



The 2-matrix model, biorthogonal polynomials, Riemann-Hilbert problem, and algebraic geometry

Bertrand Eynard

► To cite this version:

Bertrand Eynard. The 2-matrix model, biorthogonal polynomials, Riemann-Hilbert problem, and algebraic geometry. 2005. [⟨hal-00004656⟩](#)

HAL Id: hal-00004656

<https://hal.science/hal-00004656v1>

Preprint submitted on 8 Apr 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

UNIVERSITÉ PARIS 7 DENIS DIDEROT

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée par

Bertrand EYNARD

Sujet :

Le modèle à deux matrices,

**Polynômes biorthogonaux, problème de Riemann–Hilbert
et géométrie algébrique**

Table des matières

1	Introduction: les matrices aléatoires en physique et en mathématiques	4
0.1	Bref historique du sujet	4
0.2	Principaux résultats obtenus	5
0.3	Plan	6
2	Trois définitions du modèle à deux matrices	7
1	Quelques définitions utiles	7
1.1	Mesure de Lebesgue pour les matrices hermitiennes	7
1.2	Changement de variable: matrice \leftrightarrow valeurs propres + unitaire	8
1.3	Intégrales sur le groupe unitaire: formules de Itzykson-Zuber-Harish Chandra, Morozov et E	
1.4	Ensemble des matrices normales sur un chemin	9
2	Le modèle hermitien et le modèle normal	9
2.1	Les données	10
2.2	Modèle hermitien	10
2.3	Le modèle Normal sur une classe d'homologie de contours Γ	12
3	Le modèle Normal à symétrie brisée	14
3.1	Les données	14
3.2	Le modèle	14
3.3	Relation avec le modèle Normal	15
4	Le modèle formel	16
4.1	Les données	16
4.2	Combinatoire de surfaces discrétisées	17
4.3	Le modèle	18
4.4	Relation avec le modèle normal à symétrie brisée	19
4.5	Développement topologique	20
5	Observables	21
5.1	Fonction de partition, énergie libre et moments	21
5.2	Valeurs moyennes de traces mixtes	21
5.3	Densités et corrélations de valeurs propres	22

5.4	Fonctions génératrices	24
3	Méthode des polynômes biorthogonaux et intégrabilité	26
1	Polynômes biorthogonaux	26
1.1	Généralisation de la formule de Heine	26
1.2	Notation, fonctions d'ondes	27
2	Relations de récurrences et matrices à bandes finies	28
2.1	Notations pour les matrices semi-infinies	29
2.2	Relations entre P et Q	30
2.3	Relations de récurrences, résumé	30
3	Noyaux et densités	31
4	Matrices de Christoffel–Darboux	32
5	Repliement sur une fenêtre	33
6	Systèmes différentiels	34
7	Dualité spectrale	35
8	Solution fondamentale	37
9	Asymptotiques $x \rightarrow \infty$ et phénomène de Stokes	38
10	Problème de Riemann–Hilbert	40
11	Déformations isomonodromiques et intégrabilité	41
12	Traces mixtes	42
4	Méthode des boucles et Géométrie algébrique	43
1	Equations de boucles	43
1.1	Changements de variables matriciels	43
1.2	Equation de boucles maîtresse	45
1.3	Fonction de corrélation mixte	47
2	Limite N grand	48
2.1	Courbe algébrique	48
2.2	Eléments de géométrie algébrique	51
2.3	Observables, énergie libre, et leurs dérivées	54
2.4	Energie libre et ses dérivées premières et secondes	55
2.5	Autres dérivées	56
3	Développement topologique	56
5	Asymptotiques des polynômes biorthogonaux	60
1	La courbe spectrale	61
1.1	Feuillets	61
1.2	coupures, points de branchelents et bases d'homologies	61

1.3	Notations	63
2	Conjecture	65
3	Vérifications	66
3.1	Asymptotiques	66
3.2	Transformées de Fourier et Hilbert	66
3.3	Orthogonalité	66
3.4	Systèmes différentiels, courbe spectrale et dualité spectrale	67
3.5	Dualité et Christoffel–Darboux	67
4	Idée euristique sous-tendant la conjecture	68
4.1	Formule de Heine et modèle normal avec potentiel rationel	68
4.2	Transformée de Fourier d’un modèle normal brisé	68
4.3	Développement à N grand du modèle formel	69
4.4	Sommation sur les fractions de remplissage	70

6 Conclusion 72

Chapitre 1

Introduction: les matrices aléatoires en physique et en mathématiques

Je vais présenter dans cette habilitation, des résultats obtenus ces dernières années sur le modèle à deux matrices et les familles de polynômes biorthogonales.

0.1 Bref historique du sujet

Les modèles de matrices aléatoires ont été introduits en 1951 par E. Wigner [75], en physique nucléaire, comme modèle pour la répartition des niveaux d'énergie des noyaux lourds. Cette théorie a eu un succès considérable, et s'est imposée comme outil très puissant pour étudier de nombreux autres phénomènes physiques [43, 21, 30, 41]. En vrac: chaos quantique, conducteurs mésoscopiques, croissance des cristaux, problèmes de frontières libres (problème de Saffman–Taylor), gravitation quantique, théorie des cordes, repliement des protéines, etc... La raison de ce succès tient dans les propriétés d'intégrabilité des modèles de matrices. Les matrices aléatoires ont joué un rôle important aussi en mathématiques [58, 9, 73]. Elles sont étroitement reliées aux polynômes orthogonaux, aux problèmes isomonodromiques, problème de Riemann–Hilbert. Les intégrales de matrices sont le prototype des fonctions τ . De plus, récemment, on a compris que toutes ces notions avaient également beaucoup à voir avec la géométrie algébrique.

Le modèle à une matrice [21, 58], qui est relié aux polynômes orthogonaux habituels, a été beaucoup étudié. Toutefois, il ne donne accès qu'aux courbes hyperelliptiques, et aux systèmes d'équations différentielles d'ordre 2. Il apparaissait intéressant et important de généraliser les notions qui apparaissaient dans le modèle à une matrice, à un cas un peu plus général. C'est pourquoi le modèle à deux matrices a alors attiré l'attention des physiciens et des mathématiciens.

Le **modèle à deux matrices**, est relié à deux familles de polynômes biorthogonales. Ces deux familles satisfont deux systèmes différentiels d'ordre différents, dont on peut montrer qu'ils sont duaux l'un de l'autre. La courbe spectrale de ces systèmes, est une courbe algébrique, pas nécessairement hyperelliptique, en particulier, elle peut avoir des singularités rationnelles $y \sim x^{p/q}$

avec (p, q) entiers quelconques.

Du point de vue des physiciens, le modèle à deux matrices a été introduit pour modéliser le modèle d'Ising [52] sur un réseau aléatoire, i.e. en termes de théories de champs conformes, un modèle minimal $(3, 4)$. Il a rapidement été compris [16] que le modèle à deux matrices donnait accès à tous les modèles minimaux rationnels (p, q) . C'est dans ce cadre qu'ont été inventées et étudiées les "équations de boucles" [66, 21], et le développement topologique [69]. Plus récemment, les modèles de matrices ont joué un rôle très important en théorie des cordes [22].

