



**HAL**  
open science

# Analyse de von Neumann de schémas aux différences finies pour les équations de Maxwell-Debye et de Maxwell-Lorentz

Brigitte Bidégaray-Fesquet

► **To cite this version:**

Brigitte Bidégaray-Fesquet. Analyse de von Neumann de schémas aux différences finies pour les équations de Maxwell-Debye et de Maxwell-Lorentz. 2005. hal-00005369v1

**HAL Id: hal-00005369**

**<https://hal.science/hal-00005369v1>**

Preprint submitted on 15 Jun 2005 (v1), last revised 5 Feb 2008 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse de von Neumann de schémas aux différences finies pour les équations de Maxwell–Debye et de Maxwell–Lorentz

Brigitte Bidégaray-Fesquet,  
Laboratoire de Modélisation et de Calcul (LMC-IMAG), UMR CNRS 5523,  
B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

## Résumé

Ce rapport technique donne les détails de l'article [1]. Il s'agit de l'analyse de stabilité de différents schémas aux différences finies pour les équations de Maxwell–Debye et de Maxwell–Lorentz. Ce travail donne un prolongement systématique et rigoureux à des travaux antérieurs de Petropoulos [5].

## 1 Introduction

On s'intéresse à l'étude de la stabilité de schémas aux différences finies pour les modèles de Maxwell–Debye et de Maxwell–Lorentz. Pour cela, on a sélectionné les mêmes schémas que ceux déjà étudiés par Petropoulos [5]. Mais celui-ci, après avoir défini correctement les polynômes caractéristiques associés à chacun des schémas, se contentait d'en calculer les racines à l'aide d'un algorithme numérique. Ceci suppose de spécifier des valeurs pour les paramètres physiques qui entrent en jeu dans ces modèles ainsi que pour les pas de temps et d'espace choisis pour la discrétisation. Il faut donc refaire l'analyse pour chaque nouveau matériau et chaque nouvelle discrétisation. Nous appliquons ici une analyse de von Neumann sur ces polynômes caractéristiques dans leur forme littérale, ce qui permet d'obtenir une fois pour toutes des conditions de stabilité valables pour tous les matériaux.

### 1.1 Modèles de Maxwell–Debye et Maxwell–Lorentz

Considérons les équations de Maxwell sans magnétisation

$$\begin{aligned} \text{(Faraday)} \quad \partial_t \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= - \operatorname{rot} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \\ \text{(Ampère)} \quad \partial_t \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ . Ce système est fermé par la loi constitutive du matériau

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \varepsilon_0 \int_0^t \mathbf{E}(t - \tau, \mathbf{x}) \chi(\tau) d\tau, \quad (2)$$

où  $\varepsilon_\infty$  est la permittivité relative à fréquence infinie et  $\chi$  la susceptibilité linéaire. Si l'on discrétise l'équation intégrale (2), on obtient ce que l'on appelle un schéma récursif (cf. par exemple [4], [9]). On peut également différentier l'équation (2) pour obtenir une équation différentielle en temps pour  $\mathbf{D}$  qui dépend de la forme particulière de  $\chi$ . Pour un milieu de Debye, cette équation différentielle est

$$t_r \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{D} = t_r \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \partial_t \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_s \mathbf{E}, \quad (3)$$

où  $t_r$  est le temps de relaxation et  $\varepsilon_s$  est la permittivité statique relative. On peut en écrire une forme équivalente portant sur la polarisation  $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) - \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ , à savoir

$$t_r \partial_t \mathbf{P} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}. \quad (4)$$

Pour un milieu de Lorentz à une fréquence de résonance  $\omega_1$ , on a de manière similaire

$$\partial_t^2 \mathbf{D} + \nu \partial_t \mathbf{D} + \omega_1^2 \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \partial_t^2 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \nu \partial_t \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_s \omega_1^2 \mathbf{E}, \quad (5)$$

où  $\nu$  est un coefficient d'amortissement, et

$$\partial_t^2 \mathbf{P} + \nu \partial_t \mathbf{P} + \omega_1^2 \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega_1^2 \mathbf{E}. \quad (6)$$

En notant  $\mathbf{J}$  la dérivée temporelle de  $\mathbf{P}$ , le système de Maxwell (1) se réécrit

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= -\text{rot } \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \\ \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \partial_t \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{J}(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (7)$$

## 1.2 Le schéma de Yee

Pour discrétiser les équations de Maxwell dans un matériau inerte ( $\mathbf{J} = 0$ ), on utilise le schéma de Yee [7], qui consiste à décaler les grilles de discrétisation spatiale et temporelle pour les différents champs. On note  $c_\infty = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mu_0}$  la vitesse de la lumière à fréquence infinie. Si le pas d'espace  $\delta x$  est le même dans toutes les directions et  $\delta t$  désigne le pas de temps, la condition CFL est  $c_\infty \delta t / \delta x \leq 1$  en dimension  $N = 1$  d'espace et  $c_\infty \delta t / \delta x \leq 1/\sqrt{2}$  pour  $N = 2$  ou  $3$ . En dimension 1, on peut ne considérer par exemple que les champs  $E \equiv E_x$  et  $B \equiv B_y$  dont les équivalents discrets sont  $E_j^n \simeq E(n\delta t, j\delta x)$  (avec des notations similaires pour  $D \equiv D_x$ ) et  $B_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \simeq B((n+\frac{1}{2})\delta t, (j+\frac{1}{2})\delta x)$ . Le schéma de Yee pour le système de Maxwell initial (1) en les variables  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (B_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{\delta x} (E_{j+1}^n - E_j^n), \\ \frac{1}{\delta t} (D_j^{n+1} - D_j^n) &= -\frac{1}{\mu_0 \delta x} (B_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (8)$$

De même, pour le système de Maxwell (7) en les variables  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$ , on a la discrétisation de Yee

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (B_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{\delta x} (E_{j+1}^n - E_j^n), \\ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{\delta t} (E_j^{n+1} - E_j^n) &= -\frac{1}{\mu_0 \delta x} (B_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - J_j^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Pour les équations du matériau, nous nous intéressons à des schémas dit "à intégration directe" qui discrétisent les équations différentielles (3) à (6) (cf. [3], [2], [8]).

Avant de décrire et d'analyser un à un ces schémas, nous donnons ci-après le principe de l'analyse de von Neumann qui nous permet d'étudier leur stabilité.

## 2 Principes de l'analyse de von Neumann

### 2.1 Polynômes de Schur et de von Neumann

Nous définissons deux familles de polynômes : les polynômes de Schur et ceux de von Neumann simples.

**Définition 1** *Un polynôme est un polynôme de Schur si toutes ses racines,  $r$ , satisfont  $|r| < 1$ .*

**Définition 2** *Un polynôme est un polynôme de von Neumann simple si toutes ses racines  $r$ , appartiennent au disque unité ( $|r| \leq 1$ ) et toutes les racines de module 1 sont des racines simples.*

Il peut être difficile de localiser les racines d'un polynôme dont les coefficients sont compliqués. Par contre, on peut ramener ce problème difficile à la résolution de plusieurs petits problèmes plus simples. Pour cela, on construit une suite de polynômes de degré strictement décroissant. À un polynôme  $\phi$  défini par

$$\phi(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_p z^p,$$

où  $c_0, c_1, \dots, c_p \in \mathbb{C}$  et  $c_p \neq 0$ , on associe son polynôme conjugué  $\phi^*$  qui s'écrit

$$\phi^*(z) = c_p^* + c_{p-1}^* z + \cdots + c_0^* z^p.$$

Étant donné un polynôme  $\phi_0$ , on peut définir une suite de polynômes par la relation de récurrence

$$\phi_{m+1}(z) = \frac{\phi_m^*(0)\phi_m(z) - \phi_m(0)\phi_m^*(z)}{z}.$$

Cette suite est finie car il est clair qu'elle est de degré strictement décroissant :  $\deg \phi_{m+1} < \deg \phi_m$ , si  $\phi_m \neq 0$ . Par ailleurs, nous disposons des deux théorèmes suivants.

**Théorème 1** *Un polynôme  $\phi_m$  est un polynôme de Schur de degré exact  $d$  si et seulement si  $\phi_{m+1}$  est un polynôme de Schur de degré exact  $d - 1$  et  $|\phi_m(0)| < |\phi_m^*(0)|$ .*

**Théorème 2** *Un polynôme  $\phi_m$  est un polynôme de von Neumann simple si et seulement si*

$$\phi_{m+1} \text{ est un polynôme de von Neumann simple et } |\phi_m(0)| < |\phi_m^*(0)|,$$

ou

$$\phi_{m+1} \text{ est identiquement nul et } \phi_m' \text{ est un polynôme de Schur.}$$

Pour localiser les racines de  $\phi_0$  dans le disque unité ou non, il suffit de vérifier des conditions à chaque étape  $m$  (coefficient dominant non nul,  $|\phi_m(0)| < |\phi_m^*(0)|$ , ...) jusqu'à obtenir une réponse par la négative ou un polynôme de degré 1.

Les preuves des résultats ci-dessus se basent sur le théorème de Rouché et sont données dans [6].

## 2.2 Analyse de stabilité

Les modèles que nous considérons sont linéaires. Ils peuvent donc être analysés dans le domaine fréquentiel. Nous supposons ainsi que le schéma porte sur une variable  $U_j^n$  dont la dépendance spatiale est de la forme

$$U_j^n = U^n \exp(i\xi \cdot \mathbf{j}),$$

où  $\xi$  et  $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^N$ ,  $N = 1, 2, 3$ . Soit  $G$  la matrice telle que  $U^{n+1} = GU^n$  dont on suppose qu'elle ne dépend pas du temps, ni de  $\delta x$  ou  $\delta t$  séparément mais uniquement du rapport  $\delta x/\delta t$ . Soit  $\phi_0$  le polynôme caractéristique de  $G$ , alors nous avons la condition suffisante de stabilité suivante.

**Théorème 3** *Une condition suffisante de stabilité est que  $\phi_0$  soit un polynôme de von Neumann simple.*

Cette condition n'est pas nécessaire. La stabilité est liée au fait que  $U^n = G^n U^0$  et correspond à la bornitude des itérées  $G^n$  de la matrice  $G$ . Le cas des racines de module unité multiples peut donner lieu à des itérées de  $G$  qui sont bornées (pour la matrice identité par exemple) ou non. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bornée, et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ non bornée.}$$

Ces cas de figure ont lieu avec les schémas qui nous intéressent et ils doivent être traités séparément, sans l'aide de l'analyse de von Neumann, qui traite des polynômes caractéristiques et non des matrices dont ils découlent, ce qui induit une perte d'information.

### 3 Milieux de type Debye

Pour les milieux de type Debye, nous étudions deux schémas. Le premier est dû à Joseph et al. [2] et consiste à coupler les équations de Maxwell en les variables  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  avec le modèle de Debye reliant  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$ . Le second est dû à Young [8] et couple les équations de Maxwell en les variables  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  avec le modèle de Debye reliant  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{J}$ .

#### 3.1 Modèle de Joseph et al.

##### 3.1.1 Position du modèle

Le système de Maxwell (8) est fermé par une discrétisation du modèle de Debye (3), à savoir

$$\varepsilon_0 \varepsilon_\infty t_r \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\delta t} + \varepsilon_0 \varepsilon_s \frac{E_j^{n+1} + E_j^n}{2} = t_r \frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\delta t} + \frac{D_j^{n+1} + D_j^n}{2}. \quad (10)$$

Le système (8)–(10) porte sur la variable

$$U_j^n = {}^t(c_\infty B_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, E_j^n, D_j^n / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty) = {}^t(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_j^n, \mathcal{D}_j^n)$$

et s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= -\frac{c_\infty \delta t}{\delta x} (\mathcal{E}_{j+1}^n - \mathcal{E}_j^n), \\ \mathcal{D}_j^{n+1} - \mathcal{D}_j^n &= -\frac{c_\infty \delta t}{\delta x} (\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}), \\ \mathcal{E}_j^{n+1} - \mathcal{E}_j^n + \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_\infty} \frac{\delta t}{2t_r} (\mathcal{E}_j^{n+1} + \mathcal{E}_j^n) &= \mathcal{D}_j^{n+1} - \mathcal{D}_j^n + \frac{\delta t}{2t_r} (\mathcal{D}_j^{n+1} + \mathcal{D}_j^n). \end{aligned}$$

On voit que cette formulation fait apparaître les paramètres sans dimension :

$$\begin{aligned} \lambda &= c_\infty \delta t / \delta x && \text{constante de CFL,} \\ \delta &= \delta t / 2t_r && \text{pas de temps normalisé,} \\ \varepsilon'_s &= \varepsilon_s / \varepsilon_\infty && \text{permittivité statique normalisée.} \end{aligned}$$

On réécrit ce système sous forme explicite :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \lambda (\mathcal{E}_{j+1}^n - \mathcal{E}_j^n), \\ \mathcal{D}_j^{n+1} &= \mathcal{D}_j^n - \lambda (\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + \lambda^2 (\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n), \\ (1 + \delta \varepsilon'_s) \mathcal{E}_j^{n+1} &= (1 - \delta \varepsilon'_s) \mathcal{E}_j^n + (1 + \delta) \lambda^2 (\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) \\ &\quad + (1 + \delta) \lambda (\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + 2\delta \mathcal{D}_j^n, \end{aligned}$$

d'où la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda(e^{i\xi} - 1) & 0 \\ -\frac{(1+\delta)\lambda(1-e^{-i\xi})}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{(1-\delta\varepsilon'_s)+(1+\delta)\lambda^2(e^{i\xi}-2+e^{-i\xi})}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{2\delta}{1+\delta\varepsilon'_s} \\ -\lambda(1-e^{-i\xi}) & \lambda^2(e^{i\xi}-2+e^{-i\xi}) & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose  $\sigma = \lambda(e^{i\xi} - 1)$  et  $q = |\sigma|^2 = -\lambda^2(e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi}) = 4\lambda^2 \sin^2(\xi/2)$ . Avec ces notations  $G$  vaut

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma & 0 \\ \frac{(1+\delta)\sigma^*}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{(1-\delta\varepsilon'_s)-(1+\delta)q}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{2\delta}{1+\delta\varepsilon'_s} \\ \sigma^* & -q & 1 \end{pmatrix},$$

et on fera toujours dans la suite cette hypothèse sans la justifier à nouveau.

