HAL
open science

Un indice qui affine l'indice de Poincaré-Lefschetz pour les homéomorphismes de surfaces

Frédéric Le Roux

To cite this version:

Frédéric Le Roux. Un indice qui affine l'indice de Poincaré-Lefschetz pour les homéomorphismes de surfaces. 2005. hal-00005108

HAL Id: hal-00005108

https://hal.science/hal-00005108v1

Preprint submitted on 2 Jun 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00005108, version 1 - 2 Jun 2005

Un indice qui affine l'indice de Poincaré-Lefschetz pour les homéomorphismes de surfaces

Frédéric Le Roux
Université Paris Sud
Bat. 430
91405 Orsay Cedex FRANCE
e-mail : leroux@topo.math.u-psud.fr

2nd June 2005

Résumé

Nous étudions la dynamique des homéomorphismes de surfaces autour des points fixes isolés dont l'indice de Poincaré-Lefschetz est différent de 1. Nous définissons un invariant de conjugaison, mot cyclique sur l'alphabet $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$, qui affine l'indice de Poincaré-Lefschetz. Grossièrement, il s'agit de décomposer canoniquement la dynamique en un nombre fini de secteurs hyperboliques, elliptiques ou indifférents, chaque type de secteur contribuant à l'indice de Poincaré-Lefschetz par un terme valant respectivement $-1/2$, $+1/2$ ou 0. Le mot cyclique permet de lire l'existence de structures dynamiques canoniques.

Abstract

We study the dynamics of surface homeomorphisms around isolated fixed points whose Poincaré-Lefschetz index is not equal to 1. We construct a new conjugacy invariant, which is a cyclic word on the alphabet $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$. This invariant is a refinement of the P.-L. index. It can be seen as a canonical decomposition of the dynamics into a finite number of sectors of hyperbolic, elliptic or indifferent type. The contribution of each type of sector to the P.-L. index is respectively $-1/2$, $+1/2$ and 0. The construction of the invariant implies the existence of some canonical dynamical structures.

Mots-clés Homéomorphisme, surface, point fixe, Brouwer, indice, composantes de Reeb.

Keywords Homeomorphism, surface, fixed point, Brouwer, index, Reeb components.

Classification AMS (2000) 37E30, 37B30.

Table des matières

I Introduction et résultats **3**

1 Introduction **3**

2 Définitions, résultats **7**

II Squelette de preuve **13**

3 Énoncés des lemmes **13**

4 Preuve des théorèmes **16**

III Preuves des lemmes **19**

5 Module et courbes **20**

6 Minoration du module **21**

7 Géodésiques **22**

8 Droites de Brouwer **26**

9 Formule d'indice **27**

10 Compatibilité des composantes de Reeb **29**

IV Conséquences dynamiques **31**

11 Ouverts dynamiquement cohérents **31**

12 Croissants et pétales **33**

13 Autres propriétés **34**

V Appendices **36**

A Points fixes d'indice 1 **36**

B Ordre cyclique **41**

Première partie

Introduction et résultats

1 Introduction

1.1 Résultat principal

Nous nous proposons de construire un invariant pour un certain type de points fixes des systèmes dynamiques topologiques en dimension 2. Plus précisément, nous considérons les données suivantes :

- une surface orientable S, pas nécessairement compacte ;
- un point x_0 sur la surface S ;
- un homéomorphisme h de la surface S dans elle-même, qui préserve l'orientation, et qui fixe le point x_0.

Nous faisons deux hypothèses importantes :

- le point x_0 est isolé parmi les points fixes de h ;
- l'indice de Poincaré-Lefschetz de ce point fixe est différent de 1.

Le principal résultat du texte aura la forme suivante.

Théorème. *Il existe un invariant de conjugaison qui associe à ces données :*

- *un entier $d \geq 2$ (appelé le* module *de h en x_0) ;*
- *un mot cyclique $\mathbf{M}(h)$ sur l'alphabet $\{\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$.*

Le mot $\mathbf{M}(h)$ est composé de $2 \times d$ lettres, qui sont alternativement des flèches horizontales et verticales.

À vrai dire, il faut exclure de l'énoncé le cas où S est la sphère et x_0 l'unique point fixe de h (ce qu'on appelle un *homéomorphisme de Brouwer*). D'autre part, la notion de module se généralise quand l'indice est égal à 1, et le théorème se généralise en indice 1 lorsque le module est supérieur ou égal à 4.

Rappelons la définition informelle de l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe x_0. Il s'agit d'un invariant local, on peut se ramener au cas où la surface S est le plan. Puisque le point fixe est supposé isolé, nous pouvons choisir un disque topologique D, contenant le point fixe dans son intérieur, et suffisamment petit pour ne contenir aucun autre point fixe de h. Pour chaque point x du disque D, traçons le vecteur allant du point x à son image $h(x)$: on obtient ainsi un champ de vecteurs sur D, qui ne s'annule qu'au point x_0. Nous pouvons maintenant évaluer l'indice de ce champ de vecteurs sur le bord de D : lorsque le point x parcourt la circonférence de D, le vecteur reliant x à $h(x)$ effectue un certain nombre de tours, qui donne l'indice du champ de vecteurs. On peut montrer que cet indice ne dépend pas du choix du disque D : on a ainsi défini l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe x_0 pour l'homéomorphisme h. Les exemples les plus simples sont dessinés sur la figure 1.

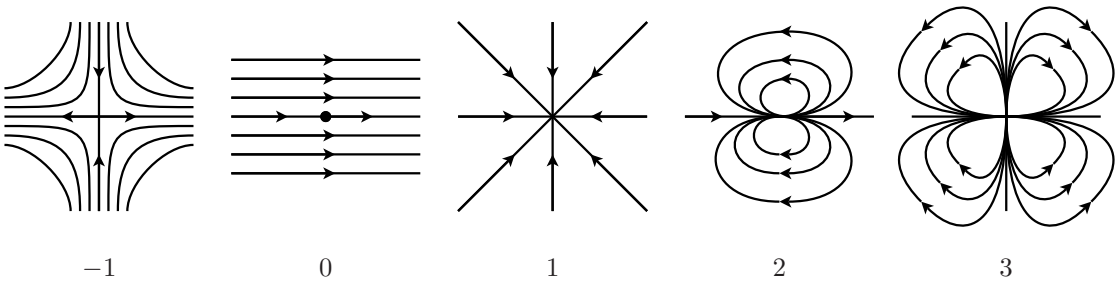

Fig. 1 – Différentes valeurs de l'indice

L'invariant de conjugaison que nous voulons décrire sera plus fin que l'indice de Poincaré-Lefschetz. Pour préciser ceci, il faut penser au mot cyclique $\mathbf{M}(h)$ de la manière suivante. On

dessine un cercle autour du point fixe x_0, et on écrit les lettres du mot $\mathbf{M}(h)$ le long de ce cercle, comme sur la figure 2 (il faut s'imaginer à l'extérieur du cercle, tourné vers le point fixe, écrivant le mot $\mathbf{M}(h)$ en faisant le tour du cercle dans le sens trigonométrique, en commançant par la flèche du bas). On a maintenant le dessin d'un champ de vecteurs le long du cercle. L'indice de Poincaré-Lefschetz est alors égal à l'indice de ce champ de vecteurs symbolique, c'est-à-dire au nombre de tours effectués par les flèches-lettres du mot $\mathbf{M}(h)$ lorsqu'on a écrit ce mot autour du cercle. Ainsi, le nouvel invariant donne une manière canonique de décomposer le nombre de tours évalué par l'indice de Poincaré-Lefschetz en une somme de quarts-de-tour dans les sens positifs ou négatifs, somme dont les termes sont cycliquement ordonnés.

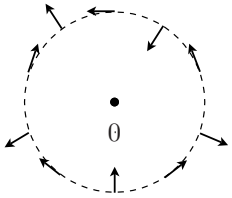

Fig. 2 – Lien avec l'indice de Poincaré-Lefschetz pour le mot $\mathbf{M} = (\uparrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\downarrow\leftarrow)$ (précisé en section 1.3)

1.2 Esquisse de définition

Esquissons la définition de l'invariant. Pour cela, on se place dans le cadre d'un homéomorphisme du plan qui possède un unique point fixe : nous verrons qu'on peut toujours se ramener à cette situation idéale. Avant tout, rappelons que lorsque l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est supposé différent de 1, la théorie de Brouwer donne une première description de la dynamique : toutes les orbites, dans le passé ou le futur, tendent vers le point fixe ou vers l'infini. En particulier, il n'y a que quatre types d'orbites $(h^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ possibles. Étant donnée une courbe fermée γ qui entoure le point fixe, on peut décomposer γ en un nombre fini de morceaux (connexes) *libres*, c'est-à-dire qui sont chacun disjoints de leur image par h. Lorsque le nombre de morceaux est le plus petit possible, on dit qu'on a une *décomposition minimale* de γ, et on définit la *h-longueur* de la courbe γ comme étant précisément le nombre de morceaux d'une décomposition minimale. On peut alors définir le *module* de h : c'est la plus petite h-longueur parmi toutes les courbes fermées entourant le point fixe. Les courbes réalisant ce minimum sont appelées *courbes géodésiques*.

Passons à la définition du mot cyclique $\mathbf{M}(h)$. On construit d'abord les flèches "horizontales" ($\rightarrow$ et $\leftarrow$). On considère une décomposition minimale d'une courbe géodésique γ, et on va associer une flèche à chacun des *sommets*, c'est-à-dire des extrémités des morceaux de la décomposition. Appelons γ_1 et γ_2 les deux morceaux situés de part et d'autre du sommet x_1. Par minimalité, l'image de γ_1 par h rencontre γ_2, ou l'image de γ_2 rencontre γ_1. D'autre part, un lemme de Franks dit que *ces deux possibilités ne peuvent pas arriver simultanément lorsque l'indice de Poincaré-Lefschetz est différent de* 1. La flèche horizontale associée au sommet x_1 décrit alors le sens dans lequel s'effectue la transition. Il reste à construire les flèches "verticales" ($\uparrow$ et $\downarrow$), qui vont venir s'intercaler entre deux flèches horizontales successives. En reprenant les notations du paragraphe précédent, on va associer une flèche verticale à chaque morceau de la décomposition ; au final, les trois flèches associées au sommet x_1 et aux deux morceaux qui lui sont adjacents contiendront l'information sur la dynamique de x_1. Pour fixer les idées, supposons que la transition au sommet x_1 s'effectue de γ_1 vers γ_2. Alors la flèche associée à γ_1 décrit le passé du point x_1 (par convention, elle vaut $\downarrow$ si l'orbite de x_1 vient de l'unique point fixe, et $\uparrow$ s'il vient de l'infini) ; tandis que la flèche associée à γ_2 décrit le futur de x_1. Ainsi, par exemple, le mot $(\downarrow\rightarrow\uparrow)$ symbolise une orbite qui vient du point fixe et retourne vers le point fixe après avoir "effectué un demi-tour sur sa gauche".

Prouver le théorème énoncé ci-dessus revient maintenant à montrer que le mot $\mathbf{M}(h)$ ainsi construit ne dépend pas de la courbe γ utilisée dans la construction (parmi toutes les courbes réalisant le module de h). Ceci sera fait *via* la construction de structures dynamiques canoniques qui généralisent les secteurs des points hyperboliques de type selle ou des points paraboliques en dynamique holomorphe. Par analogie au cas des feuilletages (ou des flots), ces structures sont

baptisées *composantes de Reeb*. Notons que dans la section 2, le point de vue est renversé : nous définissons le mot $\mathbf{M}(h)$ à partir de la dynamique dans les bords des composantes de Reeb canoniques, puis nous montrerons l'équivalence avec la définition esquissée ci-dessus en termes de courbes géodésiques.

1.3 Structures dynamiques, sur un exemple

L'invariant permet de lire certaines caractéristiques de la dynamique de h, en précisant la manière dont les quatre types d'orbites sont organisées autour du point fixe. À chaque mot cyclique $\mathbf{M}$ correspond un modèle dynamique $h_{\mathbf{M}}$, qui est en quelque sorte la dynamique la plus simple possible parmi les homéomorphismes h tels que $\mathbf{M}(h) = \mathbf{M}$. On essaie alors de retrouver pour l'homéomorphisme général h des propriétés dynamiques du modèle $h_{\mathbf{M}(h)}$. Les résultats précis seront énoncés dans la partie IV ; nous nous contentons ici d'expliquer certaines conséquences dynamiques sur un exemple. On se restreint encore aux homéomorphismes du plan qui fixent uniquement le point 0. Supposons que l'indice par quarts-de-tour de h soit

$$\mathbf{M} = (\uparrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\downarrow\leftarrow).$$

Nous commençons par dessiner la dynamique du modèle $h_{\mathbf{M}}$ correspondant (figure 3). Le module est égal à 5, il y a donc 5 secteurs $S_1, \ldots, S_5$, qui correspondent respectivement aux mots partiels $(\uparrow\rightarrow\downarrow)$, $(\downarrow\rightarrow\uparrow)$, $(\uparrow\rightarrow\downarrow)$, $(\downarrow\leftarrow\downarrow)$, $(\downarrow\leftarrow\uparrow)$. Les secteurs 1, 3 et 5 sont hyperboliques, le deuxième est elliptique, le quatrième est indifférent.[1] Pour retrouver l'indice de Poincaré-Lefschetz, on additionne les contributions de chacun des secteurs, et on ajoute 1. Les secteurs hyperboliques comptent pour $-1/2$, les secteurs elliptiques pour $+1/2$, les secteurs indifférents comptent pour du beurre. Par conséquent l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est ici égal à $(-1/2+1/2-1/2+0-1/2)+1 = 0$.

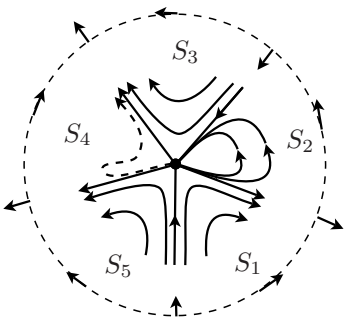

Fig. 3 –

Pour imaginer un homéomorphisme général h ayant le même indice par quarts-de-tour, il faut complexifier le modèle $h_{\mathbf{M}}$ de la façon suivante. On commence par épaissir chaque séparatrice en un secteur de dynamique parabolique (orbites "parallèles"). On complexifie la topologie des bords des secteurs : par exemple, on peut obtenir des bords qui ne sont plus localement connexes. Enfin, on peut complexifier à l'infini la dynamique au voisinage de 0 et de l'infini (voir par exemple les figures 10, 13 et 14 du texte [7]). L'homéomorphisme général h hérite d'un certain nombre de propriétés dynamiques du modèle $h_{\mathbf{M}}$. Voici la plus importante (figure 4). À chaque secteur S_i du modèle correspond canoniquement un ouvert $O(F_i, G_i)$ invariant par h, dont les bords F_i et G_i forment une *composante de Reeb* (voir la définition 2.3 pour les détails). Les orbites de presque tous les points d'un de ces bords ont une dynamique identique à celle du bord correspondant pour le modèle : ainsi, presque tous les points de F_1 vont de l'infini à 0, et presque tous les points de G_1 vont de 0 à l'infini ; ceci généralise l'existence de séparatrices stables ou instables (proposition 2.5). Entre les ensembles F_i et G_i, la dynamique va globalement dans le même sens orthoradial que la dynamique du modèle dans le secteur S_i : par exemple, il existe une demi-droite topologique qui joint 0 à l'infini, située entre F_1 et G_1, et qui est poussée par h vers G_1 (c'est ce qu'on appelle une *droite de Brouwer*). De plus, tout ouvert rencontrant F_1 a ses itérés positifs qui s'accumulent sur G_1.

[1] La construction précise d'un modèle de secteur indifférent sera donnée à la section 4.4.

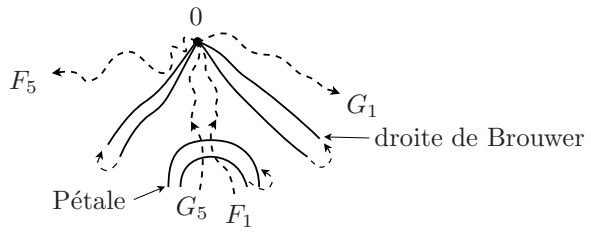

FIG. 4 – Quelques propriétés dynamiques héritées du modèle sur les secteurs S_1 et S_5

Voici quelques propriétés supplémentaires. Premièrement, dans chaque composante de Reeb, il existe un ouvert, défini canoniquement, dont les points ont tous le même comportement dynamique, et ce comportement se lit sur le mot $\mathbf{M}$: par exemple, l'ouvert canonique entre F_2 et G_2 est constitué de points dont les orbites vont toutes de 0 à 0, comme dans le secteur S_2 du modèle. On en déduira en particulier que si h préserve la mesure de Lebesgue, alors le modèle $h_{\mathbf{M(h)}}$ n'a que des secteurs hyperboliques ; le mot $\mathbf{M(h)}$ est alors obtenu par répétition du mot élémentaire $(\uparrow\leftarrow\downarrow\rightarrow)$, et on retrouvera naturellement un théorème de Slaminka : l'indice de Poincaré-Lefschetz d'un homéomorphisme conservatif h est inférieur ou égal à 1. Deuxièmement, on peut lire sur le mot $\mathbf{M(h)}$ l'existence de *pétales*. L'un d'eux, associé au sous-mot $(\rightarrow\downarrow\leftarrow)$ de $\mathbf{M(h)}$, est représenté sur la figure 4 ; il s'agit d'un pétale répulsif basé en l'infini. Cette propriété généralise un énoncé du texte [7] (version topologique du théorème de la fleur de Leau-Fatou, p9). Enfin, chaque secteur indifférent contient au moins une orbite dont la dynamique est opposée à celle des bords : ainsi, dans le secteur correspondant à S_4, il existe une orbite qui va de l'infini à 0.

1.4 Invariant global *vs* invariant local

La figure 5 montre deux homéomorphismes du plan, fixant uniquement le point 0, avec un indice égal à 0, qui ont le même germe au voisinage du point fixe. Cependant, leurs indices par quarts-de-tour diffèrent. Ceci montre que cet invariant n'est pas un invariant de la dynamique locale. Il est cependant possible qu'on puisse obtenir un invariant local similaire à l'indice par quart-de-tours ; en particulier, les récents travaux de F. R. Ruiz Del Portal et J. M. Salazar vont dans ce sens (voir [11]).

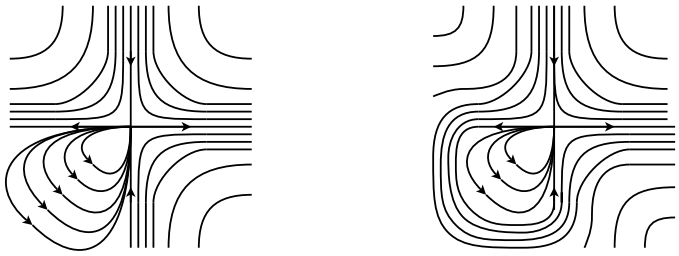

FIG. 5 – Un germe donné peut s'étendre de plusieurs manières, donnant différents indices par quarts-de-tour : $(\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\uparrow\rightarrow\downarrow\rightarrow)$ et $(\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow)$

1.5 Changement de cadre

Dans cette section, nous expliquons brièvement un procédé canonique qui produit, à partir des données générales de l'introduction, un homéomorphisme du plan dont 0 est l'unique point fixe, avec un indice différent de 1. Ce procédé permet de se ramener du cadre général à ce cadre plus simple : comme le procédé est canonique, toute construction d'un invariant de conjugaison dans le cadre simple s'étendra automatiquement au cadre général. Nous nous contentons de donner les énoncés, la preuve étant identique à la preuve du théorème d'extension 2.1 du texte [7].

On se donne un homéomorphisme h_0 d'une surface orientable S, et un point fixe isolé x_0 (sans condition d'indice pour le moment). Comme indiqué plus haut, on exclut le cas des

homéomorphismes de Brouwer, où S est la sphère et x_0 l'unique point fixe de h_0. On considère la surface (non compacte) O obtenue en enlevant à S les points fixes de h_0. La première proposition est purement topologique, elle donne une correspondance entre le plan et la surface O.

Proposition 1.1. *Il existe une unique application $p : \mathbb{R}^2 \to O \cup \{x_0\}$ telle que*

1. *$p(0) = x_0$;*
2. *il existe un voisinage U de 0 dans le plan sur lequel la restriction de p est un homéomorphisme de U vers un voisinage V de x_0 dans la surface S ;*
3. *la restriction de p au plan troué $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est un revêtement sur O.*

L'unicité s'entend à isomorphisme de revêtement près (si p_1 et p_2 sont deux telles applications, alors il existe un homéomorphisme g du plan, fixant 0, préservant l'orientation, tel que $p_2 = g \circ p_1$). On peut ensuite relever la dynamique.

Proposition 1.2. *Il existe un unique homéomorphisme h du plan, fixant 0, qui vérifie*

$$p \circ h = h_0 \circ p.$$

En particulier,

1. *le point 0 est l'unique point fixe de h ;*
2. *l'homéomorphisme h, au voisinage de 0, est localement conjugué à l'homéomorphisme h_0 au voisinage de x_0 ;*
3. *si h_0 préserve l'orientation, alors h aussi ;*
4. *l'indice de Poincaré-Lefschetz de 0 pour h est égal à l'indice de Poincaré-Lefschetz de x_0 pour h_0.*

2 Définitions, résultats

Pour toute cette section, on se donne un homéomorphisme h du plan, préservant l'orientation, fixant le point 0, sans autre point fixe, et tel que l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est différent de 1. On utilisera les résultats fondamentaux de la théorie de Brouwer : voir [7], section 3.2, et les références qui y sont données. Tous les énoncés se généralisent en indice 1 si le module est assez grand ; cette généralisation est expliquée dans l'appendice A.