0.2 Principaux résultats obtenus

Parmi les résultats les plus importants que j'ai obtenu, avec mes collaborateurs, sur ce sujet, et qui sont présentés dans cette thèse:

- L'expression des fonctions de corrélations de valeurs propres en terme de déterminants de noyaux de polynômes bi-orthogonaux (théorème III.3.1, [P10]).
- Un théorème de Christoffel–Darboux pour ces noyaux (théorème III.4.2, [P8]).
- L'obtention de deux systèmes différentiels pour les deux familles bi-orthogonales de polynômes, leur expression explicite et le calcul de leur trace (théorème III.5.1, théorème III.6.1, théorème III.6.2, [P2]), et un premier pas vers le calcul de la fonction τ isomonodromique [P7].
- La dualité spectrale entre les deux systèmes différentiels (théorème III.7.2, [P8]).
- L'expression exacte de la solution fondamentale de ces systèmes différentiels (théorème III.8.1, [P6]).
- Les asymptotiques à x grand des solutions fondamentales (théorème III.9.1, [P6]), et les matrices de Stokes associées.
- La propriété de dualité spectrale a permis d'écrire un problème de Riemann-Hilbert associé (paragraphe III.10, [P6]).
- L'expression d'une fonction de corrélation mixte (i.e. qui ne peut pas s'écrire directement en termes de valeurs propres des deux matrices) (théorème III.12.1, [P4]).
- La limite N grand des intégrales de matrices formelles, en particulier l'obtention d'une équation algébrique pour la résolvante (théorème IV.1.3, théorème IV.2.1, [P11], [P9], [P3]), et le calcul de certaines fonctions de corrélations mixtes dans la limite N grand (théorème IV.1.4, [P11], [P9], [P3]).
- Le développement à N grand des intégrales de matrices formelles ([P11], [P9], [P3], [P5], [P1]) en particulier, le fait que le terme en $1/N^2$ du développement de l'énergie libre est relié au déterminant d'un Laplacien sur une courbe algébrique (théorème IV.3.1, théorème IV.3.2, [P5], [P1]).
- Une conjecture, (tout de même basée sur de sérieux arguments heuristiques) pour les asymptotiques à N grands des polynômes biorthogonaux (conjecture V.2.1, [P11], [P9]), du type Deift & co [18].

0.3 Plan

La thèse est organisée comme suit:

- Le chapitre 2 donne les définitions du modèle à deux matrices, et explique les quantités que l'on cherche à calculer.

- le chapitre 3 présente la méthode des polynômes biorthogonaux, et les systèmes différentiels associés. Un certains nombres de résultats comme la dualité, les asymptotiques, y sont exposés.

- le chapitre 4 présente la méthode des équations de boucles, et la courbe algébrique associée. Un certains nombres de mes contributions comme le calcul du développement en $1/N^2$ de l'énergie libre y sont exposés.

- le chapitre 5 montre, comment en combinant les deux méthodes précédentes, on peut formuler une conjecture pour les asymptotiques N -grand des polynômes biorthogonaux, en termes de géométrie algébrique.

- le chapitre 6 est une conclusion qui propose les suites possibles envisageables de ces travaux.

Chapitre 2

Trois définitions du modèle à deux matrices

Il existe plusieurs définitions du modèle à deux matrices, **non équivalentes**. Suivant le contexte, c'est à dire à quelle application des matrices aléatoires on s'intéresse, il faut choisir l'une des définitions. Dans la limite de grande taille des matrices, à l'ordre dominant, les trois définitions conduisent souvent aux mêmes résultats, mais ce n'est pas vrai au delà de l'ordre dominant. De plus un certain nombre de méthodes de calcul sont communes aux trois modèles, et les trois modèles font appels aux mêmes concepts de géométrie et intégrabilité. De là, il sort que les trois modèles ne sont pas toujours bien distingués dans la littérature, et l'on rencontre de nombreuses confusions.

Nous allons introduire ces trois modèles, et expliquer comment ils sont reliés entre eux (le modèle 1 et le modèle 2 sont reliés par une transformée de Fourier, et le modèle 2 et le modèle 3, par leur développement en série asymptotique).

Avant de les introduire, il faut rappeler quelques notions de base.

1 Quelques définitions utiles

1.1 Mesure de Lebesgue pour les matrices hermitiennes

On définit la mesure sur H_N (=espace des matrices hermitiennes de taille N):

$$M \in H_N \quad \rightarrow \quad dM := \frac{1}{U_N} \prod_{i=1}^N dM_{i,i} \prod_{i < j} d\operatorname{Re} M_{i,j} \prod_{i < j} d\operatorname{Im} M_{i,j} \quad (\text{II.1-1})$$

où U_N est le "volume du groupe unitaire":

$$U_N := \operatorname{Vol}(U(N)/U(1)^N \times S_N) = \frac{\pi^{N(N-1)/2}}{\prod_{k=1}^N k!} \quad (\text{II.1-2})$$

1.2 Changement de variable: matrice \leftrightarrow valeurs propres + unitaire

Toute matrice hermitienne $M \in H_N$ peut s'écrire [40] (pas de façon unique, i.e. permutation des valeurs propres S_N et phases diagonales $U(1)^N$):

$$M = U \Lambda U^\dagger \quad (\text{II.1-3})$$

où $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ est diagonale, et $U \in U(N)$ est unitaire. On a:

$$dM = \Delta(\lambda)^2 dU d\Lambda \quad (\text{II.1-4})$$

où $d\Lambda = \prod_i d\lambda_i$, dU est la mesure de Haar normalisée sur $U(N)$, $\Delta(\lambda)$ est le déterminant de Vandermonde:

$$\Delta(\lambda) := \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \quad (\text{II.1-5})$$

Pour $N = 1$, on définit $\Delta := 1$.