### 3.1.2 Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de  $G$  vaut

$$\begin{aligned}
P(Z) &= \frac{1}{1 + \delta\varepsilon'_s} \begin{vmatrix} Z-1 & \sigma & 0 \\ -(1+\delta)\sigma^* & (1+\delta\varepsilon'_s)Z - (1-\delta\varepsilon'_s) + (1+\delta)q & -2\delta \\ -\sigma^* & q & Z-1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{1 + \delta\varepsilon'_s} \left( (Z-1) \begin{vmatrix} (1+\delta\varepsilon'_s)Z - (1-\delta\varepsilon'_s) + (1+\delta)q & -2\delta \\ q & Z-1 \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} 1+\delta & -\delta \\ 1 & Z-1 \end{vmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{1 + \delta\varepsilon'_s} \left( (Z-1) \{ [1 + \delta\varepsilon'_s]Z^2 - [2 - (1+\delta)q]Z + [1 - \delta\varepsilon'_s - (1-\delta)q] \} \right. \\
&\quad \left. + q \{ [1 + \delta]Z - [1 - \delta] \} \right).
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est proportionnel à

$$\phi_0(Z) = [1 + \delta\varepsilon'_s]Z^3 - [3 + \delta\varepsilon'_s - (1+\delta)q]Z^2 + [3 - \delta\varepsilon'_s - (1-\delta)q]Z - [1 - \delta\varepsilon'_s].$$

### 3.1.3 Analyse de von Neumann

A partir du polynôme  $\phi_0$ , nous mettons en œuvre la construction récursive qui assure que  $\phi_0$  est un polynôme de Schur. On définit donc

$$\phi_0^*(Z) = [1 + \delta\varepsilon'_s] - [3 + \delta\varepsilon'_s - (1+\delta)q]Z + [3 - \delta\varepsilon'_s - (1-\delta)q]Z^2 - [1 - \delta\varepsilon'_s]Z^3.$$

La condition  $|\phi_0(0)| < |\phi_0^*(0)|$  est assurée. On définit ensuite par récurrence

$$\begin{aligned}
\phi_1(Z) &= \frac{1}{Z} \{ \phi_0^*(0)\phi_0(Z) - \phi_0(0)\phi_0^*(Z) \} \\
&= 2\delta \{ 2\varepsilon'_s Z^2 - [4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s + 1)q]Z + [2\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q] \}, \\
\phi_1^*(Z) &= 2\delta \{ 2\varepsilon'_s - [4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s + 1)q]Z + [2\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q]Z^2 \}.
\end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_\infty$ , on a  $\varepsilon'_s \geq 1$  et la quantité  $\varepsilon'_s - 1$  est positive. Si  $q = 0$  ou  $\varepsilon'_s = 1$ , on a exactement  $|\phi_1(0)| = |\phi_1^*(0)|$ , il faut donc traiter ces cas particuliers à part (cf. infra). Dans le cas contraire, la condition  $|\phi_1(0)| < |\phi_1^*(0)|$  revient à  $(\varepsilon'_s - 1)q < 4\varepsilon'_s$ . Il est raisonnable de supposer que l'on n'obtiendra pas un meilleur résultat qu'avec le schéma de Yee seul ( $\lambda \leq 1$ ) et donc  $q \in [0, 4]$ . Sous cette condition, et en s'interdisant en outre la valeur  $q = 0$ , on a bien  $|\phi_1(0)| < |\phi_1^*(0)|$ . Par ailleurs, le polynôme  $\phi_1$  est de degré 2. Enfin

$$\begin{aligned}
\phi_2(Z) &= \frac{1}{Z} (\phi_1^*(0)\phi_1(Z) - \phi_1(0)\phi_1^*(Z)) \\
&= 4\delta^2 (\varepsilon'_s - 1)q [(4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q)Z - (4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s + 1)q)].
\end{aligned}$$

Toujours dans le cas où  $\varepsilon'_s > 1$  et  $q \in ]0, 4]$ , le coefficient dominant

$$4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q = \varepsilon'_s(4 - q) + q \neq 0,$$

et le polynôme  $\phi_2$  est bien de degré 1. La racine de  $\phi_2$  est

$$Z = \frac{4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s + 1)q}{4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q}.$$

Cette racine de  $\phi_2$  est de module strictement inférieur à 1 si  $q \neq 4$  et alors  $\phi_2$  et donc  $\phi_0$  sont des polynômes de Schur d'après le théorème 1. Si  $q = 4$ , la racine de  $\phi_2$  est  $-1$  et  $\phi_2$  et donc  $\phi_0$  sont des polynômes de von Neumann simples d'après le théorème 2. Dans les deux cas, nous obtenons donc la stabilité sous la seule hypothèse  $\lambda < 1$ , *modulo* le traitement des cas particuliers sus-cités.

### 3.1.4 Cas particulier $q = 0$

Le cas où  $q = 0$  correspond au polynôme caractéristique

$$\phi_0(Z) = (Z - 1)^2([1 + \delta\varepsilon'_s]Z - [1 - \delta\varepsilon'_s])$$

et n'est donc pas de von Neumann simple. Il faut donc étudier directement la matrice d'amplification qui se simplifie alors en

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - \delta\varepsilon'_s}{1 + \delta\varepsilon'_s} & \frac{2\delta}{1 + \delta\varepsilon'_s} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit clairement que les vecteurs propres correspondant à la valeur propre 1 sont dans deux sous-espaces propres stables. L'autre valeur propre est de module strictement inférieur à 1. Les itérées de cette matrice sont donc bornées. Cette conclusion est valable indépendamment de  $\varepsilon'_s \geq 1$ .

### 3.1.5 Cas particulier $\varepsilon'_s = 1$

Le cas où  $\varepsilon'_s = 1$  donne lieu à une violation de la condition  $|\phi_1(0)| < |\phi_1^*(0)|$ . Il faut donc étudier directement la nature de  $\phi_1$  sans espérer poursuivre les itérées. On a

$$\phi_1(Z) = 4\delta\{Z^2 - [2 - q]Z + 1\},$$

dont le déterminant vaut  $q(q - 4)$  et est donc strictement négatif si  $q \in ]0, 4[$ . Les racines de  $\phi_1$  sont donc complexes conjuguées, distinctes, et de module 1 (leur produit vaut 1). Le polynôme  $\phi_1$  est donc de von Neumann simple, tout comme  $\phi_0$ .

### 3.1.6 Cas particulier $q = 4$

Le dernier cas à traiter est celui où  $\varepsilon'_s = 1$  et  $q = 4$ , pour lequel  $-1$  est racine double de  $\phi_1$ . C'est aussi une racine double de  $\phi_0$  qui vaut

$$\phi_0(Z) = (Z + 1)^2([1 + \delta]Z - [1 - \delta]).$$

Il faut donc étudier directement la matrice d'amplification qui se simplifie alors en

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma & 0 \\ \sigma^* & \frac{1-\delta}{1+\delta} - q & \frac{2\delta}{1+\delta} \\ \sigma^* & -q & 1 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a aucun de découplage évident en sous-espaces propres distincts. On calcule alors les vecteurs propres associés à la valeur propre  $-1$ . Pour cela on résout

$$(G + \text{Id})V = \begin{pmatrix} 2 & -\sigma & 0 \\ \sigma^* & \frac{2}{1+\delta} - q & \frac{2\delta}{1+\delta} \\ \sigma^* & -q & 2 \end{pmatrix} V = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -\sigma & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sigma^* & -q & 2 \end{pmatrix} V = 0$$

et on ne trouve qu'une seule direction propre, celle de  $V = {}^t(\sigma, 2, 2)$ . C'est donc un sous-espace propre minimal de dimension 2 qui est associé à la valeur propre  $-1$  et les itérées  $G^n$  sont linéairement croissantes en  $n$ . On conclut donc à l'instabilité si  $q = 4$  et  $\varepsilon'_s = 1$ .

### 3.1.7 Synthèse pour le modèle de Debye–Joseph et al.

Le schéma (8)–(10) pour les équations de Maxwell–Debye uni-dimensionnelles est stable sous la condition

$$\delta t \leq \delta x / c_\infty \text{ si } \varepsilon_s > \varepsilon_\infty \quad \text{et} \quad \delta t < \delta x / c_\infty \text{ si } \varepsilon_s = \varepsilon_\infty.$$

On a déjà vu dans ce premier exemple différents types d'arguments permettant de conclure à la stabilité : le cas général ( $q \in ]0, 4[$  et  $\varepsilon_s > 1$ ) donne lieu à un polynôme de Schur *via* le théorème 1, les cas  $q \in ]0, 4[$  et  $\varepsilon'_s = 1$  ou  $q = 4$  et  $\varepsilon'_s > 1$  à un polynôme de von Neumann simple *via* le théorème 2 et enfin, le cas  $q = 0$  à un polynôme de von Neumann, mais avec une valeur propre double agissant sur des sous-espaces stables et distincts. Nous avons également rencontré un cas d'instabilité pour  $\varepsilon'_s = 1$  et  $q = 4$  qui correspond néanmoins à un polynôme de von Neumann.

## 3.2 Modèle de Young

### 3.2.1 Position du modèle

Le système de Maxwell (9) est fermé par deux discrétisations de l'équation de Debye (4), à savoir

$$t_r \frac{P_j^{n+\frac{1}{2}} - P_j^{n-\frac{1}{2}}}{\delta t} = -\frac{P_j^{n+\frac{1}{2}} + P_j^{n-\frac{1}{2}}}{2} + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)E_j^n, \quad (11)$$

et

$$t_r J_j^{n+\frac{1}{2}} = -P_j^{n+\frac{1}{2}} + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{E_j^{n+1} + E_j^n}{2}. \quad (12)$$

Bien que l'on utilise  $J_j^{n+\frac{1}{2}}$  dans la description du schéma, ce n'est pas une variable à part entière et ainsi le système (9)–(11)–(12) porte sur la variable

$$U_j^n = {}^t(c_\infty B_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, E_j^n, P_j^{n-\frac{1}{2}} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty) = {}^t(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_j^n, \mathcal{P}_j^{n-\frac{1}{2}}),$$

et s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= -\lambda(\mathcal{E}_{j+1}^n - \mathcal{E}_j^n), \\ \mathcal{E}_j^{n+1} - \mathcal{E}_j^n &= -\lambda(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + 2\delta \mathcal{P}_j^{n+\frac{1}{2}} - \delta\alpha(\mathcal{E}_j^{n+1} + \mathcal{E}_j^n), \\ \mathcal{P}_j^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{P}_j^{n-\frac{1}{2}} &= -\delta(\mathcal{P}_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{P}_j^{n-\frac{1}{2}}) + 2\delta\alpha \mathcal{E}_j^n. \end{aligned}$$

Dans ce système, outre les notations  $\lambda$ ,  $\delta$  déjà définies, on a introduit le paramètre sans dimension  $\alpha = \varepsilon'_s - 1$  qui, comme nous l'avons déjà vu, est un paramètre positif (ou nul). On réécrit ce système sous forme explicite :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \lambda(\mathcal{E}_{j+1}^n - \mathcal{E}_j^n), \\ (1 + \delta\alpha)\mathcal{E}_j^{n+1} &= (1 - \delta\alpha)\mathcal{E}_j^n - \lambda(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + \lambda^2(\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) \\ &\quad + 2\delta \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \mathcal{P}_j^{n-\frac{1}{2}} + \frac{4\delta^2\alpha}{1 + \delta} \mathcal{E}_j^n, \\ (1 + \delta)\mathcal{P}_j^{n+\frac{1}{2}} &= (1 - \delta)\mathcal{P}_j^{n-\frac{1}{2}} + 2\delta\alpha \mathcal{E}_j^n, \end{aligned}$$

d'où la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma & 0 \\ \frac{\sigma^*}{1+\delta\alpha} & \frac{(1+\delta)(1-\delta\alpha)+4\delta^2\alpha-(1+\delta)q}{(1+\delta)(1+\delta\alpha)} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{2\delta}{1+\delta\alpha} \\ 0 & \frac{2\delta\alpha}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}.$$

### 3.2.2 Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de  $G$  vaut

$$P(Z) = \begin{vmatrix} Z-1 & \sigma & 0 \\ -\frac{\sigma^*}{1+\delta\alpha} & Z - \frac{(1+\delta)(1-\delta\alpha)+4\delta^2\alpha-(1+\delta)q}{(1+\delta)(1+\delta\alpha)} & -\frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{2\delta}{1+\delta\alpha} \\ 0 & -\frac{2\delta\alpha}{1+\delta} & Z - \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{vmatrix}.$$

Pour alléger les calculs, posons  $Y = Z - 1$ , ce qui donne  $(1 + \delta)^2(1 + \delta\alpha)P(Z)$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} Y & \sigma & 0 \\ -(1+\delta)\sigma^* & (1+\delta)(1+\delta\alpha)Y + 2\delta\alpha(1-\delta) + (1+\delta)q & -2\delta(1-\delta) \\ 0 & -2\delta\alpha & (1+\delta)Y + 2\delta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} Y & \sigma & 0 \\ -(1+\delta)\sigma^* & (1+\delta)(1+\delta\alpha)Y + (1+\delta)q & (1+\delta)(1-\delta)Y \\ 0 & -2\delta\alpha & (1+\delta)Y + 2\delta \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On voit que  $(1 + \delta)$  est en facteur dans les deux membres, donc

$$\begin{aligned} (1 + \delta)(1 + \delta\alpha)P(Z) &= Y \begin{vmatrix} (1 + \delta\alpha)Y + q & (1 - \delta)Y \\ -2\delta\alpha & (1 + \delta)Y + 2\delta \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} 1 & -2\delta(1 - \delta) \\ 0 & (1 + \delta)Y + 2\delta \end{vmatrix} \\ &= Y \{ [(1 + \delta)(1 + \delta\alpha)]Y^2 + [2\delta(1 + \alpha) + (1 + \delta)q]Y + [2\delta q] \} \\ &\quad + q(1 + \delta) \{ [1 + \delta]Y + [2\delta] \} \\ &= [(1 + \delta)(1 + \delta\alpha)]Y^3 + [2\delta(1 + \alpha) + (1 + \delta)q]Y^2 \\ &\quad + [(1 + 3\delta)q]Y + [2\delta q]. \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est proportionnel à

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= [(1 + \delta\alpha)(1 + \delta)]Z^3 - [3 + \delta + \delta\alpha + 3\delta^2\alpha - (1 + \delta)q]Z^2 \\ &\quad + [3 - \delta - \delta\alpha + 3\delta^2\alpha - (1 - \delta)q]Z - [(1 - \delta\alpha)(1 - \delta)]. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Analyse de von Neumann

La condition  $|\phi_0(0)| < |\phi_0^*(0)|$  est vraie sans aucune hypothèse. On définit ensuite par récurrence

$$\begin{aligned} \phi_1(Z) &= 2\delta\{[2(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha)]Z^2 - [4(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha) - (2 + \alpha + \delta^2\alpha)q]Z \\ &\quad + [2(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha) - \alpha(1 - \delta^2)q]\}. \end{aligned}$$

Le cas où  $\delta^2 > 1$  ne peut pas permettre de remplir la condition  $|\phi_1(0)| < |\phi_1^*(0)|$ . On supposera donc pour l'analyse de von Neumann que  $\delta < 1$ , ce qui borne le pas de temps en fonction du retard  $t_r$ . Ceci est raisonnable du point de vue de la modélisation : on ne saurait bien approcher l'équation de retard avec un pas de temps trop grand. On remarque qu'une telle hypothèse n'était néanmoins pas nécessaire pour le schéma de Joseph et al.

On voit que le cas d'égalité  $|\phi_1(0)| = |\phi_1^*(0)|$  est obtenu lorsque  $q = 0$ ,  $\alpha = 0$  (c'est-à-dire  $\varepsilon'_s = 1$ ) ou  $\delta = 1$ . Il nous faudra donc à nouveau traiter ces cas séparément.

Si  $\alpha > 0$ ,  $q > 0$  et  $\delta < 1$ , alors  $|\phi_1(0)| < |\phi_1^*(0)|$  équivaut à  $\alpha(1 - \delta^2)q < 4(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha)$ , ce qui est clairement vérifié pour  $q \in ]0, 4]$ . Par ailleurs, le polynôme  $\phi_1$  est de degré 2.

Dans le cas général ( $\alpha > 0$ ,  $q \in ]0, 4]$  et  $\delta < 1$ ), on calcule ensuite  $\phi_2$  :

$$\begin{aligned} \phi_2(Z) &= 4\delta^2\alpha(1 - \delta^2)q\{[4(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha) - \alpha(1 - \delta^2)q]Z \\ &\quad - [4(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha) - (2 + \alpha + \delta^2\alpha)q]\}. \end{aligned}$$

On sépare l'étude suivant le signe de  $\phi_2(0)$  ( $\phi_2^*(0)$  est clairement toujours positif) et dans les deux cas  $|\phi_2(0)| < |\phi_2^*(0)|$ , pour  $q \in ]0, 4]$ . La racine de  $\phi_2$  appartient donc à l'intervalle  $] -1, 1[$  et le polynôme  $\phi_0$  est de Schur. Nous obtenons ainsi la stabilité sous les hypothèses  $\lambda < 1$  et  $\delta < 1$ , *modulo* le traitement des cas particuliers sus-cités.

### 3.2.4 Cas particulier $q = 0$

Le cas où  $q = 0$  correspond au polynôme caractéristique

$$\phi_0(Z) = (Z - 1)^2 \left( Z - \frac{(1 - \delta)(1 - \delta\alpha)}{(1 + \delta)(1 + \delta\alpha)} \right)$$

et n'est donc pas de von Neumann simple. La matrice d'amplification vaut

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\delta)(1-\delta\alpha)+4\delta^2\alpha}{(1+\delta)(1+\delta\alpha)} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{2\delta}{1+\delta\alpha} \\ 0 & \frac{2\delta\alpha}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}.$$

On voit clairement que les vecteurs propres correspondant à la valeur propre 1 sont dans deux sous-espaces propres stables. Les itérées de cette matrice sont donc bornées. À nouveau cette conclusion est également valable dans les cas limite  $\delta = 1$  et  $\alpha = 0$ .

### 3.2.5 Cas particulier $\varepsilon'_s = 1$

On remarque que le polynôme  $\phi_0$  est le même que pour la méthode de Joseph et al. quand  $\varepsilon'_s = 1$ . Le polynôme  $\phi_0$  est donc de von Neumann simple pour  $q \neq 4$  (cf. supra). La valeur de  $\delta$  ne joue ici aucun rôle. Cela correspond à des matrices d'amplification différentes, qui portent sur des variables différentes, le lien entre les deux formulations n'étant pas immédiat. Il faut donc refaire l'analyse du cas  $q = 4$ .