2.1 Module

Comme expliqué en introduction, on peut définir le module de h par des considérations sur les courbes qui entourent le point fixe. Nous reviendrons sur cette définition à la section 2.4 ; nous commençons par donner une définition en termes de domaines de translation. Un *domaine de translation* est un ouvert du plan, connexe et simplement connexe, invariant par h, sur lequel la restriction de h est conjuguée à une translation. Le *théorème des translations planes* de Brouwer, adapté à notre cadre avec un point fixe, dit notamment que *tout point du plan, autre que le point fixe 0, est dans un domaine de translation* (voir Slaminka [14], Guillou [4], ou encore [7], théorème 3.79 p71).

Définition 2.1. Le *module* de h est le nombre minimal de domaines de translation dont on a besoin pour faire le tour du point fixe :

$$\text{Module}(h) := \min\{k \mid \exists O_1, \dots O_k \text{ domaines de translation}, O_1 \cup \dots \cup O_k \text{ sépare } 0 \text{ et } \infty\}.$$

2.2 Composantes de Reeb

Définition des composantes On considère la sphère $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, compactifiée d'Alexandroff du plan. Pour toute partie F de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on notera $\hat{F} := F \cup \{0, \infty\}$. Soient F et G deux parties fermées et connexes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, disjointes. On suppose que $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sont encore connexes (autrement dit, F et G rencontrent tout voisinage de 0 et tout voisinage de ∞). Il existe alors

exactement deux composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus (F \cup G \cup \{0\})$ dont l'adhérence rencontre à la fois F et G. On les note $O(F,G)$ et $O(G,F)$, de façon à ce que l'ordre cyclique autour de 0 soit donné par

$$F < O(F,G) < G < O(G,F) < F.$$

L'appendice B précise l'existence des ensembles $O(F,G)$, $O(G,F)$, ainsi que la définition de l'ordre cyclique.

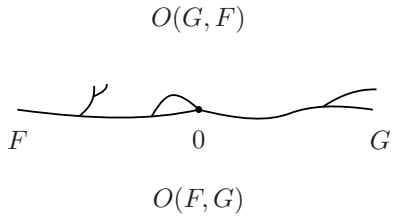

Fig. 6 – Ordre cyclique autour du point fixe

Définition 2.2. Soit U un ouvert du plan invariant ($h(U) = U$), x et y deux points du plan qui ne sont pas dans la même orbite de h. On dit que le couple (x,y) est *singulier via l'ouvert* U si pour tous V_x, V_y voisinages respectifs de x et y, il existe un entier positif n tel que

$$h^n(V_x) \cap V_y \cap U \neq \emptyset.$$

Notons qu'un couple (x,y) est singulier pour l'homéomorphisme h^{-1} si et seulement si (y,x) est singulier pour h.

Définition 2.3. Un couple (F,G) de parties de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est une *composante de Reeb* pour h si
- F et G sont deux parties connexes et fermées dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
- $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sont encore connexes ;
- F et G sont invariants par h (c'est-à-dire $h(F) = F$, $h(G) = G$) ;
- il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que tout couple $(x,y) \in F \times G$ est singulier *via* l'ouvert $O(F,G)$ pour l'homéomorphisme h^ε.

Les ensembles F et G seront appelés *bords* de la composante de Reeb. On dira que la dynamique de la composante de Reeb (F,G) *va de* F *vers* G si $F \times G$ est singulier pour h ($\varepsilon = 1$), et qu'elle *va de* G *vers* F dans le cas contraire ($\varepsilon = -1$).

Définition 2.4. Une composante de Reeb (F,G) est dite *minimale* si F et G sont chacun minimal, pour l'inclusion, dans la collection des parties K fermées dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, connexes, telles que $\hat{K}$ soit connexe. Autrement dit, (F,G) est minimale si pour toute composante de Reeb (F',G') telle que $F' \subset F$ et $G' \subset G$, on a $F' = F$ et $G' = G$.

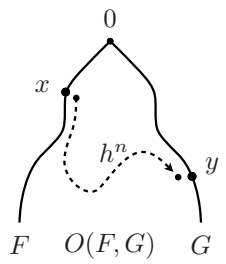

Fig. 7 – Une composante de Reeb

Théorème d'existence de composantes de Reeb

Théorème 1. *Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, fixant le point 0, tel que l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est différent de 1. Soit d le module de h.*

Alors il existe exactement d composantes de Reeb minimales pour h, que l'on note $(F_1, G_1), \ldots, (F_d, G_d)$. De plus, on peut choisir la numérotation de façon à avoir pour ordre cyclique

$$F_1 < O(F_1, G_1) < G_1 \leq F_2 < \cdots < G_d \leq F_1.$$

Il est clair que la numérotation des composantes de Reeb minimales qui vérifie la condition sur l'ordre cyclique est unique à permutation circulaire près.[2] Pour tout entier k, les bords G_k et F_{k+1} seront dit *adjacents* (les indices k et $k+1$ sont considérés modulo d ; en particulier, $G_0 = G_d$). Pour la fin de cette section, on adopte les hypothèses et notations du théorème 1 (notamment pour les énoncés des propositions 2.5 et 2.7 ci-dessous).

Dynamique dans les bords des composantes de Reeb La théorie de Brouwer décrit le comportement des orbites de h (voir par exemple la section 3.2 de [7], et plus particulièrement le corollaire 3.13 p37). Soit x un point du plan. Vue dans la sphère $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, la suite des itérés négatifs de x (son orbite passée) tend vers 0 ou l'infini : on note $\alpha(x) \in \{0, \infty\}$ le point limite. On définit de même le point $\omega(x)$, limite de la suite des itérés positifs du point x. Soit maintenant $\alpha, \omega \in \{0, \infty\}$; on notera

$$W_{\alpha \to \omega} := \{x \in \mathbb{R}^2, \alpha(x) = \alpha \text{ et } \omega(x) = \omega\}.$$

On définit ainsi quatre ensembles qui forment une partition du plan.

Proposition 2.5. *Soit F un bord d'une composante de Reeb (F, G) ou (G, F) minimale pour h. Alors :*
- *l'un des deux ensembles $F \cap W_{0\to\infty}$, $F \cap W_{\infty\to 0}$ est vide ;*
- *l'autre est un ouvert dense de F, et il est connexe ;*
- *les ensembles $F \cap W_{\infty\to\infty}$ et $F \cap W_{0\to 0}$ sont fermés.*

Définition 2.6. On dira que F est *de type dynamique* $0 \to \infty$ si il contient des points qui vont de 0 à l'infini, et *de type dynamique* $\infty \to 0$ dans le cas contraire.

Proposition 2.7. *Pour tout entier k, les deux bords adjacents G_k et F_{k+1} sont du même type dynamique.*

2.3 Définition dynamique de l'indice

Soit d un entier positif. On appellera *mot cyclique indexé de longueur ℓ* une application définie sur $\mathbb{Z}$ à valeur dans l'alphabet $\{\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$, que l'on notera $M = (m_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et telle que, pour tout i, $m_{i+\ell} = m_i$. Deux mots cycliques indexés qui sont égaux à décalage d'indice près définissent un *mot cyclique* : autrement dit, un mot cyclique $\mathbf{M}$ est une classe d'équivalence de mots cycliques indexés modulo la relation

$$(m_i)_{i\in\mathbb{Z}} \sim (m'_i)_{i\in\mathbb{Z}} \Leftrightarrow \exists i_0, \forall i, m_{i+i_0} = m'_i.$$

Un représentant M de la classe d'équivalence du mot $\mathbf{M}$ est une *indexation* de $\mathbf{M}$.

Définition 2.8. Notons $d = \text{Module}(h)$. On appelle *indice par quarts-de-tour de h* le mot cyclique $\mathbf{M}(h)$ sur l'alphabet $\{\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$, de longueur $2d$, dont une indexation $M = (m_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est définie de la manière suivante. Pour tout entier k,
- la lettre m_{2k} vaut
  - $\rightarrow$ si la dynamique de la composante (F_k, G_k) va de F_k vers G_k,
  - $\leftarrow$ si la dynamique va de G_k vers F_k.
- la lettre m_{2k+1} vaut
  - $\uparrow$ si G_k et F_{k+1} sont de type dynamique $\infty \to 0$,

[2] Ici encore, la notation $\leq$ est précisée dans l'appendice B.

– $\downarrow$ si G_k et F_{k+1} sont de type dynamique $0 \to \infty$.

Les résultats énoncés dans la section 2.2 impliquent clairement le théorème suivant.

Théorème 2. *L'indice par quarts-de-tour est un invariant de conjugaison. Plus précisément, soit g un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, fixant 0. Soit h vérifiant les hypothèses du théorème 1. Alors les mots cycliques $\mathbf{M}(h)$ et $\mathbf{M}(ghg^{-1})$ coïncident.*

2.4 Définition par les courbes géodésiques

Courbes Dans ce paragraphe, X désigne $\mathbb{R}^2$ ou bien $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Une *courbe* de X est une application continue de $[0,1]$ dans X. Une courbe γ est *fermée* si $\gamma(1) = \gamma(0)$. On pourra voir une courbe fermée comme une application continue de $\mathbb{R}$ dans X, obtenue en prolongeant γ par périodicité, ou bien comme une application du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans X. Une courbe est un *arc* si elle est injective (autrement dit, sans point double). Une courbe fermée est *simple* si le seul point double est $\gamma(0) = \gamma(1)$; on dira aussi que c'est une *courbe de Jordan*. Pour tous $t_1 < t_2$ dans $[0,1]$, on notera $[t_1 t_2]_\gamma$ (ou $[\gamma(t_1)\gamma(t_2)]_\gamma$) la sous-courbe de γ obtenue en restreignant γ à l'intervalle $[t_1 t_2]$ (et en reparamétrant pour obtenir une application définie sur $[0,1]$). Si γ est une courbe fermée, on la voit comme une application 1-périodique de $\mathbb{R}$, et ceci a encore un sens si $t_1 < t_2$ sont deux réels quelconque.

Soit γ une courbe de Jordan dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il existe alors un unique entier relatif n tel que l'application $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est homotope à l'application $c_n : \theta \mapsto \exp(2i\pi n\theta)$ (on a identifié $\mathbb{R}^2$ au plan complexe) ; l'entier n est appelé *degré* de γ (dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$).

On considère maintenant une courbe fermée γ. Rappelons qu'un ensemble E est *libre pour l'homéomorphisme h* si $h(E)$ est disjoint de E.

Définition 2.9. Une *décomposition* de γ est la donnée de réels $t_1 < t_2 < \cdots < t_l < t_{l+1} = t_1 + 1$ tels que chacune des sous-courbes $\gamma_i = [t_i t_{i+1}]_\gamma$, $i = 1, \ldots, l$ soit libre pour h. De manière équivalente, on pourra se donner une décomposition en écrivant γ comme la concaténation des sous-courbes γ_i, $\gamma = \gamma_1 * \cdots * \gamma_l$. L'entier l est appelé *longueur* de la décomposition. Les points $\gamma(t_i)$ en sont les *sommets*.

Définition 2.10. La *h-longueur* de γ est le minimum des longueurs des décompositions de γ. Une décomposition réalisant ce minimum est appelée décomposition *minimale*.

Module et courbes La proposition suivante fournit une deuxième définition possible du module. Contrairement à la première définition, celle-ci ne nécessite pas l'existence de domaines de translation. Elle permettra donc de généraliser la définition du module lorsque l'indice du point fixe est égal à 1 (voir section A.1 de l'appendice).

Proposition 2.11.

1. *Le module de h est égal au minimum des h-longueurs des courbes fermées γ de degré 1.*
2. *Il existe une courbe de Jordan qui réalise ce minimum.*

Définition 2.12. Une courbe γ réalisant ce minimum est appelée *courbe fermée géodésique*.

Indice et courbes L'indice par quarts-de-tour peut être défini en considérant une courbe fermée géodésique γ, et en regardant la dynamique des sommets d'une décomposition de γ. Commençons par quelques définitions combinatoires. On définit *l'alpha* et *l'oméga* d'une flèche verticale :

$$\alpha(\downarrow) = \omega(\uparrow) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha(\uparrow) = \omega(\downarrow) = \infty$$

(symboliquement, on voit 0 "en haut" et l'infini "en bas", la flèche $\uparrow$ représente une orbite allant de l'infini à 0). Prenons maintenant un mot (non cyclique) de trois lettres $M = (m_{-1} m_0 m_1)$, tel que m_{-1} et m_1 soient des flèches verticales, et m_0 soit une flèche horizontale (il y a huit mots possibles). On définit *l'alpha* et *l'oméga* du mot M de la façon suivante :

– si $m_0 = \rightarrow$, alors $\begin{cases} \alpha(M) = \alpha(m_{-1}) \\ \omega(M) = \omega(m_1) \end{cases}$;

– si $m_0 = \leftarrow$, alors $\begin{cases} \alpha(M) = \alpha(m_1) \\ \omega(M) = \omega(m_{-1}). \end{cases}$

Par exemple, $\alpha(\downarrow\rightarrow\uparrow) = \omega(\downarrow\rightarrow\uparrow) = 0$ (symboliquement, le mot $\downarrow\rightarrow\uparrow$ représente une orbite qui vient de 0 et redescend vers 0 après avoir fait un demi-tour sur sa gauche). Le théorème 3 caractérise le mot $\mathbf{M}(h)$ à partir d'une courbe de Jordan géodésique. Plus précisément, les flèches horizontales sont décrites en fonction des transitions entre les morceaux d'une décomposition minimale ; et les flèches verticales sont décrites en fonction du type d'orbite des sommets. Ceci est illustré par la figure 8.

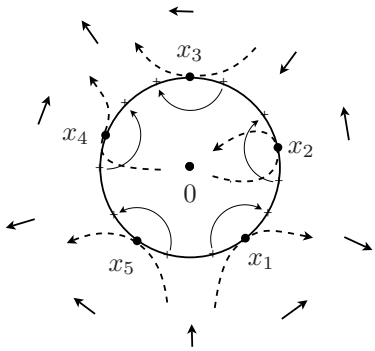

Fig. 8 – Mot et courbe géodésique

Théorème 3. *Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, fixant le point 0, tel que l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est différent de 1. Soit $\mathbf{M}(h)$ l'indice par quarts-de-tour de h. Soit γ une courbe de Jordan géodésique munie d'une décomposition minimale*

$$\gamma = \gamma_1 \star \cdots \star \gamma_d$$

et $x_1, \dots x_d$ les sommets de cette décomposition (de façon à ce que $\gamma_k = [x_k x_{k+1}]_\gamma$). Il existe alors une indexation telle que, pour tout entier k :

1. *la lettre m_{2k} est caractérisée par :*
   - $m_{2k} = \rightarrow \iff h(\gamma_{k-1}) \cap \gamma_k \neq \emptyset$,
   - $m_{2k} = \leftarrow \iff \gamma_{k-1} \cap h(\gamma_k) \neq \emptyset$;
2. - $\alpha(x_k) = \alpha(m_{2k-1}\ m_{2k}\ m_{2k+1})$,
   - $\omega(x_k) = \omega(m_{2k-1}\ m_{2k}\ m_{2k+1})$.

2.5 Lien avec l'indice de Poincaré-Lefschetz

On dira qu'un mot M sur l'alphabet $\{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}$, cyclique ou non, est *autorisé* si les lettres de M sont alternativement des flèches horizontales et des flèches verticales. On définit *l'indice partiel symbolique* des mots (non cycliques) autorisés à deux lettres par les formules suivantes :

$$\mathrm{IP}(\downarrow\rightarrow) = \mathrm{IP}(\rightarrow\uparrow) = \mathrm{IP}(\uparrow\leftarrow) = \mathrm{IP}(\leftarrow\downarrow) = +\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{IP}(\uparrow\rightarrow) = \mathrm{IP}(\rightarrow\downarrow) = \mathrm{IP}(\downarrow\leftarrow) = \mathrm{IP}(\leftarrow\uparrow) = -\frac{1}{4}.$$

Autrement dit, l'indice partiel symbolique est la variation angulaire algébrique, en nombre de tours, quand on passe continûment de la première flèche à la seconde (en suivant le chemin le plus court, c'est-à-dire en tournant, en valeur absolue, d'un quart de tour et non pas de trois quarts de tour).

On étend la définition à un mot non cyclique, autorisé, de ℓ lettres par la formule

$$\mathrm{IP}(m_1 \dots m_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell-1} \mathrm{IP}(m_i m_{i+1}),$$

et à un mot *cyclique*, autorisé, de ℓ lettres par la formule

$$\mathrm{IP}_c((m_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{IP}(m_i m_{i+1}) = \mathrm{IP}(m_1 \dots m_\ell m_1).$$

Enfin, *l'indice symbolique* d'un mot cyclique autorisé $\mathbf{M}$ à ℓ lettres est

$$\mathrm{Indice}(\mathbf{M}) = \mathrm{IP}_c(M) + 1.$$

Remarquons que les mots cycliques autorisés ont nécessairement un nombre pair de lettres, que cette formule ne dépend pas de l'indexation choisie, et que l'indice symbolique d'un mot cyclique autorisé est un entier. Le théorème suivant montre notamment que l'invariant $\mathbf{M}(h)$ est plus fin que l'indice de Poincaré-Lefschetz.

Théorème 4. *Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, fixant le point 0, tel que l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est différent de 1. Alors l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est égal à l'indice symbolique du mot cyclique $\mathbf{M}(h)$:*

$$\mathrm{Indice}(h, 0) = \mathrm{Indice}(\mathbf{M}(h)).$$

Ce résultat implique l'inégalité suivante :

$$\mathrm{Module}(h) \geq 2|\mathrm{Indice}(h, 0) - 1|.$$

Les exemples dessinés sur la figure 1 ont donc un module minimal parmi les homéomorphismes d'indice de Poincaré-Lefschetz donné. Cette inégalité sera un des lemmes importants dans la preuve

des résultats précédents ; il est cependant instructif de voir comment elle découle du théorème 4. Notons ℓ le nombre de lettres du mot cyclique $\mathbf{M}(h)$; ce nombre ℓ est le double du module de h. L'indice partiel symbolique du mot cyclique $\mathbf{M}(h)$ est une somme de ℓ termes qui valent chacun $\pm 1/4$, par conséquent sa valeur absolue est majorée par $\frac{\ell}{4}$:

$$\frac{\text{Module}(h)}{2} = \frac{\ell}{4} \geq \mid \text{IP}_c(\mathbf{M}(h)) \mid$$

L'inégalité provient maintenant des définitions de l'indice symbolique et de la formule du théorème 4.

On a aussi un résultat de réalisabilité.

Proposition 2.13. *Soit* $\mathbf{M}$ *un mot cyclique de longueur paire, constitué de lettres qui sont alternativement des flèches horizontales (*$\rightarrow$ *ou* $\leftarrow$*) et des flèches verticales (*$\uparrow$ *ou* $\downarrow$*). Supposons de plus que l'indice symbolique de ce mot soit différent de* 1*. Alors il existe un homéomorphisme du plan* h*, préservant l'orientation, fixant uniquement* 0*, d'indice différent de* 1*, tel que* $\mathbf{M}(h) = \mathbf{M}$*.*

Les homéomorphismes de la proposition fournissent donc une infinité d'exemples qui illustrent ce texte. La construction est donnée à la section 4.4, elle est indépendante du reste de l'article.

2.6 Conséquences dynamiques

De nombreuses propriétés dynamiques se lisent sur l'indice par quarts-de-tour. Elles ont été reléguées dans la partie IV.

2.7 Structure du texte

Le texte s'appuie de manière fondamentale sur les résultats de [8], qui contient la construction d'un invariant du même type dans le cadre plus simple des homéomorphismes du plan sans point fixe. En particulier, une partie du texte consiste à vérifier que les résultats obtenus dans [8] se transposent au cadre des homéomorphismes avec un point fixe. La principale nouveauté concerne la formule qui relie l'indice par quarts-de-tour à l'indice de Poincaré-Lefschetz. Pour l'obtenir, nous aurons besoin des techniques de construction de droites de Brouwer de P. Le Calvez et A. Sauzet ([12, 6]), utilisant les *décompositions en briques*, et de la notion d'indice partiel développée dans le texte [7] (sections 3.3 et 3.4 de [7]). Nous utiliserons également l'existence d'un relevé canonique, et le théorème D du texte [7] (existence de croissants et de pétales).

Dans la partie II, on démontre les résultats annoncés à partir d'un certain nombre de lemmes. Ces lemmes sont prouvés dans la partie III. La partie IV contient les énoncés et les preuves des liens entre l'indice par quarts-de-tour et la dynamique. L'appendice A porte sur la généralisation des résultats en indice 1.

Deuxième partie
Squelette de preuve

Dans cette partie, on prouve presque tous les résultat annoncés à la partie précédente, en admettant provisoirement un certain nombre de lemmes intermédiaires. Dans la partie suivante, on démontrera ces lemmes intermédiaires, y compris la proposition 2.11 qui caractérise le module comme la h-longueur d'une courbe géodésique. Pour toute cette partie, on se donne un homéomorphisme h du plan vérifiant les hypothèses de la section précédente : h préserve l'orientation, le point 0 est son unique point fixe, et son indice de Poincaré-Lefschetz, noté $\text{Indice}(h, 0)$, est différent de 1.

3 Énoncés des lemmes

Dans cette section, on énonce les résultats intermédiaires, tout en définissant les objets nécessaires. Voici les différentes étapes :

3.1 d'après le texte [7], l'homéomorphisme h admet un relevé canonique $\widetilde{h}$;
3.2 une courbe de Jordan géodésique pour h se relève alors en une droite géodésique pour $\widetilde{h}$, qui est essentiellement unique ;
3.3 d'après le texte [8], à une telle droite géodésique sont associés canoniquement une suite de composantes de Reeb pour $\widetilde{h}$, et un mot infini $\widetilde{\mathbf{M}}$ qui décrit grossièrement la dynamique de ces composantes ;
3.4 ces composantes de Reeb pour $\widetilde{h}$ se projettent sur des composantes de Reeb pour h.