1.3 Intégrales sur le groupe unitaire: formules de Itzykson-Zuber-Harish Chandra, Morozov et Eynard Prats Ferrer

Soient $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$ et $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_N)$ deux matrices diagonales non dégénérées, et dU la mesure de Haar sur le groupe $U(N)$, on a:

Théorème 1.1 *Théorème (Eynard, Prats-Ferrer [36]):*

Pour toute fonction polynômiale invariante (i.e. produit de traces de produits des deux matrices) F , on a:

$$\begin{aligned} & \int_{U(N)} F(A, U B U^\dagger) e^{-\text{Tr } A U B U^\dagger} dU \\ &= \frac{c_N}{N! \Delta(a) \Delta(b)} \sum_{\sigma, \tau \in S_N} (-1)^{\sigma\tau} e^{-\text{Tr } A_\tau B_\sigma} \int_{T(N)} e^{-\text{Tr } T T^\dagger} F(A_\tau + T, B_\sigma + T^\dagger) dT \end{aligned} \quad (\text{II.1-6})$$

où $T(N)$ est l'ensemble des matrices complexes triangulaires supérieures strictes, muni de la mesure produit des mesures de Lebesgues des parties réelles et imaginaires de tous les éléments de matrice. Si σ est une permutation, B_σ est la matrice $\text{diag}(b_{\sigma(i)})$, et la constante c_N vaut:

$$c_N = \frac{\prod_{k=1}^{N-1} k!}{(-2\pi)^{\frac{N(N-1)}{2}}} \quad (\text{II.1-7})$$

En particulier avec $F = 1$ on a:

Théorème 1.2 *Formule Itzykson-Zuber -Harish Chandra [47, 46, 40]:*

$$\int_{U(N)} dU e^{\text{Tr } A U B U^\dagger} = \frac{\det E}{\Delta(a) \Delta(b)} c_N (-\pi)^{\frac{N(N-1)}{2}}, \quad (\text{II.1-8})$$

où la matrice E est donnée par:

$$E_{ij} := e^{a_i b_j}. \quad (\text{II.1-9})$$

Et, avec $F(A, B) = \text{Tr} \frac{1}{x-A} \frac{1}{y-B}$ vue comme série formelle en puissances de $1/x$ et $1/y$:

Théorème 1.3 *Théorème de Morozov simplifié (eynard [29]):*

La fonction génératrice définie par le développement formel en puissances de $1/x$ et $1/y$:

$$\left\langle \text{tr} \frac{1}{x-A} U \frac{1}{y-B} U^\dagger \right\rangle := \sum_{i,j} \frac{1}{x-a_i} \frac{1}{y-b_j} \langle |U_{ij}|^2 \rangle \quad (\text{II.1-10})$$

où

$$\langle |U_{ij}|^2 \rangle := \frac{\int_{U(N)} dU |U_{ij}|^2 e^{\text{Tr} AUBU^\dagger}}{\int_{U(N)} dU e^{\text{Tr} AUBU^\dagger}}, \quad (\text{II.1-11})$$

est donnée par:

$$\left\langle \text{tr} \frac{1}{x-A} U \frac{1}{y-B} U^\dagger \right\rangle = 1 - \det \left(\mathbf{1}_N - \frac{1}{x-A} E \frac{1}{y-B} E^{-1} \right) \quad (\text{II.1-12})$$

Les corrélations $\langle |U_{ij}|^2 \rangle$ ont été calculées par A. Morozov [64], puis simplifiée par moi même dans [29], et utilisée pour le résultat obtenu par Bertola–Eynard dans [P4] et présenté au paragraphe 12 dans le cadre de cette habilitation.

1.4 Ensemble des matrices normales sur un chemin

Définition 1.1 *Pour tout contour γ du plan complexe, on définit l'ensemble de matrices $H_n(\gamma)$:*

$$H_n(\gamma) := \{M \in GL_n(\mathbb{C}) / \exists \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i \in \gamma, \exists U \in U(n), M = U \Lambda U^\dagger\} \quad (\text{II.1-13})$$

On le munit d'une mesure analogue à eq.(II.1-4):

$$dM = \Delta(\lambda)^2 dU d\Lambda \quad (\text{II.1-14})$$

L'ensemble des matrices hermitiennes est $H_n = H_n(\mathbb{R})$.

Notons que si $M \in H_n(\gamma)$, on a:

$$[M, M^\dagger] = 0 \quad (\text{II.1-15})$$

d'où le nom de matrices normales [74].

2 Le modèle hermitien et le modèle normal

Le modèle hermitien est relié à deux familles de polynômes biorthogonaux (que l'on étudiera dans le chapitre 3). Une généralisation naturelle des polynômes biorthogonaux (dits polynômes semi-classiques, cf [3]), nous conduit à introduire une généralisation du modèle hermitien, que j'appellerai le modèle normal sur un contour.

2.1 Les données

Donnons nous deux polynômes V_1 et V_2 de degrés respectifs d_1+1 et d_2+1 , à coefficients complexes, appelés **potentiels**:

$$V_1(x) = g_0 + \sum_{k=1}^{d_1+1} \frac{g_k}{k} x^k, \quad V_2(y) = \tilde{g}_0 + \sum_{k=1}^{d_2+1} \frac{\tilde{g}_k}{k} y^k, \quad (\text{II.2-1})$$

un entier $N > \min(d_1, d_2)$, et un nombre complexe non nul T , appelé **température**.

Il existe d_1 chemins homologiquement indépendants allant de ∞ à ∞ , Γ^x_k , $k = 1, \dots, d_1$, tels que l'intégrale:

$$\int_{\Gamma^x_k} e^{-\frac{N}{T} V_1(x)} dx \quad (\text{II.2-2})$$

soit absolument convergente. Il suffit que chaque chemin parte de ∞ dans un secteur où $\text{Re} \frac{V_1(x)}{T} > 0$, et revienne à ∞ dans un autre secteur où $\text{Re} \frac{V_1(x)}{T} > 0$.

De même, il existe d_2 chemins homologiquement indépendants allant de ∞ à ∞ , Γ^y_k , $k = 1, \dots, d_2$, tels que l'intégrale:

$$\int_{\Gamma^y_k} e^{-\frac{N}{T} V_2(y)} dy \quad (\text{II.2-3})$$

converge. Il suffit que chaque chemin parte de ∞ dans un secteur où $\text{Re} \frac{V_2(y)}{T} > 0$, et revienne à ∞ dans un autre secteur où $\text{Re} \frac{V_2(y)}{T} > 0$.

Deux telles bases de chemins étant choisies, donnons nous une matrice $\kappa_{i,j}$ à coefficients complexes, non identiquement nulle, et définissons:

$$\Gamma := \sum_{i,j} \kappa_{i,j} \overset{x}{\Gamma}_i \times \overset{y}{\Gamma}_j \quad (\text{II.2-4})$$

Remarque 2.1 nous aurions pu considérer un modèle plus général, où V_1 et V_2 ne sont pas des polynômes, mais tels que V'_1 et V'_2 soient des fractions rationnelles. Dans ce cas, il faudrait introduire des bases d'homologies de tous les contours sur lesquels $\int dx e^{-\frac{N}{T} V_1(x)}$ a un sens. Cela inclut les chemins allant d'un pôle de V_1 à un autre pôle, et cela inclut aussi des segments finis,... C'est le cas semi-classique introduit par [3]. Nous ne le discuterons pas ici par souci de clarté et simplicité. Le cas général est présenté dans [7], il n'est pas très différent du cas polynomial présenté ici.

