



**HAL**  
open science

# Théorème de Hahn-Banach et paradoxes continus ou discrets

Friedrich Wehrung

► **To cite this version:**

Friedrich Wehrung. Théorème de Hahn-Banach et paradoxes continus ou discrets. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1990, 310, pp.303-306. hal-00004714

**HAL Id: hal-00004714**

**<https://hal.science/hal-00004714>**

Submitted on 14 Apr 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÉORÈME DE HAHN-BANACH ET PARADOXES CONTINUS OU DISCRETS

Friedrich WEHRUNG

*Résumé* – Nous étudions le comportement général d’une notion “continue” d’équidécomposabilité, pour laquelle le théorème de Hahn-Banach joue un rôle similaire à celui de l’axiome du choix ou le théorème de l’idéal premier pour la notion usuelle d’équidécomposabilité. En particulier, nous obtenons, en utilisant le théorème de Hahn-Banach, une version continue du paradoxe de Banach-Tarski.

## Hahn-Banach theorem and continuous or discrete paradoxes.

*Abstract.* – We study the general behaviour of a “continuous” version of equidecomposability, for which the Hahn-Banach theorem plays a similar role as the axiom of choice or the prime ideal theorem for the usual notion of equidecomposability. In particular, we get, using the Hahn-Banach theorem, a continuous version of the Banach-Tarski paradox.

Il est connu depuis longtemps que l’axiome du choix et diverses formes affaiblies de cet axiome, comme le théorème de l’idéal premier, entraînent l’existence de parties non mesurables de  $\mathbb{R}$ . En fait, l’axiome du choix a une conséquence plus frappante, le paradoxe de Banach-Tarski, qui peut être énoncé “la sphère Euclidienne de  $\mathbb{R}^3$  est équivalente à la réunion de deux copies d’elle-même par décomposition finie en utilisant des rotations vectorielles” (voir [1] ou [10]). Qu’en est-il en n’utilisant que le théorème de Hahn-Banach? Il a été montré récemment (voir [3]) que l’on peut tout de même montrer l’existence d’une partie non mesurable de  $\mathbb{R}$ ; et dans cette Note, nous dérivons une version “continue” du paradoxe de Banach-Tarski, d’où nous tirons un paradoxe “discret”, légèrement plus faible que la duplication classique.

Sauf mention contraire, aucune forme d’axiome du choix n’est supposée satisfaite a priori dans ce travail.

Tout d’abord, nous introduisons un contexte très général dans lequel la plupart des problèmes d’équidécomposabilité peuvent se formuler avec commodité.

DÉFINITION. - Un *semi-groupe* est un couple  $(A, +)$  où  $+$  est une loi de composition interne associative sur un ensemble  $A$ ; c’est de plus un *R-semi-groupe* quand  $+$  est commutative, et toutes suites finies *non vides*  $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$  et  $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$  d’éléments de  $A$  telles que  $\sum_{1 \leq i \leq m} a_i = \sum_{1 \leq j \leq n} b_j$  admettent un *raffinement*, i.e. une matrice  $(c_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  d’éléments de  $A$  telle que pour tout  $i$ ,  $a_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}$  et pour tout  $j$ ,  $b_j = \sum_{i=1}^m c_{ij}$ .

Il est en fait facile de montrer qu’il est suffisant de vérifier la définition pour  $m = n = 2$ .

Nous aurons à manier par la suite des semi-groupes munis d’une action de groupes par automorphismes; ceci motive la définition suivante:

DÉFINITION. - Soit  $G$  un groupe opérant par automorphismes sur deux semi-groupes  $A$  et  $B$ . Un *G-homomorphisme* de  $A$  vers  $B$  est un homomorphisme de semi-groupes  $e$  de  $A$  vers  $B$  tel que pour tout  $x$  dans  $A$  et tout  $g$  dans  $G$ , l’on ait  $e(g.x) = g.e(x)$ .

La proposition suivante permet de définir une notion d’équidécomposabilité dans un cadre très général; nous en omettons la preuve, qui est facile.

PROPOSITION 1. - Soit  $G$  un groupe opérant par automorphismes sur un  $R$ -semi-groupe  $A$ . On définit une relation binaire  $\equiv_G$  sur  $A$  par:

$x \equiv_G y$  si et seulement si il existe  $n$  dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $x_1, \dots, x_n$  dans  $A$ ,  $g_1, \dots, g_n$  dans  $G$  tels que  $x = \sum_{i=1}^n x_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i$ . Alors:

(i)  $\equiv_G$  est une relation d'équivalence, compatible avec l'addition de  $A$ ;

(ii) Le semi-groupe quotient  $A/\equiv_G$ , que nous noterons désormais  $A/G$ , est un  $R$ -semi-groupe. ■

Dans le contexte ci-dessus, pour tout  $x$  dans  $A$ , nous noterons  $[x]_G$ , ou encore  $[x]$ , l'image de  $x$  par le morphisme canonique de  $A$  sur  $A/G$ . On dit que  $[x]_G$  est le *type d'équidécomposabilité de  $x$  modulo  $G$* .

