



HAL
open science

La singularité de O'Grady

Manfred Lehn, Christoph Sorger

► **To cite this version:**

| Manfred Lehn, Christoph Sorger. La singularité de O'Grady. 2005. hal-00004658v1

HAL Id: hal-00004658

<https://hal.science/hal-00004658v1>

Preprint submitted on 8 Apr 2005 (v1), last revised 30 Mar 2006 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA SINGULARITÉ DE O'GRADY

MANFRED LEHN & CHRISTOPH SORGER

RÉSUMÉ. Soit M_{2v} l'espace de modules des faisceaux semi-stables de vecteur de Mukai $2v$ sur une surface K3 ou abélienne où v est primitif tel que $\langle v, v \rangle = 2$. Nous montrons que l'éclatement de M_{2v} le long de son lieu singulier réduit fournit une résolution symplectique des singularités. Ceci donne une description directe des résolutions de O'Grady de $M_{K3}(2, 0, 4)$ et $M_{Ab}(2, 0, 2)$.

ABSTRACT. Let M_{2v} be the moduli space of semistable sheaves with Mukai vector $2v$ on an abelian or K3 surface where v is primitive such that $\langle v, v \rangle = 2$. We show that the blow-up of the reduced singular locus of M_{2v} provides a symplectic resolution of singularities. This gives a direct description of O'Grady's resolutions of $M_{K3}(2, 0, 4)$ and $M_{Ab}(2, 0, 2)$.

1. L'ESPACE DE MODULES DE O'GRADY

Il est notoirement difficile de produire des variétés holomorphiquement symplectiques irréductibles compactes. À déformation près, il y a les deux séries infinies trouvées par A. Beauville [1], à savoir les schémas de Hilbert des points sur une surface K3 et les variétés de Kummer généralisées associées à une surface abélienne, et les deux exemples isolés construits par O'Grady ([6], [7]).

Selon Mukai, les espaces de modules de faisceaux stables sur une surface K3 ou abélienne sont lisses et munis d'une forme symplectique holomorphe. Si les paramètres numériques, à savoir le rang et les classes de Chern, sont choisis de façon à ce qu'il n'existe pas de faisceau strictement semi-stable, les espaces de Mukai sont compacts mais se déforment dans les exemples de Beauville.

La stratégie de O'Grady est de considérer certains espaces de modules singuliers puis de les résoudre symplectiquement si possible. La résolution de O'Grady est relativement compliquée : elle consiste en deux éclatements suivis d'une contraction sur un schéma de paramètres muni d'une action d'un groupe de reparamétrisation où il faut tenir compte à chaque étape du comportement de la semi-stabilité des points sous-jacents.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14J60 ; Secondary 14D20, 14J28.

Nous montrons ici que l'éclatement du lieu singulier réduit de l'espace de modules fournit directement une résolution symplectique des singularités.

Soit X une surface projective lisse de type $K3$ ou abélien. Soit de plus $v \in H^{\text{pair}}(X, \mathbb{Z})$ et soit M_v l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur X par rapport à un diviseur ample H et ayant vecteur de Mukai v (voir section 2).

Théorème 1.1. — *Soit $v \in H^{\text{pair}}(X, \mathbb{Z})$ un élément primitif avec $\langle v, v \rangle = 2$ et H un diviseur ample $2v$ -générique. Alors l'éclatement de M_{2v} le long de son lieu singulier réduit est une résolution symplectique des singularités.*

Les hypothèses du théorème couvrent à la fois les exemples de O'Grady [6, 7] et aussi celles, similaires, de Rapagnetta [8].

Le plan de la démonstration est le suivant. Nous étudions d'abord la structure locale de l'espace de modules. Les singularités de l'espace de modules proviennent à la fois du passage au quotient par l'action des groupes d'automorphismes et du comportement de l'application de Kuranishi. Nous nous plaçons ensuite en la singularité la plus mauvaise, remplaçons l'application de Kuranishi par sa partie quadratique puis calculons explicitement le quotient ainsi simplifié. La singularité que nous obtenons ainsi est très connue : c'est la contraction de la section nulle du fibré cotangent de la grassmannienne symplectique de dimension 3. En utilisant cette résolution, on montre que la singularité est rigide au sens qu'il n'existe pas de déformation du modèle local simplifié qui respecte les singularités génériques. Nous en déduisons que la déformation de la singularité originelle vers son cône tangent donne un isomorphisme analytique de celle-ci avec le modèle simplifié. Ce dernier isomorphisme peut se déduire aussi de [4], mais l'argument donné ici est à la fois plus élémentaire et plus simple.

On voit ainsi que l'éclatement du lieu singulier réduit donne une résolution semi-petite des singularités de M_{2v} . Il est connu que la forme symplectique s'étend sur l'image réciproque de la partie générique du lieu singulier qui consiste en des singularités de type A_1 (cf. [6]). Cette forme s'étend partout pour des raisons de codimension.

Remerciements : Nous remercions Duco van Straten qui nous a suggéré le foncteur de déformation de la section 4 ainsi que Theo de Jong et Dmitry Kaledin pour les discussions constructives. Nous avons fait des expériences, dans un travail préliminaire, avec Singular et nous remercions Gert-Martin Greuel pour son aide avec ce logiciel.