2.2 Modèle hermitien

C'est le cas où il est possible de choisir les bases d'homologies telles que:

$$\Gamma = R \times R \quad (\text{II.2-5})$$

c'est à dire si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

d_1 et d_2 sont impairs, et g_{d_1+1}/T et \tilde{g}_{d_2+1}/T ont une partie réelle strictement positive. Et dans le cas où $d_1 = d_2 = 1$, la forme quadratique $\frac{1}{T} \begin{pmatrix} g_2 & 1 \\ 1 & \tilde{g}_2 \end{pmatrix}$ a des valeurs propres de parties réelles

strictement positives. Autrement dit si et seulement si $\text{Re} \left(\frac{1}{T} (V_1(x) + V_2(y) - xy) \right)$ est bornée inférieurement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On introduit alors

Définition 2.1 *Mesure du modèle hermitien sur $H_N \times H_N$:*

$$d\mu(M_1, M_2) := \frac{1}{\tilde{Z}_{\text{Herm}}} e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2]} dM_1 dM_2 \quad (\text{II.2-6})$$

où la normalisation \tilde{Z}_{Herm}

$$\tilde{Z}_{\text{Herm}} := e^{-\frac{N^2}{T^2} \tilde{F}_{\text{Herm}}} := \int_{H_N \times H_N} e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2]} dM_1 dM_2 \quad (\text{II.2-7})$$

est appelée fonction de partition, et \tilde{F}_{Herm} est appelée énergie libre.

En écrivant comme eq.(II.1-3):

$$M_1 = U X U^\dagger, \quad M_2 = (UV) Y (UV)^\dagger \quad (\text{II.2-8})$$

avec $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$ et $Y = \text{diag}(y_1, \dots, y_N)$, et U et V unitaires, on a:

$$d\mu(M_1, M_2) = \frac{1}{\tilde{Z}} \Delta(x)^2 \Delta(y)^2 e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(X) + V_2(Y)]} e^{\frac{N}{T} \text{tr} X V Y V^\dagger} dX dY dU dV \quad (\text{II.2-9})$$

En utilisant II.1-8, l'intégrale sur U et V donne une mesure induite pour les valeurs propres x_i de M_1 et y_i de M_2 :

Définition 2.2 *Mesure sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ pour les valeurs propres du modèle hermitien:*

$$d\nu(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) := \frac{\det(e^{\frac{N}{T} x_i y_j}) \Delta(x) \Delta(y)}{N! \tilde{Z}_{\text{Herm}}} \prod_{i=1}^N e^{-\frac{N}{T} V_1(x_i)} dx_i \prod_{i=1}^N e^{-\frac{N}{T} V_2(y_i)} dy_i \quad (\text{II.2-10})$$

La normalisation

$$\begin{aligned} Z_{\text{Herm}} &:= \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \det(e^{\frac{N}{T} x_i y_j}) \Delta(x) \Delta(y) \prod_{i=1}^N e^{-\frac{N}{T} [V_1(x_i) + V_2(y_i)]} dx_i dy_i \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \Delta(x) \Delta(y) \prod_{i=1}^N e^{-\frac{N}{T} [V_1(x_i) + V_2(y_i) - x_i y_i]} dx_i dy_i \\ &:= e^{-\frac{N^2}{T^2} F_{\text{Herm}}} \end{aligned} \quad (\text{II.2-11})$$

est appelée fonction de partition, et F_{Herm} est appelée énergie libre.

Notons que:

$$Z_{\text{Herm}} = \tilde{Z}_{\text{Herm}} \left(\frac{N}{\pi T} \right)^{N(N-1)/2} \quad (\text{II.2-12})$$

Remarque 2.2 L'espace des paramètres du modèle hermitien est de dimension $d_1 + d_2 + 4$: les $d_1 + 2$ coefficients de V_1 , les $d_2 + 2$ coefficients de V_2 , la température T , et il faut retrancher la redondance des coefficients constant de V_1 et V_2 .

Remarque 2.3 Le modèle de matrices hermitiennes, est celui qui peut s'appliquer à des problèmes de physique de la matière condensée [43, 58, 30]. En effet les matrices qui apparaissent dans ces problèmes représentent des Hamiltoniens, et sont toujours hermitiennes (elles peuvent avoir aussi des symétries supplémentaires).

2.3 Le modèle Normal sur une classe d'homologie de contours Γ

Il apparaît naturel d'étendre la définition de la fonction de partition Z_{Herm} , donnée par la seconde partie de l'équation eq.(II.2-11) à n'importe quel contour Γ comme défini par eq.(II.2-4).

On définit donc, comme généralisation de eq.(II.2-10), la mesure pour les valeurs propres:

Définition 2.3 *Mesure sur $\prod_{i=1}^N \Gamma^{x_{k_i}} \times \Gamma^{y_{l_i}}$ pour les valeurs propres du modèle normal sur un chemin Γ :*

$$d\nu_{\text{Norm}, k_1, \dots, k_N; l_1, \dots, l_N}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) \\ := \frac{\Delta(x) \Delta(y) \det \left(\kappa_{k_i, l_j} e^{\frac{N}{T} x_i y_j} \right)}{N! Z_{\text{Norm}}(\kappa)} \prod_{i=1}^N e^{-\frac{N}{T} [V_1(x_i) + V_2(y_i)]} dx_i dy_i \quad (\text{II.2-13})$$

où $Z_{\text{Norm}}(\kappa) = e^{-\frac{N^2}{T^2} F_{\text{Norm}}(\Gamma)}$ est la fonction de partition, et $F_{\text{Norm}}(\kappa)$ est l'énergie libre.

On a:

$$\begin{aligned} Z_{\text{Norm}}(\kappa) &:= \frac{1}{N!} e^{-\frac{N^2}{T^2} F_{\text{Norm}}(\kappa)} \\ &:= \frac{1}{N!} \sum_{k_1, \dots, k_N, l_1, \dots, l_N} \prod_{i=1}^N \int_{x_i \in \Gamma^{x_{k_i}}} \prod_{j=1}^N \int_{y_j \in \Gamma^{y_{l_j}}} \\ &\quad \Delta(x) \Delta(y) \det \left(\kappa_{k_i, l_j} e^{\frac{N}{T} x_i y_j} \right) \prod_i e^{-\frac{N}{T} [V_1(x_i) + V_2(y_i)]} dx_i dy_i \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma \sum_{k_1, \dots, k_N, l_1, \dots, l_N} \prod_{i=1}^N \int_{x_i \in \Gamma^{x_{k_i}}, y_{\sigma_i} \in \Gamma^{y_{l_{\sigma_i}}}} \\ &\quad \Delta(x) \Delta(y) \prod_i \kappa_{k_i, l_{\sigma_i}} e^{\frac{N}{T} x_i y_{\sigma_i}} \prod_i e^{-\frac{N}{T} [V_1(x_i) + V_2(y_i)]} dx_i dy_i \\ (II.2-14) \end{aligned}$$

où l'on a décomposé le déterminant comme une somme sur les permutations de S_N . L'intégrale à effectuer est la même pour chaque permutation (il suffit de renommer $y_{\sigma_i} \rightarrow y_i$ et $l_{\sigma_i} \rightarrow l_i$), et donc:

$$Z_{\text{Norm}}(\kappa) = \sum_{k_1, \dots, k_N, l_1, \dots, l_N} \prod_i \kappa_{k_i, l_i} \prod_{i=1}^N \int_{x_i \in \Gamma^{x_{k_i}}, y_i \in \Gamma^{y_{l_i}}}$$

$$\Delta(x_i) \Delta(y_i) \prod_i e^{-\frac{N}{T}[V_1(x_i)+V_2(y_i)-x_i y_i]} dx_i dy_i$$

(II.2 – 15)

Remarque 2.4 Notons que d'autres généralisations du modèle hermitien sont possibles, en particulier, on pourrait choisir de mettre des valeurs absolues aux Vandermonde carrés. La définition ci-dessus est celle qui s'interprète en termes de polynômes biorthogonaux présentés au chapitre 3, et sur laquelle ont porté une grande partie de mes travaux.