3.1 Relevé canonique

Soit π le revêtement universel[3]

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\{0\} & \simeq \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \\ (\theta, r) & \longmapsto & \exp(-r+2i\pi\theta). & \end{array}$$

Un *relevé* de l'homéomorphisme h est un homéomorphisme $\widetilde{h}$ du plan $\mathbb{R}^2$ tel que $h\circ\pi = \pi\circ\widetilde{h}$. On note τ l'automorphisme de revêtement $(\theta, r)\mapsto(\theta+1, r)$. Comme h préserve l'orientation, il est isotope à l'identité parmi les homéomorphismes fixant 0 (théorème de Kneser), et par conséquent tout relevé de h commute avec la translation τ. D'autre part, $\widetilde{h}$ n'a aucun point fixe. Ces remarques permettent de définir *l'indice de $\widetilde{h}$ relativement à τ* : c'est l'indice de $\widetilde{h}$ le long de n'importe quelle courbe reliant un point à son image par τ (voir [7], p78). C'est un entier, on le note $\mathrm{Indice}_\tau(\widetilde{h})$.

Commençons par rappeler l'existence d'un relevé canonique. L'énoncé suivant est équivalent à la proposition 4.17 du texte [7] (p 80).

Proposition 3.1 (relevé canonique). *Il existe un unique relevé $\widetilde{h}$ de h par π tel que les indices vérifient la relation*

$$\mathrm{Indice}_\tau(\widetilde{h}) = \mathrm{Indice}(h, 0) - 1.$$

On a de plus :

1. *si $\widetilde{\gamma}$ est un arc libre[4] pour $\widetilde{h}$, alors $\gamma := \pi(\widetilde{\gamma})$ est un arc libre pour h ;*
2. *si $\mathcal{F}$ est une décomposition en briques pour h, alors $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^{-1}(\mathcal{F})$ est une décomposition en briques pour $\widetilde{h}$.*

Nous rappellerons en temps utile ce qu'est une décomposition en briques. Les résultats du texte [7] nous permettrons également de minorer le module de h.

Proposition 3.2 (minoration du module). *On a*

$$\mathrm{Module}(h) \geq 2 \mid \mathrm{Indice}(h, 0) - 1 \mid .$$

En particulier, si l'indice du point fixe est différent de 0, 1 *ou* 2, *alors le module est supérieur ou égal à* 4.

3.2 Géodésiques locales et globales

On considère un homéomorphisme de Brouwer H, c'est-à-dire un homéomorphisme du plan, sans point fixe, préservant l'orientation (sans hypothèse de commutation pour le moment). Dans ce cadre, on a défini dans le texte [8] une distance d_H, à valeurs entières (voir [8], section 3.1 ; cette distance compte le nombre minimal de domaines de translation, ou (de manière équivalente) le nombre minimal d'arcs libres, nécessaires pour connecter deux points donnés).

Définition 3.3. Soit I un intervalle de $\mathbb{Z}$, et d un entier positif. Une suite $(x_i)_{i\in I}$ de points du plan est une *suite géodésique locale d'ordre d* si pour tous indices i, j dans I,

$$|j-i| \leq d \Rightarrow d_H(x_i, x_j) = |j-i|.$$

[3]Le signe '$-$' devant le 'r' est une commodité, introduite pour des raisons essentiellement visuelles : le point 0 se retrouve "à l'infini en haut" du revêtement. Par ailleurs, la lettre "π" à l'intérieur de la formule n'a bien sûr rien à voir avec la lettre "π" désignant l'application de revêtement.

[4]Rappelons que "libre" signifie "disjoint de son image".

Rappelons qu'une suite de points du plan est une *suite géodésique* ("globale") si c'est une suite géodésique locale d'ordre d pour tout d. L'existence de composantes de Reeb, obtenue dans le texte [8], nous permettra de montrer que les géodésiques locales sont des géodésiques globales.

Proposition 3.4 (géodésiques locales). *Soit H un homéomorphisme de Brouwer, et $(x_i)_{i\in I}$ une suite géodésique locale d'ordre d, avec $d \geq 3$. Alors $(x_i)_{i\in I}$ est une suite géodésique.*

Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est *τ-équivariante*, de période $d \geq 1$, si on a $x_{k+d} = \tau(x_k)$ pour tout entier k. Rappelons que deux suites géodésiques $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(x'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *définissent les mêmes bouts* si il existe un entier p tel que pour tout entier k, $d_H(x_k, x'_k) \leq p$ (voir [8], section 7.1). Cette relation est une relation d'équivalence. La proposition précédente entraînera l'existence d'une unique classe d'équivalence de géodésiques τ-équivariantes (rappelons que la notion de *droite géodésique* est définie dans [8], et que la proposition 2.11 nous fournit une courbe de Jordan géodésique).

Corollaire 3.5. *Soit $\widetilde{h}$ le relevé canonique fourni par la proposition 3.1, et d le module de h. Soit γ une courbe de Jordan géodésique pour h. Soit Γ la droite topologique de $\mathbb{R}^2$ qui relève γ.*

1. *La droite Γ est une droite géodésique pour $\widetilde{h}$. Plus précisément, toute décomposition minimale de γ se relève en une décomposition minimale de Γ, et la suite des sommets de cette décomposition est une suite géodésique pour $\widetilde{h}$ qui est τ-équivariante, de période d.*
2. *Si deux suites géodésiques pour $\widetilde{h}$ sont τ-équivariantes de période d, alors elles définissent les mêmes bouts de $\widetilde{h}$.*

Définition 3.6. On notera $[\tau]$ l'unique classe d'équivalence de suites géodésiques définie par le corollaire.

Voici l'idée de la preuve du premier point du corollaire. Si l'indice du point fixe de h est différent de 0, 1 ou 2, alors le module d est minoré par 4 (proposition 3.2). D'après la proposition 2.11, le module est égal à la h-longueur de la courbe de Jordan géodésique γ. En relevant les d sommets d'une décomposition minimale de γ, on obtient une suite τ-équivariante. Cette suite est une géodésique locale d'ordre d. Puisque $d \geq 4$, la proposition précédente dit que cette suite est en fait une suite géodésique "globale".

Le cas où l'indice du point fixe vaut 0 ou 2 est plus délicat. Néanmoins, on peut se ramener au cas précédent en montrant que h admet un (unique) relevé h_2, par le revêtement à deux feuillets ramifié au-dessus de 0, qui est d'indice -1 ou 3.

3.3 Dynamique des homéomorphismes de Brouwer équivariants

On va maintenant utiliser les composantes de Reeb associées à une suite géodésique. Plus précisément, nous allons utiliser les résultats des sections 7 et 8 de [8] : à chaque suite géodésique infinie sont associés (canoniquement) une suite de composantes de Reeb et un mot infini, et ce mot infini contient des informations sur la dynamique dans les bords des composantes de Reeb et sur les orbites des points de la suite géodésique. De plus, ces objets ne dépendent que de la classe d'équivalence de la suite géodésique modulo la relation "définir les mêmes bouts". Lorsque l'homéomorphisme est équivariant, on obtient ainsi un mot périodique ; dans le théorème 4-bis, on reliera l'indice partiel du mot cyclique induit à l'indice de $\widetilde{h}$ par rapport à la translation τ.

Décrivons maintenant tout ceci en détail. On note toujours $\widetilde{h}$ le relevé canonique, d le module. On se donne aussi une suite $(\widetilde{x}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ géodésique pour $\widetilde{h}$ qui est τ-équivariante, de période d. Cette suite est la suite des sommets d'une droite géodésique Γ, qui est invariante par τ (corollaire 3.5).

Composantes de Reeb La définition des composantes de Reeb dans le cadre des homéomorphismes de Brouwer se trouve à la section 4.2 de [8]. On note $(\widetilde{F}_k, \widetilde{G}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite de composantes de Reeb associée à la suite $(\widetilde{x}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ([8], section 7). On a notamment

$$\widetilde{F}_k \cap \Gamma \subset [\widetilde{x}_{k-1}\widetilde{x}_k]_\Gamma \text{ et } \widetilde{G}_k \cap \Gamma \subset [\widetilde{x}_k\widetilde{x}_{k+1}]_\Gamma.$$

Comme la suite $(\widetilde{x}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est équivariante, par unicité des composantes de Reeb (théorème 2 de [8]), la suite des composantes est elle-même équivariante : on a $(\widetilde{F}_{k+d}, \widetilde{G}_{k+d}) = (\tau(\widetilde{F}_k), \tau(\widetilde{G}_k))$ pour tout k. Rappelons aussi que chacun des bords $\widetilde{F}_k$ et $\widetilde{G}_k$ est invariant par $\widetilde{h}$ ([8], lemme 7.10).

Mot cyclique On note $\widetilde{\mathbf{M}}([\tau])$ le mot infini, sur l'alphabet $\{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow, \uparrow\}$, associé à $[\tau]$ ([8], théorème 3 et définition 8.2). Comme $\widetilde{h}$ commute avec la translation τ, ce mot infini est périodique de période $2d$. On note $\mathbf{M}([\tau])$ le mot cyclique à $2d$ lettres induit par ce mot périodique.

Formule d'indice On pourra alors relier l'indice du relevé canonique à l'indice symbolique.

Théorème (4-bis). *L'indice de $\widetilde{h}$ par rapport à τ est égal à l'indice partiel symbolique du mot cyclique $\boldsymbol{M}([\tau])$:*

$$\mathrm{Indice}_\tau(\widetilde{h}) = \mathrm{IP}_c(\boldsymbol{M}([\tau])) = \mathrm{IP}(m_1 \dots m_{2d} m_1).$$

3.4 Compatibilité des composantes de Reeb

Dans le texte [8], on construisait une compactification de chaque bord de composante de Reeb par l'ajout de deux points à l'infini, notés N et S (on pense à N comme étant l'infini "en haut", et S est l'infini "en bas"). Le théorème 3 de [8] (section 8.1) dit que la lettre m_{2k+1} vaut $\downarrow$ si et seulement si le bord $\widetilde{F}_k$ est de type dynamique Nord-Sud, c'est-à-dire si il existe un ouvert dense de points de $\widetilde{F}_k$ dont l'orbite va de N à S.

On peut étendre continûment l'application de revêtement π en posant $\hat{\pi}(N) = 0$ et $\hat{\pi}(S) = \infty$, où ∞ désigne le point à l'infini du compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^2$. La proposition suivante établit une correspondance entre les composantes de Reeb de h et celles de son relevé canonique $\widetilde{h}$. On note $O(\widetilde{F}, \widetilde{G})$ l'unique composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus (\widetilde{F} \cup \widetilde{G})$ dont l'adhérence rencontre à la fois $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ (voir l'appendice B ; rappelons que $O(F, G)$ est défini de façon analogue à la section 2.2).

Proposition 3.7.

1. *Si un couple $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$ est une composante de Reeb minimale pour le relevé canonique $\widetilde{h}$, associée à $[\tau]$, alors l'application π induit un homéomorphisme de $\widetilde{F} \cup O(\widetilde{F}, \widetilde{G}) \cup \widetilde{G} \cup \{N, S\}$ sur son image $F \cup O(F, G) \cup G \cup \{0, \infty\}$, et le couple $(F, G) = (\pi(\widetilde{F}), \pi(\widetilde{G}))$ est une composante de Reeb minimale pour h.*
2. *Réciproquement, si (F, G) est une composante de Reeb minimale pour h, alors il existe un couple $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$ qui est une composante de Reeb minimale pour $\widetilde{h}$, associée à $[\tau]$, et tel que $\pi(\widetilde{F}) = F$ et $\pi(\widetilde{G}) = G$.*

Dans la situation décrite par la proposition, on dira que (F, G) est la *projetée* de la composante $(\widetilde{F}, \tilde{G})$, et que $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$ est une composante *relevée* de (F, G).

4 Preuve des théorèmes

À partir des lemmes de la section précédente, nous démontrons tous les résultats énoncés dans la section 2 (mise à part la proposition 2.11, dont la preuve fait l'objet de la section suivante). Nous reprenons les notations de la section précédente.

4.1 Existence et unicité des composantes de Reeb pour h (théorème 1)

Notons $F_k := \pi(\widetilde{F}_k)$, $G_k := \pi(\widetilde{G}_k)$ les projetés des bords des composantes de Reeb pour $\widetilde{h}$ associées à $[\tau]$. D'après la proposition 3.7, les composantes de Reeb minimales pour h sont exactement les couples $(F_1, G_1), \dots, (F_d, G_d)$. La propriété d'ordre cyclique vient de l'ordre des composantes $(\widetilde{F}_i, \widetilde{G}_i)$ ([8], lemme 7.10). Le théorème 1 en découle.

4.2 Dynamique dans les bords des composantes (proposition 2.5 et 2.7)

Soit (F, G) une composante de Reeb minimale pour h, et $(\widetilde{F}, \tilde{G})$ une composante relevée. D'après la proposition 3.7, l'application $\hat{\pi} : \widetilde{F} \cup \{N, S\} \rightarrow \hat{F} = F \cup \{0, \infty\}$ est un homéomorphisme qui envoie N sur 0 et S sur ∞. La proposition 2.5, concernant la dynamique dans le bord F, est alors une simple traduction du résultat sur la dynamique dans $\widetilde{F}$ (proposition 7.17 de [8]).

D'après le théorème 3 de [8], deux bords adjacents $\widetilde{G}_k$ et $\widetilde{F}_{k+1}$ sont du même type dynamique pour $\widetilde{h}$. On en déduit immédiatement la proposition 2.7 : deux bords adjacents G_k et F_{k+1} sont du même type dynamique pour h.

L'indice par quarts-de-tour, défini à la section 2.3 à partir de la dynamique dans les composantes de Reeb minimales de h, est alors clairement un invariant de conjugaison, ce qui est l'énoncé du théorème 2.

4.3 Caractérisation de l'indice en termes de courbes (théorème 3)

Là encore, il s'agit principalement de transposer à h les liens entre composantes de Reeb et droite géodésique établis pour $\widetilde{h}$ dans le texte [8], et notamment de montrer que le mot cyclique $\mathbf{M}([\tau])$, défini en 3.3 à partir du texte [8], coïncide avec le mot cyclique $\mathbf{M}(h)$ défini en 2.3. On considère une courbe de Jordan γ, géodésique pour h, munie d'une décomposition minimale

$$\gamma = \gamma_1 \star \cdots \star \gamma_d$$

et $x_1, \dots x_d$ les sommets de cette décomposition (de façon à ce que $\gamma_k = [x_k x_{k+1}]_\gamma$). Soit Γ la droite topologique qui relève γ ; la décomposition de γ se relève en une décomposition

$$\Gamma = \cdots \star \widetilde{\gamma}_1 \star \cdots \star \widetilde{\gamma}_d \star \cdots$$

qui est équivariante pour $\tau : \tau(\widetilde{\gamma}_k) = \widetilde{\gamma}_{k+d}$. De même, on peut relever la suite cyclique des sommets de γ en une suite $(\widetilde{x}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de sommets de Γ, de manière compatible. On note encore $(\widetilde{F}_k, \widetilde{G}_k)$ la composante de Reeb minimale associée au sommet $\widetilde{x}_k$, et (F_k, G_k) sa projection par π.

Affirmation 4.1. *Les six propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\widetilde{h}(\widetilde{\gamma}_{k-1}) \cap \widetilde{\gamma}_k \neq \emptyset$ *;*
2. *dans le mot infini* $\widetilde{\boldsymbol{M}}([\tau])$*, la flèche correspondant au sommet* $\widetilde{x}_k$ *vaut* $\rightarrow$ *;*
3. *la dynamique de* $\widetilde{h}$ *va de* $\widetilde{F}_k$ *vers* $\widetilde{G}_k$ *;*
4. *la dynamique de* h *va de* F_k *vers* G_k *;*
5. *dans le mot cyclique* $\mathbf{M}(h)$ *, la flèche correspondant au sommet* x_k *vaut* $\rightarrow$ *;*
6. $h(\gamma_{k-1}) \cap \gamma_k \neq \emptyset$.

Preuve de l'affirmation —

- L'équivalence entre les propriétés 1 et 2 découle de la définition des flèches horizontales dans le texte [8] (définition 3.11).
- Le théorème 1-bis de [8] donne l'équivalence entre les propriétés 2 et 3.
- L'équivalence entre les propriétés 3 et 4 vient de la compatibilité des composantes de Reeb de $\widetilde{h}$ avec celles de h (proposition 3.7).
- La définition 2.8 des flèches horizontales fournit l'équivalence entre les propriétés 4 et 5.

Il reste à montrer l'équivalence entre les propriétés 1 à 5 d'une part, et la propriété 6 d'autre part. Il est clair que 1 implique 6. Supposons maintenant que les propriétés 1 à 5 ne sont pas vérifiées ; notamment, dans le mot infini $\widetilde{\mathbf{M}}([\tau])$, la flèche correspondant au sommet $\widetilde{x}_k$ vaut $\leftarrow$. Par définition des flèches horizontales de $\widetilde{h}$, ceci entraîne $\widetilde{\gamma}_{k-1} \cap \widetilde{h}(\widetilde{\gamma}_k) \neq \emptyset$, et par conséquent $\gamma_{k-1} \cap h(\gamma_k) \neq \emptyset$. Si la propriété 6 était vérifiée, en épaississant un peu les arcs γ_{k-1} et γ_k, on obtiendrait une chaîne périodique de deux disques, et l'indice du point fixe de h serait égal à 1 d'après le lemme de Franks (voir par exemple [7], lemme 3.18 p39).[5] $\square$

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 3. L'équivalence entre les points 5 et 6 de l'affirmation nous donne le premier point du théorème. Pour obtenir le deuxième point,

[5] On peut montrer, alternativement, que le module de h est alors égal à 2. En effet, puisque d'après la propriété 6 $h(\gamma_{k-1})$ rencontre $\gamma_k \subset \gamma$, $\widetilde{h}(\widetilde{\gamma}_{k-1})$ doit rencontrer Γ. Comme Γ est géodésique, la rencontre ne peut se faire que sur $\widetilde{\gamma}_{k-2}$ ou $\widetilde{\gamma}_k$. Comme (par hypothèse) la propriété 1 n'est pas vérifiée, $\widetilde{h}(\widetilde{\gamma}_{k-1})$ rencontre en fait $\widetilde{\gamma}_{k-2}$, et aucun autre arc de la décomposition de Γ. Puisque $h(\gamma_{k-1})$ rencontre γ_k, on en déduit que l'arc $\widetilde{\gamma}_{k-2}$ est un relevé de l'arc γ_k, qui était déjà relevé par $\widetilde{\gamma}_k$; par suite le module vaut 2. Cette remarque, qui évite le recours au lemme de Franks pour h, sera exploitée dans l'appendice A pour les points fixes d'indice 1.

on applique le théorème 3 de [8] (section 8.1), qui établit une correspondance entre le type dynamique des bords de la composante de Reeb $(\widetilde{F}_k, \widetilde{G}_k)$ d'une part, et la dynamique du sommet $\widetilde{x}_k$. L'application de revêtement π se restreint en un homéomorphisme entre $\widetilde{F} \cup O(\widetilde{F}, \widetilde{G}) \cup \widetilde{G} \cup \{N, S\}$ et son image. Comme le point $\widetilde{x}_k$ est dans l'ouvert $O(\widetilde{F}, \widetilde{G})$, on a pour l'homéomorphisme h une correspondance parallèle entre le type dynamique des bords de la composante de Reeb (F_k, G_k) et la dynamique du sommet x_k. Ceci prouve le deuxième point.

Lien avec l'indice de Poincaré-Lefschetz (théorème 4)

Pour montrer le théorème 4, qui relie l'indice par quarts-de-tour à l'indice de Poincaré-Lefschetz, on applique successivement :

- la formule qui relie l'indice de Poincaré-Lefschetz de h à l'indice du relevé canonique $\widetilde{h}$ par rapport à τ (proposition 3.1) :

$$\mathrm{Indice}(h, 0) = \mathrm{Indice}_\tau(\widetilde{h}) + 1;$$

- le théorème 4-bis qui relie l'indice de $\widetilde{h}$ à l'indice partiel symbolique du mot $\mathbf{M}([\tau])$ (qui est égal à $\mathbf{M}(h)$ d'après le point précédent) :

$$\mathrm{Indice}_\tau(\widetilde{h}) = \mathrm{IP}_c(\mathbf{M}(h));$$

- le lien qui existe, par définition, entre l'indice partiel symbolique et l'indice symbolique :

$$\mathrm{Indice}(\mathbf{M}) = \mathrm{IP}_c(\mathbf{M}) + 1.$$

On en déduit la formule attendue,

$$\mathrm{Indice}(h, 0) = \mathrm{Indice}(\mathbf{M}(h)).$$

4.4 Réalisabilité

On explique ici comment construire une famille dénombrable d'exemples illustrant la théorie, qui réalisent tous les indices par quarts-de-tour possibles.

