



Treillis bi-locaux équationnellement compacts

Friedrich Wehrung

► To cite this version:

Friedrich Wehrung. Treillis bi-locaux équationnellement compacts. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1994, 318, pp.5-9. hal-00004678

HAL Id: hal-00004678

<https://hal.science/hal-00004678>

Submitted on 12 Apr 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Treillis bi-locaux équationnellement compacts

Friedrich WEHRUNG

Résumé - Un treillis distributif complet est bi-local quand il satisfait les lois de distributivité infinie et de distributivité infinie duale. Nous résolvons ici par la négative un problème de G. Grätzer, qui était de prouver que tout treillis bi-local est équationnellement compact. En fait, nous montrons qu'il existe des treillis bi-locaux non équationnellement compacts pour 3 variables. Par contraste, il était déjà connu que tout treillis bi-local est équationnellement compact pour 2 variables. Notre contreexemple est construit comme un certain sous-treillis complet de l'algèbre de Boole complète des ouverts réguliers d'un certain espace Polonais.

Equationally compact bi-frames

Abstract. *A complete distributive lattice is a bi-frame when it satisfies both the infinite distributive law and its dual. We solve here negatively a problem by G. Grätzer, which was to prove that every bi-frame is equationally compact. In fact, we prove that there exists a bi-frame that is not even 3-variable equationally compact. By contrast, it was already known that every bi-frame is 2-variable equationally compact. Our counterexample is constructed as a certain sub-complete lattice of the complete Boolean algebra of regular open subsets of a certain Polish space.*

Abridged English version - Define as in [8, page 284] a *bi-frame* to be a complete lattice A such that for every element a of A and every A -valued family $(x_i)_{i \in I}$, we have $a \wedge \bigvee_{i \in I} x_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge x_i)$ and $a \vee \bigwedge_{i \in I} x_i = \bigwedge_{i \in I} (a \vee x_i)$. The goal of this Note is to announce the following result, settling a problem posed by G. Grätzer [5, problem II.23]:

THEOREM 1. - *There exists a non-equationally compact bi-frame.*

We first recall some definitions. Let $\mathfrak{m}$ be a cardinal number. An algebra $\mathfrak{A}$ (*i.e.* a nonempty set A endowed with operations from finite powers of A to A) is *$\mathfrak{m}$ -variable equationally compact* when any set of equations with parameters from A and at most $\mathfrak{m}$ unknowns that is finitely solvable in $\mathfrak{A}$ is solvable in $\mathfrak{A}$ (*see* [1, 14, 15]). It is well-known that topologically compact algebras, *i.e.* those algebras carrying a compact Hausdorff topology for which the operations are continuous, are equationally compact, as well as their retracts (the converse is false, *see* [7]). In fact, equational compactness can be considered as an algebraic substitute of topological compactness when the latter is missing.

In the case of ordered structures which are in some sense *complete*, topological compactness is rather unusual [3, 13], while it turns out that equational compactness is almost the general rule [2, 6, 10], even for structures arising from ordered groups [16, 17, 18].

The question to know whether bi-frames are equationally compact was stated in [5, problem II.23]. Positive evidence for this has been provided by [9] and [11], where D. Kelly and K.A. Nauryzbaev proved respectively that bi-frames are 1-variable equationally compact and 2-variable equationally compact.

If X and Y are sets, we will denote by $^X Y$ the set of all maps from X to Y . We will also denote by ω the set of all natural numbers, and we will identify every natural number with the set of all its (strict) predecessors. If $(P, \leq)$ is a partially preordered set

and X is a subset of P , we will write $\downarrow X = \{y \in P : (\exists x \in X)(y \leq x)\}$ and we will say that X is a *lower set* when $X = \downarrow X$. Throughout this paper, P will be the 6-element set $\{p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2\}$ endowed with the partial ordering $\leq$ defined by $p < q$ if and only if there exist i and j in $\{0, 1, 2\}$ such that $i \neq j$ and $p = p_i$ and $q = q_j$. For every set D and every element d of D , we will denote by π_d^D the d -th projection from ${}^D P$ to P .