### 3.2.6 Cas particulier $q = 4$

Si  $q = 4$ , seul le cas  $\alpha = 0$  n'est pas traité par l'étude générale, et  $-1$  est à nouveau valeur propre double :

$$(G + \text{Id})V = \begin{pmatrix} 2 & -\sigma & 0 \\ \sigma^* & 2 - q & 2\delta\frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+\delta} \end{pmatrix} V = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -\sigma & 0 \\ \sigma^* & 2 - q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+\delta} \end{pmatrix} V = 0,$$

et la seule direction propre est celle de  $V = {}^t(\sigma, 2, 0)$ , ce qui donne lieu à des itérées  $G^n$  linéairement croissantes et à des instabilités. Le fait que  $\delta = 1$  ou non ne joue aucun rôle dans ce raisonnement.

### 3.2.7 Cas particulier $\delta = 1$

Il nous reste à étudier le cas  $\delta = 1$  pour  $q \in ]0, 4]$  et  $\alpha > 0$ . On a alors  $Z = 0$  comme racine évidente de  $\phi_0$ , qui s'écrit simplement

$$\phi_0(Z) = 2(1 + \alpha)Z \left\{ Z^2 - \left[ 2 - \frac{q}{1 + \alpha} \right] Z + 1 \right\}.$$

Le discriminant du polynôme restant est  $\Delta = \frac{q}{(1+\alpha)^2} (q - 4(1+\alpha)) < 0$ . On a donc deux valeurs propres distinctes, complexes conjuguées, de module 1. Le polynôme  $\phi_0$  est de von Neumann simple.

### 3.2.8 Synthèse pour le modèle de Debye–Young

Le schéma (9)–(11)–(12) pour les équations de Maxwell–Debye uni-dimensionnelles est stable sous la condition

$$\delta t \leq \min(\delta x/c_\infty, 2t_r) \text{ si } \varepsilon_s > \varepsilon_\infty \quad \text{et} \quad \delta t < \delta x/c_\infty \text{ si } \varepsilon_s = \varepsilon_\infty.$$

Si  $\varepsilon_s > \varepsilon_\infty$ , la condition de stabilité est plus restrictive pour le schéma de Young que pour celui de Joseph et al. La borne obtenue est également liée à la bonne discrétisation de l'équation de Debye.

## 4 Milieux de type Lorentz anharmonique

Pour les milieux de type Lorentz, nous étudions trois schémas. Le premier est dû à Joseph et al. [2] et consiste à coupler les équations de Maxwell en les variables  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  avec le modèle de Lorentz reliant  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$ . Le deuxième et le troisième sont dus à Kashiwa et al. [3] et à Young [8] respectivement et couplent tous les deux les équations de Maxwell en les variables  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  avec le modèle de Lorentz reliant  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{J}$ . Ils diffèrent par le choix du temps de discrétisation de  $\mathbf{J}$ .

On se restreindra ici au cas anharmonique pour lequel l'amortissement  $\nu$  est non nul. Le cas harmonique ( $\nu = 0$ ) se traite grâce aux mêmes schémas mais l'analyse s'avère beaucoup plus technique. Pour ne pas nuire à la lisibilité des démonstrations dans le cas général, le cas harmonique est traité dans un paragraphe ultérieur.

### 4.1 Modèle de Joseph et al.

#### 4.1.1 Position du modèle

Le système de Maxwell (8) est fermé par une discrétisation de l'équation de Lorentz (5), à savoir

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \frac{E_j^{n+1} - 2E_j^n + E_j^{n-1}}{\delta t^2} + \nu \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \frac{E_j^{n+1} - E_j^{n-1}}{2\delta t} + \varepsilon_0 \varepsilon_s \omega_1^2 \frac{E_j^{n+1} + E_j^{n-1}}{2} \\ = \frac{D_j^{n+1} - 2D_j^n + D_j^{n-1}}{\delta t^2} + \nu \frac{D_j^{n+1} - D_j^{n-1}}{2\delta t} + \omega_1^2 \frac{D_j^{n+1} + D_j^{n-1}}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

La version explicite de ce système (8)–(13) n'utilise pas de manière explicite la valeur de  $D_j^{n-1}$ . On peut en effet utiliser la formule explicite pour calculer  $D_j^{n+1} - D_j^n$  et la formule implicite d'origine pour calculer  $D_j^n - D_j^{n-1}$  et ainsi le système porte sur la variable

$$U_j^n = {}^t(c_\infty B_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, E_j^n, E_j^{n-1}, D_j^n / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty) = {}^t(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_j^n, \mathcal{E}_j^{n-1}, \mathcal{D}_j^n)$$

et s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \lambda(\mathcal{E}_{j+1}^n - \mathcal{E}_j^n), \\ \mathcal{D}_j^{n+1} &= \mathcal{D}_j^n - \lambda(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + \lambda^2(\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n), \\ (1 + \delta + \omega \varepsilon'_s) \mathcal{E}_j^{n+1} &= 2\mathcal{E}_j^n + (1 + \delta + \omega) \lambda^2(\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) - (1 - \delta + \omega \varepsilon'_s) \mathcal{E}_j^{n-1} \\ &\quad - 2\delta \lambda(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + 2\omega \mathcal{D}_j^n. \end{aligned}$$

Dans ce système, outre les notations  $\lambda$  et  $\varepsilon'_s$  déjà utilisées, on a noté

$$\begin{aligned} \delta &= \delta t \nu / 2 && \text{pas de temps normalisé,} \\ \omega &= \omega_1^2 \delta t^2 / 2 && \text{carré de la fréquence normalisée.} \end{aligned}$$

La matrice d'amplification du système est

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma & 0 & 0 \\ \frac{2\delta\sigma^*}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{2-q(1+\delta+\omega)}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & -\frac{1-\delta+\omega\varepsilon'_s}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{2\omega}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma^* & -q & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 4.1.2 Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de  $G$  vaut

$$P(Z) = \begin{vmatrix} Z-1 & \sigma & 0 & 0 \\ -\frac{2\delta\sigma^*}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & Z - \frac{2-q(1+\delta+\omega)}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{1-\delta+\omega\varepsilon'_s}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & -\frac{2\omega}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} \\ 0 & -1 & Z & 0 \\ -\sigma^* & q & 0 & Z-1 \end{vmatrix}.$$

Ainsi

$$(1 + \delta + \omega\varepsilon'_s)P(Z)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} Z-1 & \sigma & 0 & 0 \\ -2\delta\sigma^* & (1 + \delta + \omega\varepsilon'_s)Z - 2 + (1 + \delta + \omega)q & 1 - \delta + \omega\varepsilon'_s & -2\omega \\ 0 & -1 & Z & 0 \\ -\sigma^* & q & 0 & Z-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} Z-1 & 0 & 0 \\ -2\delta\sigma^* & 1 - \delta + \omega\varepsilon'_s & -2\omega \\ -\sigma^* & 0 & Z-1 \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} Z-1 & \sigma & 0 \\ -2\delta\sigma^* & (1 + \delta + \omega\varepsilon'_s)Z - 2 + (1 + \delta + \omega)q & -2\omega \\ -\sigma^* & q & Z-1 \end{vmatrix} \\ &= (Z-1)^2[1 - \delta + \omega\varepsilon'_s] \\ &\quad + Z(Z-1)\{[(1 + \delta + \omega\varepsilon'_s)Z - 2 + (1 + \delta + \omega)q][Z-1] + 2\omega q\} + qZ[2\delta(Z-1) + 2\omega]. \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est proportionnel à

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= [1 + \delta + \omega\varepsilon'_s]Z^4 - [4 + 2\delta + 2\omega\varepsilon'_s - (1 + \delta + \omega)q]Z^3 + [6 + 2\omega\varepsilon'_s - 2q]Z^2 \\ &\quad - [4 - 2\delta + 2\omega\varepsilon'_s - (1 - \delta + \omega)q]Z + [1 - \delta + \omega\varepsilon'_s]. \end{aligned}$$

#### 4.1.3 Analyse de von Neumann

On calcule successivement

$$\begin{aligned} \phi_1(Z) &= 2\delta\{[2(1 + \omega\varepsilon'_s)]Z^3 - [6 + 4\omega\varepsilon'_s - (2 + \omega(1 + \varepsilon'_s))q]Z^2 \\ &\quad + [6 + 2\omega\varepsilon'_s - 2q]Z - [2 + \omega(\varepsilon'_s - 1)q]\}, \\ \phi_2(Z) &= 4\delta^2\omega\{[4\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) - 4(\varepsilon'_s - 1)q - \omega(\varepsilon'_s - 1)^2q^2]Z^2 \\ &\quad - [8\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) - 4((\varepsilon'_s - 1) - \varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s))q + 2(\varepsilon'_s - 1)q^2]Z \\ &\quad + [4\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) - 4(\varepsilon'_s - 1)(2 + \omega\varepsilon'_s)q + (2 + \omega(1 + \varepsilon'_s))(\varepsilon'_s - 1)q^2]\}, \\ \phi_3(Z) &= 64\delta^4\omega^2(\varepsilon'_s - 1)(1 + \omega\varepsilon'_s)q(2 - q) \times \\ &\quad \times \{[4\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) - (\varepsilon'_s - 1)(6 + 2\omega\varepsilon'_s)]q + (\varepsilon'_s - 1)(1 + \omega)q^2]Z \\ &\quad - [4\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) - 2((\varepsilon'_s - 1) + \varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s))q + (\varepsilon'_s - 1)q^2]\}. \end{aligned}$$

La racine de  $\phi_3$  est

$$Z = \frac{(2 - q)(2\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) - (\varepsilon'_s - 1)q)}{(2 - q)(2\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) - (\varepsilon'_s - 1)q) + 2(2 + \omega\varepsilon'_s)q + (\varepsilon'_s - 1)(1 + \omega)q^2},$$

forme sous laquelle, on voit facilement que  $Z$  reste de module  $< 1$  si  $q \in ]0, 2[$ , qui correspond à la condition pour un schéma de Yee multidimensionnel ( $\lambda \leq 1/\sqrt{2}$ ). On remarque d'ores et déjà qu'il faudra traiter les cas  $q = 0$  et  $q = 2$  à part car  $\phi_3 \equiv 0$ . Dans le cas général, il reste à vérifier les propriétés intermédiaires. Tout d'abord, les polynômes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont bien de degré 3 et 2 respectivement. Le polynôme  $\phi_3$  est degré 1 à condition que  $\varepsilon'_s > 1$ . Il faut à nouveau traiter le cas  $\varepsilon'_s = 1$  à part. Dans le cas général ( $q \neq 0$  et  $\varepsilon'_s > 1$ ), il reste à vérifier les estimations reliant

$$\begin{aligned}\phi_0(0) &= 1 - \delta + \omega\varepsilon'_s, \\ \phi_0^*(0) &= 1 + \delta + \omega\varepsilon'_s, \\ \phi_1(0) &= 2\delta[-2 - \omega(\varepsilon'_s - 1)q], \\ \phi_1^*(0) &= 2\delta[2(1 + \omega\varepsilon'_s)], \\ \phi_2(0) &= 4\delta^2\omega[4\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) - 4(\varepsilon'_s - 1)(2 + \omega\varepsilon'_s)q + (2 + \omega(1 + \varepsilon'_s))(\varepsilon'_s - 1)q^2], \\ \phi_2^*(0) &= 4\delta^2\omega[4\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) - 4(\varepsilon'_s - 1)q - \omega(\varepsilon'_s - 1)^2q^2].\end{aligned}$$

Il est clair que pour  $q \in ]0, 2[$ , on a  $|\phi_0(0)| < |\phi_0^*(0)|$  et  $|\phi_1(0)| < |\phi_1^*(0)|$ . Un simple calcul montre que

$$\begin{aligned}\phi_2(0) &= 4\delta^2\omega[(2 - q)^2(2(1 + \omega)(\varepsilon'_s - 1) + \omega(\varepsilon'_s - 1)^2) + 8 + 4\omega + 4\omega(\varepsilon'_s - 1)q], \\ \phi_2^*(0) &= 4\delta^2\omega[(2 - q)(4(\varepsilon'_s - 1) + \omega(\varepsilon'_s - 1)^2q) + 8 + 4\omega + 8\omega(\varepsilon'_s - 1)],\end{aligned}$$

forme sous laquelle, on voit immédiatement que ces deux quantités sont positives. Par ailleurs

$$\phi_2^*(0) - \phi_2(0) = 8\delta^2\omega(1 + \omega\varepsilon'_s)(\varepsilon'_s - 1)q(2 - q) > 0.$$

On a donc bien vérifié toutes les hypothèses. Dans le cas général,  $\phi_0$  est un polynôme de Schur.

#### 4.1.4 Cas particulier $q = 0$

Le cas  $q = 0$  donne à nouveau lieu à une étude séparée. On a alors

$$\phi_0(Z) = (Z - 1)^2[(Z - 1)^2 + \delta(Z^2 - 1) + \omega\varepsilon'_s(Z^2 + 1)].$$

La matrice d'amplification correspondante est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{1 + \delta + \omega\varepsilon'_s} & -\frac{1 - \delta + \omega\varepsilon'_s}{1 + \delta + \omega\varepsilon'_s} & \frac{2\omega}{1 + \delta + \omega\varepsilon'_s} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

À nouveau 1 est valeur propre double mais dans deux sous-espaces stables. Il suffit de vérifier que le reste du polynôme caractéristique, à savoir

$$\psi_0(Z) = [1 + \delta + \omega\varepsilon'_s]Z^2 - 2Z + [1 - \delta + \omega\varepsilon'_s],$$

est de Schur (ou de von Neumann simple). On a bien  $|\psi_0(0)| < |\psi_0^*(0)|$  et on calcule

$$\psi_1(Z) = 4\delta\{[1 + \omega\varepsilon'_s]Z - 1\}.$$

Les deux valeurs propres restantes sont donc de module strictement inférieur à 1 et les itérées de la matrice d'amplification sont bornées. Ceci est vrai quel que soit  $\varepsilon'_s$ .

#### 4.1.5 Cas particulier $q = 2$

Dans le cas particulier  $q = 2$ ,  $\phi_0$  prend la forme particulière :

$$\begin{aligned}\phi_0(Z) &= [1 + \delta + \omega\varepsilon'_s]Z^4 - [2 + 2\omega(\varepsilon'_s - 1)]Z^3 + [2 + 2\omega\varepsilon'_s]Z^2 - [2 + 2\omega(\varepsilon'_s - 1)]Z + [1 - \delta + \omega\varepsilon'_s] \\ &= (Z^2 + 1)\{[1 + \delta + \omega\varepsilon'_s]Z^2 - [2 + 2\omega(\varepsilon'_s - 1)]Z + [1 - \delta + \omega\varepsilon'_s]\},\end{aligned}$$

qui admet  $\pm i$  comme racines simples. C'est donc un candidat pour être polynôme de von Neumann simple. Il reste à étudier le polynôme restant

$$\psi_0(Z) = [1 + \delta + \omega\varepsilon'_s]Z^2 - [2 + 2\omega(\varepsilon'_s - 1)]Z + [1 - \delta + \omega\varepsilon'_s]$$

dont  $\pm i$  ne sont clairement plus racine. On remarque que  $|\psi_0(0)| < |\psi_0^*(0)|$  et on calcule

$$\psi_1(Z) = 4\delta\{[1 + \omega\varepsilon'_s]Z - [1 + \omega(\varepsilon'_s - 1)]\},$$

qui est un polynôme de Schur pour tout  $\varepsilon'_s$ . Le polynôme  $\psi_0$  est donc de Schur et  $\phi_0$  de von Neumann simple.

#### 4.1.6 Cas particulier $\varepsilon'_s = 1$

Si  $\varepsilon'_s = 1$ , le polynôme  $\phi_3$  est identiquement nul et

$$\begin{aligned}\phi_2(Z) &= 16\delta^2\omega(2 + \omega)\{Z^2 - [2 - q]Z + 1\}, \\ \phi'_2(Z) &= 16\delta^2\omega(2 + \omega)\{2Z - [2 - q]\}.\end{aligned}$$

La racine de  $\phi'_2$  est bien de module  $< 1$  si  $q \in ]0, 2]$ . Le polynôme  $\phi_0$  est donc de von Neumann simple.