Preuve de la proposition 2.13 — On commence par se donner des dynamiques modèles sur des secteurs du plan. Plus précisément, on considère l'ensemble des mots autorisés de longueur trois, dont les première et dernière lettres sont des flèches verticales (la flèche centrale étant donc horizontale). On va associer à chacun de ces huit mots un homéomorphisme défini sur un secteur du plan issu de 0, et fixant uniquement 0. La dynamique associée au mot (↑→↓) est dessinée sur la figure 9 (à gauche). On associe au mot (↓←↑) la dynamique inverse de la précédente ; ces deux modèles sont appelés *secteurs hyperboliques*. De même, on associe aux deux mots (↑←↓) et (↓→↑) les deux *secteurs elliptiques* correspondant au dessin de droite de la figure 9 et à son inverse. [6] Il nous reste à construire les quatre modèles de secteurs *indifférents*, ce qui est plus

FIG. 9 – Modèles hyperbolique et elliptique

[6] Si on veut être plus précis, le modèle hyperbolique est donné par la restriction S_h de l'application $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ au quart-de-plan fermé $\{x \geq 0, y \leq 0\}$; le modèle de secteur elliptique s'obtient en échangeant les rôles de 0 et de ∞ : on prend la restriction S_e de la même application $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ au quart-de-plan fermé $\{x \geq 0, y \leq 0\} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$.

délicat. On peut reprendre un exemple construit par M. Brown, E. Slaminka et W. Transue ([3], [2]). On commence par définir une dynamique g sur la bande $[-1,1]\times\mathbb{R}$, en composant deux homéomorphismes ϕ et ψ (figure 10). Pour cela, on considère l'ensemble F constitué des deux droites bordant la bande, $\{-1\}\times\mathbb{R}$ et $\{1\}\times\mathbb{R}$, ainsi que des points d'abscisse 0 et d'ordonnée entière. L'homéomorphisme ϕ translate le point (θ,r) verticalement d'une hauteur $2\mid\theta\mid-1$ (on a donc $\phi(F)=F$). L'homéomorphisme ψ translate le point (θ,r) horizontalement, vers la droite, d'une distance égale à la moitié de la distance euclidienne de (θ,r) à l'ensemble F (il fixe donc chaque point de l'ensemble F). On peut ensuite identifier un secteur du plan à la bande $[-1,1]\times\mathbb{R}$

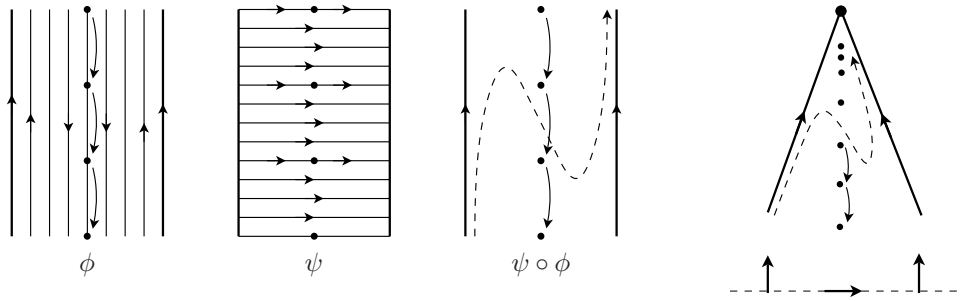

Fig. 10 – Modèle indifférent

par les coordonnées polaires (par exemple $(\theta,r)\mapsto\exp(-r+i\pi\theta/4)$, ce qui revient à ajouter à la bande le point à l'infini en haut), et transporter ainsi la dynamique g sur un secteur du plan. Ceci nous fournit le secteur modèle associé au mot $(\uparrow\rightarrow\uparrow)$. L'inverse donne le mot $(\downarrow\leftarrow\downarrow)$, et les deux derniers modèles s'obtiennent en conjugant ces deux-ci par une symétrie orthogonale.

Chaque bord de secteur-modèle est une demi-droite issue de 0, sur laquelle la dynamique est conjuguée à l'homothétie de rapport 2 ou à son inverse, ce qui nous permet de recoller continûment les différents types de secteurs, pour peu que la dynamique sur les bords à recoller se fasse dans le même sens.

Étant donné un mot cyclique $\mathbf{M}$ autorisé de longueur $2d$, on écrit la liste des d sous-mots de longueur trois dont la première lettre est une flèche verticale, et on recolle dans l'ordre les secteurs modèles associés à ces sous-mots, de façon à obtenir un homéomorphisme h. On peut alors faire deux remarques. D'une part, une courbe qui relie les deux bords d'un secteur modèle en le traversant n'est jamais libre. D'autre part, si S est le secteur modèle associé au mot $(m_1m_2m_3)$, si x est un point du bord gauche de S (correspondant à la flèche m_1) et y un point du bord droit (correspondant à la flèche m_3), alors le couple (x,y) est singulier pour h si $m_2=\rightarrow$, et il est singulier pour h^{-1} si $m_2=\leftarrow$. Avec ces deux remarques, il n'est pas difficile de vérifier que le mot $\mathbf{M}(h)$ est égal à $\mathbf{M}$. $\square$

Troisième partie

Preuves des lemmes

Cette partie contient notamment les preuves des énoncés de la partie précédente. On commence par caractériser le module de h comme le minimum des h-longueurs des courbes de Jordan qui entourent le point fixe (proposition 2.11, section 5). Ceci permet de minorer le module en fonction de l'indice du point fixe (proposition 3.2, section 6). On en déduit l'existence d'une suite géodésique équivariante pour le relevé canonique $\widetilde{h}$, qui est essentiellement unique (corollaire 3.5, section 7). Par ailleurs, nous montrons à la section 8 que chaque composante de Reeb contient une droite de Brouwer qui sépare les deux bords ; ceci permet de démontrer la formule d'indice pour le relevé $\widetilde{h}$, à l'aide de la notion d'indice partiel (théorème 4-bis, section 9). Nous terminons cette partie avec la proposition 3.7, qui met en correspondance les composantes de Reeb de $\widetilde{h}$ et celles de h (section 10).

5 Module et courbes

On se donne un homéomorphisme h du plan, préservant l'orientation, fixant le point 0, sans autre point fixe, et tel que l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est différent de 1.

Preuve de la proposition 2.11 —

Le module comme longueur minimale des courbes Il s'agit d'abord de montrer que le module, défini en termes de domaines de translation (définition 2.1), est égal au minimum des h-longueurs des courbes de degré 1. Cette égalité provient des deux remarques suivantes :

- toute courbe libre est incluse dans un domaine de translation ;
- si x et y appartiennent à un même domaine de translation, alors il existe un arc libre allant de x à y (sauf si x et y sont dans la même orbite de h).

Les détails sont les mêmes que pour la preuve du corollaire 3.5 du texte [8].

Courbe de Jordan géodésique Passons maintenant à la preuve de la seconde partie de la proposition 2.11. Il est classique de construire une courbe de Jordan à partir d'une courbe contenant des points doubles en "effaçant les boucles" ; il faut juste faire attention à obtenir une courbe de degré 1, et surtout à conserver le caractère géodésique. On part d'une courbe géodésique γ, que l'on va modifier pour obtenir une courbe de Jordan géodésique. On voit γ comme une application du cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Remarquons que toute courbe assez proche d'une courbe libre est encore libre ; par conséquent, toute courbe assez voisine de γ a une h-longueur inférieure ou égale à celle de γ. D'autre part, comme γ est une courbe géodésique, elle est déjà de h-longueur minimale : finalement, toute courbe assez voisine de γ a une h-longueur égale à celle de γ. Quitte à perturber γ arbitrairement peu, on peut supposer que γ n'a qu'un nombre fini de points multiples (tout en restant une courbe géodésique d'après ce qui précède). Disons qu'un intervalle fermé non trivial $[tt']$ du cercle est une *boucle de* γ (de degré 0) si $\gamma(t) = \gamma(t')$, et si la courbe $[tt']_\gamma$ est une courbe fermée de degré 0 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Une boucle $[tt']$ est *maximale* si il n'existe pas d'intervalle contenant strictement $[tt']$ qui soit encore une boucle de γ. Puisque γ n'a qu'un nombre fini de points multiples, elle n'a qu'un nombre fini de boucles, et toute boucle est incluse dans une boucle maximale (non unique).

Considérons une famille $\mathcal{F}$ d'intervalles fermés du cercle, deux à deux disjoints, qui sont des boucles maximales de γ. On peut alors définir

- un espace $\overline{\mathbb{S}^1}$, homéomorphe au cercle, obtenu en identifiant chaque intervalle $[t_i t_i']$ de $\mathcal{F}$ à un point (on note $p : \mathbb{S}^1 \to \overline{\mathbb{S}^1}$ l'application quotient) ;
- une application $\gamma_{\mathcal{F}} : \overline{\mathbb{S}^1} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en posant

$$\begin{cases} \gamma_{\mathcal{F}} \circ p([t_i t_i']) &= \gamma(t_i) = \gamma(t_i') & \text{pour chaque intervalle } [t_i t_i'] \in \mathcal{F} \ ; \\ \gamma_{\mathcal{F}} \circ p(t) &= \gamma(t) & \text{en dehors de } \cup \{I \mid I \in \mathcal{F}\}. \end{cases}$$

Cette application est encore une courbe de degré 1 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Puisque γ n'a qu'un nombre fini de boucles, on peut choisir une telle famille $\mathcal{F}$ qui est maximale, autrement dit, telle qu'il n'existe aucun intervalle J, qui est une boucle maximale, et qui est disjoint de tous les intervalles de $\mathcal{F}$. On voit facilement que dans ce cas, $\gamma_{\mathcal{F}}$ est une courbe qui n'admet aucune boucle. On peut alors utiliser le lemme suivant. [7]

Lemme 5.2. *Si α est une courbe fermée de degré 1 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et si elle n'a pas de boucle, alors c'est une courbe de Jordan.*

La définition de $\gamma_{\mathcal{F}}$ entraîne que pour tout intervalle $[ss']$ du cercle $\mathbb{S}^1$, $\gamma_{\mathcal{F}} \circ p([ss'])$ est inclus dans $\gamma([ss'])$. En particulier, si $\gamma([ss'])$ est libre, alors $\gamma_{\mathcal{F}} \circ p([ss'])$ est encore libre, ce qui signifie

[7] Voici un schéma de preuve (les détails sont laissés au lecteur). On considère les *boucles de degré* p de α (avec une définition évidente) : il s'agit de montrer qu'il n'y en a pas. Par hypothèse α n'a pas de boucle de degré 0. Elle n'a pas non plus de boucle α' de degré 1, sans quoi on aurait $\alpha = \alpha' * \alpha''$ avec α'' boucle de degré 0. Considérons alors une boucle β de degré $p > 1$, qui est minimale : c'est une courbe de Jordan. On conclut avec le lemme classique :

Lemme 5.1. *Il n'existe pas de courbe de Jordan β de degré $p > 1$.*

que la h-longueur de $\gamma_{\mathcal{F}}$ est inférieure ou égale à celle de γ. Comme γ était déjà géodésique, $\gamma_{\mathcal{F}}$ est aussi une courbe géodésique. On a ainsi obtenu une courbe de Jordan géodésique. $\square$

6 Minoration du module

Dans cette section, on démontre la proposition 3.2, qui permet de minorer le module de h en fonction de l'indice du point fixe : plus l'indice est différent de 1, plus le module doit être grand. Pour cela, *nous appliquons une bonne partie des résultats du texte [7].*

6.1 Décompositions en briques

Généralités

Nous commençons par rappeler brièvement la définition des décompositions en briques (voir les travaux de P. Le Calvez et A. Sauzet ([12, 6]) ou [7] pour des motivations et des définitions plus détaillées). Soit H un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, et n'ayant qu'un nombre fini de points fixes (en pratique, dans ce texte, H aura 0 ou 1 point fixe). On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Fixe}(H)$, où $\mathrm{Fixe}(H)$ désigne l'ensemble des points fixes de H. Soit $\mathcal{F}$ un graphe triadique plongé dans U. L'adhérence (dans U) d'une composante connexe du complémentaire de $\mathcal{F}$ est appelé *brique*. D'un point de vue topologique, on suppose que chaque brique est compacte. D'un point de vue dynamique, on demande que chaque brique soit libre par H, mais que la réunion de deux briques adjacentes ne soit pas libre. Si toutes ces hypothèses sont vérifiées, l'ensemble $\mathcal{F}$ est appelé *décomposition en briques* pour H.

Décomposition géodésique

On suppose maintenant que h est un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, dont 0 est l'unique point fixe, avec un indice différent de 1. Soit $\mathcal{F}$ une décomposition en briques pour h. Le *module* de $\mathcal{F}$ est le nombre minimal de briques dont la réunion sépare 0 et ∞ dans la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ (autrement dit, dont la réunion contient une courbe fermée de degré 1 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$).

Définition 6.1. Une décomposition en brique $\mathcal{F}$ pour h est *géodésique* si son module est égal au module de h. Elle est *compatible* avec une courbe géodésique fermée γ si l'intersection $\gamma \cap \mathcal{F}$ coïncide avec l'ensemble des sommets d'une décomposition de γ.

Lemme 6.2. *Pour toute courbe de Jordan géodésique γ, il existe une décomposition en briques, géodésique, compatible avec γ.*

Preuve du lemme 6.2 — Notons d le module de h. Commençons par remarquer que si on a une décomposition en briques de module d', comme chaque brique est libre, il existe une courbe de Jordan de h-longueur égale à d'. Ceci prouve que $d' \geq d$. Il reste donc à trouver une décomposition dont le module satisfasse l'inégalité inverse. Soit maintenant γ une courbe de Jordan géodésique. En considérant une décomposition de γ, et en épaississant γ en un anneau, on trouve un graphe triadique $\mathcal{F}$ tel que (voir figure 11)

- le complémentaire de $\mathcal{F}$ a exactement $d+2$ composantes connexes ;
- la première contient 0, la deuxième est non bornée ;
- les adhérences des d composantes restantes, que l'on note $B_1, \ldots, B_d$ sont libres, et leur réunion contient γ (voir figure 11).

D'après le corollaire 3.63 de [7], il existe une décomposition en briques $\mathcal{F}'$ qui "étend" $\mathcal{F}$, au sens où chaque ensemble $B_1, \ldots B_d$ est inclus dans une brique de $\mathcal{F}'$. Il est clair que le module d' de $\mathcal{F}'$ vérifie $d' \leq d$, ce que l'on voulait. $\square$

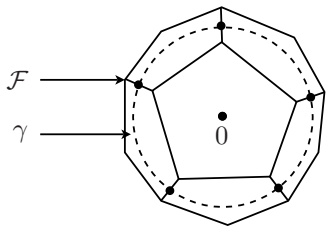

FIG. 11 – Épaississement d'une courbe de Jordan géodésique

6.2 Preuve de la minoration

On considère une décomposition en briques $\mathcal{F}$ qui est géodésique pour h. Supposons d'abord que l'indice du point fixe soit plus petit que 1, on écrit

$$\text{Indice}(h, 0) = 1 - p < 1.$$

On identifie $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ à la sphère $\mathbb{S}^2$, en envoyant les points 0 et ∞ respectivement sur deux points N et S de la sphère. On peut alors appliquer le résultat principal du texte [7] (théorème F, p80) : il existe $2p$ croissants attractifs et répulsifs simpliciaux, d'intérieurs deux à deux disjoints. La seule chose qui nous importe ici est que toute famille de briques de $\mathcal{F}$ dont la réunion sépare 0 et ∞ doit rencontrer chaque croissant ; par conséquent, une telle famille doit contenir au moins $2p$ briques. Ceci prouve que le module de la décomposition $\mathcal{F}$ est supérieur ou égal à $2p$. Comme la décomposition est géodésique, on en déduit la même minoration pour le module de h. Dans le cas où l'indice est $1 + p > 1$, on inverse les rôles de 0 et ∞ (ou, ce qui revient au même, on conjugue h par l'application $z \mapsto -\frac{1}{z}$). D'après le théorème de Lefschetz, l'indice du point ∞ vaut alors $1 - p < 1$, ce qui nous ramène au cas précédent.

7 Géodésiques

Dans cette section, on démontre qu'une géodésique locale est une géodésique globale (proposition 3.4). On en déduit l'existence d'une suite géodésique pour le relevé canonique $\widetilde{h}$, qui est τ-équivariante (corollaire 3.5). *Cette section utilise de manière essentielle les résultats de l'article [8].*

Remarquons que la proposition 3.4 est fausse pour $d = 2$: la figure 12 représente un homéomorphisme de Brouwer ayant une géodésique locale d'ordre 2 qui n'est pas une géodésique globale.

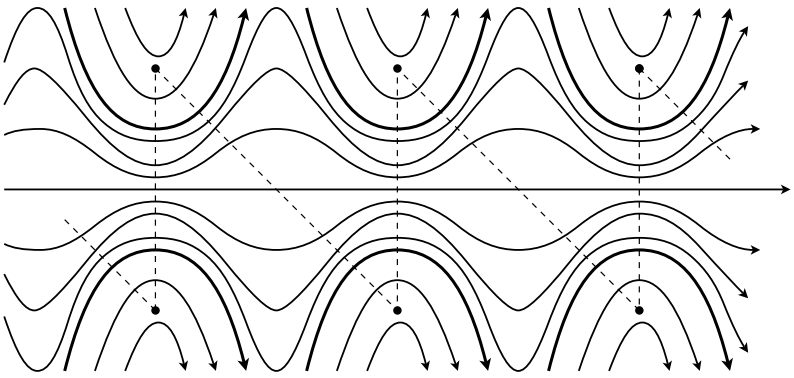

FIG. 12 – Une géodésique locale d'ordre 2 qui n'est pas une géodésique globale

7.1 Géodésiques locales et globales

On se donne un homéomorphisme de Brouwer H. On commence par une remarque élémentaire.

Remarque 7.1. Considérons $(x_i)_{i\in I}$ une suite géodésique locale d'ordre 1 (autrement dit, deux points consécutifs sont à H-distance 0 ou 1). Soit $d \geq 3$. Pour que cette suite soit une suite géodésique locale d'ordre d, il suffit qu'on ait, pour tout entier i, $d_H(x_i, x_{i+d}) = d$ (autrement dit, il suffit que l'implication de la définition 3.3 soit vérifiée quand $|i-j| = d$). Cette remarque provient simplement de l'inégalité triangulaire.

La preuve de la proposition 3.4 repose sur l'existence des composantes de Reeb (théorème 2 de [8]), et sur le lemme suivant.

Lemme 7.2 ("déviation des géodésiques"). *Soit (x, y) un couple de points singulier pour H ou pour H^{-1}. On considère deux autres points x' et y'.*
Si $\begin{cases} d_H(x', x) \leq 1 \\ d_H(y, y') \leq 1 \end{cases}$ *alors* $d_H(x', y') \leq 2$.

Preuve du lemme — L'hypothèse $d_H(x', x) \leq 1$ signifie qu'il existe un domaine de translation O_x contenant x et x'. De même, si $d_H(y, y') \leq 1$, il existe un domaine de translation O_y contenant y et y'. Puisque le couple (x, y) est singulier pour H ou H^{-1}, il existe un point z de O_x qui a un itéré $H^n(z)$ dans O_y. Le résultat découle alors de l'inégalité triangulaire et de l'invariance de d_H (lemme 3.7 de [8]) :

$$\begin{array}{rcl} d_H(x', y') & \leq & d_H(x', z) + d_H(z, y') \\ & \leq & d_H(x', z) + d_H(H^n(z), y') \\ & \leq & 1 + 1 = 2. \end{array}$$

□

Avant d'entamer la démonstration de la proposition, rappelons brièvement le contenu du théorème 2 de [8]. On considère une suite géodésique $(x_0, \ldots x_d)$, $d \geq 3$. Alors il existe $d-1$ composantes de Reeb (canoniques) $(F_1, G_1,) \ldots, (F_{d-1}, G_{d-1})$ pour le couple (x_0, x_d). En particulier, chaque produit $F_i \times G_i$ est inclus dans l'ensemble singulier de H ou de H^{-1}. De plus, sauf éventuellement pour $i = 1$, le bord F_i sépare les points $x_j, j < i$ des points $x_j, j \geq i$, et $d_H(x_{i-1}, F_i) = d_H(x_i, F_i) = 1$.[8] Ceci est encore vrai pour $i = 1$ sauf si la composante (F_1, G_1) est dégénérée, c'est-à-dire si x_0 appartient à F_1. On a des propriétés symétriques pour les bords G_i.

Preuve de la proposition 3.4 — Il suffit de voir que pour tout $d \geq 3$, une suite géodésique locale d'ordre d est encore une suite géodésique locale d'ordre $d+1$. Ceci se voit sur les sous-suites de longueur $d+2$; on considère donc une suite $(x_0, \ldots, x_{d+1})$ géodésique locale d'ordre d. On veut montrer que $d_H(x_0, x_{d+1}) \geq d+1$ (l'autre inégalité est claire).

Puisque cette suite est géodésique locale d'ordre d, on a $d_H(x_0, x_d) = d$. On note $(F_1, G_1,) \ldots, (F_{d-1}, G_{d-1})$ les $d-1$ composantes de Reeb pour le couple (x_0, x_d) fournies par le théorème 2 de [8].

Montrons, dans un premier temps, que $d_H(x_{d+1}, G_{d-1}) > 1$. Pour cela, rappelons que $d_H(x_{d-2}, F_{d-1}) = 1$ (voir ci-dessus). Si on avait également $d_H(x_{d+1}, G_{d-1}) \leq 1$, le lemme de "déviation des géodésiques" donnerait $d_H(x_{d-2}, x_{d+1}) \leq 2$, ce qui contredirait le fait que la suite (x_i) est une géodésique locale d'ordre d avec $d \geq 3$.

Ceci montre en particulier que le point x_d n'appartient pas au bord G_{d-1}, et par conséquent G_{d-1} sépare x_d des points x_i, $i < d$. Notons $O_{x_d}(G_{d-1})$ la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus G_{d-1}$ qui contient x_d. Puisque $d_H(x_d, x_{d+1}) = 1$, il existe un arc libre reliant ces deux points ; et d'après ce qui précède, cet arc ne peut pas rencontrer l'ensemble G_{d-1}. Par conséquent le point x_{d+1} est dans $O_{x_d}(G_{d-1})$.

Considérons enfin un arc géodésique γ allant de x_0 à x_{d+1} ; nous souhaitons montrer que cet arc est de H-longueur au moins $d+1$. Cet arc doit rencontrer successivement tous les bords des composantes de Reeb : $F_1, G_1, \ldots, F_{d-1}, G_{d-1}$. Considérons une décomposition de γ. Pour chaque entier $i = 1, \ldots, d-1$, cette décomposition a un sommet entre F_i et G_i (voir par exemple [8], lemme 4.8). S'il n'y avait aucun autre sommet, alors le dernier sous-arc de la décomposition rencontrerait le bord G_{d-1}, ce qui contredirait l'inégalité $d_H(x_{d+1}, G_{d-1}) > 1$. Par conséquent la

[8] On utilise la notation usuelle $d_H(x, E)$ pour le minimum de la distance entre x et un point de l'ensemble E.

décomposition a au moins d sommets, et γ a une H-longueur au moins égale à $d+1$. Ceci prouve, comme attendu, que $d_H(x_0, x_{d+1}) \geq d+1$. $\square$

7.2 Classe d'équivalence canonique de suites géodésiques

On se place maintenant sous les hypothèses habituelles : h est un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, fixant uniquement 0, dont l'indice est différent de 1. Il s'agit principalement de construire une suite géodésique pour le relevé canonique $\widetilde{h}$, τ-équivariante. Nous commençons par le cas simple, où l'indice est assez loin de 1 ; puis nous examinerons les cas d'indice 0 ou 2 ; enfin, nous montrerons l'unicité de la classe d'équivalence des suites géodésiques équivariantes.