Remarque 2.5 En rassemblant les paires (x_i, y_i) qui sont sur le même produit de chemins $(\Gamma^x_k \times \Gamma^y_l)$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} Z_{\text{Norm}}(\kappa) &= \sum_{\sum_{k,l} n_{k,l} = N} \frac{N!}{\prod_{k,l} n_{k,l}!} \prod_{k,l} \kappa_{k,l}^{n_{k,l}} \prod_{k,l} \prod_{i=1}^{n_{k,l}} \int_{x_{k,l,i} \in \Gamma^x_k} \int_{y_{k,l,i} \in \Gamma^y_l} \\ &\quad \Delta(x) \Delta(y) \prod_{k,l} \prod_{i=1}^{n_{k,l}} e^{-\frac{N}{T}[V_1(x_{k,l,i})+V_2(y_{k,l,i})-x_{k,l,i} y_{k,l,i}]} dx_{k,l,i} dy_{k,l,i} \\ &= \sum_{\sum_{k,l} n_{k,l} = N} \frac{N!}{\prod_{k,l} n_{k,l}!} \prod_{k,l} \kappa_{k,l}^{n_{k,l}} \prod_{k,l} \prod_{i=1}^{n_{k,l}} \int_{x_{k,l,i} \in \Gamma^x_k} \int_{y_{k,l,i} \in \Gamma^y_l} \\ &\quad \Delta(x) \Delta(y) \frac{\det e^{\frac{N}{T} x_{k,l,i} y_{k,l,j}}}{n_{k,l}!} \prod_{k,l} \prod_{i=1}^{n_{k,l}} e^{-\frac{N}{T}[V_1(x_{k,l,i})+V_2(y_{k,l,i})]} dx_{k,l,i} dy_{k,l,i} \end{aligned}$$

(II.2 – 16)

et l'on reconnaît des intégrales sur $U_{n_{k,l}}$:

$$\begin{aligned} Z_{\text{Norm}}(\kappa) &= N! \sum_{\sum_{k,l} n_{k,l} = N} \prod_{k,l} \frac{\kappa_{k,l}^{n_{k,l}}}{n_{k,l}! \pi^{\frac{n_{k,l}(n_{k,l}-1)}{2}}} \int_{M_{x,k,l} \in H_{n_{k,l}}(\Gamma^x_k)} \int_{M_{y,k,l} \in H_{n_{k,l}}(\Gamma^y_l)} \\ &\quad \prod_{k,l} e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M_{x,k,l})+V_2(M_{y,k,l})-M_{x,k,l} M_{y,k,l}]} dM_{x,k,l} dM_{y,k,l} \\ &\quad \prod_{(k,l) > (k',l')} \det (M_{x,k,l} \otimes \mathbf{1}_{n_{k',l'}} - \mathbf{1}_{n_{k,l}} \otimes M_{x,k',l'}) \\ &\quad \prod_{(k,l) > (k',l')} \det (M_{y,k,l} \otimes \mathbf{1}_{n_{k',l'}} - \mathbf{1}_{n_{k,l}} \otimes M_{y,k',l'}) \end{aligned}$$

(II.2 – 17)

où l'on a ordonné les paires (k, l) par ordre lexicographique.

Remarque: L'espace des modules du modèle normal est de dimension $d_1 + d_2 + 3 + d_1 d_2$. Les modules sont les $d_1 + 2$ coefficients de V_1 , les $d_2 + 2$ coefficients de V_2 , la température T , et les $d_1 d_2$ coefficients $\kappa_{k,l}$, et il faut retrancher la redondance des coefficients constant de V_1 et V_2 et un facteur global pour κ .

3 Le modèle Normal à symétrie brisée

Nous allons considérer individuellement chaque terme de la somme eq.(II.2-17), autrement dit on se place à nombre de valeurs propres fixé sur chaque contour. Cela revient à briser le groupe de symétrie $U(N)$ en $\prod_{k,l} U(n_{k,l})$. Comme nous le verrons au chapitre 5, ce modèle est très utile pour faire le lien entre polynômes biorthogonaux et développement à N grand.

3.1 Les données

On se donne deux entiers d_1 et d_2 supérieurs ou égaux à 1, et un entier $N > \min(d_1, d_2)$.

On se donne $d_1 \times d_2$ entiers $n_{k,l}$, $1 \leq k \leq d_1$, $1 \leq l \leq d_2$ tels que

$$\sum_{k,l} n_{k,l} = N \quad (\text{II.3-1})$$

et, pour des raisons qui deviendront claires au chapitre 4, on note:

$$\epsilon_{k,l} := \frac{n_{k,l}}{N} \quad (\text{II.3-2})$$

Les $\epsilon_{k,l}$ sont appelés **fractions de remplissage**. On note

$$n := \{n_{k,l}\} \quad \text{et} \quad \epsilon := \{\epsilon_{k,l}\} \quad (\text{II.3-3})$$

Donnons nous aussi deux polynômes V_1 et V_2 de degrés respectifs $d_1 + 1$ et $d_2 + 1$, à coefficients complexes, appelés **potentiels**:

$$V_1(x) = g_0 + \sum_{k=1}^{d_1+1} \frac{g_k}{k} x^k, \quad V_2(y) = \tilde{g}_0 + \sum_{k=1}^{d_2+1} \frac{\tilde{g}_k}{k} y^k, \quad (\text{II.3-4})$$

et un nombre complexe non nul T appelé **température**.