2. LA STRUCTURE LOCALE DE L'ESPACE DE MODULES

Soit X une surface projective lisse munie d'un diviseur ample H . Soit M l'espace de modules des faisceaux H -semi-stables sur X de rang et de classes de Chern fixés. On sait que les points de M sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de faisceaux poly-stables, i.e. somme directe de faisceaux stables. Soit E un tel faisceau et soit $\text{Ext}^p(E, E)_0$ la partie sans trace du $\text{Ext}^p(E, E)$. Alors on a la description suivante de la structure locale de M en $[E]$. Il y a une application analytique, dite de *Kuranishi*,

$$k : (\text{Ext}^1(E, E), 0) \rightarrow \text{Ext}^2(E, E)_0,$$

telle que

1. L'application k est équivariante par rapport à l'action de $\text{Aut}(E)$ sur $\text{Ext}^p(E, E)$ par conjugaison.
2. L'application k n'a pas de partie constante ou linéaire et la partie quadratique k_2 de k est donnée par le produit de Yoneda $k_2(e) = e \cup e$.
3. On a un isomorphisme analytique $(M, [E]) \cong (k^{-1}(0), 0) // \text{Aut}(E)$.

À partir de maintenant, X sera une surface K3 ou abélienne. On appelle

$$v(F) := \text{ch}(F) \sqrt{\text{td}(X)} \in H^{\text{pair}}(X, \mathbb{Z})$$

le vecteur de Mukai du faisceau cohérent F . On a un accouplement sur $H^{\text{pair}}(X, \mathbb{Z})$ donné par

$$\langle v, w \rangle = - \int_X v w^\vee$$

où $a \mapsto a^\vee$ désigne l'involution sur $H^{\text{pair}}(X, \mathbb{Z})$ définie par $a^\vee = (-1)^{\deg(a)/2}$.

Soit $v = (r, c_1, a) \in H^{\text{pair}}(X, \mathbb{Z})$ un élément primitif avec $\langle v, v \rangle = 2$ et $c_1 \in NS(X)$. On suppose aussi que $r > 0$, ou que $r = 0$, c_1 est effectif et $a \neq 0$. Un diviseur ample H est appelé $2v$ -générique si pour tout faisceau F semi-stable par rapport à H avec $v(F) = 2v$, et tout sous-faisceau $F' \subset F$ déstabilisant, on a $v(F') \in \mathbb{Q}v(F)$. Il est connu que de tels diviseurs existent dans notre cas (voir [3] et ses références et [10] sections 1.4 et 8 respectivement).

On fixe dorénavant un diviseur ample $2v$ -générique H . Sous cette hypothèse, M_v est lisse de dimension $2 + \langle v, v \rangle = 4$, et est non vide grâce aux résultats de Yoshioka ([10] Théorèmes 0.1 et 8.1, [11] Remarque 3.4; le cas manquant dans ces références où $r = 0$ et c_1 serait non nef nous a été communiqué par Yoshioka).

Grâce à la primitivité de v et la généralité du diviseur ample, seuls les trois types suivants de faisceaux poly-stables apparaissent dans $M = M_{2v}$: soit

E est stable ; soit $E = F_1 \oplus F_2$ avec $F_1, F_2 \in M_v$ stables et non-isomorphes ; soit $E = F \oplus F$ avec $F \in M_v$ stable. Ces types correspondent aux strates de la stratification $M \supset S^2 M_v \supset M_v$. L'analyse locale ci-dessus près de M_v montre que M n'est pas vide et est de dimension $2 + \langle 2v, 2v \rangle = 10$. De plus M est singulier exactement le long de $S^2 M_v$.

Soit E de la forme $F^{\oplus 2}$ avec F un faisceau stable, correspondant à un point $[F \oplus F] \in M_{2v}$. Sous ces hypothèses on a $\text{Ext}^1(E, E) = \text{Ext}^1(F, F) \otimes \mathfrak{gl}_2$, $\text{Ext}^2(E, E)_0 = \mathfrak{sl}_2$ et $\text{Aut}(E) = \text{GL}_2$. De plus, le produit de Yoneda définit une structure symplectique sur l'espace $V := \text{Ext}^1(F, F) \cong \mathbb{C}^4$:

$$(2.1) \quad \omega : \text{Ext}^1(F, F) \times \text{Ext}^1(F, F) \xrightarrow{\cup} \text{Ext}^2(F, F) \xrightarrow{\text{trace}} H^2(\mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$$

Avec ces notations la partie quadratique de l'application de Kuranishi $k_2 : \text{Ext}^1(F, F) \otimes \mathfrak{gl}_2 \rightarrow \mathfrak{sl}_2$ s'écrit comme suit :

$$(2.2) \quad k_2\left(\sum_i e_i \otimes A_i\right) = \sum_{i,j} \omega(e_i, e_j)[A_i, A_j].$$

On observe que les composantes de k_2 sont des polynômes quadratiques. Dans les sections suivantes on va décrire explicitement $k_2^{-1}(0) // \text{GL}_2$ et sa résolution par un éclatement, puis on montrera qu'il existe un isomorphisme analytique des germes $(k^{-1}(0), 0) // \text{GL}_2 \cong (k_2^{-1}(0), 0) // \text{GL}_2$.