#### 4.1.7 Synthèse pour le modèle de Lorentz–Joseph et al.

Le schéma (8)–(13) pour les équations de Maxwell–Lorentz anharmoniques uni-dimensionnelles est stable sous la condition

$$\delta t \leq \delta x / \sqrt{2}c_\infty$$

## 4.2 Modèle de Kashiwa et al.

### 4.2.1 Position du modèle

Une version modifiée du système de Maxwell (9) est fermée par une discrétisation de l'équation de Lorentz (6), à savoir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta t}(B_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{\delta x}(E_{j+1}^n - E_j^n), \\ \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\infty}{\delta t}(E_j^{n+1} - E_j^n) &= -\frac{1}{\mu_0\delta x}(B_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{\delta t}(P_j^{n+1} - P_j^n), \\ \frac{1}{\delta t}(P_j^{n+1} - P_j^n) &= \frac{1}{2}(J_j^{n+1} + J_j^n), \\ \frac{1}{\delta t}(J_j^{n+1} - J_j^n) &= -\frac{\nu}{2}(J_j^{n+1} + J_j^n) + \frac{\omega_1^2(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\varepsilon_0}{2}(E_j^{n+1} + E_j^n) - \frac{\omega_1^2}{2}(P_j^{n+1} + P_j^n).\end{aligned}\tag{14}$$

Le système (14) porte sur la variable

$$U_j^n = {}^t(c_\infty B_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, E_j^n, P_j^n / \varepsilon_0\varepsilon_\infty, \delta t J_j^n / \varepsilon_0\varepsilon_\infty) = {}^t(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_j^n, \mathcal{P}_j^n, \mathcal{J}_j^n)$$

et s'écrit

$$\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \lambda(\mathcal{E}_{j+1}^n - \mathcal{E}_j^n),$$

$$\begin{aligned}
[1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\mathcal{E}_j^{n+1} &= [1 + \delta - \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 2)]\mathcal{E}_j^n + \lambda^2(1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)(\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) \\
&\quad - \lambda(1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + \omega\mathcal{P}_j^n - \mathcal{J}_j^n, \\
[1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\mathcal{P}_j^{n+1} &= [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 2)]\mathcal{P}_j^n - \frac{1}{2}\lambda\omega(\varepsilon'_s - 1)(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \omega(\varepsilon'_s - 1)\mathcal{E}_j^n + \frac{1}{2}\lambda^2\omega(\varepsilon'_s - 1)(\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) + \mathcal{J}_j^n, \\
[1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\mathcal{J}_j^{n+1} &= [1 - \delta - \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\mathcal{J}_j^n - \lambda\omega(\varepsilon'_s - 1)(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) \\
&\quad + 2\omega(\varepsilon'_s - 1)\mathcal{E}_j^n + \lambda^2\omega(\varepsilon'_s - 1)(\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) - 2\omega\mathcal{P}_j^n,
\end{aligned}$$

d'où la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma & 0 & 0 \\ \frac{\sigma^*(D - \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1))}{D} & \frac{(1-q)D - (2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & \frac{\omega}{D} & \frac{-1}{D} \\ \frac{\sigma^*\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & \frac{(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & \frac{D-\omega}{D} & \frac{1}{D} \\ \frac{\sigma^*\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & \frac{(2-q)\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & \frac{-2\omega}{D} & \frac{2-D}{D} \end{pmatrix}$$

où, en plus des notations précédentes,  $D = 1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s$ .

#### 4.2.2 Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de  $G$  vaut

$$P(Z) = \begin{vmatrix} Z - 1 & \sigma & 0 & 0 \\ -\sigma^*(D - \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)) & Z - \frac{(1-q)D - (2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & -\frac{\omega}{D} & \frac{1}{D} \\ -\sigma^*\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & -\frac{(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & Z - \frac{D-\omega}{D} & \frac{-1}{D} \\ -\sigma^*\omega(\varepsilon'_s - 1) & -\frac{(2-q)\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & \frac{2\omega}{D} & Z - \frac{2-D}{D} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, en posant  $X = D(Z - 1)$

$$\begin{aligned}
D^4P(Z) &= \begin{vmatrix} X & D\sigma & 0 & 0 \\ -\sigma^*(D - \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)) & X + qD + (2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & -\omega & 1 \\ -\sigma^*\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & -(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & X + \omega & -1 \\ -\sigma^*\omega(\varepsilon'_s - 1) & -(2-q)\omega(\varepsilon'_s - 1) & 2\omega & X + 2(D-1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X & D\sigma & 0 & 0 \\ -\sigma^*D & X + qD & X & 0 \\ -\sigma^*\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & -(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & X + \omega & -1 \\ 0 & 0 & -2X & X + 2D \end{vmatrix} \\
&= X \begin{vmatrix} X + qD & X & 0 \\ -(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & X + \omega & -1 \\ 0 & -2X & X + 2D \end{vmatrix} + qD \begin{vmatrix} D & X & 0 \\ \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & X + \omega & -1 \\ 0 & -2X & X + 2D \end{vmatrix} \\
&= X\{(X + qD)(X + \omega)(X + 2D) + (2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)X(X + 2D) - 2X(X + qD)\} \\
&\quad + qD\{D(X + \omega)(X + 2D) - 2DX - \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)X(X + 2D)\} \\
&= X^4 + [2D - 2 + \omega\varepsilon'_s + (D - \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1))q]X^3 + D[2\omega\varepsilon'_s + (3D - 2 + \frac{5}{2}\omega - \frac{3}{2}\omega\varepsilon'_s)q]X^2 \\
&\quad + D^2[(2D - 2 + 4\omega - \omega\varepsilon'_s)q]X + D^3[2\omega q]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X^4 + [2(\delta + \omega\varepsilon'_s) + (1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)q]X^3 + D[2\omega\varepsilon'_s + (1 + 3\delta + \frac{5}{2}\omega)q]X^2 \\
&\quad + D^2[(2\delta + 4\omega)q]X + D^3[2\omega q].
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est proportionnel à

$$\begin{aligned}
\phi_0(Z) &= [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^4 - [4 + 2\delta - (1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)q]Z^3 + [6 - \omega\varepsilon'_s + (\omega - 2)q]Z^2 \\
&\quad - [4 - 2\delta - (1 - \delta + \frac{1}{2}\omega)q]Z + [1 - \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s].
\end{aligned}$$

#### 4.2.3 Analyse de von Neumann

On calcule successivement

$$\begin{aligned}
\phi_1(Z) &= 2\delta\{[2 + \omega\varepsilon'_s]Z^3 - [6 + \omega\varepsilon'_s - (2 + \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s + 1))q]Z^2 + [6 - \omega\varepsilon'_s - (2 - \omega)q]Z \\
&\quad - [2 - \omega\varepsilon'_s + \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)q]\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(Z) &= 4\delta^2\omega\{[8\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)(2 - \omega\varepsilon'_s)q - \frac{1}{4}\omega(\varepsilon'_s - 1)^2q^2]Z^2 \\
&\quad - [16\varepsilon'_s - 8\varepsilon'_sq + (\varepsilon'_s - 1)(1 - \frac{1}{2}\omega)q^2]Z \\
&\quad + [8\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)(6 + \omega\varepsilon'_s)q - (\varepsilon'_s - 1)^2(1 - \frac{1}{4}\omega)q^2]\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(Z) &= 4\delta^4\omega^2(\varepsilon'_s - 1)q(4 - q)(2 + \omega\varepsilon'_s) \times \\
&\quad \times \{[32\varepsilon'_s - 16(\varepsilon'_s - 1)q + (\varepsilon'_s - 1)(2 + \omega)q^2]Z - [32\varepsilon'_s - 16\varepsilon'_sq + (\varepsilon'_s - 1)(2 - \omega)q^2]\}.
\end{aligned}$$

On voit que les cas particuliers  $q = 0$  et  $\varepsilon'_s = 1$  qui annulent  $\phi_3$  devront être traités à part. Le cas général se traite en commençant par vérifier que  $|\phi_0(0)| < |\phi_0^*(0)|$ , ce qui est clair. On remarque ensuite que  $\phi_1^*(0) > 0$ . La relation  $\phi_1(0) < \phi_1^*(0)$  équivaut à  $-\omega(\varepsilon'_s - 1)q < 8$ , ce qui est toujours vrai. Quand à la relation  $-\phi_1(0) < \phi_1^*(0)$ , elle se réécrit  $\omega(\varepsilon'_s - 1)q < 4\omega\varepsilon'_s$ , qui est vérifié si  $q \leq 4$ . On a donc  $|\phi_1(0)| < |\phi_1^*(0)|$  pour  $q \in ]0, 4[$ . On continue en étudiant le signe de

$$\phi_2^*(0) = \delta^2\omega[4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q][8 + (\varepsilon'_s - 1)\omega q] > 0$$

et il reste à vérifier que  $\phi_2^*(0) + \phi_2(0) > 0$  et  $\phi_2^*(0) - \phi_2(0) > 0$  :

$$\begin{aligned}
\phi_2^*(0) + \phi_2(0) &= 2\delta^2\omega[(\varepsilon'_s - 1)\omega q^2 + 32 + 2(\varepsilon'_s - 1)(4 - q)^2] > 0, \\
\phi_2^*(0) - \phi_2(0) &= 2\delta^2q\omega(\varepsilon'_s - 1)(2 + \varepsilon'_s\omega)(4 - q) > 0,
\end{aligned}$$

si  $q \in ]0, 4[$ . Enfin étudions  $\phi_3$  :

$$\begin{aligned}
\phi_3^*(0) &= 4\delta^4\omega^2(\varepsilon'_s - 1)q(4 - q)(2 + \varepsilon'_s\omega)[32 + (\varepsilon'_s - 1)(2(4 - q) + \omega q^2)] > 0, \\
\phi_3^*(0) + \phi_3(0) &= 8\delta^4\omega^2(\varepsilon'_s - 1)q^2(4 - q)(2 + \varepsilon'_s\omega)[8 + \omega(\varepsilon'_s - 1)q] > 0, \\
\phi_3^*(0) - \phi_3(0) &= 8\delta^4\omega^2(\varepsilon'_s - 1)q(4 - q)^2(2 + \varepsilon'_s\omega)[4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q] > 0.
\end{aligned}$$

On montre ainsi que  $\phi_3$  et donc  $\phi_0$  est un polynôme de Schur pour  $q \in ]0, 4[$  et il reste le traitement des cas particuliers.

#### 4.2.4 Cas particulier $q = 0$

Le cas  $q = 0$  donne à nouveau lieu à une étude séparée. On a alors

$$\phi_0(Z) = (Z - 1)^2[(Z - 1)^2 + \delta(Z^2 - 1) + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s(Z + 1)^2].$$

La matrice d'amplification correspondante est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D-\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{\omega}{D} & \frac{-1}{D} \\ 0 & \frac{\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{D-\omega}{D} & \frac{1}{D} \\ 0 & \frac{2\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{-2\omega}{D} & \frac{2-D}{D} \end{pmatrix}.$$

À nouveau 1 est valeur propre double mais dans deux sous-espaces stables. Il suffit de vérifier que le reste du polynôme caractéristique, à savoir

$$\psi_0(Z) = [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^2 - [2 - \omega\varepsilon'_s]Z + [1 - \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s],$$

est de Schur (ou de von Neumann simple). On a bien  $|\psi_0(0)| < |\psi_0^*(0)|$  et on calcule

$$\psi_1(Z) = 4\delta\{[1 + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z - [1 - \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\}.$$

Les deux valeurs propres restantes sont donc de module strictement inférieur à 1 et les itérées de la matrice d'amplification sont bornées. Ceci reste vrai même pour  $\varepsilon'_s = 1$ .

#### 4.2.5 Cas particulier $q = 4$

Dans le cas  $q = 4$ ,

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^4 + [2\delta + 2\omega]Z^3 + [-2 - \omega\varepsilon'_s + 4\omega]Z^2 + [-2\delta + 2\omega]Z + [1 - \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s] \\ &= (Z + 1)^2\{[1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^2 - 2[1 - \omega + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z + [1 - \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\}. \end{aligned}$$

On a une racine double  $Z = -1$ . Il faut donc étudier la matrice d'amplification qui vaut :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma & 0 & 0 \\ \frac{\sigma^*(D-\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1))}{D} & \frac{-3D+\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{\omega}{D} & \frac{-1}{D} \\ \frac{\sigma^*\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{-2\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{D-\omega}{D} & \frac{1}{D} \\ \frac{\sigma^*\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{-2\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{-2\omega}{D} & \frac{2-D}{D} \end{pmatrix}.$$

Seul le vecteur  ${}^t(\sigma, 2, 0, 0)$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $-1$ , on a donc croissance des itérées de  $G$ , indépendamment de l'étude du reste du polynôme caractéristique. La valeur  $q = 4$  donne donc lieu à des instabilités.

#### 4.2.6 Cas particulier $\varepsilon'_s = 1$

Si  $\varepsilon'_s = 1$ , le polynôme  $\phi_3$  est identiquement nul et il reste à étudier  $\phi_2$  pour  $q \in ]0, 4[$  :

$$\phi_2(Z) = 32\delta^2\omega\{Z^2 - [2 - q]Z + 1\}.$$

Ce polynôme admet deux racines complexes conjuguées distinctes de module 1. Le polynôme  $\phi_2$  ainsi que  $\phi_0$  sont de von Neumann simples.

#### 4.2.7 Synthèse pour le modèle de Lorentz–Kashiwa

Le schéma (14) pour les équations de Maxwell–Lorentz anharmoniques uni-dimensionnelles est stable sous la condition

$$\delta t < \delta x / c_\infty.$$

### 4.3 Modèle de Young

#### 4.3.1 Position du modèle

Le système de Maxwell (9) est fermé par une discrétisation de l'équation de Lorentz (6), à savoir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta t}(P_j^{n+1} - P_j^n) &= J^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{\delta t}(J_j^{n+\frac{1}{2}} - J_j^{n-\frac{1}{2}}) &= -\frac{\nu}{2}(J_j^{n+\frac{1}{2}} + J_j^{n-\frac{1}{2}}) + \omega_1^2(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\varepsilon_0 E_j^n - \omega_1^2 P_j^n.\end{aligned}\quad (15)$$

La version explicite du système (9)–(15) porte à nouveau sur la variable

$$U_j^n = {}^t(c_\infty \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, E_j^n, P_j^n / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty, \delta t J_j^{n-\frac{1}{2}} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty) = {}^t(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_j^n, \mathcal{P}_j^n, \mathcal{J}_j^{n-\frac{1}{2}})$$

et s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \lambda(\mathcal{E}_{j+1}^n - \mathcal{E}_j^n), \\ [1 + \delta]\mathcal{E}_j^{n+1} &= [1 + \delta - 2\omega(\varepsilon'_s - 1)]\mathcal{E}_j^n + \lambda^2[1 + \delta](\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) - \lambda(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad + 2\omega\mathcal{P}_j^n - [1 - \delta]\mathcal{J}_j^{n-\frac{1}{2}}, \\ [1 + \delta]\mathcal{P}_j^{n+1} &= [1 + \delta - 2\omega]\mathcal{P}_j^n + 2\omega(\varepsilon'_s - 1)\mathcal{E}_j^n + [1 - \delta]\mathcal{J}_j^{n-\frac{1}{2}}, \\ [1 + \delta]\mathcal{J}_j^{n+\frac{1}{2}} &= [1 - \delta]\mathcal{J}_j^{n-\frac{1}{2}} + 2\omega(\varepsilon'_s - 1)\mathcal{E}_j^n - 2\omega\mathcal{P}_j^n,\end{aligned}$$

d'où la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma & 0 & 0 \\ \sigma^* & \frac{(1-q)(1+\delta)-2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{2\omega}{1+\delta} & -\frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{1+\delta-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}.$$