Et on se donne des bases de classes d'homologies de chemins dans \mathbb{C} définies comme au paragraphe précédent:

$$\overset{x}{\Gamma}_k \quad k = 1, \dots, d_1, \quad \overset{y}{\Gamma}_l \quad l = 1, \dots, d_2 \quad (\text{II.3-5})$$

3.2 Le modèle

Définition 3.1 *Mesure du modèle normal à symétrie brisée sur $\prod_{k,l} H_{n_{k,l}}(\Gamma_k^x) \times H_{n_{k,l}}(\Gamma_l^y)$:*

$$\begin{aligned} d\mu(M_{x,k,l}; M_{y,k,l}) &:= \frac{1}{\tilde{Z}_{\text{Normb}}(n)} \prod_{k,l} e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M_{x,k,l}) + V_2(M_{y,k,l}) - M_{x,k,l} M_{y,k,l}]} dM_{x,k,l} dM_{y,k,l} \\ &\quad \prod_{(k,l) < (k',l')} \det(M_{x,k,l} \otimes \mathbf{1}_{n_{k',l'}} - \mathbf{1}_{n_{k,l}} \otimes M_{x,k',l'}) \\ &\quad \prod_{(k,l) < (k',l')} \det(M_{y,k,l} \otimes \mathbf{1}_{n_{k',l'}} - \mathbf{1}_{n_{k,l}} \otimes M_{y,k',l'}) \end{aligned}$$

(II.3 – 6)

où les paires (k, l) sont ordonnées par ordre lexicographique, et où la fonction de partition et l'énergie libre sont données par:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{\text{Normb}}(n) &:= e^{-\frac{N^2}{T^2} F_{\text{Normb}}(n)} \\
&:= \prod_{k,l} \int_{M_{x,k,l} \in H_{n_{k,l}}(\Gamma^x_k)} \int_{M_{y,k,l} \in H_{n_{k,l}}(\Gamma^y_l)} \\
&\quad \prod_{k,l} e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M_{x,k,l}) + V_2(M_{y,k,l}) - M_{x,k,l} M_{y,k,l}]} dM_{x,k,l} dM_{y,k,l} \\
&\quad \prod_{(k,l) < (k',l')} \det (M_{x,k,l} \otimes \mathbf{1}_{n_{k',l'}} - \mathbf{1}_{n_{k,l}} \otimes M_{x,k',l'}) \\
&\quad \prod_{(k,l) < (k',l')} \det (M_{y,k,l} \otimes \mathbf{1}_{n_{k',l'}} - \mathbf{1}_{n_{k,l}} \otimes M_{y,k',l'})
\end{aligned}$$

(II.3 – 7)

En utilisant la décomposition eq.(II.1-3), et en intégrant sur les groupes unitaires avec la formule eq.(II.1-8), on obtient la mesure induite pour les valeurs propres

Définition 3.2 *Mesure pour les valeurs propres du modèle normal à symétrie brisée, sur $\prod_{k,l} (\Gamma^x_k \times \Gamma^y_l)^{n_{k,l}}$ (i.e. $\forall k = 1, \dots, d_1, \forall l = 1, \dots, d_2, \forall i = 1, \dots, n_{k,l}, x_{k,l,i} \in \Gamma^x_k, y_{k,l,i} \in \Gamma^y_l$):*

$$\begin{aligned}
& d\nu_{\text{Normb}}(x_{k,l,i}; y_{k,l,i}) \\
&:= \frac{\Delta(x) \Delta(y)}{Z_{\text{Normb}}(n)} \prod_{k,l} \left(\det \left(e^{\frac{N}{T} x_{k,l,i} y_{k,l,i}} \right) \prod_{i=1}^{n_{k,l}} e^{-\frac{N}{T} [V_1(x_{k,l,i}) + V_2(y_{k,l,i})]} dx_{k,l,i} dy_{k,l,i} \right)
\end{aligned}$$

(II.3 – 8)

où la fonction de partition et l'énergie libre sont données par:

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Normb}}(n) &:= e^{-\frac{N^2}{T^2} F_{\text{Normb}}(n)} \\
&:= \prod_{k,l} \frac{1}{n_{k,l}!} \prod_{i=1}^{n_{k,l}} \int_{x_{k,l,i} \in \Gamma^x_k} \int_{y_{k,l,i} \in \Gamma^y_l} \\
&\quad \Delta(x) \Delta(y) \prod_{k,l} \prod_{i=1}^{n_{k,l}} e^{-\frac{N}{T} [V_1(x_{k,l,i}) + V_2(y_{k,l,i}) - x_{k,l,i} y_{k,l,i}]} dx_{k,l,i} dy_{k,l,i}
\end{aligned}$$

(II.3 – 9)

3.3 Relation avec le modèle Normal

Il est clair que le modèle normal est tel que:

$$Z_{\text{Norm}}(\kappa) = N! \sum_n \left(\prod_{k,l} \kappa_{k,l}^{n_{k,l}} \right) Z_{\text{Normb}}(n) \quad (\text{II.3-10})$$

Autrement dit, les $\kappa_{k,l}$ sont les variables duales des $n_{k,l}$, et les deux modèles sont reliés par une transformée de Fourier (avec la contrainte $\sum n_{k,l} = N$).

Remarque: L'espace des modules du modèle normal brisé est de dimension $d_1 + d_2 + 3 + d_1 d_2$, comme le modèle normal. Les $d_1 d_2 - 1$ coefficients $\kappa_{k,l}$ (moins la normalisation redondante) ont été remplacés par les $d_1 d_2 - 1$ fractions de remplissages indépendantes $\epsilon_{k,l}$. D'après eq.(II.3-10), les $\kappa_{k,l}$ apparaissent comme des variables duales des $\epsilon_{k,l}$.

4 Le modèle formel

Le modèle formel pourrait aussi être appelé modèle combinatoire. En effet, il n'est pas défini par une intégrale de matrices (ni de valeurs propres), mais par une série formelle en puissances de la température T , qui sert de série génératrice pour le dénombrement de certains types de graphes [21, 14, 17, 27, 41]. Pour ce modèle, les questions de convergences et de bases d'homologies ne se posent pas.

4.1 Les données

On se donne deux entiers d_1 et d_2 supérieurs ou égaux à 1. Donnons nous aussi deux polynômes V_1 et V_2 de degrés respectifs $d_1 + 1$ et $d_2 + 1$, à coefficients complexes appelés **potentiels**:

$$V_1(x) = g_0 + \sum_{k=1}^{d_1+1} \frac{g_k}{k} x^k, \quad V_2(y) = \tilde{g}_0 + \sum_{k=1}^{d_2+1} \frac{\tilde{g}_k}{k} y^k, \quad (\text{II.4-1})$$

et deux nombres complexes non nuls T et N . T est appelé **température**.