3. LA SINGULARITÉ

Soit $W = \mathfrak{sl}_2$ muni de la forme quadratique κ de Cartan-Killing et soit V un espace vectoriel de dimension 4 muni d'une forme symplectique ω . On identifie SL_2 avec $\text{SO}(W)$. Ainsi $\omega \otimes \kappa$ est une forme symplectique sur $V \otimes W$ préservée par les actions naturelles de $\text{Sp}(V)$ et $\text{SO}(W)$. Considérons les deux applications moment qui correspondent à ces actions :

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}(W^*, V) & \xrightarrow{\mu_V} & \mathfrak{sp}(V) \cong S^2 V \\ \mu_W \downarrow & & \\ \Lambda^2 W \cong \mathfrak{so}(W) & & \end{array}$$

Ces applications sont données comme suit :

$$(3.2) \quad \mu_V\left(\sum_i v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i,j} \kappa(w_i, w_j) v_i \cdot v_j,$$

$$(3.3) \quad \mu_W\left(\sum_i v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i,j} \omega(v_i, v_j) w_i \wedge w_j.$$

On voit que μ_W s'identifie à la restriction de k_2 sur $V \otimes W \subset V \otimes \mathfrak{gl}_2$ et que l'on obtient de cette façon une décomposition

$$(3.4) \quad k_2^{-1}(0) // \text{GL}_2 \cong V \times (\mu_W^{-1}(0) // \text{SO}(W)).$$

Il suffit donc d'étudier le quotient $\mu_W^{-1}(0)//\mathrm{SO}(W)$.

Lemme 3.1. — *Soit $Z \subset \mathfrak{sp}(V)$ la sous-variété des $B \in \mathfrak{sp}(V)$ tels que $B^2 = 0$. L'application μ_V induit un isomorphisme*

$$(3.5) \quad \mu_W^{-1}(0)//\mathrm{SO}(W) \xrightarrow{\sim} Z \subset \mathfrak{sp}(V).$$

Démonstration. Soit (v_1, \dots, v_4) une base symplectique de V telle que ω soit donnée par la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Écrivons $V \otimes W = W \oplus \dots \oplus W$. Alors

$$\mu_W(w_1, \dots, w_4) = w_1 \wedge w_2 + w_3 \wedge w_4.$$

Par le premier théorème fondamental de la théorie des invariants pour le groupe $\mathrm{SO}(W)$, le sous-anneau des invariants de l'anneau $\mathbb{C}[V \otimes W]$ des fonctions régulières sur $W^{\oplus 4}$ est engendré par les fonctions

$$(3.6) \quad X_{ij}(w_1, \dots, w_4) = \kappa(w_i, w_j), \quad i, j = 1, \dots, 4,$$

$$(3.7) \quad a_{ijk}(w_1, \dots, w_4) = \det(w_i, w_j, w_k), \quad i, j, k \text{ distincts.}$$

Les X_{ij} sont algébriquement indépendants; un produit de deux facteurs arbitraires des a_{ijk} s'exprime comme une forme cubique en les X_{ij} . Soit $\mathfrak{h} \subset \mathbb{C}[V \otimes W]$ l'idéal engendré par les composantes de $\mu_V(w_1, \dots, w_4)$. L'intersection $\mathfrak{h}' = \mathbb{C}[V \otimes W]^{\mathrm{SO}(W)} \cap \mathfrak{h}$ contient au moins les éléments suivants :

$$(3.8) \quad \kappa(w_1, \mu_W(w_1, \dots, w_4)) = \det(w_1, w_3, w_4) = a_{134} \text{ etc.,}$$

$$(3.9) \quad \det(w_i, w_j, \mu_W(w_1, \dots, w_4)) = X_{i1}X_{j2} - X_{i2}X_{j1} + X_{i3}X_{j4} - X_{i4}X_{j3} \\ =: Y_{ij}.$$

Comme \mathfrak{h}' contient tous les éléments a_{ijk} on voit que $\mu_W^{-1}(0)//\mathrm{SO}(W)$ se plonge dans S^2V par μ_V et que son image est contenue dans le sous-schéma défini par les éléments Y_{ij} .

Observons maintenant que l'isomorphisme $S^2V \rightarrow \mathfrak{sp}(V)$ est donné par $X \mapsto B := \Omega X$ et que sous cette identification les éléments Y_{ij} ne sont autres que les entrées de la matrice B^2 . On verra plus bas que Z est irréductible de dimension 6. Par ailleurs, une inspection directe des équations montre que Z est réduite. L'immersion $\mu_W^{-1}(0)//\mathrm{SO}(W) \rightarrow Z \subset \mathfrak{sp}(V)$ doit donc être un isomorphisme. \square

4. LA RÉOLUTION

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension 4 muni d'une forme symplectique ω . On désigne par G la grassmannienne des sous-espaces vectoriels $U \subset V$ de V isotropes maximaux. La variété G est isomorphe à la

sous-variété de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V^*) = \mathbb{P}^5$ définie par l'équation quadratique $\varphi \wedge \varphi = 0$ et l'équation linéaire $\omega(\varphi) = 0$ avec $\varphi \in \Lambda^2 V$. Soit $\mathcal{U} \subset V \otimes \mathcal{O}_G$ le sous-fibré tautologique. Comme ω est non-dégénérée et les fibres de \mathcal{U} sont isotropes par construction, ω induit un accouplement parfait $(V \otimes \mathcal{O}_G / \mathcal{U}) \otimes \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}_G$. On obtient ainsi la suite exacte tautologique

$$(4.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_G \longrightarrow \mathcal{U}^* \longrightarrow 0.$$

Le fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}^*, \mathcal{U})$ est la restriction à G du fibré cotangent de $\mathrm{Grass}(2, V)$; le fibré cotangent T^*G de G s'identifie avec le sous-fibré des formes symétriques sur \mathcal{U}^* .