The main combinatorial lemma about P is the following

LEMMA 2. - Let $f : P \times P \rightarrow P$ be an increasing map satisfying $(\forall i < 3)(f(q_i, q_i) \leq q_i)$. Then f is a projection, i.e. $f = \pi_0^2$ or $f = \pi_1^2$.

For every x in P and every set T , denote by $x \cdot T$ the constant function with domain T and value x . Then, one can prove the following lemma:

LEMMA 3. - Let D be an arbitrary nonempty set, let $f : {}^D P \rightarrow P$ be an increasing map such that for all $i < 3$, $f(q_i \cdot D) \leq q_i$. Let $\mathcal{U}^f$ be the set of those subsets X of D such that $f(x \cdot X \cup y \cdot \complement X) = x$. Then $\mathcal{U}^f$ is a ultrafilter on D , and for all s in ${}^D P$, we have $f(s) = \lim_{\mathcal{U}^f} s$. In particular, if D is finite, then f is a projection.

Now, endow $\mathcal{P}^*(P) = \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$ with the preordering $\leq$ defined by

$$(*) \quad X \leq Y \iff [(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x \leq y) \text{ and } (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(x \leq y)].$$

Let $\mathcal{D}$ be the (countable) set of all decreasing sequences of elements of $\mathcal{P}^*(P)$ endowed with the product preordering of $(*)$ and the discrete topology, and let Ω be the closed subset of ${}^\omega P \times \mathcal{D}$ defined by

$$\Omega = \{(x, X) \in {}^\omega P \times \mathcal{D} : (\forall n \in \omega)(x(n) \in X(n))\}.$$

Then one can prove that the set $\mathbb{E}$ of regular open lower subsets of Ω is a complete sublattice of the Boolean algebra $\mathbb{B}$ of regular open subsets of Ω , thus a bi-frame.

For all $i < 3$, put $A_i = \downarrow\{q_i\}$. For every subset Q of P and every m in ω , put

$$Q^{(m)} = \{(x, X) \in \Omega : X(m) \subseteq Q\} \quad \text{and} \quad Q^m = \{(x, X) \in \Omega : x(m) \in Q\}.$$

Consider the following equation system (where $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ is an abbreviation for $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x}$), with parameters from $\mathbb{E}$:

$$(**) \quad \begin{cases} A_0^{(m)} \leq \mathbf{x}_0 \\ A_1^{(0)} \leq \mathbf{x}_1 \\ A_2^{(0)} \leq \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 = \emptyset \\ \mathbf{x}_0 \vee \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 = \Omega \end{cases} \quad (\text{all } m \text{ in } \omega)$$

Then, using in particular a topological version of lemma 3, one can prove that $(**)$ is finitely solvable in $\mathbb{E}$ but not solvable in $\mathbb{E}$, thus proving theorem 1, and even that $\mathbb{E}$ is not 3-variable equationally compact for *countable* equation systems.

Définissons un treillis *bi-local* comme un treillis complet A tel que pour tout élément a de A et toute famille $(x_i)_{i \in I}$ à valeurs dans A , l'on ait $a \wedge \bigvee_{i \in I} x_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge x_i)$ et $a \vee \bigwedge_{i \in I} x_i = \bigwedge_{i \in I} (a \vee x_i)$. Le but de cette Note est d'annoncer le résultat suivant, résolvant ainsi un problème posé par G. Grätzer [5, problem II.23]:

THÉORÈME 1. - *Il existe un treillis bi-local non équationnellement compact.*

Nous rappelons d'abord quelques définitions. Soit $\mathfrak{m}$ un cardinal. Une algèbre $\mathfrak{A}$ (*i.e.* un ensemble non vide A muni de fonctions définies sur des puissances finies de A à valeurs dans A) est *équationnellement compacte pour $\mathfrak{m}$ variables* quand tout ensemble d'équations à paramètres dans A et au plus $\mathfrak{m}$ inconnues dont toute partie finie est résoluble dans A (nous dirons *finiment résoluble*) est résoluble dans A (*voir* [1, 14, 15]). Il est bien connu que toute algèbre topologiquement compacte, *i.e.* munie d'une topologie compacte pour laquelle les opérations de $\mathfrak{A}$ sont continues, est équationnellement compacte, ainsi que tous ses rétractes (la réciproque est fausse, *voir* [7]). En fait, la compacité équationnelle peut être considérée comme un substitut algébrique à la compacité topologique, en particulier quand cette dernière est absente.