Preuve du premier point du corollaire 3.5, lorsque l'indice est différent de 0 *ou* 2 — Soit γ une courbe de Jordan de degré 1 géodésique pour h. Notons d le module de h, et $(s_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ les sommets d'une décomposition de γ, indexés dans l'ordre cyclique correspondant à l'orientation positive de γ. Soit $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ le relevé de γ au revêtement universel du complémentaire du point fixe. Il existe une suite $(\widetilde{s}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ qui "relève" la suite finie $(s_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$, au sens où

- $\pi(\widetilde{s}_i) = s_{i \bmod d}$ pour tout i ;
- les points $s_i, i \in \mathbb{Z}$ sont indexés dans l'ordre correspondant à l'orientation de Γ (on a notamment $\tau(\widetilde{s}_i) = \widetilde{s}_{i+d}$ pour tout i).

Il est clair que le relevé d'une courbe qui est libre pour h est libre pour $\widetilde{h}$. On en déduit que, pour tout entier i,

$$d_{\widetilde{h}}(\widetilde{s}_i, \widetilde{s}_{i+1}) = 1.$$

En particulier, d'après l'inégalité triangulaire, on a $d_{\widetilde{h}}(\widetilde{s}_{i+d}, \widetilde{s}_i) \leq d$. D'autre part, puisque $\widetilde{h}$ est le relevé canonique de h, tout arc libre pour $\widetilde{h}$ se projette en un arc libre pour h (proposition 3.1). On en déduit facilement que, pour tout entier i,

$$d_{\widetilde{h}}(\widetilde{s}_{i+d}, \widetilde{s}_i) \geq d.$$

Finalement, on a $d_{\widetilde{h}}(\widetilde{s}_{i+d}, \widetilde{s}_i) = d$ pour tout entier i. D'après la remarque 7.1, la suite $(\widetilde{s}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite géodésique locale d'ordre d pour $\widetilde{h}$.

Lorsque l'indice du point fixe est différent de 0, 1, 2, le module d est minoré par 4 (proposition 3.2). On peut alors appliquer la proposition 3.4, et la suite $(\widetilde{s}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est aussi une suite géodésique "globale". $\square$

Preuve du corollaire 3.5, lorsque l'indice vaut 0 *ou* 2 — On considère l'anneau $\mathbb{R}^2/\tau^2$, qui est un revêtement intermédiaire, à deux feuillets, de l'anneau $\mathbb{R}^2/\tau$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & & & & \\ \downarrow & & & & \\ \mathbb{R}^2/\tau^2 & \cup\{0\} & \simeq & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & & \downarrow \\ \mathbb{R}^2/\tau & \cup\{0\} & \simeq & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

(dans ce diagramme, la dernière flèche est un revêtement à deux feuillets ramifié au-dessus du point 0). L'homéomorphisme $\widetilde{h}$ induit un homéomorphisme h_2 sur l'anneau $\mathbb{R}^2/\tau^2$, qui s'etend en un homéomorphisme du plan $\mathbb{R}^2$ qui fixe uniquement le point 0, et que l'on note encore h_2. Cet homéomorphisme est, bien sûr, l'un des deux relevés de l'homéomorphisme h par le revêtement à deux feuillets. On suppose que l'indice du point fixe de h est différent de 1. Montrons alors que, pour le nouvel homéomorphisme h_2, le point fixe est d'indice différent de $0, 1, 2$; plus précisément, on va obtenir les relations suivantes.

Affirmation 7.3.

$$\text{Indice}(h_2, 0) = \text{Indice}_{\tau^2}(\widetilde{h}) + 1 = 2 \times \text{Indice}_{\tau}(\widetilde{h}) + 1 = 2 \times (\text{Indice}(h, 0) - 1) + 1.$$

La deuxième égalité suit immédiatement des définitions de l'indice de $\widetilde{h}$ par rapport aux translations τ et τ^2. La dernière égalité caractérise le relevé canonique $\widetilde{h}$ de h (proposition 3.1). Il nous reste à montrer la première. Commençons par faire deux remarques.

1. Un arc libre pour $\widetilde{h}$ se projette par π en un arc libre pour h (propriété du relevé canonique) ; par conséquent sa projection au revêtement intermédiaire est encore un arc libre pour h_2.
2. Il existe une droite de Brouwer [9] pour h d'extrémités 0 et ∞ : ceci suit par exemple du théorème principal de [7] (théorème D, p31). Elle se relève clairement en une droite de Brouwer pour h_2.

La première égalité ci-dessus découle alors du lemme suivant (dont la preuve est reléguée plus bas). Le lemme est appliqué en remplaçant h par h_2, τ par τ^2, et donc π par l'application quotient $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\tau^2$. Les deux remarques précédentes consistaient en fait à en vérifier les hypothèses dans ce cadre.

Lemme 7.4. *Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, fixant uniquement le point 0. Supposons que h admette un relevé $\widetilde{h}$ tel que l'image par π de tout arc libre pour $\widetilde{h}$ est un arc libre pour h. Supposons de plus que h admette une droite de Brouwer Δ d'extrémités 0 et l'infini. Alors on a la relation*

$$\mathrm{Indice}(h, 0) = \mathrm{Indice}_\tau(\widetilde{h}) + 1.$$

En particulier, si $\mathrm{Indice}(h, 0)$ *est différent de* 1*, alors $\widetilde{h}$ est le relevé canonique de h.*

Nous pouvons maintenant achever la preuve du corollaire 3.5. On reprend les notations de la preuve du corollaire dans le "bon" cas d'indice différent de $0, 1, 2$: en relevant les sommets d'une courbe de Jordan γ géodésique pour h, on a construit une suite $(\widetilde{s}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, et il s'agit de voir qu'elle est une suite géodésique globale pour $\widetilde{h}$. Pour fixer les idées, supposons que le point fixe de h soit d'indice 2. Remarquons tout d'abord qu'il peut arriver que le module de h soit supérieur ou égal à 3 ; dans ce cas, la suite est géodésique locale d'ordre 3, et la proposition 3.4 s'applique comme avant, qui nous dit que c'est aussi une suite géodésique globale. On peut donc se restreindre au cas où le module de h est égal à 2. D'après l'affirmation 7.3, le point fixe de h_2 est d'indice 3. Le module de h_2 est donc minoré par 4. D'autre part, comme h a pour module 2, et qu'un arc libre pour h se relève clairement en un arc libre pour h_2, le module de h_2 est aussi majoré par 4. On a donc

$$\mathrm{Module}(h_2) = 4 = 2 \times \mathrm{Module}(h).$$

Par conséquent, la courbe γ se relève au revêtement à deux feuillets en une courbe de Jordan γ_2 géodésique pour h_2. On peut maintenant appliquer le "bon" cas à la courbe γ_2 : la suite de ses sommets se relève en une suite géodésique globale pour $\widetilde{h}$. Cette suite n'est autre que la suite $(\widetilde{s}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ relevée de la suite des sommets de γ. Ceci termine la preuve. □

Preuve du lemme — La preuve est une variante d'un morceau de la construction du relevé canonique de [7] (proposition 4.17). Soit $\widetilde{\Delta}$ une droite topologique qui relève Δ ; c'est une droite de Brouwer pour $\widetilde{h}$. On commence par montrer qu'on a l'une des deux situations

$$\tau^{-1}(\widetilde{\Delta}) < \widetilde{h}(\widetilde{\Delta}) < \widetilde{\Delta} \text{ ou } \widetilde{\Delta} < \widetilde{h}(\widetilde{\Delta}) < \tau(\widetilde{\Delta}).$$

En effet, dans le cas contraire, puisque $h(\Delta)$ est disjointe de Δ, on aurait $\widetilde{h}(\widetilde{\Delta}) < \tau^{-1}(\widetilde{\Delta}) < \widetilde{\Delta}$ ou $\widetilde{\Delta} < \tau(\widetilde{\Delta}) < \widetilde{h}(\widetilde{\Delta})$. On en déduit que la bande délimitée par $\widetilde{\Delta}$ et $\tau(\widetilde{\Delta})$ est libre par $\widetilde{h}$, et on trouverait ainsi un arc libre pour $\widetilde{h}$ qui se projette en un arc qui n'est pas libre pour h. Ceci contredit nos hypothèses.

Pour fixer les idées, on se place dans le cas où $\widetilde{\Delta} < \widetilde{h}(\widetilde{\Delta}) < \tau(\widetilde{\Delta})$. Tous les itérés positifs de $\widetilde{\Delta}$ sont alors inclus dans la bande délimitée par $\widetilde{\Delta}$ et $\tau(\widetilde{\Delta})$: dans le cas contraire, le domaine de

[9] Rappelons la définition. On appelle *droite topologique* une application continue injective $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui se prolonge continûment en une application de la droite achevée $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dans la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ en envoyant $-\infty$ et $+\infty$ sur les points 0 ou ∞. Si la droite topologique Δ va de 0 à ∞, et si elle est disjointe de son image $h(\Delta)$, on dit que c'est une *droite de Brouwer d'extrémités* 0 *et* ∞.

translation engendré par $\widetilde{\Delta}$ rencontrerait $\tau(\widetilde{\Delta})$, et on trouverait un arc libre pour $\widetilde{h}$ reliant un point $\widetilde{x}$ sur $\widetilde{\Delta}$ au point $\tau(\widetilde{x})$ (voir l'affirmation 3.4 de [8]) ; la projection par π de cet arc ne serait pas un arc, contrairement aux hypohèses.

Ce qui précède montre que la situation est la suivante :

$$\widetilde{\Delta} < \widetilde{h}(\widetilde{\Delta}) < \widetilde{h}^2(\widetilde{\Delta}) < \widetilde{h}^3(\widetilde{\Delta}) < \tau(\widetilde{\Delta}).$$

Quitte à conjuguer h, on peut supposer que les ensembles $\Delta, \dots h^3(\Delta)$ sont des demi-droites euclidienne issues de 0, disposées à angles droits, et qu'on a

$$\widetilde{h}^i(\widetilde{\Delta}) = \left\{\frac{i}{4}\right\} \times \mathbb{R}, \quad i = 0 \dots 3$$

(et aussi $\tau(\widetilde{\Delta}) = \{1\} \times \mathbb{R}$). En notant $\widetilde{\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la première coordonnée, on en déduit facilement la propriété $(\star)$:

$$\text{Pour tout } \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad |\widetilde{\theta}(\widetilde{x}) - \widetilde{\theta}(\widetilde{h}(\widetilde{x}))| < \frac{1}{2}.$$

La relation d'indice en découle : c'est exactement l'objet du lemme 4.41 de [7]. □

8 Droites de Brouwer

Dans cette section, nous montrons comment construire une droite de Brouwer à l'intérieur de chaque composante de Reeb. D'une part, ceci sera un outil important dans la preuve de la formule d'indice (section 9). D'autre part, l'existence d'une certaine famille de droites de Brouwer sera l'une des propriétés dynamiques lues sur l'indice par quarts-de-tour (section 12).

Rappelons qu'une *droite de Brouwer* pour un homéomorphisme de Brouwer H est une droite topologique Δ, disjointe de son image par H, et qui sépare son image $H(\Delta)$ de son image réciproque $H^{-1}(\Delta)$.

Proposition 8.1. *Soit H un homéomorphisme de Brouwer, et $\mathcal{F}$ une décomposition en briques pour H. On considère une composante de Reeb (F, G) pour H (pour un couple de points (x, y) quelconques). On suppose que F et G sont invariants par H. Alors il existe une droite de Brouwer pour H, incluse dans $\mathcal{F}$, qui sépare F et G.*

On rappelle qu'une *chaîne de briques* est une suite $(B_0, \dots B_k)$ de briques de la décomposition $\mathcal{F}$, telle que $H(B_0)$ rencontre B_1, $H(B_1)$ rencontre B_2, …, $H(B_{k-1})$ rencontre B_k. Le lemme de Franks pour les briques dit que les briques d'une chaîne de briques sont toutes distinctes (*cf.* [7], lemme 3.65 p64).

Lemme 8.2. *Soit (x, y) un couple de points singulier pour un homéomorphisme de Brouwer H. Alors il n'existe pas de chaîne de briques $(B_0, \dots B_k)$ telle que B_0 contienne y et B_k contienne x.*

Preuve du lemme 8.2 — On suppose, par l'absurde, qu'il existe une chaîne de briques comme dans l'énoncé. Dans un premier temps, pour simplifier, supposons que x et y appartiennent respectivement à l'*intérieur* des briques B_k et B_0. Si le couple (x, y) est singulier, par définition, il existe un itéré positif de B_k qui rencontre B_0. On peut alors prolonger la suite $(B_0, \dots B_k)$ en une chaîne de briques de B_0 à B_0, ce qui est interdit par le lemme de Franks rappelé ci-dessus.

Traitons le cas général. Remarquons qu'un point est toujours inclus dans l'intérieur de la réunion des briques qui le contiennent. D'autre part le couple $(H(x), H^{-1}(y))$ est aussi singulier. Il existe donc une brique B_{k+1} qui contient $H(x)$, et une brique B_{-1} qui contient $H^{-1}(y)$, telles qu'un itéré positif de B_{k+1} rencontre B_{-1}. La suite $(B_{-1}, B_0, \dots, B_k, B_{k+1})$ est encore une chaîne de briques, et on peut la prolonger en une chaîne de briques de B_{-1} à B_{-1}, ce qui est interdit. □

Rappelons encore quelques définitions du texte [7]. Un *attracteur strict* est un ensemble E tel que $H(E)$ est inclus dans l'intérieur de E. Étant donnée une brique B, l'ensemble $A^+(B)$ est le

plus petit ensemble qui contient B, qui est une réunion de briques de $\mathcal{F}$, et qui est un attracteur strict. C'est un ensemble connexe.

Preuve de la proposition 8.1 — On se place dans le cas où $F \times G$ est singulier pour H (le cas où $F \times G$ est singulier pour H^{-1} est bien sûr symétrique). On considère l'ensemble

$$A^+(G) := \bigcup \left\{ A^+(B), B \text{ brique rencontrant } G \right\}.$$

On montre facilement que cet ensemble contient G dans son intérieur, qu'il est connexe, que c'est un attracteur strict. D'après le lemme 8.2, il est disjoint de F. Soit alors Δ la composante connexe de la frontière de $A^+(G)$ qui sépare F et G. C'est une droite topologique, elle est incluse dans le 1-squelette de la décomposition $\mathcal{F}$. Comme elle est incluse dans la frontière d'un attracteur strict, elle est libre. On vérifie facilement que Δ sépare $H(\Delta)$ de $H^{-1}(\Delta)$ (en utilisant que F et G sont connexes et invariants par H, et que Δ sépare F et G). C'est donc une droite de Brouwer. $\square$

9 Formule d'indice

Dans cette section, nous prouvons le théorème 4-bis, qui relie l'indice du relevé canonique à l'indice symbolique. La preuve utilise la construction de droites de Brouwer dans les composantes de Reeb (section 8), et la notion d'indice partiel entre deux droites de Brouwer ([7], section 3.3).

On considère un homéomorphisme h du plan, vérifiant les hypothèses habituelles (h préserve l'orientation, le point 0 est son unique point fixe, l'indice de Poincaré-Lefschetz est différent de 1). On reprend les notations du paragraphe 3.3 ($\widetilde{h}$ est le relevé canonique, Γ une droite géodésique relevée d'une courbe de Jordan géodésique γ, $(\widetilde{x}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite des sommets, $(\widetilde{F}_k, \widetilde{G}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite de composantes de Reeb, et $\widetilde{\mathbf{M}}([\tau])$ le mot périodique). L'ordre des bords des composantes de Reeb est donné par $\cdots \leq \widetilde{F}_k < \widetilde{G}_k \leq \widetilde{F}_{k+1} < \widetilde{G}_{k+1} \leq \cdots$ (voir l'appendice B).

Preuve du théorème 4-bis — On se donne une décomposition en briques géodésiques $\mathcal{F}$ pour h (lemme 6.2), qui est compatible avec la courbe de Jordan géodésique γ. L'ensemble $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^{-1}(\mathcal{F})$ est une décomposition en briques pour $\widetilde{h}$ (proposition 3.1). L'intersection de cette décomposition avec la droite Γ est une suite de sommets d'une décomposition de Γ, et on pourra supposer que

$$\widetilde{\mathcal{F}} \cap \Gamma = \{\widetilde{x}_k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

On applique maintenant la proposition 8.1 : pour chaque entier k, il existe une droite de Brouwer $\widetilde{\Delta}_k$, incluse dans $\widetilde{\mathcal{F}}$, qui sépare les deux bords de la composante de Reeb $(\widetilde{F}_k, \widetilde{G}_k)$. On a donc nécessairement $\widetilde{\Delta}_k \cap \Gamma = \{\widetilde{x}_k\}$: notamment, l'arc $\Gamma_k = [\widetilde{x}_k \widetilde{x}_{k+1}]_\Gamma$ est un arc libre qui va de $\widetilde{\Delta}_k$ à $\widetilde{\Delta}_{k+1}$. D'autre part, puisque la décomposition $\widetilde{\mathcal{F}}$ est invariante par τ, et que la famille des composantes de Reeb est équivariante, on peut supposer que $\widetilde{\Delta}_{k+d} = \tau(\widetilde{\Delta}_k)$. L'ordre des composantes de Reeb et des droites de Brouwer est alors donné par :

$$\cdots \leq \widetilde{F}_k < \widetilde{\Delta}_k < \widetilde{G}_k \leq \widetilde{F}_{k+1} < \widetilde{\Delta}_{k+1} < \widetilde{G}_{k+1} \leq \cdots$$

On oriente chaque droite $\widetilde{\Delta}_k$ du bas vers le haut (voir la figure 13), et on note $O_g(\widetilde{\Delta}_k)$ le demi-plan topologique ouvert situé à gauche de $\widetilde{\Delta}_k$. La droite Γ est orientée par l'action de τ (de la gauche vers la droite sur la figure) ; on note $O_S(\Gamma)$ le demi-plan topologique ouvert situé à droite de Γ. On considère l'indexation $(m_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ du mot $\widetilde{\mathbf{M}}([\tau])$ compatible avec les notations qui précédent, autrement dit :

- $m_{2k} = \rightarrow$ si et seulement si $\widetilde{h}(\Gamma_{k-1}) \cap \Gamma_k \neq \emptyset$ (définition 3.11 de [8]) ;
- $m_{2k+1} = \downarrow$ si et seulement si $\widetilde{G}_k$ et $\widetilde{F}_{k+1}$ sont de type dynamique Nord-Sud (définition 8.1 de [8]).

Voici deux autres liens entre le mot $\widetilde{\mathbf{M}}([\tau])$ et la dynamique de $\widetilde{h}$:

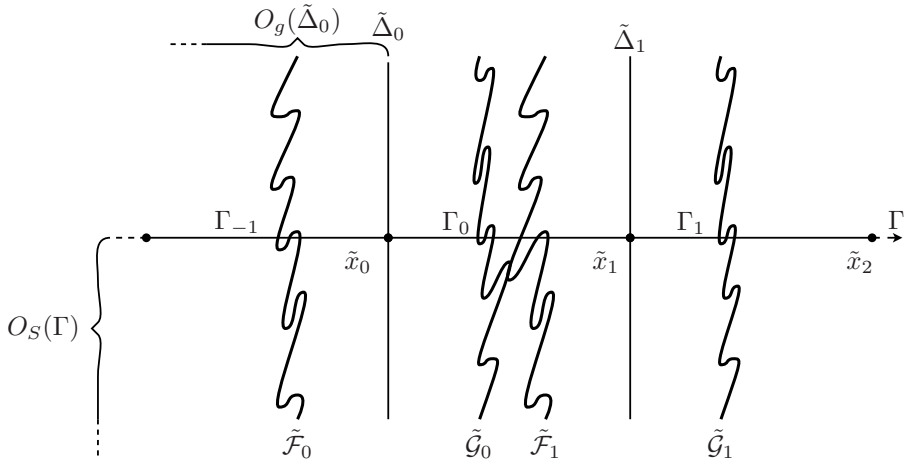

FIG. 13 – Preuve de la formule d'indice pour $\widetilde{h}$

1. la flèche m_{2k} vaut $\rightarrow$ si et seulement si $\widetilde{h}(\widetilde{\Delta}_k)$ est située à droite de $\widetilde{\Delta}_k$;
2. supposons que $m_{2k} = \rightarrow$ et $m_{2k+2} = \leftarrow$; alors $m_{2k+1} = \downarrow$ si et seulement si $\widetilde{h}(\Gamma_k) \subset O_S(\Gamma)$.

Le deuxième point est l'affirmation 8.5 de [8]. Expliquons le premier point, par contrapposée. Si $\widetilde{h}(\widetilde{\Delta}_k)$ est à gauche de $\widetilde{\Delta}_k$, alors le demi-plan $O_g(\widetilde{\Delta}_k)$ est attractif, *i. e.* on a

$$\widetilde{h}(O_g(\widetilde{\Delta}_k)) \subset O_g(\widetilde{\Delta}_k).$$

Dans ce cas, la composante $(\widetilde{F}_k, \widetilde{G}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ne peut pas être singulière pour $\widetilde{h}$. Par définition des composantes de Reeb, elle est donc singulière pour $\widetilde{h}^{-1}$, et la flèche m_{2k} vaut $\leftarrow$ ([8], théorème 1-bis, fin de la section 4).