Soit $Z \subset \mathfrak{sp}(V)$ la sous-variété des $B \in \mathfrak{sp}(V)$ tels que $B^2 = 0$. Soit $b : V \otimes \mathcal{O}_Z \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_Z$ l'homomorphisme canonique qui en $B \in Z$ multiplie par B . Le lieu singulier Z_{sing} de Z consiste en les B ayant rang ≤ 1 . Autrement dit, le faisceau d'idéaux $J \subset \mathcal{O}_Z$ de Z_{sing} est engendré par les coefficients de $\Lambda^2 b$, c'est-à-dire les 2×2 -mineurs de b .

On sait qu'on obtient une résolution de Z de la manière suivante. Soit $\tilde{Z} \subset Z \times G$ la sous-variété des paires (B, U) telles que $B(U) = 0$. Désignons par $\sigma : \tilde{Z} \rightarrow Z$ et $\pi : \tilde{Z} \rightarrow G$ les deux projections canoniques. Par construction, pour un élément $(B, U) \in \tilde{Z}$, l'endomorphisme $B : V \rightarrow V$ se factorise comme suit

$$(4.2) \quad V \longrightarrow U^* \xrightarrow{\bar{B}} U \longrightarrow V$$

où \bar{B} est une forme quadratique sur U^* . On voit ainsi que $\pi : \tilde{Z} \rightarrow G$ est isomorphe à la projection canonique $T^*G \rightarrow G$. Par conséquent, \tilde{Z} est lisse.

Le morphisme $\sigma : \tilde{Z} \rightarrow Z$ est une résolution semi-petite : la fibre de σ au-dessus d'un point $B \in Z$ de rang 1 est isomorphe à $\mathbb{P}((\mathrm{Ker} B / \mathrm{Im} B)^*) = \mathbb{P}^1$ et au-dessus de $B = 0$ isomorphe à G .

Théorème 4.1. — *La résolution $\sigma : \tilde{Z} \rightarrow Z$ est isomorphe à l'éclatement de Z le long de $Z_{\mathrm{sing}} \subset Z$.*

Démonstration. Par construction $\sigma^* b$ s'annule sur $\pi^* \mathcal{U}$. On obtient la factorisation

$$(4.3) \quad \sigma^* b : V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \longrightarrow \pi^* \mathcal{U}^* \xrightarrow{\bar{b}} \pi^* \mathcal{U} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$$

En passant à la puissance extérieure

$$(4.4) \quad \sigma^* \Lambda^2 b : \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{U}^* \xrightarrow{\Lambda^2 \bar{b}} \pi^* \det \mathcal{U} \longrightarrow \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$$

on voit que l'annulation de la section $\Lambda^2 \bar{b}$ du fibré inversible $\pi^*(\det \mathcal{U})^2$ équivaut à l'annulation de $\sigma^* \Lambda^2 b$. Par conséquent, si $\tilde{J} \subset \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$ désigne le

faisceau d'idéaux de $\sigma^{-1}(Z_{\text{sing}})$ on a

$$(4.5) \quad \tilde{J} = \sigma^{-1}J \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \cong \pi^*(\det U^*)^2 \cong \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V^*)}(2)$$

On observe par ailleurs que $\sigma_*(\mathcal{O}_{\tilde{Z}}) = \mathcal{O}_Z$ puisque les singularités de Z sont rationnelles. Considérons maintenant les inclusions

$$(4.6) \quad J \subset \sigma_*\tilde{J} \subset \mathcal{O}_Z$$

Les radicaux de J et $\sigma_*\tilde{J}$ coïncident. Comme J est radical, $J = \sigma_*\tilde{J}$. Selon le lemme suivant, on a également $J^n = \sigma_*(\tilde{J}^n)$. Ainsi

$$(4.7) \quad \tilde{Z} \cong \text{Proj}\left(\bigoplus \sigma_*(\tilde{J}^n)\right) = \text{Proj}\left(\bigoplus J^n\right) = \text{Bl}(Z).$$

□

Lemme 4.2. — *L'homomorphisme $(\sigma_*\tilde{J})^{\otimes n} \rightarrow \sigma_*(\tilde{J}^n)$ est surjectif.*

Démonstration. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T^*G & \xrightarrow{\pi} & G \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & * \end{array}$$