Dans le cas des structures ordonnées satisfaisant certaines propriétés de *complétude*, la compacité topologique n'est pas la règle générale, en particulier pour les algèbres de Boole [3, 13], alors qu'il se trouve que la compacité équationnelle est souvent la règle générale [2, 6, 10], même pour des structures venant des groupes ordonnés [16, 17, 18].

La question de savoir si tout treillis bi-local était équationnellement compact fut posée explicitement dans [5, problem II.23]. Deux importantes indications que la solution pouvait être positive furent respectivement [9] et [11], où D. Kelly et K.A. Nauryzbaev prouvèrent respectivement que tout treillis bi-local est équationnellement compact pour 1 variable et pour 2 variables. Nous allons ici indiquer la construction d'un treillis bi-local qui n'est pas équationnellement compact pour 3 variables, et nous renvoyons à [19] pour les preuves complètes.

Pour tous ensembles X et Y , nous noterons $^X Y$ l'ensemble des applications de X vers Y . Nous noterons ω l'ensemble des entiers naturels, et nous identifierons tout entier naturel avec l'ensemble de ses prédécesseurs. Pour tout ensemble préordonné $(P, \leq)$ et toute partie X de P , nous écrirons $\downarrow X = \{y \in P : (\exists x \in X)(y \leq x)\}$ et nous dirons que X est *initial* quand $X = \downarrow X$. Dans cette Note, P sera l'ensemble à 6 éléments $\{p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2\}$ muni de la relation d'ordre définie par $p < q$ si et seulement si il existe i et j dans $\{0, 1, 2\}$ tels que $i \neq j$ et $p = p_i$ et $q = q_j$. Pour tout ensemble D et tout élément d de D , nous noterons π_d^D la d -ième projection de $^D P$ sur P .

Une propriété combinatoire essentielle de P est le lemme suivant:

LEMME 2. - *Soit $f : P \times P \rightarrow P$ une application croissante telle que pour tout i dans $\{0, 1, 2\}$, l'on ait $f(q_i, q_i) \leq q_i$. Alors f est une projection, i.e. $f = \pi_0^2$ ou $f = \pi_1^2$.*

Pour tout x dans P et tout ensemble T , notons $x \cdot T$ la fonction constante de domaine T et de valeur x . En utilisant le lemme précédent et le fait que P n'est pas réduit à un élément, l'on peut alors montrer le théorème suivant:

LEMME 3. - Soit D un ensemble non vide, soit $f : {}^D P \rightarrow P$ une application croissante telle que pour tout $i < 3$, l'on ait $f(q_i \cdot D) \leq q_i$. Définissons $\mathcal{U}^f$ par

$$\mathcal{U}^f = \{X \subseteq D : (\forall x, y \in P)(f(x \cdot X \cup y \cdot \complement X) = x)\}.$$

Alors $\mathcal{U}^f$ est un ultrafiltre sur D , et pour tout s dans ${}^D P$, on a $f(s) = \lim_{\mathcal{U}^f} s$. En particulier, si D est fini, alors f est une projection.

Munissons alors $\mathcal{P}^*(P) = \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$ de la relation de préordre $\leq$ définie par

$$(*) \quad X \leq Y \iff [(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x \leq y) \text{ et } (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(x \leq y)].$$

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble (dénombrable) de toutes les suites décroissantes d'éléments de $\mathcal{P}^*(P)$ muni de l'ordre produit de celui défini par $(*)$ et de la topologie discrète, et soit Ω la partie fermée de ${}^\omega P \times \mathcal{D}$ définie par

$$\Omega = \{(x, X) \in {}^\omega P \times \mathcal{D} : (\forall n \in \omega)(x(n) \in X(n))\}.$$

Par suite, Ω est un espace Polonais. Munissons Ω du préordre produit, *i.e.* défini par

$$(x, X) \leq (y, Y) \iff (x \leq y \text{ et } X \leq Y).$$

L'on peut alors montrer le lemme suivant:

LEMME 4. - Soit $\mathbb{B}$ l'algèbre de Boole complète des ouverts réguliers de Ω . Alors l'ensemble $\mathbb{E}$ des ouverts réguliers initiaux de Ω est un sous-treillis de $\mathbb{B}$, clos par les opérations de borne supérieure et de borne inférieure arbitraire. Par suite, c'est un treillis bi-local.