Nous pouvons maintenant commencer à calculer l'indice de $\widetilde{h}$ par rapport à la translation τ.

$$\begin{aligned} \mathrm{Indice}(\widetilde{h}, \tau) &= \mathrm{IP}(\widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_d) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} \mathrm{IP}(\widetilde{\Delta}_k, \widetilde{\Delta}_{k+1}). \end{aligned}$$

La première égalité est une conséquence immédiate des définitions de l'indice de $\widetilde{h}$ par rapport à τ et de l'indice partiel. La deuxième vient de la relation d'additivité ([7], lemme 3.38, p49). D'autre part, par définition, l'indice partiel du mot cyclique est donné par

$$\begin{aligned} \mathrm{IP}_c((m_k)_{k\in\mathbb{Z}}) &= \sum_{i=0}^{2d-1} \mathrm{IP}(m_i m_{i+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} \mathrm{IP}(m_{2k} m_{2k+1} m_{2k+2}). \end{aligned}$$

La formule découlera alors immédiatement du lemme-clé ci-dessous. □

Lemme 9.1. *Pour tout entier k,*

$$\mathrm{IP}(\widetilde{\Delta}_k, \widetilde{\Delta}_{k+1}) = \mathrm{IP}(m_{2k} m_{2k+1} m_{2k+2}).$$

Preuve du lemme — Il s'agit d'utiliser les liens entre le mot et la dynamique. Étudions d'abord le cas où $m_{2k} = m_{2k+2}$. Alors l'indice partiel symbolique $\mathrm{IP}(m_{2k} m_{2k+1} m_{2k+2})$ est nul (pratiquement par définition). D'autre part, d'après le point 1 ci-dessus, $\widetilde{h}$ pousse les deux droites

$\widetilde{\Delta}_k$ et $\widetilde{\Delta}_{k+1}$ dans le même sens ; autrement dit, avec le vocabulaire du texte [7], le couple $(\widetilde{\Delta}_k, \widetilde{\Delta}_{k+1})$ est indifférent. De plus, l'arc Γ_k est libre et joint les deux droites. Par conséquent, l'indice partiel entre les deux droites est nul (lemme 3.39 de [7], p50). La conclusion du lemme est donc vérifiée dans le cas indifférent.

Il reste à traiter les cas attractif et répulsif. Pour fixer les idées, supposons que le mot est $(\rightarrow\downarrow\leftarrow)$, les autres cas se traitant par un raisonnement similaire. L'indice partiel du mot symbolique vaut alors $-1/2$. D'après le premier point ci-dessus, le couple $(\widetilde{\Delta}_k, \widetilde{\Delta}_{k+1})$ est attractif ; d'après le deuxième point, l'image de l'arc libre Γ_k est située dans le demi-plan $O_S(\Gamma)$, en dessous-de Γ. On peut encore appliquer le lemme 3.39 de [7], qui affirme que l'indice partiel vaut $-1/2$, comme attendu. $\square$

10 Compatibilité des composantes de Reeb

Dans cette section, on montre que le revêtement π établit une correspondance entre les composantes de Reeb pour $\widetilde{h}$ associées à la géodésique $[\tau]$ et les composantes de Reeb minimales de h.

10.1 Un lemme de topologie

On considère une courbe de Jordan $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de degré 1, et son relevé $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Rappellons quelques notations et définitions de [8]. La droite topologique Γ étant orientée par son paramétrage, on note $O_N(\Gamma)$ et $O_S(\Gamma)$ les deux composantes connexes du complémentaire de Γ, situées respectivement à gauche et à droite de Γ. Notons que $\pi(O_N(\Gamma))$ et $\pi(O_S(\Gamma))$ sont respectivement des voisinages pointés des points 0 et ∞ dans la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. On se donne une partie fermée $\widetilde{C}$ du plan, qui rencontre Γ selon un ensemble compact. On définit une compactification "Nord-Sud" de $\widetilde{C}$ en munissant l'ensemble $\widetilde{C} \cup \{N, S\}$ d'une topologie compatible avec celle de $\widetilde{C}$, telle que des bases respectives de voisinages de N et S sont données par $\{O_N(\Gamma) \setminus K, K$ compact du plan$\}$ et $\{O_S(\Gamma) \setminus K, K$ compact du plan$\}$. Comme dans [8], on dira que $\widetilde{C}$ *sépare les deux bouts de* Γ si $\widetilde{C}$ sépare les deux composantes connexes non bornées de $\Gamma \setminus \widetilde{C}$. Dans le cas où $\widetilde{C}$ est connexe, ceci revient à dire que l'ensemble $\widetilde{C} \cup \{N, S\}$ est encore connexe, ou encore que N et S sont dans l'adhérence de $\widetilde{C}$. On étend le revêtement π en posant $\hat{\pi}(N) = 0$, $\hat{\pi}(S) = \infty$. On définit les ensembles $C := \pi(\widetilde{C})$ et $\hat{C} := C \cup \{0, \infty\} = \hat{\pi}(\widetilde{C} \cup \{N, S\})$.

Lemme 10.1 (compatibilité topologique). *Soit $\widetilde{C}$ un fermé du plan, connexe, qui sépare les bouts de Γ. On suppose de plus que*

1. *les ensembles de la famille $\{\tau^q(\widetilde{C}), q \in \mathbb{Z}\}$ sont deux à deux disjoints,*
2. *cette famille est localement finie (aucun compact du plan ne rencontre une infinité d'éléments de cette famille).*

On a alors :

1. *L'ensemble C est fermé (dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) et connexe ;*
2. *l'application $\hat{\pi}$ induit un homéomorphisme de $\widetilde{C} \cup \{N, S\}$ sur $\hat{C}$.*

On appliquera ce lemme aux bords des composantes de Reeb de $\widetilde{h}$, et aussi aux composantes "remplies", voir plus loin.

Preuve du lemme 10.1 — La démonstration est laissée au lecteur. $\square$

10.2 Compatibilité des composantes de Reeb

Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, fixant uniquement 0, d'indice différent de 1. On considère le relevé $\widetilde{h}$ fourni par la proposition 3.1.

Preuve de la proposition 3.7 — On reprend les notations de la section 3.3. Soit $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ une composante de Reeb minimale pour $\widetilde{h}$ associée à $[\tau]$. Quitte à décaler les indices, on supposera que $(\widetilde{F},\widetilde{G}) = (\widetilde{F}_0,\widetilde{G}_0)$. Rappellons que $O(\widetilde{F},\widetilde{G})$ désigne l'unique composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus (\widetilde{F}\cup\widetilde{G})$ dont l'adhérence rencontre à la fois $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$. On notera $\widetilde{C}$ l'adhérence de $O(\widetilde{F},\widetilde{G})$; $\widetilde{C}$ est en fait égal à $\widetilde{F}\cup O(\widetilde{F},\widetilde{G})\cup\widetilde{G}$ [10]. On veut appliquer le lemme 10.1 à l'ensemble $\widetilde{C}$. Il est clair que $\widetilde{C}$ est fermé, connexe, et sépare les bouts de Γ. Montrons que les éléments de la famille $\{\tau^q(\widetilde{C}), q\in\mathbb{Z}\}$ sont deux à deux disjoints, et que la famille est localement finie. Comme $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ est la composante de Reeb minimale associée au couple $(\widetilde{x}_{-1},\tilde{x}_1)$, par unicité des composantes de Reeb minimales, $(\tau^q(\widetilde{F}),\tau^q(\widetilde{G}))$ est la composante de Reeb minimale associée au couple $(\tau^q(\widetilde{x}_{-1}),\tau^q(\tilde{x}_{+1})) = (\widetilde{x}_{qd-1},\widetilde{x}_{qd+1})$, où d est le module de h. Puisque $d\geq 2$, on a donc

$$\widetilde{F} < O(\widetilde{F},\widetilde{G}) < \widetilde{G} < \tau^q(\widetilde{F}) < \tau^q(O(\widetilde{F},\widetilde{G})) < \tau^q(\widetilde{G}).$$

On en déduit que les ensembles $\widetilde{C}$ et $\tau^q(\widetilde{C})$ sont disjoints. Supposons maintenant que la famille n'est pas localement finie. Il existe alors un point $\widetilde{z}$ dont tout voisinage V rencontre une infinité d'éléments de la famille. Choisissons un voisinage V connexe et libre, et notons q_1 et q_2 deux entiers tels que $\tau^{q_1}(\widetilde{C})$ et $\tau^{q_2}(\widetilde{C})$ rencontrent V, avec $q_1<q_2$. Comme le module d est plus grand que 2, il existe une composante de reeb $(\widetilde{F}_k,\widetilde{G}_k)$ située entre $\tau^{q_1}(\widetilde{C})$ et $\tau^{q_2}(\widetilde{C})$:

$$\tau^{q_1}(\widetilde{C}) < \widetilde{F}_k < \widetilde{G}_k < \tau^{q_2}(\widetilde{C}).$$

Puisque V est connexe et rencontre les deux ensembles extrêmes, il doit rencontrer aussi $\widetilde{F}_k$ et $\widetilde{G}_k$. Comme V est libre, on a trouvé un point $\widetilde{x}$ de $\widetilde{F}_k$ et un point $\widetilde{y}$ de $\widetilde{G}_k$ tels que $d_{\widetilde{h}}(\widetilde{x},\widetilde{y})=1$. Mais puisque $(\widetilde{F}_k,\widetilde{G}_k)$ est une composante de Reeb, le couple $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ est singulier pour $\widetilde{h}$ ou $\widetilde{h}^{-1}$, et on devrait avoir $d_{\widetilde{h}}(\widetilde{x},\widetilde{y})=2$ ([8], lemme 4.2), ce qui est absurde. La famille est donc localement finie, et le lemme 10.1 s'applique : on en déduit que l'application $\hat{\pi}$ est un homéomorphisme de $\widetilde{C}\cup\{N,S\}$ sur son image, et que les ensembles $F=\pi(\widetilde{F})$ et $G=\pi(\widetilde{G})$ sont fermés dans $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, connexes, et $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sont encore connexes. Ceci prouve que F et G ont la topologie requise pour former une composante de Reeb (deux premiers points de la définition 2.3).

Montrons alors qu'il existe $\varepsilon=\pm1$ tel que tout couple $(\widetilde{x},\widetilde{y})\in\widetilde{F}\times\widetilde{G}$ est singulier *via* l'ouvert $O(\widetilde{F},\widetilde{G})$ pour l'homéomorphisme h^ε. Rappelons que les ensembles $\widetilde{F}$, $O(\widetilde{F},\widetilde{G})$ et $\widetilde{G}$ sont invariants par $\widetilde{h}$ ([8], lemme 7.10, point 3). Par définition des composantes de Reeb, tout couple $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ dans $\widetilde{F}\times\widetilde{G}$ est singulier pour $\widetilde{h}$ ou $\widetilde{h}^{-1}$, et il s'agit de voir que $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ est singulier *via* l'ouvert $O(\widetilde{F},\widetilde{G})$. Soit $O_{\widetilde{G}}(\widetilde{F})$ la composante connexe du complémentaire de $\widetilde{F}$ qui contient $\widetilde{G}$. On note $\mathcal{F}$ le complémentaire de $O_{\widetilde{G}}(\widetilde{F})$. On définit symétriquement l'ensemble $\mathcal{G}$. Les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont fermés et contiennent respectivement les ensembles $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$, ils sont invariants par $\tilde{h}$, et on a une partition du plan

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{F}\cup O(\widetilde{F},\widetilde{G})\cup\mathcal{G}.$$

Soient $V_{\widetilde{x}}$ un voisinage de $\widetilde{x}$ disjoint de $\mathcal{G}$, et $V_{\widetilde{y}}$ un voisinage de $\widetilde{y}$ disjoint de $\mathcal{F}$. Pour tout entier n, $\widetilde{h}^n(V_{\tilde{x}})\cap V_{\widetilde{y}}\subset O(\widetilde{F},\widetilde{G})$. Ceci prouve que le couple singulier $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ est singulier *via* l'ouvert $O(\widetilde{F},\widetilde{G})$.

Les ensembles $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ sont invariants par $\widetilde{h}$, par conséquent F et G sont invariants par h. L'ensemble $\pi(O(\widetilde{F},\widetilde{G}))$ coïncide avec le domaine $O(F,G)$ (par définition, voir l'appendice B). Il est alors clair que $F\times G$ est inclus dans l'ensemble des couples singuliers pour $h^{\pm1}$ *via* l'ouvert $O(F,G)$. Le couple (F,G) est donc une composante de Reeb. On montre facilement que la minimalité de la composante de Reeb $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ entraîne celle de (F,G).

Nous avons montré la première implication de la proposition. Montrons la deuxième. Soit (F,G) une composante de Reeb pour h. On a l'ordre cyclique

$$F < O(F,G) < G < O(G,F) < F.$$

Par définition de l'ordre cyclique, on peut choisir une composante connexe $\widetilde{F}$ de $\pi^{-1}(F)$ et une composante connexe $\widetilde{G}$ de $\pi^{-1}(G)$ de façon à ce que

$$\widetilde{F} < O(\widetilde{F},\widetilde{G}) < \widetilde{G} < O(\widetilde{G},\tau(\widetilde{F})) < \tau(\widetilde{F}),$$

[10] En effet, la $\widetilde{h}$-boule $B_1(\widetilde{x}_1)$ est un ouvert connexe disjoint de $\widetilde{F}$, et son adhérence contient $\widetilde{F}$ par construction des composantes de Reeb : voir [8], section 4.3.

et on a $\pi(O(\widetilde{F},\widetilde{G})) = O(F,G)$. L'ensemble $\widetilde{C} := \widetilde{F} \cup O(\widetilde{F},\widetilde{G}) \cup \widetilde{G}$ est alors disjoint de ses images par les applications τ^q. D'autre part, puisque son image par π est fermée, il est fermé, et la famille de ses itérés par τ est localement finie : d'après le lemme 10.1, l'application π induit un homéomorphisme de $\widetilde{C}$ sur son image.

D'autre part, les ensembles F et G sont invariants par h (par hypothèse) ; comme h préserve l'orientation, l'ensemble $O(F,G)$ est aussi invariant par h. Par conséquent, l'ensemble $\widetilde{C}$ est invariant ou libre pour $\widetilde{h}$. Montrons qu'il n'est pas libre : dans le cas contraire, on considère un arc γ, dans l'ouvert connexe invariant $O(F,G)$, reliant un point à son image par h ; le relevé de γ dans $O(\widetilde{F},\widetilde{G})$ serait un arc libre, bien que γ ne soit pas libre, ce qui contredit la propriété du relevé canonique (proposition 3.1). On en déduit que $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ sont invariants par $\widetilde{h}$; l'application π conjugue les restrictions respectives de $\widetilde{h}$ et h. Notamment, le produit $\widetilde{F} \times \widetilde{G}$ est singulier pour $\widetilde{h}$ ou pour $\widetilde{h}^{-1}$. On considère alors la suite géodésique $(\widetilde{x}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Pour tout k assez grand, l'ensemble $\widetilde{F}$ sépare le point $\widetilde{x}_{-k}$ de l'ensemble $\widetilde{G} \cup \{\widetilde{x}_k\}$; de même, l'ensemble $\widetilde{G}$ sépare le point $\widetilde{x}_k$ de l'ensemble $\widetilde{F} \cup \{\widetilde{x}_{-k}\}$ Ceci montre que le couple $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ est une composante de Reeb pour $(\widetilde{x}_{-k},\widetilde{x}_k)$. On montre facilement que la minimalité de la composante de Reeb (F,G) entraîne celle de $(\widetilde{F},\widetilde{G})$. D'après le lemme 7.8 de [8], $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ est bien une composante de Reeb associée à la suite géodésique $(\widetilde{x}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, ce qui termine la preuve de la deuxième implication de la proposition. $\square$

Quatrième partie
Conséquences dynamiques

Dans toute cette partie, on considère un homéomorphisme h du plan, vérifiant les hypothèses habituelles (h préserve l'orientation, fixe uniquement 0, avec un indice différent de 1). Dans la section 11, on construit des ouverts de points ayant la même dynamique, indiquée par les flèches du mot $\mathbf{M}(h)$ (théorème 5). En corollaire, on précise un théorème de Pelikan et Slaminka ([10]) : l'indice de Poincaré-Lefschetz d'un point fixe isolé pour un homéomorphisme de surface qui préserve une bonne mesure est inférieur ou égal à 1, et son indice par quarts-de-tour est trivial. Dans la section 12, on montre comment lire sur le mot $\mathbf{M}(h)$ l'existence de droites de Brouwer organisées en croissants et pétales, ce qui précise le théorème D de [7] (p31). Dans la section 13, on montre une propriété dynamique des secteurs indifférents, et on propose une conjecture sur l'existence d'ensembles stables et instables canoniques.

11 Ouverts dynamiquement cohérents

Dans cette partie, on associe canoniquement à h des ouverts, en nombre égal au module de h, constitués de points dont le comportement dynamique est indiqué par l'indice par quarts-de-tour. On en déduira que l'indice par quarts-de-tour d'un homéomorphisme conservatif est trivial.

11.1 Définition

On considère le relevé canonique $\widetilde{h}$ de h. Dans ce qui précède, on a associé (canoniquement) à h une classe d'équivalence $[\tau]$ de suites géodésiques équivariantes. La suite de composantes de Reeb associée à $[\tau]$ est désignée par $((\widetilde{F}_k,\widetilde{G}_k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Pour chaque entier k, on définit un ensemble $\widetilde{\delta}_k$ de la manière suivante. Choisissons une courbe de Jordan géodésique γ, et Γ la droite topologique qui relève γ. Donnons-nous, comme avant, une décomposition minimale de Γ qui relève une décomposition de γ ; cette décomposition admet exactement un sommet $\widetilde{x}_k$ dans l'ouvert $O(\widetilde{F}_k,\widetilde{G}_k)$ entre $\widetilde{F}_k$ et $\widetilde{G}_k$. On définit $\widetilde{\delta}_k$ comme l'ensemble des points $\widetilde{x}_k$ obtenus de cette manière (pour tous les choix possibles d'une courbe géodésique γ munie d'une décomposition).

Proposition 11.1. *L'ensemble $\widetilde{\delta}_k$ est un ouvert non vide, invariant par $\widetilde{h}$, inclus dans l'ouvert $O(\widetilde{F}_k,\widetilde{G}_k)$ situé entre $\widetilde{F}_k$ et $\widetilde{G}_k$. La suite $(\widetilde{\delta}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est équivariante, elle est canoniquement associée à h.*

Preuve — Le fait d'être libre est une propriété stable : tout arc assez proche d'un arc libre est libre. Le fait que δ_k soit ouvert provient essentiellement de cette remarque. Le reste de la proposition est immédiat. □

Définition 11.2. L'ensemble $\delta_k := \pi(\widetilde{\delta}_k)$ est appelé *ouvert des sommets associé à la composante de Reeb* (F_k, G_k).

Théorème 5. *La suite d'ouverts*

$$(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$$

est canoniquement associée à h ; chacun de ces ouverts est constitué de points ayant la même dynamique, qui est indiquée par l'indice par quarts-de-tour : plus précisément, pour tout point x dans δ_k, on a

$$\alpha(x) = \alpha(m_{2k-1}\ m_{2k}\ m_{2k+1}) \text{ et } \omega(x) = \omega(m_{2k-1}\ m_{2k}\ m_{2k+1}).$$

Preuve — Ici encore, tout est évident : notamment, la dynamique des sommets est déjà donnée par le théorème 3. □

11.2 Indice des homéomorphismes conservatifs

L'énoncé suivant précise un résultat de Pelikan et Slaminka ([10], voir aussi Le Calvez [5], Simon [13], Nikišin [9]).

Corollaire 11.3. *Soit h_0 un homéomorphisme d'une surface orientable S, préservant l'orientation, et x_0 un point fixe isolé de h_0. Supposons que h_0 préserve une mesure μ_0 qui charge les ouverts, et qui est finie sur un voisinage de x_0. Si de plus l'indice du point fixe est différent de 1, alors*

1. *le module de h_0 en x_0 est pair ;*
2. *l'indice par quarts-de-tour de h_0 en x_0 est périodique de période 4,*

$$\mathbf{M}(h_0, x_0) = (\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\cdots) \ ;$$

3. *l'indice de Poincaré-Lefschetz du point x_0 est égal à $1 - \frac{\text{Module}(h)}{2}$.*

En particulier, l'indice est toujours inférieur ou égal à 1.

Preuve — On commence par se ramener au cadre de l'article en appliquant les propositions 1.1 et 1.2, qui nous fournissent un homéomorphisme h du plan, fixant uniquement le point 0, et qui est localement conjugué à h_0. De plus, la mesure μ_0 se relève en une mesure μ, invariante par h, qui charge les ouverts et est finie sur un voisinage V du point fixe 0.[11] Considérons les ensembles stables

$$W^s_{loc}(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \geq 0, h^n(x) \in V\}$$

et

$$W^s(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \omega(x) = \{0\}\ \}.$$

Puisque tout point possède un voisinage errant, et que la mesure de V est finie, la mesure de $W^s_{loc}(0)$ est nulle. Comme l'ensemble ω-limite de tout point est réduit à 0 ou ∞, on a

$$W^s(0) = \bigcup_{p\geq 0} h^{-p}(W^s_{loc}(0)).$$

On en déduit que l'ensemble $W^s(0)$ est aussi de mesure nulle.

[11] Soit p l'application fournie par la proposition 1.1 ; alors pour tout disque topologique D sur lequel p est injective, on a $\mu(D) = \mu_0(p(D))$. Cette propriété caractérise la mesure μ.

Montrons alors par l'absurde que l'indice $\mathbf{M}(h)$ ne contient pas la séquence $(\uparrow\leftarrow)$. Dans le cas contraire, le théorème 5 nous fournit un ouvert δ inclus dans l'ensemble $W^s(0)$. Comme la mesure μ charge les ouverts, on a une contradiction.