Observe que $H^0(Z, \sigma_*(\tilde{J}^n)) = H^0(G, \pi_*\pi^*\mathcal{O}(2n)) = H^0(G, S^*(T_G) \otimes \mathcal{O}(2n))$. Comme Z est affine, il suffit de montrer que

$$H^0(G, S^*(T_G) \otimes \mathcal{O}(2))^{\otimes n} \rightarrow H^0(G, S^*(T_G) \otimes \mathcal{O}(2n))$$

est surjectif. Pour cela, il suffit de voir que

$$H^0(G, \mathcal{O}(2)) \otimes H^0(G, S^k(T_G) \otimes \mathcal{O}(2n)) \rightarrow H^0(G, S^k(T_G) \otimes \mathcal{O}(2n+2))$$

est surjectif pour tout $k \geq 0$ et tout $n \geq 1$ ou encore que $S^k(T_G)$ est 2-régulier sur G au sens de Mumford-Castelnuovo [5]. Que $H^1(G, S^k(T_G)(1)) = 0$ est conséquence immédiat du théorème d'annulation de Griffiths [2]. L'annulation de $H^2(G, S^k(T_G))$ et de $H^3(G, S^k(T_G)(-1))$ se déduit des suites exactes

$$0 \longrightarrow S^{k-1}(\mathcal{O}_G(1)^{\oplus 5}) \longrightarrow S^k(\mathcal{O}_G(1)^{\oplus 5}) \longrightarrow S^k(T_{\mathbb{P}^4}|_G) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow S^k(T_G) \longrightarrow S^k(T_{\mathbb{P}^4}|_G) \longrightarrow S^{k-1}(T_{\mathbb{P}^4}|_G) \otimes \mathcal{O}_G(2) \longrightarrow 0.$$

□

5. RAPPEL SUR DES DÉFORMATIONS

On maintient les notations des sections précédentes. Le théorème 1.1 est une conséquence immédiate du théorème 4.1 et du théorème suivant :

Théorème 5.1. — *Il y a un isomorphisme des germes analytiques*

$$(5.1) \quad (M, [E]) \cong (V \times Z, 0).$$

Pour démontrer ce théorème on va construire une déformation du germe $(V \times Z, 0)$ dont la fibre générique est isomorphe à $(M, [E])$ puis on verra que cette déformation est en fait triviale. Ainsi toutes les fibres sont isomorphes.

Commençons par un rappel sur les déformations : Soit X un germe d'un espace analytique. Une déformation de X est une application plate $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ des germes d'espaces analytiques avec un isomorphisme explicite $\mathcal{X}_0 \cong X$ de la fibre spéciale. Soit $\text{Def}(X)$ le foncteur qui associe à une base S l'ensemble des déformations de X sur S modulo isomorphisme. L'espace tangent formel $\text{Def}(X)(\mathbb{C}[\varepsilon])$ est le germe d'un faisceau de \mathcal{O}_X -modules cohérent T_X^1 défini comme suit : Soit $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ donné par l'idéal $I \subset \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ et soit $\Phi : \mathcal{O}_X \langle \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n} \rangle \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(I/I^2, \mathcal{O}_X)$ l'homomorphisme naturel avec $\partial_{x_i} \mapsto (f \mapsto \partial_{x_i}(f))$. Alors $T_X^1 = \text{Coker}(\Phi)$.

Pour une hypersurface $X = \{f = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ le calcul de T_X^1 est simple : $T_X^1 = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}/(f, \partial_{x_1}f, \dots, \partial_{x_n}f)$. Par exemple, pour la singularité de type A_1 , $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$ on trouve $T_X^1 = \mathbb{C}$.

T_X^1 est un faisceau ayant pour support le lieu singulier de X . Donc si la singularité de X est isolée, T_X^1 est un espace vectoriel de dimension finie et le foncteur $\text{Def}(X)$ admet une *enveloppe* au sens de Schlessinger [9].

Pour traiter le cas d'une singularité non-isolée, on va considérer le sous-foncteur suivant de $\text{Def}(X)$: soit $\Sigma \subset X$ une partie fermée de X et $U = X \setminus \Sigma$ son ouvert complémentaire. On désigne par $\text{Def}_\Sigma(X)$ le sous-foncteur de $\text{Def}(X)$ des déformations qui induisent des déformations triviales localement sur U . Puisqu'une déformation d'un point non-singulier est automatiquement triviale on peut toujours supposer que $\Sigma \subset X_{\text{sing}}$. Le foncteur $\text{Def}_\Sigma(X)$ satisfait aux conditions H_1 et H_2 de Schlessinger [9]. Son espace tangent est le germe du sous-module $T_{X,\Sigma}^1 \subset T_X^1$ des sections qui s'annulent en dehors de Σ ou plus précisément, qui sont annulées par une puissance suffisamment grande de l'idéal de Σ . Si $T_{X,\Sigma}^1$ est de dimension finie, le foncteur $\text{Def}_Z(X)$ satisfait aussi à la condition H_3 de Schlessinger et a donc une enveloppe selon le théorème 2.11 de [9].

Dans l'application que nous envisageons on aura $T_{X,\Sigma}^1 = 0$. Dans ce cas, on dira que le couple (X, Σ) est *rigide*. Évidemment, l'enveloppe d'un couple rigide est triviale ; chaque déformation de (X, Σ) est donc triviale.

Lemme 5.2. — *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\Sigma \subset X_{\text{sing}}$ et $\dim(\Sigma) < \dim(X_{\text{sing}})$.
2. T_X^1 est pur.

Alors (X, Σ) est rigide.