Le potentiel $V_1(x) + V_2(y) - xy$ possède $d_1 d_2$ extrema dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, que l'on note: (x_I, y_I) , $I = 1, \dots, d_1 d_2$, tels que:

$$\begin{cases} V_1'(x_I) = y_I \\ V_2'(y_I) = x_I \end{cases} \quad (\text{II.4-2})$$

et on se donne $d_1 d_2$ nombres complexes arbitraires ϵ_I , $I = 1, \dots, d_1 d_2$, que l'on appelle **fractions de remplissages**, tels que:

$$\sum_{I=1}^{d_1 d_2} \epsilon_I = 1 \quad (\text{II.4-3})$$

Définition 4.1 on définit les **constantes de couplages**:

$$\begin{array}{llll} \forall I = 1, \dots, d_1 d_2 & \forall k = 2, \dots, d_1 + 1 & g_{k,I} & := \frac{V_1^{(k)}(x_I)}{k-1!} \\ \forall I = 1, \dots, d_1 d_2 & \forall k = 2, \dots, d_2 + 1 & \tilde{g}_{k,I} & := \frac{V_2^{(k)}(y_I)}{k-1!} \\ \forall i \neq j & \forall k = 1, \dots, \infty, & h_{k,i} & := \sum_{J \neq I} \frac{\epsilon_J}{(x_J - x_I)^k} \\ \forall i \neq j & \forall k = 1, \dots, \infty, & \tilde{h}_{k,i} & := \sum_{J \neq I} \frac{\epsilon_J}{(y_J - y_I)^k} \\ \forall i \neq j & \forall k, l = 1, \dots, \infty, & h_{k,I;l,J} & := \frac{k+l-1!}{k-1! l-1!} \frac{1}{(x_J - x_I)^k (x_I - x_J)^l} \\ \forall i \neq j & \forall k, l = 1, \dots, \infty, & \tilde{h}_{k,I;l,J} & := \frac{k+l-1!}{k-1! l-1!} \frac{1}{(y_J - y_I)^k (y_I - y_J)^l} \end{array} \quad (\text{II.4-4})$$

Notons que:

$$g_{2,I}\tilde{g}_{2,I} - 1 = \tilde{g}_{d_2+1}g_{d_1+1}^{d_2} \prod_{J \neq I} (x_I - x_J) = g_{d_1+1}\tilde{g}_{d_2+1}^{d_1} \prod_{J \neq I} (y_I - y_J) \quad (\text{II.4-5})$$

Remarque 4.1 Notons, que contrairement au modèle précédent, N et $n_I = N\epsilon_I$ ne sont pas nécessairement des entiers.

4.2 Combinatoire de surfaces discrétisées

Définition 4.2 Soit \mathcal{G} l'ensemble des graphes fermés (sans bords), pas nécessairement connexes, formés de polygones orientés (une face supérieure et une face inférieure), collés le long de leur bord ou par leurs centres, avec les règles suivantes: Chaque polygone à k cotés ($k \geq 1$ on peut avoir des 1-gones et des 2-gones) porte un "signe" (+ ou -) et une "couleur" ($I = 1, \dots, d_1 d_2$). Deux polygones peuvent être collés par leur bord seulement si ils ont la même couleur, (et en respectant l'orientation des faces). Deux polygones peuvent être collés par leurs centres seulement si ils sont de couleur différente et de même signe.

Définition 4.3 Pour un graphe $G \in \mathcal{G}$, on note:

- $n_{k,I}(G)$ = nombre de k -gones de signe + et de couleur I .
- $\tilde{n}_{k,I}(G)$ = nombre de k -gones de signe - et de couleur I .
- $n_p(G)$ = nombre d'arrêtes communes à deux polygones de couleur I et de signes quelconques.
- $n_{++,I}(G)$ = nombre de paire de polygones de signe + et +, de couleur I collés par un bord.
- $n_{--,I}(G)$ = nombre de paire de polygones de signe - et -, de couleur I collés par un bord.
- $n_{k,I;l,J}(G)$ = nombre de paire de polygones formées d'un k -gone de signe + et de couleur I , et d'un l -gone de signe + et de couleur J , collés par leurs centres.
- $\tilde{n}_{k,I;l,J}(G)$ = nombre de paire de polygones formées d'un k -gone de signe - et de couleur I , et d'un l -gone de signe - et de couleur J , collés par leurs centres.
- $l_I(G)$ = nombre de sommets de couleur I .
- $\#\text{Aut}(G)$ = cardinal du groupe des automorphismes de G .
- $\chi(G)$ = Caractéristique d'Euler-Poincaré de G , en comptant les liens entre centres de polygones comme des cylindres. $\chi(G)$ est toujours pair.

$$\chi(G) = \sum_I l_I(G) - n_p(G) + \sum_k \sum_I n_{k,I}(G) + \tilde{n}_{k,I}(G) \quad (\text{II.4-6})$$

- et $n_T(G)$ est donné par:

$$\begin{aligned} n_T(G) := & \sum_I \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} (n_{k,I} + \tilde{n}_{k,I}) - \sum_{k=3}^{d_1+1} n_{k,I} - \sum_{k=3}^{d_2+1} \tilde{n}_{k,I} \right) \\ & + \sum_{I < J} \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \frac{k+l}{2} (n_{k,I;l,J} + \tilde{n}_{k,I;l,J}) \end{aligned} \quad (\text{II.4-7})$$

Remarque 4.2 On a l'inégalité:

$$n_T(G) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_I \sum_{k=1}^{\infty} (n_{k,I} + \tilde{n}_{k,I}) + \sum_{I < J} \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} (n_{k,I;l,J} + \tilde{n}_{k,I;l,J}) \right) \quad (\text{II.4-8})$$

Définition 4.4 Le poids de Feynmann d'un graphe G est:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(G) &:= \frac{N^{\chi(G)}}{\#\text{Aut}(G)} T^{n_T(G)} \prod_{I=1}^{d_1 d_2} \prod_{k=3}^{d_1+1} (g_{k,I} + T h_{k,I})^{n_{k,I}(G)} \prod_{k=3}^{d_2+1} (\tilde{g}_{k,I} + T \tilde{h}_{k,I})^{\tilde{n}_{k,I}(G)} \\ &\quad \prod_{I=1}^{d_1 d_2} h_{1,I}^{n_{1,I}(G)} h_{2,I}^{n_{2,I}(G)} \prod_{k > d_1+1} h_{k,I}^{n_{k,I}(G)} \prod_{I=1}^{d_1 d_2} \tilde{h}_{1,I}^{\tilde{n}_{1,I}(G)} \tilde{h}_{2,I}^{\tilde{n}_{2,I}(G)} \prod_{k > d_2+1} \tilde{h}_{k,I}^{\tilde{n}_{k,I}(G)} \\ &\quad \prod_{I < J} \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{\infty} h_{k,I;l,J}^{n_{k,I;l,J}(G)} \tilde{h}_{k,I;l,J}^{\tilde{n}_{k,I;l,J}(G)} \prod_I \epsilon_I^{l_I(G)} \prod_I \tilde{g}_2^{n_{++I}} g_2^{n_{--I}} (g_{2,I} \tilde{g}_{2,I} - 1)^{-n_{p,I}(G)} \end{aligned} \quad (\text{II.4-9})$$

4.3 Le modèle

On définit la fonction de partition du modèle formel comme une série génératrice (au sens combinatoire), i.e. une série formelle en puissances de T :