On montre de la même manière que $\mathbf{M}(h)$ ne contient aucune des séquences $(\rightarrow\uparrow)$, $(\downarrow\rightarrow)$, $(\leftarrow\downarrow)$. On en déduit que le mot $\mathbf{M}(h)$ est obtenu en concaténant un certain nombre de copies de la séquence $(\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow)$. En particulier, il est périodique de période 4. Comme sa longueur est le double du module, le module de h est pair. Le théorème 4 donne alors

$$\text{Indice}(h,0) = \text{Indice}(\mathbf{M}(h)) = 1 + \frac{\text{Module}(h)}{2} \times \text{IP}_c((\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow)) = 1 - \frac{\text{Module}(h)}{2}.$$

□

12 Croissants et pétales

Dans cette section, nous expliquons comment on peut lire sur l'indice par quarts-de-tour l'existence d'un certain nombre de droites de Brouwer. Ceci précise le théorème principal du texte [7] (théorème D, p31).

12.1 Croissants

Rappelons qu'une *droite de Brouwer* pour h est une droite topologique qui va de 0 à ∞ et qui est disjointe de son image par h (voir la note 9 à la section 7.2). La théorie de Brouwer permet notamment de voir qu'une telle droite est disjointe de tous ses itérés (voir [7], affirmation 3.25, p42).

Proposition 12.1. *On reprend les notations du théorème 1. Pour chaque entier k entre 1 et d, il existe une droite de Brouwer Δ_k, d'extrémités 0 et ∞, contenue dans l'ouvert $O(F_k, G_k)$. De plus, la flèche m_{2k} est égale à $\rightarrow$ si et seulement si on a l'ordre cyclique*

$$h^{-1}(\Delta_k) < \Delta_k < h(\Delta_k) < h^{-1}(\Delta_k).$$

Preuve — Il suffit de poser $\Delta_k = \pi(\widetilde{\Delta}_k)$, où $\widetilde{\Delta}_k$ est la droite de Brouwer pour $\widetilde{h}$ obtenue à la section 9. Comme $\widetilde{\Delta}_k$ est libre, et que π projette les arcs libres pour $\widetilde{h}$ en des arcs, la courbe Δ_k est sans point double. Comme elle est sans point double et incluse dans une décomposition en briques $\mathcal{F}$, elle est proprement plongée : c'est donc une droite topologique. Puisqu'elle est transverse à la courbe de Jordan $\gamma = \pi(\Gamma)$, elle va de 0 à ∞. Comme c'est la projetée d'une droite libre, et que π projette les arcs libres pour $\widetilde{h}$ en des arcs libres, elle est encore libre : c'est donc une droite de Brouwer. Il reste à comprendre le lien avec l'indice par quarts-de-tour : or nous avons déjà vu que $m_{2k} = \rightarrow$ si et seulement si $\widetilde{h}(\widetilde{\Delta}_k)$ est située à droite de $\widetilde{\Delta}_k$ (voir la section 9, preuve du théorème 4). Ceci implique la fin de la proposition. □

12.2 Pétales

Rappelons qu'un *pétale attractif basé en* 0 est un disque topologique fermé P du plan, qui contient le point 0 dans son bord, et qui est un attracteur strict, au sens où $h(P) \subset \text{Int}(P) \cup \{0\}$. On définit de manière analogue les pétales répulsifs basés en 0, et les pétales attractifs ou répulsifs basés en l'infini. Par définition, le bord d'un pétale basé en 0 (resp. l'infini) est une *droite de Brouwer d'extrémités* 0 (resp. ∞). La proposition suivante est illustrée sur la figure 14.

Proposition 12.2. *Soit k un entier modulo d. Supposons que le sous-mot $(m_{2k}m_{2k+1}m_{2k+2})$ du mot cyclique $\mathbf{M}(h)$ soit égal à $(\rightarrow\uparrow\leftarrow)$. Alors il existe un pétale attractif P_k basé en 0. De plus, on peut choisir P_k et les droites de Brouwer de la proposition 12.1 pour avoir*

$$P_k \subset O(\Delta_k, \Delta_{k+1}) \cup \{0\}.$$

On peut également choisir le pétale P_k inclus dans un voisinage donné de 0.

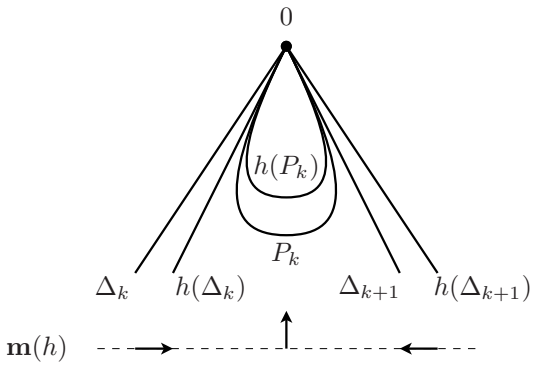

FIG. 14 – Pétales et croissants

Bien sûr, on a un résultat analogue pour les autres types de pétales, qui sont induits par les séquences $(\leftarrow\downarrow\rightarrow)$, $(\rightarrow\downarrow\leftarrow)$ et $(\leftarrow\uparrow\rightarrow)$. En corollaire, on trouve une nouvelle démonstration de la version topologique du théorème de la fleur de Leau-Fatou (théorème A de [7]) : si l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est $p+1>1$, la formule reliant l'indice à l'indice par quarts-de-tour permet de voir qu'on a trouvé au moins $2p$ croissants alternativement attractifs et répulsifs autour du point fixe (ceci nécessite un raisonnement combinatoire tout à fait analogue à la preuve du théorème F du texte [7] (p81).

Preuve — On se donne une décomposition en briques $\mathcal{F}$ géodésique pour h (lemme 6.2). On peut choisir les droites Δ_k, Δ_{k+1} incluses dans $\mathcal{F}$. Elles délimitent alors ce qu'on a appelé un *croissant attractif simplicial* dans le texte [7]. Comme la décomposition est géodésique, il existe une brique B_k qui traverse le croissant (*i.e.* elle rencontre Δ_k et Δ_{k+1}) ; de plus, la flèche $m_{2k+1} = \uparrow$ indique que $h(B_k)$ est au-dessus de B_k dans le croissant. Comme à la section 8, on considère le plus petit ensemble $A^+(B_k)$ qui contient B_k, qui est réunion de briques et qui est un attracteur strict. Il existe une unique composante connexe Δ'_k du bord de $A^+(B_k)$ qui rencontre B_k. On montre facilement que Δ'_k est une droite de Brouwer d'extrémités 0, et qu'elle délimite un pétale attractif P_k basé en 0 et inclus dans le croissant fermé délimité par Δ_k et Δ_{k+1}. Le lemme 5.1 de [7] (p104) dit que tout pétale attractif simplicial contient des pétales attractifs arbitrairement petits, ce qui explique la dernière phrase de la proposition. Enfin, si P_k est un pétale attractif basé en 0 et inclus dans le croissant fermé délimité par Δ_k et Δ_{k+1}, alors l'ensemble $h(P_k)$ est encore un pétale, et est inclus dans $O(\Delta_k, \Delta_{k+1}) \cup \{0\}$. $\square$

13 Autres propriétés

13.1 Orbites à rebrousse-poils des secteurs indifférents

Proposition 13.1. *Supposons que le mot $\boldsymbol{M}(h)$ contienne deux flèches verticales successives du même type,*

$$(m_{2k-1}m_{2k}m_{2k+1}) = (\downarrow\ ?\ \downarrow)$$

où le point d'interrogation désigne n'importe laquelle des deux flèches $\rightarrow$ ou $\leftarrow$. Alors l'ouvert $O(F_k, G_k)$ contient un point z dont la dynamique est inverse de celle indiquée par les flèches :

$$\alpha(z) = \infty \neq \alpha(\downarrow\ ?\ \downarrow), \quad \omega(z) = 0 \neq \omega(\downarrow\ ?\ \downarrow).$$

Bien sûr, on a un résultat analogue pour les mots $(\uparrow\ ?\ \uparrow)$.

Preuve — Nous allons utiliser le lemme 9.5 de l'article [8], dont voici l'énoncé adapté à notre contexte.

Lemme 13.2. *Supposons que pour tout voisinage V_∞ de l'infini dans la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, et pour tout voisinage V_0 de 0, il existe un entier positif n et un point x_1 de $O(F_k, G_k)$ tel que $x_1 \in V_\infty$ et $h^n(x_1) \in V_0$. Alors l'adhérence de $O(F_k, G_k)$ contient un point de $W_{\infty\to 0}$.*

Vérifions tout d'abord les hypothèses du lemme. On se donne un voisinage V_∞ de l'infini et un voisinage V_0 de 0. Par définition des flèches verticales, les bords F_k et G_k sont tous les deux de type dynamique $0 \to \infty$. En particulier, on peut trouver un point x dans F_k et un point y dans G_k, tels que x et y sont tous les deux dans l'ensemble $W_{0\to\infty}$. Quitte à remplacer x par l'un de ses itérés positifs, on peut supposer que $x \in V_\infty$; de même, quitte à remplacer y par l'un de ses itérés négatifs, on peut supposer que $y \in V_0$. Par définition des composantes de Reeb, le couple (x, y) est singulier *via* l'ouvert $O(F_k, G_k)$: en particulier, il existe un point x_1 vérifiant les hypothèses du lemme.

On en conclut que l'adhérence de $O(F_k, G_k)$ contient un point z de $W_{\infty\to 0}$. D'après la proposition 2.5 et la définition des flèches verticales, les bords F_k, G_k ne contiennent aucun point allant de ∞ à 0 ; par conséquent, le point z appartient à

$$\mathrm{Adh}(O(F_k, G_k)) \setminus (F_k \cup G_k) = O(F_k, G_k),$$

ce que l'on voulait. □

13.2 Une conjecture concernant les branches stables et instables

Définition 13.3. On appelle *branche hétérocline* une partie b de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui est une composante connexe de l'ensemble $W_{0\to\infty}$ ou de l'ensemble $W_{\infty\to 0}$, et qui est invariante par h.

Conjecture. *Notons d le module de h. Alors il existe exactement d branches hétéroclines*

$$b_1, \ldots, b_d.$$

On peut choisir l'indexation pour que la branche b_k rencontre les bords G_k et F_{k+1} des composantes de Reeb. La dynamique dans b_k est alors donnée par le mot $\boldsymbol{M}(h)$:

$$b_k \subset W_{0\to\infty} \text{ si et seulement si } m_{2k+1} = \downarrow,$$

$$b_k \subset W_{\infty\to 0} \text{ si et seulement si } m_{2k+1} = \uparrow .$$

Voici ce que l'on sait dans la direction de cette conjecture. Chaque bord de composante de Reeb rencontre une unique branche hétérocline (proposition 2.5). Notons $b(F_k)$ la branche qui rencontre F_k. Supposons que le mot $\mathbf{M}(h)$ contienne une sous-suite de flèches alternativement $\uparrow$ et $\downarrow$:

$$(m_{2k_0+1}, m_{2k_1+1}, \ldots, m_{2k_p+1}) = (\uparrow, \downarrow, \ldots, \downarrow)$$

avec $1 \leq k_0 < \cdots < k_p \leq d$. Alors les branches correspondantes

$$b(F_{2k_0+1}), b(F_{2k_1+1}), \ldots, b(F_{2k_p+1})$$

sont deux à deux disjointes. En effet, deux branches de types dynamiques distincts sont clairement disjointes ; en utilisant la proposition 2.5, on voit que l'ensemble $F_{2k_0+1} \cup F_{2k_2+1}$ sépare les ensembles $b(F_{2k_1+1})$ et $b(F_{2k_3+1})$ (si $p \geq 4$). D'autre part, en utilisant la formule d'indice, on montre facilement que le mot $\mathbf{M}(h)$ contient une telle sous-suite, avec $p = 2 \mid \mathrm{Indice}(h, 0) - 1 \mid$. On en déduit qu'il existe au moins $2 \mid \mathrm{Indice}(h, 0) - 1 \mid$ branches hétéroclines. Il resterait à montrer :

1. $b(G_k) = b(F_{k+1})$;
2. $b(F_k) \neq b(G_k)$;
3. toute branche hétérocline rencontre un bord de composante de Reeb.

Le point 3 impliquerait qu'il n'existe qu'un nombre fini de branches hétéroclines, ce qui n'est pas connu. Le plus difficile est probablement le point 2 (dans le cas où les deux branches sont du même type dynamique). Notons néanmoins que, dans le cas conservatif, ce point est trivial, puisque les types dynamiques des deux bords d'une composante de Reeb sont opposés (corollaire 11.3).

Cinquième partie
Appendices

A Points fixes d'indice 1

Dans cette section, nous considérons un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, fixant uniquement 0. Nous montrons que tous les résultats de l'article restent valables quand l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est égal à 1, à condition de supposer que le module de h (défini ci-dessous) est assez grand.[12] Nous reprendrons implicitement la plupart des définitions données dans la section 2 en indice différent de 1, en explicitant seulement celles qui posent problème. En particulier, la section suivante contient une définition du module de h.

Comme dans le cadre du début de l'article, les exemples modèles sont obtenus en recollant un certain nombre de secteurs hyperboliques, elliptiques et indifférents (voir l'introduction, section 1.3). Si il y a autant de secteurs hyperboliques que de secteurs elliptiques, alors l'indice du modèle est égal à 1. D'autre part, le module est égal au nombre total de secteurs. On construit ainsi une infinité de modèles d'indice 1 et de modules supérieurs ou égaux à 4, qui auront des indices par quarts-de-tour deux à deux distincts.

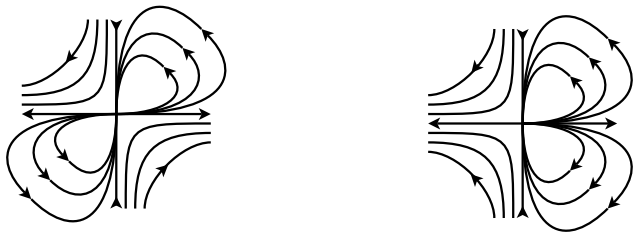

Fig. 15 – Deux modèles d'indice 1 et de module 4 (correspondant aux mots (↑→↓→↑→↓→) et (↑←↓→↑→↓←)). Notons que le premier exemple ne vérifie pas la conclusion du lemme de Franks (il admet des chaînes de disques périodiques), contrairement au second.

A.1 Courbes de Jordan géodésiques

Lorsque l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est différent de 1, les notions de décomposition et de h-longueur d'une courbe fermée ont été définies à la section 2.4. On adopte les mêmes définitions lorsque l'indice est égal à 1. La caractérisation du module donnée (en indice différent de 1) par la première partie de la proposition 2.11 permet alors de généraliser la notion de module.

Définition A.1. Le module de h est le minimum des h-longueurs des courbes fermées γ de degré 1.

On reprend aussi la définition des courbes géodésiques. En recopiant la preuve de la deuxième partie de la proposition 2.11, (section 5), on obtient le résultat plus général suivant.

Proposition A.2. *Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, fixant uniquement le point* 0. *Alors il existe une courbe de Jordan géodésique pour h.*

[12] L'hypothèse retenue est "Module(h) ≥ 4". En fait, avec un peu plus d'effort, on peut voir que la théorie marche encore en supposant seulement "Module(h) ≥ 3".

A.2 Construction du relevé canonique

Pour mimer la construction en indice différent de 1, il nous faut maintenant établir l'existence d'un relevé canonique de h, qui satisfasse les mêmes propriétés qu'avant. Ceci est l'objet de la présente section.

Rappelons que pour choisir un relevé de h au revêtement universel, il suffit de choisir un point x et une courbe γ reliant x à $h(x)$: il existe alors un unique relevé $\widetilde{h}$ de h tel que pour tout relevé $\widetilde{x}$ de x, le relevé de γ issu de $\widetilde{x}$ a pour autre extrémité $\widetilde{h}(\widetilde{x})$; on dira alors que $\widetilde{h}$ est le *relevé associé à* γ. Les arcs de translation sont des cas particuliers de courbes reliant un point à son image.

Définition A.3. Un arc γ du plan est un *arc de translation* pour h (au point x) si γ va de x à $h(x)$, et si $\gamma \cap h(\gamma) = \{h(x)\}$.

Proposition A.4. *Soit h un homéomorphisme du plan préservant l'orientation, fixant le point* 0. *On suppose que*

$$\text{Module}(h) \geq 4.$$

Alors il existe un unique relevé $\widetilde{h}$ de h par π, appelé relevé canonique de h, *pour lequel tout relevé de tout arc de translation de h est un arc de translation de $\widetilde{h}$. De plus,*

1. *l'image par π de tout arc libre pour $\widetilde{h}$ est un arc libre pour h ;*
2. *si $\mathcal{F}$ est une décomposition en briques pour h, alors $\widetilde{\mathcal{F}} := \pi^{-1}(\mathcal{F})$ est une décomposition en briques pour $\widetilde{h}$;*
3. *on a la formule d'indice*
$$\text{Indice}_\tau(\widetilde{h}) = \text{Indice}(h, 0) - 1.$$

Nous prouvons d'abord la première partie de l'énoncé, les propriétés 1 et 2 seront démontrées dans la section suivante, la propriété 3 sera obtenue seulement à la section A.4.

Preuve de la première partie de la proposition A.4 (structure) — Nous donnons d'abord la structure de la preuve, fondée sur trois affirmations. Nous démontrons ensuite les trois affirmations. La première étape de la preuve consiste à montrer qu'il existe des arcs de translation pour h.

Affirmation A.5. *Pour tout point $x \neq 0$, il existe un arc de translation pour h au point x.*

On peut maintenant choisir un point x_0, un arc de translation γ au point x_0, et appeler $\widetilde{h}$ le relevé associé à γ. Il s'agit ensuite de voir que tous les arcs de translation induisent le même relevé. Nous fixons d'abord le point x_0, et nous montrons que $\widetilde{h}$ ne dépend pas du choix de γ. Ceci revient à s'intéresser aux classes d'homotopie des arcs de translation, ce que fait la deuxième affirmation.

Affirmation A.6. *Soient γ_1 et γ_2 deux arcs de translation tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ (et donc aussi $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$). Alors ces deux arcs sont homotopes, à extrémités fixées, dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

Il reste enfin à vérifier que le relevé $\widetilde{h}$ ne dépend pas non plus du choix du point x_0. Par connexité de l'espace $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il suffit de voir ceci localement. Ceci revient à construire, localement, une famille continue d'arcs de translation, et c'est l'objet de la dernière affirmation.

Affirmation A.7. *Soit x_0 un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il existe alors un voisinage V de x_0, et une famille continue $(\gamma_x)_{x \in V}$ d'arcs tels que, pour tout point x de V, l'arc γ_x est un arc de translation au point x.*

La continuité de la famille (γ_x) s'entend au sens de la topologie de la convergence uniforme sur l'espace des arcs. Ceci termine la preuve de la première partie de la proposition à partir des trois affirmations. □

Nous aurons besoin du lemme suivant (qui est à rapprocher des techniques de la section 5).

Lemme A.8. *Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ une courbe fermée. Si γ est de degré > 1, alors il existe deux réels t_1, t_2, $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, tels que $[t_1 t_2]_\gamma$ est une courbe fermée de degré* 1. *En particulier, la h-longueur de γ est supérieure ou égale au module de h.*

En réalité, on pourra montrer (*a posteriori*) que la h-longueur de γ est minorée par le module de h multiplié par la valeur absolue du degré de γ.

Preuve du lemme — Soit $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe du plan qui relève γ. Notons $k > 1$ le degré de γ ; par hypothèse, on a $\widetilde{\gamma}(1) = \tau^k(\widetilde{\gamma}(0))$. Or si $\tau(\widetilde{\gamma})$ ne rencontrait pas $\widetilde{\gamma}$, alors aucun des itérés de γ par τ ne rencontrerait γ (on peut voir ceci comme une conséquence du lemme de Franks appliqué à la translation τ). On en déduit le résultat. $\square$

Nous prouvons maintenant les trois affirmations.

Preuve de l'affirmation A.5 — Soit $x \neq 0$, on cherche un arc de translation au point x. On va réutiliser une construction classique des arcs de translation pour les homéomorphismes de Brouwer. Quitte à conjuguer, on peut supposer que le point x est plus proche de son image par h que du point fixe 0 (pour la distance euclidienne). On considère maintenant un disque euclidien D, centré en x, de rayon r. Si r est assez petit, le disque est libre (disjoint de son image) ; si r est égal à la distance de x à $h(x)$, il ne l'est plus ; on peut donc choisir pour r la plus petite valeur pour laquelle D n'est pas libre. Le disque D ne contient pas le point fixe 0, et est un disque *critique*, c'est-à-dire qu'il vérifie

- D n'est pas libre,
- l'intérieur de D est libre.

Il existe donc un point y sur le bord du disque D dont l'image $h(y)$ est aussi sur le bord de D. On définit les segments euclidiens α_1 reliant y à x, et α_2 reliant x à $h(y)$, et on considère l'arc α obtenu en concaténant α_1 et α_2, arc qui va de y à son image $h(y)$.