Démonstration. Le sous-module $T_{X,\Sigma}^1 \subset T_X^1$ est supporté par Σ , un sous-espace de X_{sing} de dimension plus petite. Comme T_X^1 est pur par hypothèse, on a nécessairement $T_{X,\Sigma}^1 = 0$. \square

Exemple 5.3. — Le couple $(Z, \{0\})$ est rigide : en fait, on a vu que le lieu singulier de Z est isomorphe à $V/\pm 1$ et contient ainsi l'origine comme sous-espace propre. Pour appliquer le lemme 5.2 il reste à montrer que $T^1 Z$ est pur de dimension 4. Cela sera démontré par un calcul explicite dans la section 6.

Retournons à la singularité de l'espace de modules.

On rappelle que $k : (\text{Ext}^1(E, E), 0) \rightarrow \mathfrak{sl}_2$ désigne l'application de Kuranishi et k_2 sa partie quadratique. Soient $R = \mathcal{O}_{\text{Ext}^1(E, E), 0}$, $\mathcal{O}_{V \times Z, 0}$ et $\mathcal{O}_{M, [E]}$ les anneaux des germes des fonctions holomorphes. On désigne par \mathfrak{a} et \mathfrak{a}_0 les idéaux dans R engendrés par les composantes de k et de k_2 , respectivement. Grâce à l'invariance de k les idéaux \mathfrak{a} et \mathfrak{a}_0 sont invariants par rapport à l'action de $\text{Aut}(E) = \text{GL}_2$. Avec ces notations on a des isomorphismes

$$(5.2) \quad \mathcal{O}_{M, [E]} \cong (R/\mathfrak{a})^{\text{GL}_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{V \times Z, 0} \cong (R/\mathfrak{a}_0)^{\text{GL}_2}.$$

Grâce aux isomorphismes (5.2), pour montrer le Théorème 5.1, il s'agit de montrer que

$$(5.3) \quad (R/\mathfrak{a})^{\text{GL}_2} \cong (R/\mathfrak{a}_0)^{\text{GL}_2}.$$

ce que nous allons montrer par une étude de la déformation de R/\mathfrak{a} vers son cône tangent : Soit $\tilde{\mathfrak{a}} \subset R[t, t^{-1}]$ l'idéal engendré par les fonctions $\tilde{f}(x, t) := f(t \cdot x)$ pour $f \in \mathfrak{a}$ et soit $\mathfrak{a}' := \tilde{\mathfrak{a}} \cap R[t]$. Par définition, \mathfrak{a}' est invariant sous l'action de GL_2 et on a un isomorphisme GL_2 -équivariant

$$(5.4) \quad \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[t]} (R[t]/\mathfrak{a}') \cong \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} R/\mathfrak{a}.$$

Par construction, $R[t]/\mathfrak{a}'$ est $\mathbb{C}[t]$ -plat. Soit $S = (R[t]/\mathfrak{a}')^{\mathrm{GL}_2}$. Alors S est encore $\mathbb{C}[t]$ -plat et il y a un isomorphisme $S[t^{-1}] \cong \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes (R/\mathfrak{a})^{\mathrm{GL}_2}$. L'inclusion $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}'/t\mathfrak{a}'$ d'idéaux de R induit une surjection $(R/\mathfrak{a}_0)^{\mathrm{GL}_2} \rightarrow S/tS$. On sait que les anneaux $(R/\mathfrak{a}_0)^{\mathrm{GL}_2}$ et S/tS ont la même dimension. Comme l'anneau $(R/\mathfrak{a}_0)^{\mathrm{GL}_2}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{V \times Z, 0}$ il est intègre et le morphisme $(R/\mathfrak{a}_0)^{\mathrm{GL}_2} \rightarrow S/tS$ est donc un isomorphisme.

De cette manière on a construit une déformation S , plate sur $\mathbb{C}[t]$, de fibre spéciale $(R/\mathfrak{a}_0)^{\mathrm{GL}_2}$ et de fibre générique $(R/\mathfrak{a})^{\mathrm{GL}_2}$. En fait, S est un élément de $\mathrm{Def}_{V \times \{0\}}(V \times Z)(\mathbb{C}[t])$: on sait d'après la description globale de M que le germe de $M_{\mathrm{sing}} = S^2 M_v$ dans $[E]$ est irréductible de dimension 8. On en déduit que l'intersection du lieu singulier relatif (défini comme le support de $\Omega_{S/\mathbb{C}[t]}^1$) avec la fibre spéciale est égal à $V \times Z_{\mathrm{sing}}$.

Les points de $V \times (Z_{\mathrm{sing}} \setminus \{0\})$ sont des singularités de type A_1 . Puisque l'espace de déformations infinitésimales est de dimension 1, chaque déformation d'un tel point, qui ne le rend pas lisse, doit être triviale. On en déduit que $S \in \mathrm{Def}_{V \times \{0\}}(V \times Z)(\mathbb{C}[t])$.

En vue de 5.3 on voit que S est une déformation triviale.

