpha_m \leq 0$ pour tout m , on a (pour tout $m \in E$ et avec les notations du théorème 2) :

$$\mathbf{P}(M = m) = \frac{\mu_m}{\sum_{k \in J} \mu_k} \mathbf{1}_{m \in J}$$

si $J = \{m \in E, \alpha_m = 0\}$ est non vide, et

$$\mathbf{P}(M = m) = \frac{\mu_m \left(\frac{|\gamma|}{\alpha_m^2} + \sum_{k \in E} \frac{\mu_k}{|\alpha_k|} \right)}{\sum_{k \in E} \mu_k \frac{|\alpha_k| + |\gamma|}{\alpha_k^2}}$$

si $J = \emptyset$.

Par ailleurs, on peut observer que $(X_s, N_s)_{s \geq 0}$ s'annule pour des valeurs arbitrairement grandes de s ssi $\gamma \geq 0$ et $\gamma \geq \alpha_m$ pour tout m .

Remarque 1 : Le théorème 2, que nous venons de prouver, indique différents comportements possibles pour le processus limite obtenu, selon les valeurs des réels α_m ($m \in E$) et γ .

Cette distinction de cas généralise celle que l'on obtient à partir des résultats démontrés dans [8].

Par ailleurs, on observe que la distinction de cas donnée dans [8] est étroitement liée à celle que Y. Harriya et M. Yor obtiennent dans [4]; ce lien peut vraisemblablement être expliqué en comparant le comportement des quantités $\int_0^t \exp(2X_s) ds$ et $\exp(2S_t)$, $(X_s)_{s \geq 0}$ étant un mouvement brownien et S_t son maximum sur $[0, t]$.

On peut alors se demander s'il est possible de mettre en évidence des liens analogues entre des pénalisations d'araignées browniennes.

Remarque 2 : Soit ν une mesure de probabilité définie sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_E)$, dont la densité par rapport à $\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}$, conditionnellement à \mathcal{F}_s ($s \geq 0$), existe et s'écrit sous la forme :

$$g(s, X_s, N_s) = \exp(-s\beta^2/2) f_{N_s}(X_s)$$

avec $f_m \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+)$ pour tout $m \in E$, $f_m(0)$ ne dépendant pas de m (ce qui permet de poser $f_0(0) = f_m(0)$), et $\beta > 0$.

$g(s, X_s, N_s)$ est une martingale sous $\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}$.

L'étude du générateur infinitésimal de l'araignée permet alors de montrer les faits suivants :

- Pour tous $x \in \mathbf{R}_+^*$, $s \geq 0$ et $m \in E$, $\frac{\partial g}{\partial s}(s, x, m) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, x, m) = 0$.
- Pour tout $s \geq 0$, $\sum_{m \in E} \mu_m \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0, m) = 0$.

La première égalité donne :

$$-\frac{\beta^2}{2} e^{-s\beta^2/2} f_m(x) + \frac{1}{2} e^{-s\beta^2/2} f_m''(x) = 0$$

soit $f_m''(x) = \beta^2 f_m(x)$.

On en déduit qu'il existe δ_m et $\lambda_m \in \mathbf{R}$ tels que :

$$f_m(x) = \delta_m \exp(-\beta x) + \lambda_m \sinh(\beta x)$$

pour tout $x \geq 0$.

De plus, comme $g(s, X_s, N_s)$ est une densité, son espérance sous $\mathbf{W}_{(E, \mu, 0, 0)}$ est 1. En particulier, pour $s = 0$, on obtient $g(0, 0, 0) = 1$, donc $f_0(0) = 1$, ce qui implique $f_m(0) = 1$ et $\delta_m = 1$.

Par ailleurs, $f_m(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, donc $\lambda_m \geq 0$.

La deuxième égalité à vérifier implique alors : $\sum_{m \in E} \mu_m f'_m(0) = 0$, soit $\sum_{m \in E} \mu_m (1 - \lambda_m) = 0$ et $\sum_{m \in E} \mu_m \lambda_m = 1$.

On en déduit que ν est une moyenne pondérée des mesures $\mathbf{W}_{(E, \mu)}^{(\infty, \alpha, 0)}$ obtenues en prenant successivement, pour chaque m , $\alpha_m = \beta > \alpha_k$ (pour tout $k \neq m$), la pondération étant $\mu_m \lambda_m$.

Les processus obtenus sont en fait des généralisations du mouvement brownien avec drift.

Bibliographie

- [1] M. Barlow, J. Pitman, M. Yor : On Walsh's Brownian motions, Séminaire de Probabilités XXIII, 275-293 (1989)
- [2] M. Barlow, J. Pitman, M. Yor : Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus, Séminaire de Probabilités XXIII, 294-314 (1989)
- [3] A.-S. Cherny, A.-N. Shiryaev : Some distributional properties of a Brownian motion with a drift and an extension of P. Lévy's theorem, SIAM Theory of Probability and Its Applications **44**, 412-418 (1999)
- [4] Y. Hariya, M. Yor : Limiting distributions associated with moments of exponential Brownian functionals, Studia Sci. Math. Hungar. **41**, 193-242 (2004)
- [5] J. Pitman : The distributions of local times of a Brownian bridge, Séminaire de Probabilités XXXIII, 388-394 (1999)
- [6] B. Roynette, P. Vallois, M. Yor : Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights, C.R.A.S. Paris, Sér. I Math **337**, 667-673 (2003)
- [7] B. Roynette, P. Vallois, M. Yor : Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time, II, to appear in Studia Sci. Math. Hungar. (2005)
- [8] B. Roynette, P. Vallois, M. Yor : Limiting laws for long Brownian bridges perturbed by their one-sided maximum, III, to appear in Periodica Hungarica (2005)
- [9] J.-B. Walsh : A diffusion with a discontinuous local time, Temps Locaux, Astérisque **52-53**, 37-45 (1978)