#### 4.3.2 Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de  $G$  vaut

$$P(Z) = \begin{vmatrix} Z - 1 & \sigma & 0 & 0 \\ -\sigma^* & Z - \frac{(1-q)(1+\delta)-2\omega\alpha}{1+\delta} & -\frac{2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & -\frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & Z - \frac{1+\delta-2\omega}{1+\delta} & -\frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & -\frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{2\omega}{1+\delta} & Z - \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, en posant  $X = (1 + \delta)(Z - 1)$ ,

$$\begin{aligned}(1 + \delta)^4 P(Z) &= \begin{vmatrix} X & (1 + \delta)\sigma & 0 & 0 \\ -\sigma^*(1 + \delta) & X + (1 + \delta)q + 2\omega\alpha & -2\omega & 1 - \delta \\ 0 & -2\omega\alpha & X + 2\omega & -(1 - \delta) \\ 0 & -2\omega\alpha & 2\omega & X + 2\delta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X & (1 + \delta)\sigma & 0 & 0 \\ -\sigma^*(1 + \delta) & X + (1 + \delta)q & X & 0 \\ 0 & -2\omega\alpha & X + 2\omega & -(1 - \delta) \\ 0 & 0 & -X & X + 1 + \delta \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X \begin{vmatrix} X + (1 + \delta)q & X & 0 \\ -2\omega\alpha & X + 2\omega & -(1 - \delta) \\ 0 & -X & X + 1 + \delta \end{vmatrix} \\
&\quad + (1 + \delta)^2 q \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2\omega\alpha & X + 2\omega & -(1 - \delta) \\ 0 & -X & X + 1 + \delta \end{vmatrix} \\
&= X \{ X^3 + [2\delta + 2\omega\varepsilon'_s + (1 + \delta)q]X^2 + [2(1 + \delta)\omega\varepsilon'_s + 2(1 + \delta)(\delta + \omega)q]X \\
&\quad + [2(1 + \delta)^2\omega q] \} + (1 + \delta)^2 q \{ X^2 + [2(\delta + \omega)]X + [2(1 + \delta)\omega] \} \\
&= X^4 + X^3[2\delta + 2\omega\varepsilon'_s + (1 + \delta)q] + X^2[(1 + \delta)(2\omega\varepsilon'_s + (1 + 3\delta + 2\omega)q)] \\
&\quad + X[(1 + \delta)^2 q(2\delta + 4\omega)] + [2(1 + \delta)^3 \omega q].
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est proportionnel à

$$\begin{aligned}
\phi_0(Z) &= [1 + \delta]Z^4 - [4 + 2\delta - 2\omega\varepsilon'_s - (1 + \delta)q]Z^3 + 2[3 - 2\omega\varepsilon'_s + (\omega - 1)q]Z^2 \\
&\quad - [4 - 2\delta - 2\omega\varepsilon'_s - (1 - \delta)q]Z + [1 - \delta].
\end{aligned}$$

### 4.3.3 Analyse de von Neumann

On calcule successivement

$$\begin{aligned}
\phi_1(Z) &= 4\delta\{Z^3 - [3 - \omega\varepsilon'_s - q]Z^2 + [3 - 2\omega\varepsilon'_s + (\omega - 1)q]Z - [1 - \omega\varepsilon'_s]\}, \\
\phi_2(Z) &= (4\delta)^2\omega\{[\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s)]Z^2 - [2\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s) + (\varepsilon'_s(\omega - 1) - 1)]q\}Z \\
&\quad + [\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s) - (\varepsilon'_s - 1)q]\}, \\
\phi_3(Z) &= (4\delta)^4 q \omega^2 (\varepsilon'_s - 1) \{ [2\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s) - (\varepsilon'_s - 1)q]Z \\
&\quad - [2\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s) - (\varepsilon'_s - 1)q - (2 - \omega\varepsilon'_s)q] \}.
\end{aligned}$$

On voit à nouveau qu'il va nous falloir traiter les cas  $q = 0$  et  $\varepsilon'_s = 1$  à part car  $\phi_3$  est alors identiquement nul. Vérifions les différentes conditions dans le cas général. Tout d'abord,  $|\phi_0(0)| < |\phi_0^*(0)|$  est clairement vérifié ainsi que  $|\phi_1(0)| < |\phi_1^*(0)|$  sous la condition  $\omega < 2/\varepsilon'_s$ . Si  $\varepsilon'_s > 1$  et  $q \neq 0$ , la condition  $|\phi_2(0)| < |\phi_2^*(0)|$  équivaut quant à elle à

$$(\varepsilon'_s - 1)q < 2\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s).$$

Si le pire des cas est  $q = 2$ , on doit avoir  $(\varepsilon'_s - 1)2 < 2\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s)$ , ce qui équivaut à  $\omega < (\varepsilon'_s + 1)/\varepsilon'^2_s$ . Si le pire des cas est  $q = 4$ , on doit avoir  $(\varepsilon'_s - 1)4 < 2\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s)$ , ce qui équivaut à  $\omega < 2/\varepsilon'^2_s$ . On attend l'étude de  $\phi_3$  pour choisir entre  $q \leq 2$  ou  $q \leq 4$ . La racine de  $\phi_3$  est

$$Z = \frac{2\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s) - (\varepsilon'_s - 1)q - (2 - \omega\varepsilon'_s)q}{2\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s) - (\varepsilon'_s - 1)q}.$$

Le dénominateur est une quantité positive sous les contraintes trouvées pour l'étude de la condition  $|\phi_2(0)| < |\phi_2^*(0)|$ . Pour que  $|Z| < 1$ , la condition est donc

$$(2 - \omega\varepsilon'_s)q < 4\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s) - 2(\varepsilon'_s - 1)q.$$

Si le pire des cas est  $q = 2$ , on doit avoir  $2(2 - \omega\varepsilon'_s) < 4\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s) - 4(\varepsilon'_s - 1)$ , ce qui équivaut à  $\omega < 2/(2\varepsilon'_s - 1)$ . Si le pire des cas est  $q = 4$ , on doit avoir  $4(2 - \omega\varepsilon'_s) < 4\varepsilon'_s(2 - \omega\varepsilon'_s) - 8(\varepsilon'_s - 1)$ , ce qui équivaut à  $4\omega\varepsilon'_s(\varepsilon'_s - 1) < 0$ , ce qui est faux. On choisit donc de prendre  $q \leq 2$  et les conditions successives trouvées sont :

$$\omega < \frac{2}{\varepsilon'_s}, \quad \omega < \frac{\varepsilon'_s + 1}{\varepsilon'^2_s}, \quad \omega < \frac{2}{2\varepsilon'_s - 1}.$$

La condition la plus forte que nous avons rencontrée est  $\omega < 2/(2\varepsilon'_s - 1)$ , c'est donc la condition de stabilité finale avec  $q < 2$ , sous laquelle  $\phi_0$  est un polynôme de Schur.

Regardons les cas limites à étudier. Les trois conditions ne sont équivalentes que si  $\varepsilon'_s = 1$ . Dans ce cas là, si  $\omega$  prend la valeur limite  $\omega = 2$  et  $q$  sa valeur limite  $q = 2$ , on a  $\phi_2(Z) \equiv 0$ . Si  $\varepsilon'_s \neq 1$ ,  $q = 2$  et  $\omega = 2/(2\varepsilon'_s - 1)$ , alors la racine de  $\phi_3$  est de module 1, on conclut alors que  $\phi_3$  et donc  $\phi_0$  est un polynôme de von Neumann simple.

#### 4.3.4 Cas particulier $q = 0$

Si  $q = 0$ , le polynôme caractéristique admet 1 comme valeur propre double :

$$\phi_0(Z) = (Z - 1)^2((Z - 1)^2 + \delta(Z^2 - 1) + 2\omega\varepsilon'_s Z).$$

La matrice d'amplification correspondante est

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\delta-2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{2\omega}{1+\delta} & -\frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{1+\delta-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}.$$

La valeur propre double agit donc à nouveau sur deux sous-espaces propres distincts. Il reste uniquement à étudier les valeurs propres du polynôme restant

$$\psi_0(Z) = [1 + \delta]Z^2 - [2(1 - \omega\varepsilon'_s)]Z + [1 - \delta].$$

On a clairement  $|\psi_0(0)| < |\psi_0^*(0)|$ . De plus, on calcule

$$\psi_1(Z) = 4\delta\{Z - [1 - \omega\varepsilon'_s]\}.$$

On retrouve alors la condition  $\omega < 2/\varepsilon'_s$ , sous laquelle on a un polynôme de Schur. Pour  $\omega = 2/\varepsilon'_s$ , on a un polynôme de von Neumann simple ( $-1$  est racine), ce qui convient également pour conclure.

#### 4.3.5 Cas particulier $\varepsilon'_s = 1$

Dans le cas  $\varepsilon'_s = 1$ , il n'est pas nécessaire de reprendre les calculs à zéro. Les seuls problèmes sont la condition  $|\phi_2(0)| < |\phi_2^*(0)|$  et l'annulation de  $\phi_3$ . Dans ce cas particulier,

$$\phi_2(Z) = (4\delta)^2\omega(2 - \omega)\{Z^2 - [2 - q]Z + 1\}.$$

Si  $\omega < 2/\varepsilon'_s$ , c'est-à-dire  $\omega < 2$ , ce polynôme est non nul, et

$$\phi'_2(Z) = (4\delta)^2\omega(2 - \omega)\{2Z - [2 - q]\}.$$

Le polynôme  $\phi'_2$  est un polynôme de Schur si  $q \in ]0, 2]$  et donc  $\phi_0$  est de von Neumann simple.

Si  $\omega = 2$ , le polynôme  $\phi_2$  est identiquement nul et on calcule

$$\phi_1(Z) = 4\delta(Z + 1)\{Z^2 - [2 - q]Z + 1\}.$$

Pour  $q \in ]0, 2]$  les racines de  $Z^2 - [2 - q]Z + 1$  sont complexes conjuguées distinctes et de module 1.

#### 4.3.6 Synthèse pour le modèle de Lorentz–Young

Le schéma (9)–(15) pour les équations de Maxwell–Lorentz anharmoniques uni-dimensionnelles est stable sous la condition

$$\delta t \leq \min \left( \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}, \frac{2}{\omega_1 \sqrt{2\varepsilon'_s - 1}} \right).$$

## 5 Milieux de type Lorentz harmonique

Les milieux de type Lorentz harmonique se traitent grâce aux trois schémas déjà rencontrés. Le calcul des matrices d'amplification et des polynômes caractéristique reste donc inchangé. Le caractère harmonique,  $\nu = 0$ , se traduit dans le paramètre  $\delta = 0$ . Cet annulation rend  $\phi_1$  identiquement nul pour les trois schémas et l'analyse précédente s'écroule. Nous reprenons ci-dessous l'analyse pour les trois schémas.

### 5.1 Modèle de Joseph et al.

#### 5.1.1 Cas général

Comme  $\phi_1$  est identiquement nul, on veut appliquer le théorème 2 et étudier le polynôme dérivé du polynôme  $\phi_0$ , que l'on note :

$$\psi_0(Z) = [4 + 4\omega\varepsilon'_s]Z^3 - [12 + 6\omega\varepsilon'_s - 3(1 + \omega)q]Z^2 + [12 + 4\omega\varepsilon'_s - 4q]Z - [4 + 2\omega\varepsilon'_s - (1 + \omega)q].$$

On remarque que  $\psi_0^*(0) > 0$  et  $\psi_0(0) = -(4 - q) - \omega(2\varepsilon'_s - q) < 0$  pour  $q \leq 2$ . Il faut donc vérifier que  $-\psi_0(0) < \psi_0^*(0)$ , ce qui équivaut à  $-(\omega + 1)q < 2\omega\varepsilon'_s$  qui est toujours vrai. On a donc  $|\psi_0(0)| < |\psi_0^*(0)|$ . Calculons maintenant

$$\begin{aligned} \psi_1(Z) &= [4\omega\varepsilon'_s(4 + 3\omega\varepsilon'_s) + 4(1 + \omega)(2 + \omega\varepsilon'_s)q - (1 + \omega)^2q^2]Z^2 \\ &\quad + [-16\omega\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) + 8(\omega^2\varepsilon'_s - 2)q + 4(1 + \omega)q^2]Z \\ &\quad + [4\omega\varepsilon'_s(4 + \omega\varepsilon'_s) + 4(2 - \omega\varepsilon'_s + 6\omega + 3\omega^2\varepsilon'_s)q - 3(1 + \omega)^2q^2]. \end{aligned}$$

On a à nouveau

$$\psi_1^*(0) = 4\omega\varepsilon'_s(4 + 3\omega\varepsilon'_s) + (1 + \omega)q[4(2 + \omega\varepsilon'_s) - (1 + \omega)q] > 0.$$

Au lieu d'étudier le signe de  $\psi_1(0)$ , nous allons vérifier que  $-\psi_1(0) < \psi_1^*(0)$  et  $\psi_1(0) < \psi_1^*(0)$ . La relation  $-\psi_1(0) < \psi_1^*(0)$  équivaut à

$$4\omega\varepsilon'_s(2 + \omega\varepsilon'_s) + (4 - q)(1 + \omega)^2q + 4\omega^2(\varepsilon'_s - 1)q > 0,$$

qui est clairement vrai. Il reste  $\psi_1(0) < \psi_1^*(0)$  qui revient à

$$4\omega^2\varepsilon_s'^2 + 4\omega(\varepsilon'_s - 2 - \omega\varepsilon'_s) + (1 + \omega)^2q^2 > 0.$$

Sous cette forme il n'est pas facile de conclure, mais on peut l'écrire sous la forme d'une polynôme en  $\omega$  :

$$\omega^2(2\varepsilon'_s - q)^2 + 2\omega q(2(\varepsilon'_s - 2) + q) + q^2 > 0.$$

Le discriminant réduit de ce polynôme vaut

$$\Delta' = -8(\varepsilon'_s - 1)q^2(2 - q) < 0,$$

si  $0 < q < 2$  et  $\varepsilon'_s \neq 1$ . Le polynôme en  $\omega$  est donc toujours strictement positif, ce que l'on recherchait. On a donc  $|\psi_1(0)| < |\psi_1^*(0)|$  et on peut passer utilement au calcul de  $\psi_2(Z)$  qui se factorise en

$$\begin{aligned} \psi_2(Z) &= 8[4\omega^2\varepsilon_s'^2 + (4\omega\varepsilon'_s - 4\omega^2\varepsilon'_s - 8\omega)q + (1 + \omega)^2q^2] \times \\ &\quad \times \{ [4\omega^2\varepsilon_s'^2 + 8\omega\varepsilon'_s + (4 + 4\omega\varepsilon'_s + 8\omega)q - (1 + \omega)^2q^2]Z \\ &\quad - [4\omega^2\varepsilon_s'^2 + 8\omega\varepsilon'_s + (4 - 2\omega\varepsilon'_s)q - (1 + \omega)q^2] \} \end{aligned}$$

On remarque que

$$8[4\omega^2\varepsilon_s'^2 + (4\omega\varepsilon_s' - 4\omega^2\varepsilon_s' - 8\omega)q + (1 + \omega)^2q^2] = 8[(4\varepsilon_s' - q)\omega - q]^2 + 16\omega q[4(\varepsilon_s' - 1) + 2\varepsilon_s'] > 0$$

et on simplifie par ce facteur en notant

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_2(Z) &= [4\omega^2\varepsilon_s'^2 + 8\omega\varepsilon_s' + (4 + 4\omega^2\varepsilon_s' + 8\omega)q - (1 + \omega)^2q^2]Z \\ &\quad - [4\omega^2\varepsilon_s'^2 + 8\omega\varepsilon_s' + (4 - 2\omega\varepsilon_s')q - (1 + \omega)q^2].\end{aligned}$$

On voit que

$$\bar{\psi}_2^*(0) = 4\omega^2[\varepsilon_s'^2 + (\varepsilon_s' - 1)q] + (1 + \omega)^2q(4 - q) \geq 0$$

et pour démontrer que  $|\psi_2(0)| < |\psi_2^*(0)|$ , il nous "suffit" donc de vérifier que  $\bar{\psi}_2^*(0) + \bar{\psi}_2(0) > 0$  et  $\bar{\psi}_2^*(0) - \bar{\psi}_2(0) > 0$ . On "remarque" que

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_2^*(0) + \bar{\psi}_2(0) &= \omega q[(4\varepsilon_s' - q)\omega + 2(8 - q)] > 0, \\ \bar{\psi}_2^*(0) - \bar{\psi}_2(0) &= [2\omega\varepsilon_s' + (1 + \omega)q][(4\varepsilon_s' - q)\omega + 2(4 - q)] > 0,\end{aligned}$$

ce qui finit la preuve dans le cas général pour  $\delta = 0$ .