6. RIGIDITÉ

On conserve les notions de la section 4. Soit $I \subset \mathcal{O}_{\mathrm{sp}(V)}$ le faisceau d'idéaux de $Z \subset \mathrm{sp}(V)$. On désigne par $\Phi : T_{\mathrm{sp}(V)}|_Z \rightarrow \mathrm{Hom}(I, \mathcal{O}_Z)$ le morphisme canonique qui associe à un champ de vecteurs la dérivation correspondante. En chaque point $p \in Z$, le germe du conoyau $T_Z^1 = \mathrm{Coker}(\Phi)$ en p est isomorphe à l'espace tangent des déformations du germe (Z, p) . Par le critère de Jacobi, T_Z^1 a pour support Z_{sing} . Pour finir la démonstration du théorème 1.1 il nous reste à montrer la proposition suivante :

Proposition 6.1. — *Le \mathcal{O}_Z -module T_Z^1 est pur de dimension 4.*

En un point $p \in Z_{\mathrm{sing}} \setminus \{0\}$ le germe (Z, p) est analytiquement isomorphe au germe $(\mathbb{C}^4, 0) \times (\{ac - b^2 = 0\}, 0)$. On en déduit que la restriction de T_Z^1 à $Z \setminus \{0\}$ est localement libre de rang 1 le long de Z_{sing} . Un sous-module de T_Z^1 de dimension < 4 est donc nécessairement concentré à l'origine.

Démonstration. On va commencer avec une présentation de l'idéal I . La structure symplectique ω sur V induit une anti-involution $f \mapsto f^t$ sur $\mathrm{End}(V)$ donnée par $\omega(f^t(v), w) = \omega(v, f(w))$ pour $v, w \in V$. Soit $\mathrm{End}(V) = E_+ \oplus E_-$ la décomposition par rapport aux valeurs propres de l'involution

telle qu'en particulier $\mathfrak{sp}(V) = E_-$. On a une surjection

$$(6.1) \quad g : E_+^* \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{sp}(V)} \longrightarrow I, \quad (\lambda, B) \mapsto \lambda(B^2).$$

En effet, $Z \subset \mathfrak{sp}(V)$ est défini par l'équation $B^2 = 0$, et $B^2 \in E_+$ pour $B \in \mathfrak{sp}(V)$. Il est facile à vérifier que la suite suivante est un complexe

$$(6.2) \quad (\Lambda^2 E_+^* \oplus E_+^*) \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{sp}(V)} \xrightarrow{r} E_+^* \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{sp}(V)} \xrightarrow{g} I,$$

où l'application r est donnée sur la partie $\Lambda^2 E_+^*$ par les relations tautologiques $r(\lambda \wedge \mu, B) = \lambda \otimes \mu(B^2) - \mu \otimes \lambda(B^2)$ et sur la partie E_+^* par $r(\lambda, B) = \lambda \circ \text{ad } B$. On peut montrer que (6.2) est une présentation de I , mais nous n'en avons pas besoin. En appliquant le foncteur $\text{Hom}(-, \mathcal{O}_Z)$ on obtient le complexe

$$(6.3) \quad \text{Hom}(I, \mathcal{O}_Z) \xrightarrow{g^\vee} E_+ \otimes \mathcal{O}_Z \xrightarrow{r^\vee} E_+ \otimes \mathcal{O}_Z.$$

Si d^0 désigne la composition

$$(6.4) \quad T_{\mathfrak{sp}(V)} \otimes \mathcal{O}_Z = E_- \otimes \mathcal{O}_Z \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}(I, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow E_+ \otimes \mathcal{O}_Z$$

on voit que l'on a le lemme suivant.

Lemme 6.2. *Le module T_Z^1 s'identifie à un sous-module du H^1 du complexe*

$$(6.5) \quad C^\bullet : E_- \otimes \mathcal{O}_Z \xrightarrow{d^0} E_+ \otimes \mathcal{O}_Z \xrightarrow{d^1} E_+ \otimes \mathcal{O}_Z$$

avec $d^0 : (b, B) \mapsto bB + Bb$ et $d^1 : (b, B) \mapsto bB - Bb$.

Pour démontrer le théorème, on va se placer sur la résolution $\sigma : \tilde{Z} \rightarrow Z$ de la section 4.

Lemme 6.3. — *On a $H^1(C^\bullet) = \sigma_* H^1(\sigma^* C^\bullet)$.*

Grâce à l'équivariance de $\sigma^* C^\bullet$ sous l'action de $\text{Sp}(V)$ les noyaux, conoyaux et groupes de cohomologie sont plats sur G (par rapport à $\pi : \tilde{Z} = T^*G \rightarrow G$). On peut donc se restreindre à étudier la fibre au-dessus d'un $[U] \in G$.

Choisissons une décomposition $V = U \oplus U^*$ avec $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Un élément de E_- est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^* \end{pmatrix}$ avec des 2×2 -matrices α, β, γ où β et γ sont symétriques. De même, un élément de E_+ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$ avec des 2×2 -matrices α, β, γ où β et γ sont anti-symétriques. La fibre F au-dessus de U est un \mathbb{C}^3 avec coordonnées x, y, z où $B = \sigma(x, y, z)$ est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \overline{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\overline{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$. Avec ces notations, on voit que

$$(6.6) \quad d^0|_F \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\gamma & \alpha B - B\alpha^* \\ 0 & \gamma B \end{pmatrix}, \quad d^1|_F \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B\gamma & \alpha B - B\alpha^* \\ 0 & \gamma B \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $(\frac{\alpha}{\gamma} | \frac{\beta}{\alpha^*}) \in \text{Ker}(d^1|_F)$ si et seulement si $B\gamma = 0$ et αB est symétrique. De même $(\frac{\alpha}{\gamma} | \frac{\beta}{\alpha^*}) \in \text{Im}(d^0|_F)$ si et seulement si $\gamma = 0$ et s'il existe γ' symétrique avec $\alpha = B\gamma'$ et α' avec $\beta = \alpha'B - B\alpha'^*$. En particulier, $\sigma^*C^\bullet|_F$ se décompose en trois parties suivant α, β ou γ . Plus précisément H^1 est la somme directe de