Dans ce travail, nous considérerons en fait le cas suivant: soit  $M$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ , soit  $X$  un ensemble sur lequel opère un groupe  $G$ . Alors  $G$  opère par automorphismes sur le semi-groupe  $S(X, M)$  des applications positives et bornées de  $X$  vers  $M$ , en posant  $g \cdot \varphi(x) = \varphi(g^{-1} \cdot x)$  pour tous  $g$  dans  $G$ ,  $\varphi$  dans  $S(X, M)$ ,  $x$  dans  $X$ ; il est facile de montrer que  $S(X, M)$  est un  $R$ -semi-groupe. Nous nous restreindrons en fait à deux cas:

— Le cas  $M = \mathbb{Z}$ :  $S(X, \mathbb{Z})/G$  est appelé habituellement le *semi-groupe des types d'équidécomposabilité dans  $X$  modulo  $G$*  (voir [10], chap. 8);

— le cas  $M = \mathbb{R}$ :  $S(X, \mathbb{R})/G$  sera appelé ici le *semi-groupe des types d'équidécomposabilité continue dans  $X$  modulo  $G$* .

DÉFINITION. - Une *moyenne* sur un ensemble  $P$  est une forme linéaire positive  $\mu$  sur l'espace vectoriel réticulé  $B(P, \mathbb{R})$  des applications bornées de  $P$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $\mu(\mathbf{1}_P) = 1$ .

Dans le contexte de la définition ci-dessus, si  $f$  est dans  $B(P, \mathbb{R})$ , nous noterons parfois  $\int f(p) d\mu(p)$  au lieu de  $\mu(f)$ .

Nous utiliserons par la suite la forme équivalente suivante du théorème de Hahn-Banach: (voir [6], [7]):

Pour tout filtre  $\mathcal{F}$  sur un ensemble  $P$ , il existe une moyenne  $\mu$  sur  $P$  qui est concentrée sur  $\mathcal{F}$ , i.e.  $\mu(\mathbf{1}_A) = 1$  pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ .

Par la suite, nous considérerons l'opération d'un groupe sur lui-même par translation à gauche. Rappelons qu'un groupe  $G$  est *moyennable* (voir [4], [10]) quand il existe une moyenne invariante sur  $G$ , i.e. une moyenne  $\mu$  sur  $G$  telle que  $\mu(g \cdot \varphi) = \mu(\varphi)$  pour tout  $g$  dans  $G$  et tout  $\varphi$  dans  $B(G, \mathbb{R})$ ; en fait, en présence du théorème de Hahn-Banach, on peut montrer que ceci est équivalent à  $[G] \neq 2[G]$  dans  $S(G, \mathbb{R})/G$ .

THÉORÈME 3. - Supposons que le théorème de Hahn-Banach soit satisfait. Soit  $G$  un groupe opérant sur un ensemble  $X$  de façon localement moyennable, i.e. pour tout  $x$  dans  $X$ , le stabilisateur  $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$  est moyennable. Alors il existe un  $G$ -homomorphisme  $e$  de  $S(G, \mathbb{R})$  vers  $S(X, \mathbb{R})$  tel que  $e(\mathbf{1}_G) = \mathbf{1}_X$ .

Tout d'abord, en raison du problème posé par l'absence de l'axiome du choix, nous devons montrer un lemme:

LEMME 4. - Supposons le théorème de Hahn-Banach satisfait, et soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille de groupes moyennables. Alors il existe une famille  $(\mu_i)_{i \in I}$  telle que pour tout  $i$  dans  $I$ ,  $\mu_i$  est une moyenne invariante sur  $G_i$ .