### 5.1.2 Cas particulier $q = 0$

Dans le cas  $q = 0$ , outre 1 qui est racine double "ne posant pas de problème",  $\phi_0$  admet comme racines celles du polynôme  $[1 + \omega\varepsilon_s']Z^2 - 2Z + [1 + \omega\varepsilon_s']$  qui sont complexes conjuguées distinctes et de module 1, si  $\varepsilon_s' \geq 1$ .

### 5.1.3 Cas particulier $q = 2$

Il en est de même pour le cas  $q = 2$  et cette fois, outre les racines  $\pm i$ , on a les racines du polynôme  $[1 + \omega\varepsilon_s']Z^2 - 2[1 + \omega(\varepsilon_s' - 1)]Z + [1 + \omega\varepsilon_s']$  qui admet deux racines complexes conjuguées distinctes et de module 1, si  $\varepsilon_s' \geq 1$ .

### 5.1.4 Cas particulier $\varepsilon_s' = 1$

Finalement si  $\varepsilon_s' = 1$  (et  $q \in ]0, 2[$ ), il faut revenir au polynôme  $\phi_0$  qui se factorise en

$$\phi_0(Z) = [Z^2 - (2 - q)Z + 1][(1 + \omega)Z^2 - 2Z + (1 + \omega)].$$

Chacun des deux polynômes de degré deux admet deux racines complexes conjuguées distinctes. On a donc un polynôme de von Neumann simple, sauf dans le cas particulier où les deux polynômes sont proportionnels et admettent les mêmes racines, qui deviennent alors des racines doubles. Ce cas est atteint si  $(2 - q) = 2/(1 + \omega)$ , à savoir  $q = 2\omega/(1 + \omega)$  ou de manière équivalente  $\omega = q/(2 - q)$ . Dans ce cas, l'analyse de von Neumann n'est d'aucune utilité et il faut revenir à la matrice d'amplification :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -2q + 2 & -1 & q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma^* & -q & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux valeurs propres doubles de cette matrice sont  $(2 - q \pm i\sqrt{q(4 - q)})/2$  et il ne leur correspond qu'un seul vecteur propre :

$${}^t \left( \sigma, \frac{q \mp i\sqrt{q(4 - q)}}{2}, \frac{q(3 - q) \mp i(2 - q)\sqrt{q(4 - q)}}{2}, \frac{-q \pm i\sqrt{q(4 - q)}}{2} \right).$$

À chaque valeur propre est donc associé un sous-espace propre stable minimal de dimension 2, ce qui est un cas de non stabilité du schéma. On peut dire que le schéma est stable pour  $q \in [0, 2\omega/(1 + \omega)]$ . Si on réécrit ceci en variables physiques, on a

$$4c_\infty^2 \frac{\delta t^2}{\delta x^2} \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) < \frac{2\omega_1^2 \delta t^2}{2 + \omega_1^2 \delta t^2}.$$

Si  $\delta x^2 < 4c_\infty^2/\omega_1^2$ , ceci ne constitue pas une borne sur le pas de temps. Si  $\delta x$  est suffisamment grand, la borne sur le pas de temps est

$$\delta t^2 < \frac{\delta x^2}{2c_\infty^2} - \frac{2}{\omega_1^2}.$$

### 5.1.5 Synthèse pour le modèle de Lorentz–Joseph et al. harmonique

Le schéma (8)–(13) pour les équations de Maxwell–Lorentz harmoniques uni-dimensionnelles est stable sous la condition

$$\delta t \leq \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty} \text{ si } \varepsilon_s > \varepsilon_\infty \quad \text{et} \quad \delta t < \sqrt{\frac{\delta x^2}{2c_\infty^2} - \frac{2}{\omega_1^2}} \text{ si } \varepsilon_s = \varepsilon_\infty,$$

cette dernière condition n’ayant un sens que si  $\delta x > 2c_\infty/\omega_1$ . Il est donc raisonnable d’éviter d’utiliser le schéma de Lorentz–Joseph et al. dans le cas harmonique pour  $\varepsilon_s = \varepsilon_{infty}$ .

## 5.2 Modèle de Kashiwa

### 5.2.1 Cas général

Le polynôme  $\phi_1$  est à nouveau identiquement nul et on étudie le polynôme dérivé du polynôme  $\phi_0$ , que l’on note :

$$\psi_0(Z) = [4 + 2\omega\varepsilon'_s]Z^3 - [12 - 3(1 + \frac{1}{2}\omega)q]Z^2 + [12 - 2\omega\varepsilon'_s - (4 - 2\omega)q]Z - [4 - (1 + \frac{1}{2}\omega)q].$$

La condition  $|\psi_0(0)| < |\psi_0^*(0)|$  équivaut à  $(8 - q) + \frac{1}{2}\omega(4\varepsilon'_s - q) > 0$  qui est vrai pour  $q \leq 4$ . On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \psi_1(Z) &= [4(4 + \omega\varepsilon'_s)\omega\varepsilon'_s + 4(2 + \omega)q - (1 + \frac{1}{2}\omega)^2 q^2]Z^2 \\ &\quad - [32\omega\varepsilon'_s + (16 - 8\omega - 8\omega\varepsilon'_s - 4\omega^2\varepsilon'_s)q + (\omega^2 - 4)q^2]Z \\ &\quad + [4(4 - \omega\varepsilon'_s)\omega\varepsilon'_s + 4(2 - 2\omega\varepsilon'_s + 5\omega)q - 3(1 + \frac{1}{2}\omega)^2 q^2]. \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \psi_1^*(0) &= \frac{1}{4}[4\omega\varepsilon'_s + (2 + \omega)q][16 + 4\omega\varepsilon'_s - (2 + \omega)q] > 0, \\ \psi_1^*(0) + \psi_1(0) &= q(4 - q)(\omega + 2)^2 + 4q(\varepsilon'_s - 1)\omega^2 + 8\varepsilon'_s(4 - q) + 8q > 0, \\ \psi_1^*(0) - \psi_1(0) &= \frac{1}{2}\{[(4\varepsilon'_s - q)\omega - 2q]^2 + 32q\omega(\varepsilon'_s - 1)\} > 0, \end{aligned}$$

sous la seule condition  $q \in [0, 4]$ , ce qui assure que  $|\psi_1(0)| < |\psi_1^*(0)|$ . Enfin on calcule  $\psi_2(Z)$  qui se factorise en

$$\psi_2(Z) = \frac{1}{2}\{[(-8 + 4\varepsilon'_s + q)\omega + 2q]^2 + 16\alpha(4 - q)\}\bar{\psi}_2(Z)$$

avec

$$\bar{\psi}_2(Z) = [(2 + \omega)^2 q(4 - q) + 4((\varepsilon'_s - 1)\omega^2 q + 2(\varepsilon'_s - 1)\omega(4 - q) + 8)]Z - [8 - (2 + \omega)q][4\omega\varepsilon'_s + (2 - \omega)q].$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_2^*(0) &\geq 0, \\ \bar{\psi}_2^*(0) + \bar{\psi}_2(0) &= q\omega[(6\varepsilon'_s - q)\omega + 2(8 - q)] > 0, \\ \bar{\psi}_2^*(0) - \bar{\psi}_2(0) &= 2(4 - q)[4\varepsilon'_s\omega + (2 + \omega)q] > 0.\end{aligned}$$

Ces deux dernières inégalités ne sont strictes que si  $q \in ]0, 4[$ , et on a alors  $|\psi_2(0)| < |\psi_2^*(0)|$ . Le cas  $\varepsilon'_s = 1$  n'est pas particulier dans cette étude générale.

### 5.2.2 Cas particulier $q = 0$

Pour traiter le cas particulier  $q = 0$ , il faut revenir à l'étude de  $\phi_0$  qui vaut ici

$$\begin{aligned}\phi_0(Z) &= [1 + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^4 - 4Z^3 + [6 - \omega\varepsilon'_s]Z^2 - 4Z + [1 + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s] \\ &= (Z - 1)^2 \{ [1 + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^2 - 2[1 - \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z + [1 + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s] \}.\end{aligned}$$

La valeur propre double  $Z = 1$  est la même que dans le cas anharmonique et ne pose pas plus de problème (les sous-espaces stables minimaux sont toujours de dimension 1). Le polynôme restant admet de manière évidente deux racines complexes conjuguées distinctes de module 1. Cette configuration correspond à un cas de stabilité du schéma.

### 5.2.3 Cas particulier $q = 4$

L'étude effectuée dans le cas anharmonique est valable ici. La valeur propre  $Z = -1$  est double et le sous-espace propre stable minimal associé est de dimension 2. Il y a donc croissance linéaire des itérées de la matrice d'amplification et instabilité.

### 5.2.4 Synthèse pour le modèle de Lorentz–Kashiwa harmonique

Le schéma (14) pour les équations de Maxwell–Lorentz harmoniques uni-dimensionnelles est stable sous la condition

$$\delta t < \delta x / c_\infty.$$

## 5.3 Modèle de Young

### 5.3.1 Cas général

Encore une fois, le polynôme  $\phi_1$  est identiquement nul et on étudie le polynôme dérivé du polynôme  $\phi_0$ , que l'on note :

$$\psi_0(Z) = 4Z^3 + [-12 + 6\omega\varepsilon'_s + 3q]Z^2 + [12 - 8\omega\varepsilon'_s + 4(\omega - 1)q]Z + [-4 + 2\omega\varepsilon'_s + q].$$

La condition  $|\psi_0(0)| < |\psi_0^*(0)|$  équivaut à  $(4 - 2\omega\varepsilon'_s) + (4 - q) > 0$ , ce que nous supposons ( $\omega < 2/\varepsilon'_s$  et  $q \in [0, 2]$ ). On continue en calculant :

$$\begin{aligned}\psi_1(Z) &= [(2\omega\varepsilon'_s + q)(8 - (2\omega\varepsilon'_s + q))]Z^2 + [(2\omega\varepsilon'_s + q)(4(2\omega\varepsilon'_s + q) - 16 - 4\omega q) + 16\omega q]Z \\ &\quad + [(2\omega\varepsilon'_s + q)(8 - 3(2\omega\varepsilon'_s + q)) + 16\omega q].\end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que  $\psi_1^*(0) > 0$ . Par ailleurs

$$\begin{aligned}\psi_1^*(0) + \psi_1(0) &= 4\{-4\omega^2\varepsilon_s'^2 + 8\omega\varepsilon_s' + 4(\omega(\varepsilon_s' + 1) + 1)q - q^2\}, \\ \psi_1^*(0) - \psi_1(0) &= 2\{[2\omega - q]^2 + 4\omega(\varepsilon_s' - 1)[q + \omega(\varepsilon_s' + 1)]\} > 0,\end{aligned}$$

Notons  $f(\omega) = -4\omega^2\varepsilon_s'^2 + 8\omega\varepsilon_s' + 4(\omega(\varepsilon_s' + 1) + 1)q - q^2$ , on veut montrer que cette quantité est positive pour  $\omega \in ]0, 2/(2\varepsilon_s' - 1)]$ . On dérive pour obtenir  $f'(\omega) = -4\varepsilon_s'q - 8\omega\varepsilon_s'^2 + 8\varepsilon_s' + 4q$  qui s'annule en  $\omega = (2\varepsilon_s' - (\varepsilon_s' - 1)q)/2\varepsilon_s'^2$ . Cette annulation a lieu pour un  $\omega$  qui varie entre  $1/\varepsilon_s'^2$  (valeur pour  $q = 2$ ) et  $1/\varepsilon_s'$  (valeur pour  $q = 0$ ), ce qui se situe dans l'intervalle  $]0, 2/(2\varepsilon_s' - 1)]$ . Cela correspond à un maximum de la fonction  $f(\omega)$ . Pour conclure, il suffit donc d'évaluer la limite de  $f(\omega)$  quand  $\omega \rightarrow 0$  et la valeur de  $f(\omega)$  en  $\omega = 2/(2\varepsilon_s' - 1)$ . Si ces deux valeurs sont positives,  $f(\omega)$  sera positive sur tout l'intervalle.

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) &= 4q - q^2 > 0, \\ f(2/(2\varepsilon_s' - 1)) &= (2\varepsilon_s' - 1)^2(2 - q) + 2(2\varepsilon_s' - 1) + 4(\varepsilon_s' - 1)(2\varepsilon_s' + 1) > 0,\end{aligned}$$

Si  $\varepsilon_s' = 1$ ,  $q = 2$  et  $\omega = 2$ , on a  $\psi_1^*(0) = -\psi_1(0)$ . On traitera ce cas à part. On calcule enfin  $\psi_2(Z)$  qui se factorise en

$$\psi_2(Z) = 8[(2\omega\varepsilon_s' - q)^2 + 8\omega(\varepsilon_s' - 1)q]\bar{\psi}_2(Z)$$

avec

$$\bar{\psi}_2(Z) = [-4\omega^2\varepsilon_s'^2 + 8\omega\varepsilon_s' + 4(\omega(\varepsilon_s' + 1) + 1)q - q^2]Z - [(2\omega\varepsilon_s' + (1 - \omega)q)(-4 + 2\omega\varepsilon_s' + q)].$$

On remarque que  $\psi_2$  est identiquement nulle si  $\varepsilon_s' = 1$  et  $q = 2\omega\varepsilon_s' = 2\omega$ , qui est un cas qu'il faudra traiter à part. Dans le cas contraire, on vérifie que

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_2^*(0) &\geq f(\omega) > 0, \\ \bar{\psi}_2^*(0) + \bar{\psi}_2(0) &= q\omega[8 - 2\omega\varepsilon_s' - q] > 0, \\ \bar{\psi}_2^*(0) - \bar{\psi}_2(0) &= [2\omega\varepsilon_s' + q][8 - 4\omega\varepsilon_s' + (\omega - 2)q].\end{aligned}$$

La quantité  $8 - 4\omega\varepsilon_s' + (\omega - 2)q$  est minimale si  $q = 2$  (car  $\omega < 2$ ) et vaut alors  $4 - 2\omega(2\varepsilon_s' - 1)$ . Comme dans le cas anharmonique si  $\omega < 2/(2\varepsilon_s' - 1)$  cette quantité est strictement positive, et si  $\omega = 2/(2\varepsilon_s' - 1)$  cette quantité est nulle. Or nous cherchons à montrer que  $\psi_0$  est de Schur et non de von Neumann, il faut donc revenir à l'étude de  $\phi_0$ . On a également à nouveau le cas  $\varepsilon_s' = 1$ ,  $q = 2$  et  $\omega = 2$  comme cas particulier.

### 5.3.2 Cas particulier $q = 0$

Dans le cas où  $q = 0$ , on revient à l'étude directe de  $\phi_0$  :

$$\begin{aligned}\phi_0(Z) &= Z^4 - [4 - 2\omega\varepsilon_s']Z^3 + 2[3 - 2\omega\varepsilon_s']Z^2 - [4 - 2\omega\varepsilon_s']Z + 1 \\ &= (Z - 1)^2[Z^2 - 2(1 - \omega\varepsilon_s')Z + 1],\end{aligned}$$

qui admet donc  $Z = 1$  comme racine double, ce qui ne pose pas plus de problème que dans le cas anharmonique. Les deux autres racines sont complexes conjuguées distinctes et de module 1 dès que  $\omega\varepsilon_s' < 2$ . Si  $\varepsilon_s' = 1$  et  $\omega = 2$ ,  $Z = -1$  est également racine double. On a alors

$$G + \text{Id} = \begin{pmatrix} 2 & -\sigma & 0 & 0 \\ \sigma^* & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

qui admet uniquement  ${}^t(\sigma, 2, 0, 0)$  comme vecteur propre (associé à 0). Ceci est source d'instabilité du schéma.

### 5.3.3 Cas particulier $q = 2$

Le cas  $q = 2$  est traité par le cas général sauf si  $\omega = 2/(2\varepsilon'_s - 1)$ . Dans ce cas là  $2\omega\varepsilon'_s = 2 + \omega$ , d'où

$$\begin{aligned}\phi_0(Z) &= Z^4 + \omega Z^3 + 2[\omega - 1]Z^2 + \omega Z + 1 \\ &= (Z + 1)^2(Z^2 - (2 - \omega)Z + 1).\end{aligned}$$

Il faut ainsi étudier le sous-espace stable par la matrice d'amplification pour la valeur propre  $-1$ . On a

$$G + \text{Id} = \begin{pmatrix} 2 & -\sigma & 0 & 0 \\ \sigma^* & \omega - 2 & 2\omega & -1 \\ 0 & 2 - \omega & 2 - 2\omega & 1 \\ 0 & 2 - \omega & -2\omega & 2 \end{pmatrix}$$

dont le seul vecteur propre (associé à 0) est  ${}^t(\sigma, 2, -1, -2)$ . On a donc là un cas d'instabilité.