1. $H_I^1 = \{\alpha \mid \alpha B \text{ symétrique}\} / \{B\gamma' \mid \gamma' \text{ symétrique}\}$
2. $H_{II}^1 = \{\beta \mid \beta \text{ anti-symétrique}\} / \{\alpha'B - B\alpha'^* \mid \alpha' \text{ quelconque}\}$
3. $H_{III}^1 = \{\gamma \mid B\gamma = 0 \text{ et } \gamma \text{ anti-symétrique}\}$

Commençons avec (3). Pour $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ on a $B\gamma = \begin{pmatrix} -yt & xt \\ -zt & yt \end{pmatrix}$. Ainsi

$$(6.7) \quad H_{III}^1 = \text{Ker}(\mathcal{O}_F \xrightarrow{(x \ y \ z)^t} \mathcal{O}_F^3) = 0$$

Pour (2) on observe que si $\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ on a $\alpha'B - B\alpha'^* = \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix}$ avec $v = \alpha_{11}y + \alpha_{12}z - \alpha_{21}x - \alpha_{22}y$. Ainsi

$$(6.8) \quad H_{II}^1 = \text{Coker}(\mathcal{O}_F^4 \xrightarrow{(y \ z \ -x \ y)} \mathcal{O}_F) = \mathcal{O}_{\{0\}}.$$

Finalement pour (1), on calcule avec $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ et $\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$ que

$$\alpha B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y & \alpha_{11}y + \alpha_{12}z \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y & \alpha_{21}y + \alpha_{22}z \end{pmatrix} \quad B\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_{11}x + \gamma_{12}y & \gamma_{12}x + \gamma_{22}y \\ \gamma_{11}y + \gamma_{12}z & \gamma_{12}y + \gamma_{22}z \end{pmatrix}$$

Ainsi H_I^1 est le H^1 du complexe

$$(6.9) \quad \mathcal{O}_F^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ y & z & 0 \\ 0 & y & z \end{pmatrix}} \mathcal{O}_F^4 \xrightarrow{(y \ z \ -x \ y)} \mathcal{O}_F.$$

Maintenant, en utilisant le complexe de Koszul du point $\{0\} \in F$, on trouve

$$(6.10) \quad H_I^1 = \mathcal{O}_{\{xz - y^2 = 0\}}.$$

On déduit de (6.7), (6.8) et (6.9) que $H^1(\sigma^*C^\bullet) = L \oplus M$ où L et M sont des fibrés en droites sur $\sigma^{-1}(Z_{\text{sing}})$ et $\sigma^{-1}(0) = G$ respectivement. Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que M n'a pas de section globale ce qui montrera que $\sigma_*M = 0$.

En fait, il est conséquence de la définition de H_{II}^1 et de l'équation (6.8) que

$$(6.11) \quad M = \text{Hom}_{\text{anti-sym}}(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}) \subset E_+ \otimes \mathcal{O}_G$$

Par conséquent, on a des isomorphismes $M \cong \Lambda^2 \mathcal{U} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V)}(-1)$ et donc bien $\sigma_*M = 0$.

□

RÉFÉRENCES

- [1] A. Beauville, Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. J. Differential Geom. 18 (1983), 755–782.
- [2] P. Griffiths, Hermitian differential geometry, Chern classes, and positive vector bundles. in : Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, pp. 185–251, Princeton University Press 1969.
- [3] D. Huybrechts, M. Lehn, The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves. Aspects of Mathematics E31, Vieweg Verlag 1997
- [4] D. Kaledin, M. Lehn, Local structure of hyperkaehler singularities in O'Grady's examples. math.AG/0405575.
- [5] S. Kleiman, Les théorèmes de finitude pour le foncteur de Picard, SGA 6, Exp. 13, Springer Lecture Notes 225, 1971
- [6] K. O'Grady, Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3, J. reine angew. Math. 512 (1999), 49–117.
- [7] K. O'Grady, A new six-dimensional irreducible symplectic variety. J. Algebraic Geom. 12 (2003), 435–505.
- [8] A. Rapagnetta, Topological invariants of O'Grady's six dimensional irreducible symplectic variety. math.AG/0406026.
- [9] M. Schlessinger, Functors of Artin Rings. Trans. AMS 130 (1968), 208–222.
- [10] K. Yoshioka, Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces. Math. Annalen 321 (2001), 817–884.
- [11] K. Yoshioka, A note on Fourier-Mukai transform, math.AG/0112267.

MANFRED LEHN, FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK, JOHANNES GUTENBERG-UNIVERSITÄT MAINZ, D-55099 MAINZ

E-mail address: lehn@mathematik.uni-mainz.de

CHRISTOPH SORGER, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES JEAN LERAY (UMR 6629 DU CNRS), UNIVERSITÉ DE NANTES, 2, RUE DE LA HOUSSINIÈRE, BP 92208, F-44322 NANTES CEDEX 03, FRANCE

E-mail address: christoph.sorger@univ-nantes.fr