*Démonstration.*-Soit  $P$  l'ensemble des fonctions  $p$  dont le domaine, que nous noterons  $\text{dom}(p)$ , est une partie finie de  $I$ , telles que pour tout  $i$  dans  $\text{dom}(p)$ ,  $p(i)$  est une moyenne invariante sur  $G_i$ . Soit  $\mathcal{F}$  le filtre sur  $P$  dont une base est  $\{F_a : a \text{ partie finie de } P\}$  où l'on pose  $F_a = \{p \in P : a \subseteq \text{dom}(p)\}$ , et soit  $\nu$  une moyenne sur  $P$  concentrée sur les éléments de  $\mathcal{F}$ . La famille  $(\mu_i)_{i \in I}$  définie par  $\mu_i(\varphi) = \int p(i)(\varphi) d\nu(p)$  pour tout  $i$  dans  $I$  et tout  $\varphi$  dans  $B(G_i, \mathbb{R})$  satisfait aux conditions demandées. ■

Supposons les hypothèses du théorème 3 réalisées. D'après le lemme 4, il existe une famille  $(\nu_x)_{x \in X}$  telle que pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $\nu_x$  est une moyenne invariante sur  $G_x$ .

LEMME 5. - Pour tout  $\varphi$  dans  $S(G, \mathbb{R})$  et tous  $x, y$  tels que  $x \in G.y$ , le réel  $\int \varphi(gh) d\nu_y(h)$  est indépendant de l'élément  $g$  de  $G$  tel que  $g.y = x$ . En le notant  $\overline{\varphi}(x : y)$ , on a, pour tous  $x, y$  tels que  $x \in G.y$  et tout  $g$  dans  $G$ ,

$$\overline{\varphi}(g^{-1}.x : y) = \overline{g.\varphi}(x : y).$$

*Démonstration.*-Soient  $g$  et  $g'$  dans  $G$  tels que  $g.y = g'.y = x$ ; il existe donc  $h_0$  dans  $G_y$  tel que  $g' = g.h_0$ . Par suite,

$$\int \varphi(g'.h) d\nu_y(h) = \int \varphi(g.(h_0.h)) d\nu_y(h) = \int \varphi(g.h) d\nu_y(h),$$

la dernière égalité ayant lieu car  $\nu_y$  est une moyenne invariante sur  $G_y$ . ■

La seconde partie de l'énoncé est immédiate, et n'utilise pas l'invariance de  $\nu_y$ .

*Démonstration du théorème 3.*-Soit  $P$  l'ensemble des parties finies  $p$  de  $X$  telles que deux éléments quelconques de  $p$  ne sont pas équivalents modulo  $G$ ; pour un tel  $p$ , posons  $[p] = \bigcup_{x \in p} G.x$ , et pour toute partie finie  $a$  de  $X$ , posons  $F_a = \{p \in P : a \subseteq p\}$ . Alors  $\{F_a : a \text{ partie finie de } X\}$  est une base de filtre sur  $P$ , donc engendre un filtre  $\mathcal{F}$  sur  $P$ . Si le théorème de Hahn-Banach est satisfait, alors il existe une mesure  $\mu$  sur  $P$  concentrée sur  $\mathcal{F}$ .

Pour tout  $p$  dans  $P$ , définissons (grâce au lemme 5) un  $G$ -homomorphisme  $e_p$  de  $S(G, \mathbb{R})$  vers  $S([p], \mathbb{R})$  par  $e_p(\varphi)(x) = \overline{\varphi}(x : y)$  où  $y$  est l'unique élément de  $p$  tel que  $x \in G.y$ , pour tout  $\varphi$  dans  $S(G, \mathbb{R})$  et tout  $x$  dans  $X$ . Il suffit alors de définir  $e$  par

$$e(\varphi)(x) = \int e_p(\varphi)(x) d\mu(p);$$

il est facile de vérifier que  $e$  satisfait aux conditions imposées. ■

Par exemple, quand  $G$  est le groupe libre à deux générateurs  $F_2$ , il est connu (voir [10]) que  $[G] = 2[G]$  dans  $S(X, \mathbb{Z})/G$  (et par suite dans  $S(X, \mathbb{R})/G$ ): plus précisément, il existe une partition  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  de  $F_2$  et  $g_1, g_2, g_3, g_4$  dans  $F_2$  tels que  $2.1_{F_2} = \sum_{i=1}^4 g_i.1_{A_i}$ . Par suite, quand  $F_2$  opère de façon localement moyennable sur  $X$ , alors

on obtient, en appliquant l'homomorphisme du théorème 3 à l'équation précédente, que  $X \equiv_{F_2} 2X$  dans  $S(X, \mathbb{R})$ . Par exemple, il existe une opération localement moyennable (et même localement commutative) de  $F_2$  sur  $S^2$  par rotations, d'où nous tirons (toujours en présence du théorème de Hahn-Banach) la forme "continue" du paradoxe de Banach-Tarski,  $S^2 \equiv_{SO_3} 2S^2$  dans  $S(S^2, \mathbb{R})$ . (voir [10]).