### 5.3.4 Cas particulier $\varepsilon'_s = 1$

Il ne reste qu'à traiter le cas  $\varepsilon'_s = 1$ ,  $q = 2\omega$  qui annule identiquement  $\psi_2$ . On calcule  $\phi_0$  qui vaut

$$\psi_0(Z) = (Z^2 - 2[1 - \omega]Z + 1)^2.$$

Les deux racines complexes conjuguées  $1 - \omega \pm i\sqrt{\omega(2 - \omega)}$  sont toutes deux doubles et de module 1. Il faut donc étudier les sous-espaces propres stables associés. Les seuls vecteurs propres associés sont  ${}^t(\sigma, \omega \mp i\sqrt{\omega(2 - \omega)})$  respectivement et donc les sous-espaces minimaux sont de dimension 1, d'où instabilité. Si  $\varepsilon'_s = 1$ , il faudrait donc imposer  $q < 2\omega$ , ce qui en variable physique s'écrit :  $\delta x > 2c_\infty/\omega_1$  ce qui ne constitue en rien une condition de stabilité. Il faut donc éviter d'utiliser le schéma de Lorentz-Young dans le cas harmonique pour  $\varepsilon_s = \varepsilon_\infty$  quand  $q$  peut atteindre la valeur  $2\omega$ , c'est-à-dire si  $\omega \geq 1$ . Une autre façon de voir cette condition est de donner  $\omega < 1$  comme condition de stabilité si  $\varepsilon'_s = 1$ .

### 5.3.5 Synthèse pour le modèle de Lorentz-Young et al. harmonique

Le schéma (9)–(15) pour les équations de Maxwell-Lorentz harmoniques uni-dimensionnelles est stable sous la condition

$$\delta t < \min\left(\frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}, \frac{2}{\omega_1\sqrt{2\varepsilon'_s - 1}}\right) \text{ si } \varepsilon_s > \varepsilon_\infty \quad \text{et} \quad \delta t < \min\left(\frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}, \frac{\sqrt{2}}{\omega_1}\right) \text{ si } \varepsilon_s = \varepsilon_\infty,$$

## 6 Polynômes de base en dimension 1

Les calculs précédents nous amènent à définir des polynômes de base à associés à chacun des schémas en dimension 1. Nous verrons que ces polynômes de base sont utiles dans les dimensions supérieures.

#### Debye (Joseph et al.)

$$\begin{aligned}P_{DJ}(Z) &= [1 + \delta\varepsilon'_s]Z^3 - [3 + \delta\varepsilon'_s - (1 + \delta)q]Z^2 + [3 - \delta\varepsilon'_s - (1 - \delta)q]Z - [1 - \delta\varepsilon'_s] \\ &= [1 + \delta\varepsilon'_s]Y^3 + [2\delta\varepsilon'_s + (1 + \delta)q]Y^2 + [(1 + 3\delta)q]Y + [2\delta q].\end{aligned}$$

#### Debye (Young)

$$\begin{aligned}P_{DY}(Z) &= [(1 + \delta\alpha)(1 + \delta)]Z^3 - [3 + \delta + \delta\alpha + 3\delta^2\alpha - (1 + \delta)q]Z^2 \\ &\quad + [3 - \delta - \delta\alpha + 3\delta^2\alpha - (1 - \delta)q]Z - [(1 - \delta\alpha)(1 - \delta)] \\ &= [(1 + \delta)(1 + \delta\alpha)]Y^3 + [2\delta(1 + \alpha) + (1 + \delta)q]Y^2 + [(1 + 3\delta)q]Y + [2\delta q].\end{aligned}$$

### Lorentz (Joseph et al.)

$$\begin{aligned}
P_{LJ}(Z) &= [1 + \delta + \omega\varepsilon'_s]Z^4 - [4 + 2\delta + 2\omega\varepsilon'_s - (1 + \delta + \omega)q]Z^3 + [6 + 2\omega\varepsilon'_s - 2q]Z^2 \\
&\quad - [4 - 2\delta + 2\omega\varepsilon'_s - (1 - \delta + \omega)q]Z + [1 - \delta + \omega\varepsilon'_s] \\
&= [1 + \delta + \omega\varepsilon'_s]Y^4 + [2\delta + 2\omega\varepsilon'_s + (1 + \delta + \omega)q]Y^3 + [2\omega\varepsilon'_s + (1 + 3\delta + 3\omega)q]Y^2 \\
&\quad + [2(\delta + 2\omega)q]Y + [2\omega q].
\end{aligned}$$

### Lorentz (Kashiwa et al.)

$$\begin{aligned}
P_{LK}(Z) &= [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^4 - [4 + 2\delta - (1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)q]Z^3 + [6 - \omega\varepsilon'_s + (\omega - 2)q]Z^2 \\
&\quad - [4 - 2\delta - (1 - \delta + \frac{1}{2}\omega)q]Z + [1 - \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s] \\
&= [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Y^4 + [2(\delta + \omega\varepsilon'_s) + (1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)q]Y^3 \\
&\quad + [2\omega\varepsilon'_s + (1 + 3\delta + \frac{5}{2}\omega)q]Y^2 + [2(\delta + 2\omega)q]Y + [2\omega q].
\end{aligned}$$

### Lorentz (Young)

$$\begin{aligned}
P_{LY}(Z) &= [1 + \delta]Z^4 - [4 + 2\delta - 2\omega\varepsilon'_s - (1 + \delta)q]Z^3 + 2[3 - 2\omega\varepsilon'_s + (\omega - 1)q]Z^2 \\
&\quad - [4 - 2\delta - 2\omega\varepsilon'_s - (1 - \delta)q]Z + [1 - \delta] \\
&= [1 + \delta]Y^4 + [2\delta + 2\omega\varepsilon'_s + (1 + \delta)q]Y^3 + [2\omega\varepsilon'_s + (1 + 3\delta + 2\omega)q]Y^2 \\
&\quad + [2(\delta + 2\omega)q]Y + [2\omega q].
\end{aligned}$$

## 7 La dimension 2 d'espace

### 7.1 Équations de Maxwell

En dimension deux, le champ se découple en deux polarisations qui aboutissent à des schémas différents et à un nombre de variables différent également. On utilise ici des notations similaires à celles introduites en dimension 1, à savoir  $\lambda_x = c_\infty \delta t / \delta x$ ,  $\lambda_y = c_\infty \delta t / \delta y$ ,  $\sigma_x = \lambda_x (e^{i\xi_x} - 1)$ ,  $\sigma_y = \lambda_y (e^{i\xi_y} - 1)$ ,  $q_x = |\sigma_x|^2$  and  $q_y = |\sigma_y|^2$ .

#### 7.1.1 La polarisation $(B_x, B_y, E_z)$

La polarisation  $(B_x, B_y, E_z)$  est également appelée polarisation transverse électrique  $TE_z$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{x,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{x,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= -\lambda_y (\mathcal{E}_{z,j,k+1}^n - \mathcal{E}_{z,j,k}^n), \\
\mathcal{B}_{y,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{y,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}} &= \lambda_x (\mathcal{E}_{z,j+1,k}^n - \mathcal{E}_{z,j,k}^n), \\
\mathcal{D}_{z,j,k}^{n+1} - \mathcal{D}_{z,j,k}^n &= \lambda_x \left( \mathcal{B}_{y,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{y,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \lambda_y \left( \mathcal{B}_{x,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{x,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

### 7.1.2 La polarisation $(B_z, E_x, E_y)$

La polarisation  $(B_z, E_x, E_y)$  est également appelée polarisation transverse magnétique  $TM_z$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= -\lambda_x \left( \mathcal{E}_{y,j+1,k+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{E}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n \right) + \lambda_y \left( \mathcal{E}_{x,j+\frac{1}{2},k+1}^n - \mathcal{E}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n \right), \\ \mathcal{D}_{x,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - \mathcal{D}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n &= \lambda_y \left( \mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \mathcal{D}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathcal{D}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n &= -\lambda_x \left( \mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{z,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right).\end{aligned}$$

## 7.2 Modèle de Debye, schéma de Joseph et al.

### 7.2.1 La polarisation $(B_x, B_y, E_z)$

En couplant la polarisation  $(B_x, B_y, E_z)$  avec le modèle de Debye de Joseph et al., on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sigma_y & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_x & 0 \\ \frac{(1+\delta)\sigma_y^*}{1+\delta\varepsilon'_s} & -\frac{(1+\delta)\sigma_x^*}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{(1-\delta\varepsilon'_s)-(1+\delta)(q_x+q_y)}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{2\delta}{1+\delta\varepsilon'_s} \\ \sigma_y^* & -\sigma_x^* & -(q_x+q_y) & 1 \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{x,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{B}_{y,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{z,j,k}^n, \mathcal{D}_{z,j,k}^n)$ . Le polynôme caractéristique est multiple du polynôme en dimension 1 pour le même schéma avec la racine 1 comme racine supplémentaire :

$$\phi_0(Z) = Y P_{DJ}(Z).$$

Dans le polynôme  $P_{DJ}(Z)$ , la variable  $q$  signifie dans le cas bi-dimensionnel  $q = q_x + q_y$ . Le polynôme obtenu ne dépend que de cette somme, et non des valeurs individuelles de  $q_x$  et  $q_y$ .

Le cas général traité en dimension 1 conclut à un polynôme de Schur, on a donc ici un polynôme de von Neumann. On voit également aisément sur la forme de la matrice dans le cas  $q = 0$  (une annulation de  $q_x$  seul ou de  $q_y$  seul, ne constitue pas un cas particulier), que les sous-espaces propres associés à la valeur propre 1 sont bien stables. Quant au cas particulier  $\varepsilon'_s = 1$ , il donnait lieu à deux valeurs propres conjuguées distinctes de 1 et on peut leur adjoindre maintenant cette nouvelle valeur propre. La conclusion est donc la stabilité sous la condition  $q = q_x + q_y < 4$  soit si  $\delta x = \delta y$ ,  $\sqrt{2}c_\infty \delta t < \delta x$ .

### 7.2.2 La polarisation $(B_z, E_x, E_y)$

En couplant la polarisation  $(B_z, E_x, E_y)$  avec le modèle de Debye de Joseph et al., on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_y & 0 & -\sigma_x & 0 \\ -\frac{(1+\delta)\sigma_y^*}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{(1-\delta\varepsilon'_s)-(1+\delta)q_y}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{2\delta}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{(1+\delta)\sigma_x\sigma_y^*}{1+\delta\varepsilon'_s} & 0 \\ -\sigma_y^* & -q_y & 1 & \sigma_x\sigma_y^* & 0 \\ \frac{(1+\delta)\sigma_x^*}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{(1+\delta)\sigma_x^*\sigma_y}{1+\delta\varepsilon'_s} & 0 & \frac{(1-\delta\varepsilon'_s)-(1+\delta)q_x}{1+\delta\varepsilon'_s} & \frac{2\delta}{1+\delta\varepsilon'_s} \\ \sigma_x^* & \sigma_x^*\sigma_y & 0 & -q_x & 1 \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{D}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{E}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n, \mathcal{D}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n)$ . On obtient à nouveau un multiple du polynôme obtenu en dimension 1 avec deux racines supplémentaires :

$$\phi_0(Z) = Y[(1 + \delta\varepsilon'_s)Y + 2\delta\varepsilon'_s]P_{DJ}(Z),$$

qui valent 1 et  $(1 - \delta\varepsilon'_s)/(1 + \delta\varepsilon'_s)$  respectivement et qui ne sont pas racines en dimension 1 dans le cas général.

Seule la racine 1 pourrait poser des problèmes de stabilité et on a vu que seul le cas  $q = 0$  la rendait multiple. La matrice  $G$  alors obtenue est diagonale par blocs, avec deux blocs de rang 2 identiques à celui obtenu dans le cas la dimension 1. La stabilité est à nouveau assurée sous la condition  $q = q_x + q_y < 4$ .

### 7.3 Modèle de Debye, schéma de Young

#### 7.3.1 La polarisation $(B_x, B_y, E_z)$

En couplant la polarisation  $(B_x, B_y, E_z)$  avec le modèle de Debye de Young, on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sigma_y & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_x & 0 \\ \frac{\sigma_y^*}{1+\delta\alpha} & -\frac{\sigma_x^*}{1+\delta\alpha} & \frac{(1+\delta)(1-\delta\alpha)+4\delta^2\alpha-(1+\delta)q}{(1+\delta)(1+\delta\alpha)} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{2\delta}{1+\delta\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{2\delta\alpha}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{x,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{B}_{y,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{z,j,k}^n, \mathcal{P}_{z,j,k}^n)$ . Le calcul du polynôme caractéristique aboutit au même polynôme qu'en dimension 1 mais avec 1 comme valeur propre supplémentaire :

$$\phi_0(Z) = YP_{DY}(Z).$$

À nouveau, on se ramène au raisonnement du cas de la dimension 1, la valeur propre double 1 du cas  $q = 0$  ne posant pas de problème.

#### 7.3.2 La polarisation $(B_z, E_x, E_y)$

En couplant la polarisation  $(B_z, E_x, E_y)$  avec le modèle de Debye de Young, on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_y & 0 & -\sigma_x & 0 \\ -\frac{\sigma_y^*}{1+\delta\alpha} & \frac{(1+\delta)(1-\delta\alpha)+4\delta^2\alpha-(1+\delta)q_y}{(1+\delta)(1+\delta\alpha)} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{2\delta}{1+\delta\alpha} & \frac{\sigma_x\sigma_y^*}{1+\delta\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{2\delta\alpha}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_x^*}{1+\delta\alpha} & \frac{\sigma_x^*\sigma_y}{1+\delta\alpha} & 0 & \frac{(1+\delta)(1-\delta\alpha)+4\delta^2\alpha-(1+\delta)q_x}{(1+\delta)(1+\delta\alpha)} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{2\delta}{1+\delta\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\delta\alpha}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{P}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{E}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n, \mathcal{P}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n)$ . Le calcul du polynôme caractéristique aboutit au même polynôme qu'en dimension 1 mais avec deux valeurs propres supplémentaires :

$$\phi_0(Z) = Y[(1 + \delta)(1 + \delta\alpha)Y + 2\delta(1 + \alpha)]P_{DY}(Z)$$

qui sont 1 et  $(1 - \delta)(1 - \delta\alpha)/(1 + \delta)(1 + \delta\alpha)$ . À nouveau, on se ramène au raisonnement du cas de la dimension 1, la valeur propre triple 1 du cas  $q = 0$  ne posant pas de problème.

## 7.4 Modèle de Lorentz, schéma de Joseph et al.

### 7.4.1 La polarisation $(B_x, B_y, E_z)$

En couplant la polarisation  $(B_x, B_y, E_z)$  avec le modèle de Lorentz de Joseph et al., on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_x & 0 & 0 \\ \frac{2\delta\sigma_y^*}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & -\frac{2\delta\sigma_x^*}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{2-(1+\delta+\omega)q}{(1+\delta+\omega\varepsilon'_s)} & -\frac{1-\delta+\omega\varepsilon'_s}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{2\omega}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma_y^* & -\sigma_x^* & -q & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{x,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{B}_{y,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{z,j,k}^n, \mathcal{E}_{z,j,k}^{n-1}, \mathcal{D}_{z,j,k}^n)$ . Le calcul du polynôme caractéristique aboutit au même polynôme qu'en dimension 1 mais avec 1 comme valeur propre supplémentaire :

$$\phi_0(Z) = Y P_{LJ}(Z).$$

La valeur propre triple 1 du cas  $q = 0$  ne pose pas de problème.