Pour tout $i < 3$, posons $A_i = \downarrow\{q_i\}$. Pour toute partie Q de P et tout entier naturel m , posons

$$Q^{(m)} = \{(x, X) \in \Omega : X(m) \subseteq Q\} \quad \text{and} \quad Q^m = \{(x, X) \in \Omega : x(m) \in Q\}.$$

Par suite, $Q^{(m)}$ et Q^m sont des ouverts fermés (donc *a fortiori* des ouverts réguliers) de Ω . Considérons le système d'équations suivant (où $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ est une abréviation de $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x}$), à trois inconnues $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ et à paramètres dans $\mathbb{E}$:

$$(**) \quad \begin{cases} A_0^{(m)} \leq \mathbf{x}_0 & (\text{tout } m \text{ dans } \omega) \\ A_1^{(0)} \leq \mathbf{x}_1 \\ A_2^{(0)} \leq \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 = \emptyset \\ \mathbf{x}_0 \vee \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 = \Omega \end{cases}$$

En considérant pour tout m le triplet $\langle A_0^m, A_1^m, A_2^m \rangle$, il est facile de voir que $(**)$ est finiment résoluble dans $\mathbb{E}$.

Cependant, supposons qu'il existe une solution $\langle \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle$ de $(**)$ dans $\mathbb{E}$. Alors $\Omega^* = \mathbf{X}_0 \cup \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_2$ est un ouvert dense initial de Ω , et il existe une unique application f de Ω^* vers P telle que pour tout $\mathbf{x}$ dans Ω^* et tout $i < 3$, l'on ait

$$f(\mathbf{x}) \leq q_i \iff \mathbf{x} \in \mathbf{X}_i.$$

Pour tous p, q dans P , notons $[p, q]$ la suite constante de valeur $\{p, q\}$. L'on peut alors montrer le lemme suivant ($\mathcal{P}(\omega)$ est muni de sa topologie naturelle, homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor):

LEMME 5. - L'ensemble $\mathcal{B} = \{I \subseteq \omega : (\forall p, q \in P)((p \cdot I \cup q \cdot \mathbb{C}I, [p, q]) \in \Omega^*)\}$ est un ouvert dense de $\mathcal{P}(\omega)$.

Soit alors $\mathcal{U} = \{I \subseteq \omega : f_I = \pi_0^2\}$. L'on peut montrer que $\mathcal{U}$ a la propriété de Baire, et que pour un ensemble résiduel de couples (I, J) dans $\mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega)$, l'on a $I \notin \mathcal{U} \iff \mathbb{C}I \in \mathcal{U}$, $I \in \mathcal{U} \Rightarrow I \cup J \in \mathcal{U}$ et enfin $(I \in \mathcal{U} \text{ et } J \in \mathcal{U}) \Rightarrow I \cap J \in \mathcal{U}$. Cette propriété s'avère suffisante, avec une preuve inspirée de celle du résultat classique que tout ultrafiltre sur ω ayant la propriété de Baire est principal, pour montrer le lemme suivant (dont la conclusion pourrait s'énoncer: " $\mathcal{U}$ est principal presque partout"):

LEMME 6. - Il existe un entier naturel n tel que l'ensemble des éléments I de $\mathcal{P}(\omega)$ tels que $I \in \mathcal{U}$ si et seulement si $n \in I$ soit résiduel dans $\mathcal{P}(\omega)$.

Désormais, fixons l'entier naturel n du lemme 6, et posons $m = n + 1$. Pour tous éléments p, q, r de P , soit $X(p, q, r)$ l'élément de $\mathcal{D}$ défini par $X(p, q, r)(k) = \{p, q, r\}$ si $k < m$ et $X(p, q, r)(k) = \{q, r\}$ si $k \geq m$.

LEMME 7. - L'ensemble suivant:

$$\mathcal{B}'' = \{I \subseteq \omega \setminus m : (\forall p, q, r \in P)((p \cdot m \cup q \cdot I \cup r \cdot (\omega \setminus m \setminus I), X(p, q, r)) \in \Omega^*)\}$$

est un ouvert dense de $\mathcal{P}(\omega \setminus m)$.