Pour conclure, signalons un résultat permettant de passer des paradoxes continus aux paradoxes discrets:

**DÉFINITION.** - Soit  $G$  un groupe opérant par automorphismes sur un  $\mathbb{R}$ -semi-groupe  $A$ . Pour tous éléments  $x, y$  de  $A$  et tout  $n$  dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , disons que  $x \leq_G y$  avec  $n$  morceaux quand il existe  $x_i$  dans  $A$  et  $g_i$  dans  $G$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que  $x \leq \sum_{i=1}^n x_i$  et  $\sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i \leq y$ .

**THÉORÈME 6.** - Soit  $G$  un groupe opérant sur un ensemble  $X$ , soient  $m, n$  dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Supposons que  $(m+1) \cdot \mathbf{1}_X \leq_G m \cdot \mathbf{1}_X$  avec  $n$  morceaux dans  $S(X, \mathbb{R})$ . Alors  $(mn + m + 1) \cdot \mathbf{1}_X \leq_G (mn + m) \cdot \mathbf{1}_X$  avec  $n$  morceaux dans  $S(X, \mathbb{Z})$ .

*Démonstration.* - Par hypothèse, il existe  $\varphi_i$  dans  $S(X, \mathbb{R})$  et  $g_i$  dans  $G$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que  $(m+1) \cdot \mathbf{1}_X \leq \sum_{i=1}^n \varphi_i$  et  $\sum_{i=1}^n g_i \cdot \varphi_i \leq m \cdot \mathbf{1}_X$ . Soit  $k$  dans  $\mathbb{N}$ . Pour  $1 \leq i \leq n$  et  $x$  dans  $X$ , définissons  $\psi_i(x)$  comme la partie entière de  $k \cdot \varphi_i(x)$ . Alors  $\psi_i \in S(X, \mathbb{Z})$  et  $\psi_i \leq k \cdot \varphi_i \leq \psi_i + \mathbf{1}_X$ ; les deux inégalités précédentes permettent alors facilement d'obtenir  $(mk + k - n) \cdot \mathbf{1}_X \leq \sum_{i=1}^n \psi_i$  et  $\sum_{i=1}^n g_i \cdot \psi_i \leq mk \cdot \mathbf{1}_X$ , d'où le résultat en prenant  $k$  égal à  $n+1$ . ■

Dans le cadre du paradoxe de Banach-Tarski (en supposant le théorème de Hahn-Banach réalisé), ou plus généralement celui où  $F_2$  opère librement sur un ensemble  $X$ , on peut supposer  $m=1, n=4$ : par suite, on obtient que  $6X \leq_{F_2} 5X$  dans  $S(X, \mathbb{Z})$  (avec 4 morceaux). Ce résultat n'est pas tout à fait satisfaisant, car il n'est pas connu si le théorème de Hahn-Banach entraîne la "règle de simplification" (voir [10]) dans  $S(X, \mathbb{Z})/G$  ( $G$  opérant sur  $X$ ). Cependant, dans ce cas particulier, le problème fut résolu indépendamment — et simultanément — par Janusz Pawlikowski, qui put conclure  $X \equiv_{F_2} 2X$  (voir [8] pour plus de détails.)

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] S. BANACH et A. TARSKI, "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes", *Fundamenta Mathematicae* 6, pp 244-277 (1924).
- [2] J. DIXMIER, "Les moyennes invariantes dans les semigroupes et leurs applications", *Acta Scientiarum Mathematicarum*, tome 12, pp 213-227 (1950)
- [3] M. FOREMAN et F. WEHRUNG, "The Hahn-Banach theorem implies the existence of a non-measurable set", à paraître dans *Fundamenta Mathematicae*.
- [4] F. GREENLEAF, "Invariant means on topological groups", Van Nostrand, Reinhold Company (1969).
- [5] P.R. HALMOS, "Measure theory", Van Nostrand, Reinhold Company (1950).
- [6] T. JECH, "The axiom of choice", North Holland Publishing Company (1973).
- [7] W.A.J. LUXEMBURG, "Reduced products of the real number system", *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt Reinboud and Winston, (1969).
- [8] J. PAWLIKOWSKI, "The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox", à paraître.

- [9] D. PINCUS, “The strength of the Hahn-Banach theorem”, Victoria Symposium of Non-Standard Analysis, Springer Lecture Notes n<sup>o</sup>369, pp 203-248 (1974).
- [10] S.WAGON, “The Banach-Tarski paradox”, Cambridge University Press (1984).
- [10] F. WEHRUNG, “Théorème de Hahn-Banach et paradoxes continus et discrets”, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Série I, pp. 303-306, 1990.