### 7.4.2 La polarisation $(B_z, E_x, E_y)$

En couplant la polarisation  $(B_z, E_x, E_y)$  avec le modèle de Lorentz de Joseph et al., on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_y & 0 & 0 & -\sigma_x & 0 & 0 \\ -\frac{2\delta\sigma_y^*}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{2-(1+\delta+\omega)q_y}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & -\frac{1-\delta+\omega\varepsilon'_s}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{2\omega}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{\sigma_x\sigma_y^*(1+\delta+\omega)}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_y^* & -q_y & 0 & 1 & \sigma_x\sigma_y^* & 0 & 0 \\ \frac{2\delta\sigma_x^*}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{\sigma_x^*\sigma_y(1+\delta+\omega)}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & 0 & 0 & \frac{2-(1+\delta+\omega)q_x}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & -\frac{1-\delta+\omega\varepsilon'_s}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} & \frac{2\omega}{1+\delta+\omega\varepsilon'_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma_x^* & \sigma_x^*\sigma_y & 0 & 0 & -q_x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{E}_{x,j+\frac{1}{2},k}^{n-1}, \mathcal{D}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{E}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n, \mathcal{E}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^{n-1}, \mathcal{D}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n)$ . Le polynôme caractéristique est à nouveau un multiple du polynôme en dimension 1 :

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= Y[(1+\delta+\omega\varepsilon'_s)Y^2 + 2(\delta+\omega\varepsilon'_s)Y + 2\omega\varepsilon'_s]P_{LJ}(Z) \\ &= Y[(1+\delta+\omega\varepsilon'_s)Z^2 - 2Z + (1-\delta+\omega\varepsilon'_s)]P_{LJ}(Z). \end{aligned}$$

Dans le cas anharmonique, et par la technique de von Neumann, on vérifie aisément que

$$\psi_0(Z) = [1+\delta+\omega\varepsilon'_s]Z^2 - 2Z + [1-\delta+\omega\varepsilon'_s]$$

est un polynôme de Schur. Par ailleurs, la racine 1 qui est double si  $q = 0$  ne pose toujours pas de problème.

Dans le cas harmonique,  $\psi_0(Z)$  admet deux racines complexes conjuguées distinctes et de module 1. Ce n'est pas un problème en soit, sauf si  $\varepsilon'_s = 1$  auquel cas  $\psi_0(Z)$  est aussi en facteur de  $P_{LJ}(Z)$  :

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= (Z-1)[(1+\omega\varepsilon'_s)Z^2 - 2Z + (1+\omega\varepsilon'_s)]P_{LJ}(Z) \\ &= (Z-1)[(1+\omega\varepsilon'_s)Z^2 - 2Z + (1+\omega\varepsilon'_s)]^2[Z^2 - (2-q)Z + 1]. \end{aligned}$$

C'est déjà le cas, où nous avons repéré en dimension 1 des doublages de valeurs propres donnant lieu à des instabilités pour  $q = 2\omega/(1+\omega)$ . Mieux vaut éviter ce schéma dans le cas  $\varepsilon'_s$ .

## 7.5 Modèle de Lorentz, schéma de Kashiwa et al.

### 7.5.1 La polarisation $(B_x, B_y, E_z)$

En couplant la polarisation  $(B_x, B_y, E_z)$  avec le modèle de Lorentz de Kashiwa et al., on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_x & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_y^*(D-\frac{1}{2}\omega\alpha)}{D} & -\frac{\sigma_x^*(D-\frac{1}{2}\omega\alpha)}{D} & \frac{(1-q)D-(2-q)\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & \frac{\omega}{D} & -\frac{1}{D} \\ \frac{\sigma_y^*\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & -\frac{\sigma_x^*\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & \frac{(2-q)\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & \frac{D-\omega}{D} & \frac{1}{D} \\ \frac{\sigma_y^*\omega\alpha}{D} & -\frac{\sigma_x^*\omega\alpha}{D} & \frac{(2-q)\omega\alpha}{D} & -\frac{2\omega}{D} & \frac{2-D}{D} \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{x,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{B}_{y,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{z,j,k}^n, \mathcal{P}_{z,j,k}^n, \mathcal{J}_{z,j,k}^n)$ . Le calcul du polynôme caractéristique aboutit au même polynôme qu'en dimension 1 mais avec 1 comme valeur propre supplémentaire :

$$\phi_0(Z) = Y P_{LK}(Z).$$

La valeur propre triple 1 du cas  $q = 0$  ne pose pas de problème.

### 7.5.2 La polarisation $(B_z, E_x, E_y)$

En couplant la polarisation  $(B_z, E_x, E_y)$  avec le modèle de Lorentz de Kashiwa et al., on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma_y & 0 & 0 & \sigma_x & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_y^*(D-\frac{1}{2}\omega\alpha)}{D} & \frac{(1-q_y)D-(2-q_y)\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & \frac{\omega}{D} & -\frac{1}{D} & \frac{\sigma_x\sigma_y^*(D-\frac{1}{2}\omega\alpha)}{D} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_y^*\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & \frac{(1-q_y)\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & \frac{D-\omega}{D} & \frac{1}{D} & \frac{\sigma_x\sigma_y^*\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_y^*\omega\alpha}{D} & \frac{(1-q_y)\omega\alpha}{D} & \frac{-2\omega}{D} & \frac{2-D}{D} & \frac{\sigma_x\sigma_y^*\omega\alpha}{D} & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_x^*(D-\frac{1}{2}\omega\alpha)}{D} & \frac{\sigma_x^*\sigma_y(D-\frac{1}{2}\omega\alpha)}{D} & 0 & 0 & \frac{(1-q_x)D-(2-q_x)\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & \frac{\omega}{D} & -\frac{1}{D} \\ -\frac{\sigma_x^*\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & \frac{\sigma_x^*\sigma_y\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & 0 & 0 & \frac{(2-q_x)\frac{1}{2}\omega\alpha}{D} & \frac{D-\omega}{D} & \frac{1}{D} \\ -\frac{\sigma_x^*\omega\alpha}{D} & \frac{\sigma_x^*\sigma_y\omega\alpha}{D} & 0 & 0 & \frac{(2-q_x)\omega\alpha}{D} & \frac{-2\omega}{D} & \frac{2-D}{D} \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{P}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{J}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{E}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n, \mathcal{P}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n, \mathcal{J}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n)$ . Le calcul du polynôme caractéristique aboutit à un polynôme multiple de celui en dimension 1 :

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= Y[(1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s)Y^2 + (2(\delta + \omega\varepsilon'_s))Y + (2\omega\varepsilon'_s)]P_{LK}(Z) \\ &= Y[(1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s)Z^2 - (2 - \omega\varepsilon'_s)Z + (1 - \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s)]P_{LK}(Z). \end{aligned}$$

Dans le cas anharmonique, et par la technique de von Neumann, on vérifie aisément que

$$\psi_0(Z) = [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^2 - [2 - \omega\varepsilon'_s]Z + [1 - \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]$$

est un polynôme de Schur. Par ailleurs, la racine 1 qui est double si  $q = 0$  ne pose toujours pas de problème.

Dans le cas harmonique, on a comme racines supplémentaires 1 et deux racines complexes conjuguées distinctes de module 1, qui ne sont pas racines de  $P_{LK}(Z)$ . La stabilité est donc assurée sous les mêmes conditions que dans le cas unidimensionnel.

## 7.6 Modèle de Lorentz, schéma de Young

### 7.6.1 La polarisation $(B_x, B_y, E_z)$

En couplant la polarisation  $(B_x, B_y, E_z)$  avec le modèle de Lorentz de Young, on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_x & 0 & 0 \\ \sigma_y^* & -\sigma_x^* & \frac{(1+\delta)(1-q)-2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{2\omega}{1+\delta} & -\frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{1+\delta-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{x,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{B}_{y,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{z,j,k}^n, \mathcal{P}_{z,j,k}^n, \mathcal{J}_{z,j,k}^{n-\frac{1}{2}})$ . Le calcul du polynôme caractéristique aboutit au même polynôme qu'en dimension 1 mais avec 1 comme valeur propre supplémentaire :

$$\phi_0(Z) = Y P_{LY}(Z).$$

La valeur propre triple 1 du cas  $q = 0$  ne pose pas de problème.

### 7.6.2 La polarisation $(B_z, E_x, E_y)$

En couplant la polarisation  $(B_z, E_x, E_y)$  avec le modèle de Lorentz de Kashiwa et al., on obtient la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_y & 0 & 0 & -\sigma_x & 0 & 0 \\ -\sigma_y^* & \frac{(1+\delta)(1-q_y)-2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{2\omega}{1+\delta} & -\frac{1-\delta}{1+\delta} & \sigma_x\sigma_y^* & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{1+\delta-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_x^* & \sigma_x^*\sigma_y & 0 & 0 & \frac{(1+\delta)(1-q_x)-2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{2\omega}{1+\delta} & -\frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{1+\delta-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\omega\alpha}{1+\delta} & \frac{-2\omega}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}$$

associée à la variable  ${}^t(\mathcal{B}_{z,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{P}_{x,j+\frac{1}{2},k}^n, \mathcal{J}_{x,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n, \mathcal{P}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^n, \mathcal{J}_{y,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}})$ . Le calcul du polynôme caractéristique aboutit à un polynôme multiple de celui en dimension 1 :

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= Y[(1+\delta)Y^2 + (2(\delta + \omega\varepsilon'_s))Y + (2\omega\varepsilon'_s)]P_{LY}(Z) \\ &= Y[(1+\delta)Z^2 - (2 - \omega\varepsilon'_s)Z + (1-\delta)]P_{LY}(Z). \end{aligned}$$

Dans le cas anharmonique, et par la technique de von Neumann, on vérifie aisément que

$$\psi_0(Z) = [1+\delta]Z^2 - [2 - 2\omega\varepsilon'_s]Z + [1-\delta]$$

est un polynôme de Schur. Par ailleurs, la racine 1 qui est double si  $q = 0$  ne pose toujours pas de problème.

Dans le cas harmonique, on a comme racines supplémentaires 1 et deux racines complexes conjuguées distinctes de module 1, qui ne sont pas racines de  $P_{LY}(Z)$ . La stabilité est donc assurée sous les mêmes conditions que dans le cas unidimensionnel.

## 8 Conclusion

Nous avons étudié la stabilité de schémas numériques pour les équations de Maxwell–Debye et de Maxwell–Lorentz en dimension 1 et 2 d’espace. En dimension 2, les polynômes caractéristiques de chaque schéma et dans les deux polarisations s’avèrent être des multiples des polynômes caractéristiques pour le même schéma en dimension 1. Dans tous les cas, le passage en dimension 2 s’accompagne d’une racine 1 supplémentaire par rapport au cas unidimensionnel. C’est la seule racine supplémentaire en polarisation  $TE_z$ . Pour la polarisation  $TM_z$ , il y a en plus une autre racine supplémentaire pour l’équation de Debye et deux autres racines supplémentaires pour l’équation de Lorentz, toutes ces racines étant dans le disque unité. Pour le schéma de Yee appliqué aux équations de Maxwell seule, la condition de stabilité est  $q \leq 4$  en dimension 1, 2 et 3, en rappelant que  $q = q_x + q_y$  en dimension 2 ( $q = \max(q_x + q_y, q_x + q_z, q_y + q_z)$  en dimension 3). Les résultats sont regroupés dans deux tableaux suivant que  $\varepsilon_s = \varepsilon_\infty$  ou non.

Modèle	Schéma		dimension 1	dimension 2 ( $\delta x = \delta y$ )
Debye	Joseph et al.	$q \leq 4$	$\delta t \leq \frac{\delta x}{c_\infty}$	$\delta t \leq \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$
Debye	Young	$q \leq 4, \delta \leq 1$	$\delta t \leq \min(\frac{\delta x}{c_\infty}, 2t_r)$	$\delta t \leq \min(\frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}, 2t_r)$
Lorentz	Joseph et al.	$q \leq 2$	$\delta t \leq \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$	$\delta t \leq \frac{\delta x}{2c_\infty}$
Lorentz	Kashiwa et al.	$q < 4$	$\delta t < \frac{\delta x}{c_\infty}$	$\delta t < \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$
Lorentz	Young	$q \leq 2, \omega \leq \frac{2}{2\varepsilon'_s - 1}$	$\delta t \leq \min(\frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}, \frac{2}{\omega_1 \sqrt{2\varepsilon'_s - 1}})$	$\delta t \leq \min(\frac{\delta x}{2c_\infty}, \frac{2}{\omega_1 \sqrt{2\varepsilon'_s - 1}})$
Harm.	Joseph et al.	$q \leq 2$	$\delta t \leq \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$	$\delta t \leq \frac{\delta x}{2c_\infty}$
Harm.	Kashiwa et al.	$q < 4$	$\delta t < \frac{\delta x}{c_\infty}$	$\delta t < \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$
Harm.	Young	$q < 2, \omega \leq \frac{2}{2\varepsilon'_s - 1}$ ou $q \leq 2, \omega < \frac{2}{2\varepsilon'_s - 1}$	$\delta t < \min(\frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}, \frac{2}{\omega_1 \sqrt{2\varepsilon'_s - 1}})$	$\delta t < \min(\frac{\delta x}{2c_\infty}, \frac{2}{\omega_1 \sqrt{2\varepsilon'_s - 1}})$

TAB. 1 – Stabilité des schémas pour  $\varepsilon_s > \varepsilon_\infty$ .

Pour chacun des modèles, on a au moins un schéma dont la condition de stabilité est la même que pour les équations de Maxwell seules ( $q < 4$ ). Dans les modèles de Young, les conditions supplémentaires correspondent à une discrétisation suffisante des équations de Debye et de Lorentz respectivement, ... car ce n’est pas tout d’être stable. Les applications à des matériaux classiques montrent que c’est en général la condition provenant des équations des Maxwell et non celle provenant de l’équation constitutive du matériau qui s’avère la plus contraignante.

L’auteur laisse à qui voudra les entreprendre les calculs en dimension 3 qui sont de la même veine mais font intervenir des matrices de beaucoup plus grande taille. Bon courage ...

## Références

- [1] B. Bidégaray-Fesquet. Stability of FD–TD schemes for Maxwell–Debye and Maxwell–Lorentz equations. Rapport technique, LMC-IMAG, 2005.
- [2] R.M. Joseph, S.C. Hagness et A. Taflove. Direct time integration of Maxwell’s equations in linear dispersive media with absorption for scattering and propagation of femtosecond electromagnetic pulses. *Optical Letters*, 16(18) :1412–1414, 1991.

Modèle	Schéma		dimension 1	dimension 2 ( $\delta x = \delta y$ )
Debye	Joseph et al.	$q < 4$	$\delta t < \frac{\delta x}{c_\infty}$	$\delta t < \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$
Debye	Young	$q < 4$	$\delta t < \frac{\delta x}{c_\infty}$	$\delta t < \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$
Lorentz	Joseph et al.	$q \leq 2$	$\delta t \leq \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$	$\delta t \leq \frac{\delta x}{2c_\infty}$
Lorentz	Kashiwa et al.	$q < 4$	$\delta t < \frac{\delta x}{c_\infty}$	$\delta t < \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$
Lorentz	Young	$q \leq 2, \omega \leq 2$	$\delta t \leq \min(\frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}, \frac{2}{\omega_1})$	$\delta t \leq \min(\frac{\delta x}{2c_\infty}, \frac{2}{\omega_1})$
Harm.	Joseph et al.	$q < \frac{2\omega}{1+\omega}$	à éviter	à éviter
Harm.	Kashiwa et al.	$q < 4$	$\delta t < \frac{\delta x}{c_\infty}$	$\delta t < \frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}$
Harm.	Young	$q < 2, \omega < 1$	$\delta t < \min(\frac{\delta x}{\sqrt{2}c_\infty}, \frac{\sqrt{2}}{\omega_1})$	$\delta t < \min(\frac{\delta x}{2c_\infty}, \frac{\sqrt{2}}{\omega_1})$

TAB. 2 – Stabilité des schémas pour  $\varepsilon_s = \varepsilon_\infty$ .

- [3] T. Kashiwa, N. Yoshida et I. Fukai. A treatment by the FD–TD method of the dispersive characteristics associated with orientation polarization. *Institute of Electronics, Information and Communication Engineers Transactions*, E73 :1326–1328, 1990.
- [4] R. Luebbers, F.P. Hunsberger, K.S. Kunz, R.B. Standler et M. Schneider. A frequency-dependent finite-difference time–domain formulation for dispersive materials. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 32(3) :222–227, 1990.
- [5] P.G. Petropoulos. Stability and phase error analysis of FD–TD in dispersive dielectrics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 42(1) :62–69, 1994.
- [6] J.C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadworth & Brooks/Cole, 1989.
- [7] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3) :302–307, 1966.
- [8] J.L. Young. Propagation in linear dispersive media : Finite difference time–domain methodologies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(4) :422–426, 1995.
- [9] J.L. Young, A. Kittichartphayak, Y.M. Kwok et D. Sullivan. On the dispersion errors related to FD<sup>2</sup>TD type schemes. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(8) :1902–1910, 1995.