En utilisant le fait que m est strictement supérieur à n , l'on obtient alors le lemme suivant:

LEMME 8. - Pour tout I dans $\mathcal{B}''$ et tous p, q, r dans P , on a

$$f(p \cdot m \cup q \cdot I \cup r \cdot (\omega \setminus m \setminus I), X(p, q, r)) = p.$$

Puisque $\mathcal{B}''$ est non vide, l'on obtient, en posant $p = p_0$ et $q = r = q_0$, que

$$f(p_0 \cdot m \cup q_0 \cdot (\omega \setminus m), X(p_0, q_0, q_0)) = p_0.$$

Par ailleurs, $(p_0 \cdot m \cup q_0 \cdot (\omega \setminus m), X(p_0, q_0, q_0))$ appartient à $A_0^{(m)}$, son image par f est donc majorée par q_0 , ce qui est une contradiction. Ainsi, nous pouvons conclure que $\mathbb{E}$

n'est pas équationnellement compact, d'où le théorème 1, et même le fait que $\mathbb{E}$ n'est pas équationnellement compact pour 3 variables pour les systèmes *dénombrables* d'équations.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- [1] B. BANASCHEWSKI *et* E. NELSON, "Equational compactness in equational classes of algebras", *Algebra Universalis* **2** (1972), pp. 152-165.
- [2] S. BULMAN-FLEMING, I. FLEISCHER *and* K. KEIMEL, "The semilattices with distinguished endomorphisms which are equationally compact", *Proceedings of the American Mathematical Society* **73** (1979), n°1, pp. 7-10.
- [3] S. GĂINĂ, "Order topologies in Boolean algebras", *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* **17**, n°2 (1972), pp. 243-251.
- [4] G. GIERZ, K.H. HOFMANN, K. KEIMEL, J.D. LAWSON, M. MISLOVE *et* D.S. SCOTT, "A compendium of continuous lattices", Springer-Verlag, 1980.
- [5] G. GRÄTZER, "General Lattice Theory", Birkhäuser Verlag, Basel, 1978.
- [6] G. GRÄTZER *et* H. LAKSER, "Equationally compact semilattices", *Colloq. Math.* **20**, n°1 (1969), pp. 27-30.
- [7] D. K. HALEY, "Equational compactness in rings", Lecture Notes in Mathematics 745, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1979.
- [8] P. JOHNSTONE, "Stone spaces", Cambridge University Press, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3, 1982.
- [9] D. KELLY, "A note on equationally compact lattices", *Algebra Universalis* **2**, n°1 (1972), pp. 80-84.
- [10] S. KOPPELBERG, "General theory of Boolean Algebras", *dans* "Handbook of Boolean Algebras", vol. **1**, pp. 1-307, édité par J.D. Monk avec R. Bonnet, Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [11] K.A. NAURYZBAEV, "Equationally compact distributive lattices", *Algebra and Logic* **25** (1986), n°5, pp. 369-379; traduit de *Algebra i Logica*, vol. **25**, n°5 (Septembre-Octobre 1986), pp. 584-599.
- [12] J. OXTOBY, "Measure and category", Graduate Texts in Mathematics 2, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1971.
- [13] P.S. REMA, "On compact topological lattices", *Mathematica Japonica* **9** (1964), n°2, pp. 93-98.
- [14] W. TAYLOR, "Some constructions of compact algebras", *Annals of Mathematical Logic*, vol. **3**, n°4 (1971), pp. 395-437.
- [15] B. WEGLORZ, "Equationally compact algebras (I)", *Fundamenta Mathematicæ* **59** (1966), pp. 289-298.
- [16] F. WEHRUNG, "Boolean universes above Boolean models", *Journal of Symbolic Logic* (à paraître).
- [17] F. WEHRUNG, "A compactness property of Dedekind σ -complete f -rings", *préprint*.
- [18] F. WEHRUNG, "Bounded atomic compactness of ordered groups", *préprint*.
- [19] F. WEHRUNG, "Equational compactness of bi-frames and projection algebras", *préprint*.

Université de Caen, département de Mathématiques, 14032 Caen Cedex.