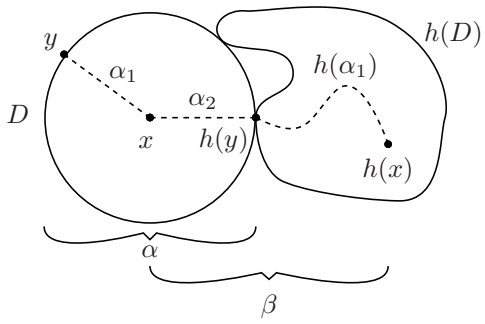

Fig. 16 – Construction d'un arc de translation

Soit A la courbe infinie obtenue en concaténant tous les itérés de α :

$$A = \cdots h^{-1}(\alpha) \star \alpha \star h(\alpha) \star \cdots .$$

Voici l'idée de la fin de la preuve. Supposons que cette courbe infinie A ait un point double, elle contient alors une courbe de Jordan J. À l'aide de la théorie de Brouwer, on va montrer que la courbe J doit entourer le point fixe 0 ; mais alors, si le module de h est assez grand, J doit contenir suffisamment d'itérés de l'arc "presque libre" α ; et l'arc $\alpha_2 \star h(\alpha_1)$ sera un arc de translation au point x. [13]

Réalisons cette idée. Soit $\widetilde{h}$ l'homéomorphisme relevé de h associé à l'arc α. On considère un disque topologique $\widetilde{D}$, composante connexe de $\pi^{-1}(D)$; on note $\widetilde{y}$ et $\widetilde{\alpha}$ les relevés respectifs de y et α inclus dans $\widetilde{D}$. Le disque $\widetilde{D}$ est un disque critique pour $\widetilde{h}$. Comme $\widetilde{h}$ n'a pas de point fixe, on dispose du lemme de Franks (voir par exemple [7], paragraphe 3.2.B p35) : notamment, $\widetilde{h}$ n'a pas de point périodique, et en particulier les itérés du point $\widetilde{y}$ sont tous distincts ; et tout disque topologique (ouvert) libre est disjoint de ses itérés, et en particulier les itérés de l'intérieur du

[13] En réalité, on peut montrer que l'hypothèse de module entraîne même que A est une courbe sans point double (nous n'utiliserons pas ceci).

disque $\widetilde{D}$ sont deux à deux disjoints. On en déduit que la courbe infinie $\widetilde{A}$ obtenue en concaténant les itérés de $\widetilde{\alpha}$ est une courbe sans point double.

On définit maintenant la courbe $\beta = \alpha_2 \star h(\alpha_1)$. On voit facilement que cette courbe est un arc (elle est sans point double), qui va de x à $h(x)$. Montrons qu'il s'agit d'un arc de translation pour h. Ceci revient à montrer que la courbe $\beta \star h(\beta)$ est une courbe simple. Donnons-nous un paramétrage de cette courbe par l'intervalle $[0, 1]$, qui envoie respectivement les intervalles

$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right], \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right],$$

sur les courbes α_2, $h(\alpha_1)$, $h(\alpha_2)$, $h^2(\alpha_1)$. Les arcs α_2 et $h^2(\alpha_1)$ sont libres ; il existe donc deux réels t_1 et t_2, vérifiant

$$\frac{1}{4} < t_1 < t_2 < \frac{3}{4}$$

tels que les courbes $[0, t_1]_{\beta\star h(\beta)}$ et $[t_2, 1]_{\beta\star h(\beta)}$ sont encore libres. D'autre part, la courbe $[t_1, t_2]_{\beta\star h(\beta)}$ est libre car elle est incluse dans l'intérieur du disque $h(D)$. La courbe $\beta \star h(\beta)$ s'écrit dont comme concaténation de trois courbes libres : sa h-longueur est supérieure ou égal à 3.

D'autre part, remarquons que les courbes

$$[0, \frac{3}{4}]_{\beta\star h(\beta)} = \alpha_2 \star h(\alpha_1) \star h(\alpha_2) = \text{ et } [\frac{1}{4}, 1]_{\beta\star h(\beta)} = h(\alpha_1) \star h(\alpha_2) \star h^2(\alpha_1)$$

sont sans point double (ceci provient de la liberté de l'intérieur du disque D).

Supposons maintenant, par l'absurde, que la courbe $\beta \star h(\beta)$ possède un point double : il existe deux réels s_1 et s_2, vérifiant $0 < s_1 < s_2 < 1$, tels que la courbe $J = [s_1, s_2]_{\beta\star h(\beta)}$ est une courbe fermée. D'après la remarque précédente, on a nécessairement $s_1 < \frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4} < s_2$. En choisissant une telle courbe J minimale, on peut supposer que J est une courbe de Jordan. Le degré de J dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vaut alors -1, 0 ou 1. Or ce degré ne peut pas être nul, car J est inclus dans la courbe infinie A dont un relevé $\widetilde{A}$ est sans point double. Quitte à changer le sens de parcourt de J, on peut supposer qu'elle est de degré 1. D'autre part, la h-longueur de J est inférieure ou égale à trois puisque J est une sous-courbe de la courbe $\beta \star h(\beta)$. Ceci contredit l'hypothèse que le module de h est supérieur ou égal à quatre. □

Nous en profitons pour énoncer un corollaire utile.

Corollaire A.9. *h n'a pas de point périodique de période* 2.

Preuve — D'après la définition des arcs de translation, si x était un point de période 2, alors il n'existerait pas d'arc de translation au point x, contrairement à ce qu'on vient de montrer. □

Preuve de l'affirmation A.6 — Soit γ la courbe obtenue en concaténant γ_1 et l'arc γ_2 parcouru en sens contraire. Les arcs γ_1 et γ_2 sont homotopes si et seulement si la courbe γ est de degré nul dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dans le cas contraire, la h-longueur de γ devrait être supérieure ou égale au module de h (lemme A.8). Or on voit facilement que la h-longueur de γ est inférieure ou égale à trois. Ceci prouve l'affirmation. □

Preuve de l'affirmation A.7 — Il s'agit simplement de généraliser la construction de la preuve de la première affirmation. On note à nouveau D le disque critique centré au point x_0, et y un point du bord de D dont l'image $h(y)$ est aussi sur le bord de D. Pour tout point x de D, on définit les segment α_1^x reliant y à x, et α_2^x reliant x à $h(x)$, et on considère l'arc $\beta^x = \alpha_2^x \star h(\alpha_1^x)$. On montre, à l'aide des arguments utilisés dans la première affirmation, que β^x est un arc de translation au point x. D'autre part, l'application $x \mapsto \beta^x$ est clairement continue. La preuve est terminée. □

A.3 Propriétés et conséquences dynamiques

Dans cette section, nous commençons par démontrer la propriété 1 et de la proposition A.4, puis nous en déduirons quelques conséquences dynamiques (notamment, l'errance des points). Le relèvement des décompositions en briques (propriété 2 de la proposition) ne pose pas de problème, le lecteur peut se référer à [7], preuve du troisième point de la proposition 4.17, p98. Pour obtenir la formule d'indice (troisième point de la proposition), il faut d'abord obtenir une droite de Brouwer pour h ; la preuve de cette formule est donc repoussée à la section A.4.

Arcs libres, décompositions

Preuve de la première propriété de la proposition A.4 — On se place sous les hypothèses de la proposition. Soit γ un arc libre pour h, il s'agit de voir que $\pi(\gamma)$ est libre, et est sans point double. Si $\pi(\gamma)$ n'était pas libre, il contiendrait une courbe joignant un point x à son image $h(x)$, donc également un arc α joignant un point à son image ; on trouverait facilement un sous-arc de α joignant un point à son image, et minimal pour cette propriété, autrement dit tel que l'intérieur de α est libre. Comme h n'a pas de point de période 2 (corollaire A.9), on en déduirait que α est un arc de translation. D'autre part, α a un relevé inclus dans γ, ce relevé est donc libre, ce n'est pas un arc de translation, et ceci contredit la définition du relevé canonique.

La courbe $\pi(\gamma)$ est donc libre. Si elle avait un point double, elle contiendrait une courbe de Jordan, qui ne pourrait pas être de degré 0 puisque son relevé n'est pas une courbe fermée ; on aurait donc une courbe de Jordan de degré 1, libre, ce qui contredirait l'hypothèse sur le module de h. Finalement, $\pi(\gamma)$ est bien un arc libre. □

Liberté et errance

Sous l'hypothèse que le module de h est plus grand que 4, nous allons montrer que la dynamique de h ressemble à celle du cas où le point fixe est d'indice différent de 1.

Considérons un homéomorphisme H d'une surface. Un ensemble E est *libre* pour H si il est disjoint de son image $H(E)$. Suivant Morton Brown ([1]), on dira que H est *libre* si tout disque topologique fermé D qui est libre est encore disjoint de tous ses itérés $H^n(D)$, $n \neq 0$. Les orbites d'un homéomorphisme libre sont particulièrement simple : en effet, tout point x qui n'est pas fixe possède un voisinage D qui est un disque topologique fermé libre. Le disque D est alors disjoint de tous ses itérés, par conséquent le point x est *errant* (par définition). Si les points fixes de H sont isolés, on en déduit que l'orbite positive de x tend vers un point fixe de H ou bien sort de tout compact.

Corollaire A.10. *Sous les hypothèses de la proposition A.4, l'homéomorphisme h est libre. En particulier, tout point est errant, et l'orbite positive (ou négative) d'un point du plan tend vers* 0 *ou vers le point à l'infini.*

Preuve du corollaire A.10 — Soit D un disque topologique libre pour h. Soit $\widetilde{D}$ une composante connexe de $\pi^{-1}(D)$: c'est aussi un disque topologique. La propriété 1 du relevé canonique entraîne que ce disque $\widetilde{D}$ est libre pour $\widetilde{h}$. Supposons que le disque D rencontre un itéré $h^n(D)$, alors il existe un entier k tel que $\tau^k(\widetilde{D})$ rencontre $\widetilde{h}^n(\widetilde{D})$. L'homéomorphisme $\widetilde{h}$ est un homéomorphisme de Brouwer, il est donc libre, par conséquent le disque $\widetilde{D}$, qui est libre, est disjoint de tous ses itérés par $\widetilde{h}$; donc $k \neq 0$. La théorie de Brouwer nous dit que $\widetilde{D}$ est inclus dans un domaine de translation ; ce domaine est invariant, il rencontre donc $\tau^k(\widetilde{D})$, et en particulier il existe un arc libre $\widetilde{\gamma}$ qui va d'un point de $\widetilde{D}$ à un point de $\tau^k(\widetilde{D})$. On peut prolonger cet arc par un second arc libre $\widetilde{\delta}$, inclus dans $\tau^k(\widetilde{D})$, de manière à obtenir une courbe $\widetilde{J} := \widetilde{\gamma} * \widetilde{\delta}$ qui va d'un point $\widetilde{x}$ au point $\tau^k(\widetilde{x})$. Puisque $\widetilde{J}$ rencontre $\tau^k(\widetilde{J})$, elle doit aussi rencontrer $\tau(\widetilde{J})$ (τ est un homéomorphisme de Brouwer, il est donc libre) : quitte à raccourcir $\widetilde{J}$, on peut alors supposer que $k = 1$. La courbe projetée $J = \pi(\widetilde{J})$ est une courbe fermée de degré 1 composée des deux arcs $\pi(\widetilde{\gamma})$ et $\pi(\widetilde{\delta})$, qui sont libres d'après le premier point. Ceci contredit l'hypothèse sur le module de h. □

À l'aide des décompositions en briques, on montrerait facilement que tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est dans un domaine de translation pour h (ce qui permet de récupérer la définition originelle du module de h, définition 2.1). Ce résultat peut aussi être vu comme une conséquence de la liberté de h, *via* un théorème de Slaminka (voir [14], et aussi l'article de Guillou [4]).

A.4 Résultats

Dans cette section, nous expliquons pourquoi les preuves des résultats énoncés dans la section 2 fonctionnent encore en indice 1, en module plus grand que 4.

Théorème 6. *Dans tous les énoncés des sections 2, 11, 12 et 13, on peut remplacer l'hypothèse*

« l'indice de Poincaré-Lefschetz du point fixe est différent de 1 *»*

par l'hypothèse

« le module de h est supérieur ou égal à 4 *».*

Ceci concerne notamment les théorèmes 1, 2, 3, 4, 5, les propositions 2.5, 2.7 et le corollaire 11.3.

Preuve — Nous expliquons rapidement comment adapter les preuves déjà exposées en détail quand l'indice était supposé différent de 1. Le principal changement est le suivant : la formule reliant l'indice de h à celui de son relevé canonique est obtenue plus tard (troisième étape ci-dessous).

Première étape On montre que les résultats du corollaire 3.5 sont vérifiés : si γ est une courbe de Jordan géodésique (fournie par la proposition A.2), alors la droite topologique Γ qui relève γ est une droite géodésique. En effet, la preuve de la section 7.2 utilisait seulement la correspondance entre les arcs libres de $\widetilde{h}$ et ceux de h, et la minoration du module : la première propriété est encore vérifiée d'après la proposition A.4, et la seconde l'est par hypothèse. On note encore $[\tau]$ la classe d'équivalence de la droite Γ.

Deuxième étape Comme à la section 3.3, on peut alors considérer les composantes de Reeb et le mot cyclique associés à $[\tau]$. On peut recopier mot pour mot la preuve du théorème 4-bis (section 9), et on obtient la conclusion de ce théorème, à savoir la formule d'indice pour le relevé canonique $\widetilde{h}$.

Troisième étape Nous pouvons maintenant prouver la formule qui nous manquait, qui relie l'indice de h et celui de $\widetilde{h}$ (troisième point de la proposition A.4). En effet, l'étape précédente a produit des droites de Brouwer $\widetilde{\Delta}_k$ pour $\widetilde{h}$, et on voit facilement que ces droites se projettent en des droites de Brouwer Δ_k pour h qui vont de 0 à ∞ (voir par exemple la preuve de la proposition 12.1). On peut alors appliquer le lemme 7.4, qui donne la formule voulue.

Fin On peut maintenant recopier tout le reste des preuves : la compatibilité entre les composantes de Reeb (section 10), puis les preuves des théorèmes (section 4). □

B Ordre cyclique

B.1 Parties du plan

On se donne trois parties connexes A, B et C du plan. Si l'ensemble A est disjoint de B, il est inclus dans une composante connexe du complémentaire de B ; on notera $O_A(B)$ cette composante. Remarquons que l'adhérence de $O_A(B)$ rencontre B, et, en particulier, l'ensemble $O_A(B) \cup B$ est connexe.

Définition B.1. On dit que B *sépare* A *et* C si les trois ensembles A, B et C sont deux à deux disjoints, et si les composantes $O_A(B)$ et $O_C(B)$ sont distinctes (et donc disjointes). On écrit alors

$$A < B < C.$$

On montre facilement une propriété d'antisymétrie : si B sépare A et C, alors A ne sépare pas B et C, autrement dit

$$\text{si } A < B < C \text{ alors on n'a pas } B < A < C.$$

On en déduit une propriété de transitivité : si A, B, C, D sont des parties connexes deux à deux disjointes,

$$\text{si } A < B < C \text{ et } B < C < D \text{ alors } A < B < D \text{ et } A < C < D.$$

Dans ce cas, on écrira simplement

$$A < B < C < D.$$

Définition B.2. On écrira

$$A \leq B < C$$

si C est disjoint de B, et s'il existe une composante connexe O' du complémentaire de B telle que

1. A est inclus dans l'adhérence de O' ;
2. O' et $O_C(B)$ sont distinctes (et donc disjointes).

Les propriétés d'antisymétrie et de transitivité se généralisent :

$$\text{si } A \leq B < C \text{ alors on n'a pas } B < A < C \quad ;$$

$$\text{si } A \leq B < C \text{ et } B < C \leq D \text{ alors } A \leq B < D \text{ et } A < C \leq D.$$

On écrira alors

$$A \leq B < C \leq D.$$

On peut généraliser ces écritures à un nombre quelconque de parties connexes, par récurrence : l'inégalité d'ordre k

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_k$$

(avec $k \geq 4$) est vérifiée si les k "sous-inégalités" d'ordre $k-1$ sont vérifiées.

Application Considérons par exemple une suite de composantes de Reeb $(\widetilde{F}_k, \widetilde{G}_k)$ associée à une suite géodésique $(\widetilde{x}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, pour un homéomorphisme de Brouwer H (voir [8], section 7.1). Alors l'ordre est donné par

$$\cdots \leq \widetilde{F}_k < \widetilde{G}_k \leq \widetilde{F}_{k+1} < \widetilde{G}_{k+1} \leq \cdots$$

Pour voir ceci, il s'agit de montrer que $\widetilde{F}_k < \widetilde{G}_k \leq \widetilde{F}_{k+1}$. Or $\widetilde{G}_k$ sépare $\widetilde{x}_{k-1}$ de $\widetilde{x}_{k+2}$ (voir par exemple [8], section 7.1) ; l'ensemble $\widetilde{F}_k$ est inclus dans la composante connexe $O_{\widetilde{x}_{k-1}}(\widetilde{G}_k)$; l'ensemble $\widetilde{F}_{k+1}$ est inclus dans l'adhérence de la H-boule de centre $\widetilde{x}_{k+2}$ et de rayon 1, et cette boule est disjointe de $\widetilde{G}_k$ (par inégalité triangulaire), donc incluse dans la composante connexe $O_{\widetilde{x}_{k+2}}(\widetilde{G}_k)$.

Définition B.3. Soient F et G deux parties fermées et connexes du plan. On appelle *ouvert entre F et G* l'ensemble

$$O(F, G) = O_F(G) \cap O_G(F).$$

Lemme B.4. *L'ensemble $O(F, G)$ est l'unique composante connexe du complémentaire de $F \cup G$ dont l'adhérence rencontre à la fois F et G.*

Contrairement à ce qui précède, ce lemme est particulier à la topologie du plan : la preuve utilise une version du lemme d'Alexander (voir [8], théorème A.3).

B.2 Parties du plan troué

On considère des parties connexes du plan troué $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Un *relevé* $\widetilde{A}$ d'une telle partie A est une composante connexe de $\pi^{-1}(A)$, où π est le revêtement universel du plan troué. On note τ l'automorphisme du revêtement universel correspondant à un lacet de degré 1. Tout relevé $\widetilde{A}$ est ou bien égal à $\tau(\widetilde{A})$, ou bien disjoint de $\tau(\widetilde{A})$.

Définition B.5. Soient A, B, C trois parties connexes du plan troué, deux à deux disjointes. On notera

$$A < B < C < A$$

s'il existe des relevés respectifs $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ de A, B, C tels que

$$\widetilde{A} < \widetilde{B} < \widetilde{C} < \tau(\widetilde{A}) < \tau(\widetilde{B}) < \cdots .$$

Comme avant, on généralise ceci à un nombre quelconque de bonnes parties : $A_1 < A_2 < \cdots < A_k < A_1$ si on peut choisir des relevés tels que $\widetilde{A}_1 < \widetilde{A}_2 < \cdots < \widetilde{A}_k < \tau(\widetilde{A}_1) < \tau(\widetilde{A}_2) < \cdots$. On définit les relations $A < B \leq C < A$ de manière analogue.

On considère maintenant des parties F fermées et connexes du "plan troué" $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, telles que $\hat{F} := F \cup \{0, \infty\}$ soit encore connexe. On les appellera des *bonnes* parties. On peut encore définir les ouverts entre F et G, *via* le lemme suivant.

Lemme B.6. *Soient F et G deux bonnes parties de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, disjointes. Il existe alors exactement deux composantes connexes $O(F, G)$ et $O(G, F)$ du complémentaire de $\hat{F} \cup \hat{G}$ dont l'adhérence rencontre à la fois F et G. De plus, on peut choisir les notations pour qu'on ait*

$$F < O(F, G) < G < O(G, F) < F.$$

Voici une esquisse de démonstration. On peut construire un disque topologique fermé D dans la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, qui contient F, et qui est disjoint de G (le bord de D passe par 0 et ∞). Soit $\widetilde{F}$ un relevé de F. Au moyen du disque D, on montre que $\widetilde{F}$ est disjoint de $\tau(\widetilde{F})$, et que

$$\tau^{-1}(\widetilde{F}) < \widetilde{F} < \tau(\widetilde{F}).$$

De plus, il existe un relevé $\widetilde{G}$ de G tel que

$$\widetilde{F} < \widetilde{G} < \tau(\widetilde{F}) < \tau(\widetilde{G}).$$

On considère alors les ouverts $O(\widetilde{F}, \widetilde{G})$ et $O(\widetilde{G}, \tau(\widetilde{F}))$ (définition B.3). En projetant ces deux ouverts sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on obtient les ensembles $O(F, G)$ et $O(G, F)$ vérifiant les propriétés requises.

Références

[1] M. Brown, Homeomorphisms of two-dimensional manifolds, Houston J. Math. **11** (1985), no. 4, 455–469.

[2] M. Brown, Fundamental regions of planar homeomorphisms. Continuum theory and dynamical systems (Arcata, CA, 1989), 49–56, Contemp. Math., **117**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[3] M. Brown, E. E. Slaminka and W. Transue, An orientation preserving fixed point free homeomorphism of the plane which admits no closed invariant line. Topology Appl. **29** (1988), no. 3, 213–217.

[4] L. Guillou, A generalized translation theorem for free homeomorphisms of surfaces, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), no. 10, 3243–3250.

[5] P. Le Calvez, Une propriété dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe d'indice > 1, Topology **38** (1999), no. 1, 23–35.

[6] P. Le Calvez et A. Sauzet, Une démonstration dynamique du théorème de translation de Brouwer, Exposition. Math. **14** (1996), no. 3, 277–287.

[7] F. Le Roux, Homéomorphismes de surfaces : théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable. Astérisque No. 292 (2004).

[8] F. Le Roux, Invariants combinatoires des homéomorphismes de surface (I) Structure des homéomorphismes de Brouwer. Prépublication d'Orsay 2003-34, et arXiv DS/0403406.

[9] N. A. Nikišin, Fixed points of the diffeomorphisms of the two-sphere that preserve oriented area Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 1, 84–85.

[10] S. Pelikan and E. E. Slaminka, A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds. Ergodic Theory Dynam. Systems **7** (1987), no. 3, 463–479.

[11] F. R. Ruiz del Portal and J. M. Salazar, Optimal stable/unstable "manifold" and Leau-Fatou petals theorems for planar homeomorphisms. *En préparation.*

[12] A. Sauzet, Application des décompositions libres à l'étude des homéomorphismes de surfaces, Thèse, Université Paris Nord, 2001.

[13] C. P. Simon, A bound for the fixed-point index of an area-preserving map with applications to mechanics. Invent. Math. **26** (1974), 187–200.

[14] E. E. Slaminka, A Brouwer translation theorem for free homeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. **306** (1988), no. 1, 277–291.