Définition 4.5 Fonction de partition du modèle formel

$$Z_{\text{Form}}(\epsilon) := \prod_I e^{-\frac{N^2}{T} \epsilon_I (V_1(x_I) + V_2(y_I) - x_I y_I)} \prod_{I < J} (x_I - x_J)^{N^2 \epsilon_I \epsilon_J} \prod_{I < J} (y_I - y_J)^{N^2 \epsilon_I \epsilon_J} \sum_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{W}(G) \quad (\text{II.4-10})$$

Notons que l'inégalité II.4-8 implique que pour chaque puissance de T , seul un nombre fini de graphes contribuent, et donc II.4-10 définit bien une série formelle en puissances de T :

$$Z_{\text{Form}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T^n \quad (\text{II.4-11})$$

On définit aussi l'énergie libre formelle:

$$\begin{aligned} F_{\text{Form}} &:= -\frac{T^2}{N^2} \ln Z_{\text{Form}} \\ &= \sum_I T \epsilon_I (V_1(x_I) + V_2(y_I) - x_I y_I) - T^2 \sum_{I < J} \epsilon_I \epsilon_J \ln(x_I - x_J) - T^2 \sum_{I < J} \epsilon_I \epsilon_J \ln(y_I - y_J) \\ &\quad - \frac{T^2}{N^2} \sum_{G \in \mathcal{G}_{\text{conn}}} \mathcal{W}(G) \end{aligned} \quad (\text{II.4-12})$$

qui est aussi une série formelle en puissances de T , qui est la même somme que pour Z_{Form} , mais réduite aux diagrammes connexes seulement:

$$F_{\text{Form}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n T^n \quad (\text{II.4-13})$$

4.4 Relation avec le modèle normal à symétrie brisée

Ces définitions formelles viennent de l'interprétation combinatoire de II.3-7 avec $n_k = N\epsilon_k$, par la méthode des diagrammes de Feynman, comme série génératrice de diagrammes (ces graphes sont introduits dans [13]). En effet, on réécrit eq.(II.3-7) sous la forme:

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Normb}}(n) &= \int \prod_{I=1}^{d_1 d_2} dM_{x,I} dM_{y,I} e^{-\frac{N}{T} \text{Tr} [V_1(M_{x,I}) + V_2(M_{y,I}) - M_{x,I} M_{y,I}]} \\
&\quad \prod_{I < J} \det (M_{x,I} \otimes \mathbf{1}_{n_J} - \mathbf{1}_{n_I} \otimes M_{x,J}) \det (M_{y,I} \otimes \mathbf{1}_{n_J} - \mathbf{1}_{n_I} \otimes M_{y,J}) \\
&= \int \prod_{I=1}^{d_1 d_2} dM_{x,I} dM_{y,I} e^{-S} \\
&\quad (II.4 - 14)
\end{aligned}$$

puis on pose $M_{x,I} = x_I \mathbf{1}_{n_I} + X_I$, $M_{y,I} = y_I \mathbf{1}_{n_I} + Y_I$, et l'action S , écrite en termes des matrices X_I et Y_I est:

$$\begin{aligned}
S &:= \frac{N}{T} \sum_I \left(\frac{g_{2,I}}{2} \text{tr} X_I^2 + \frac{\tilde{g}_{2,I}}{2} \text{tr} Y_I^2 - \text{tr} X_I Y_I \right) \\
&\quad + \frac{N}{T} \sum_I \left(\sum_{k \geq 3} \frac{g_{k,I}}{k} \text{tr} X_I^k + \sum_{k \geq 3} \frac{\tilde{g}_{k,I}}{k} \text{tr} Y_I^k \right) \\
&\quad + \frac{N}{T} \sum_I \left(\sum_{k \geq 1} \frac{h_{k,I}}{k} \text{tr} X_I^k + \sum_{k \geq 1} \frac{\tilde{h}_{k,I}}{k} \text{tr} Y_I^k \right) \\
&\quad + \sum_{I < J} \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \frac{h_{k,I;l,J}}{kl} \text{tr} X_I^k \text{tr} X_J^l \\
&\quad + \sum_{I < J} \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \frac{\tilde{h}_{k,I;l,J}}{kl} \text{tr} Y_I^k \text{tr} Y_J^l \\
&\quad (II.4 - 15)
\end{aligned}$$

La méthode de Feynmann consiste à développer en série de Taylor l'exponentielle de tous les termes sauf la partie quadratique de la première ligne, puis à calculer les intégrales gaussiennes restantes par le théorème de Wick [69, 14, 17, 21, 30]. Les chemins d'intégration ne jouent aucun rôle ici. Seuls les voisinages des points x_I , y_I jouent un rôle. La méthode de Feynman associe à chaque terme du développement, un diagramme $G \in \mathcal{G}$, avec un poids qui est celui écrit plus haut. Ceci est présenté en appendice de [13].

Toutefois, il faut savoir que, même lorsque N et les $n_I = N\epsilon_I$ sont des entiers, les définitions II.4-10 et II.3-7 ne coïncident pas toujours.

Elles ne coïncident que dans certains cas (pour des ensembles ouverts de potentiels V_1 , V_2 , pour certaines valeurs de fractions de remplissage, et pour des choix appropriés de contours Γ_k^x et Γ_l^y). Il faut en particulier que l'on puisse trouver une base de chemins Γ_k^x, Γ_l^y telle que chaque paire

de chemins passe par un seul extremum (x_I, y_I) et telle que le potentiel effectif pour une paire de valeur propre de (M_1, M_2) ait un unique minimum.

Lorsqu'elles coïncident, II.4-10 est le développement limité de II.3-7 en puissances de T . En général, ce développement est un développement asymptotique, qui ne converge pas vers une fonction unique [21, 27].

4.5 Développement topologique

Pour chaque puissance de T , la série II.4-13 compte un nombre fini de diagrammes connexes, et donc chaque B_n est un polynôme en $1/N^2$:

$$B_n(N) = \sum_{k=0}^{\deg B_n} B_{n,h} N^{-2h} \quad (\text{II.4-16})$$

Ceci autorise à définir les séries à puissances de N fixée (i.e. à topologie fixée puisque la puissance de N est la caractéristique d'Euler).

$$F_{\text{Form}}^{(h)} := \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,h} T^n \quad (\text{II.4-17})$$

Chaque $F^{(h)}$ est une série formelle en puissances de T , qui compte les diagrammes de \mathcal{G} avec le même poids que pour Z_{Form} , restreints aux diagrammes connexes de genre h [69, 21, 30]. Ainsi, par définition du modèle, on a le développement de l'énergie libre en puissances de N^{-2} :

Définition 4.6 *Développement topologique de l'énergie libre du modèle formel:*

$$F_{\text{Form}} = \sum_{h=0}^{\infty} F_{\text{Form}}^{(h)} N^{-2h} \quad (\text{II.4-18})$$

Il s'avère que chaque $F_{\text{Form}}^{(h)}$ est une fonction algébrique de tous ses paramètres (les coefficients de V_1 et V_2 , les ϵ_k , T), et donc possède un rayon de convergence non nul comme série en puissances de T . Une partie de mon travail présenté pour cette habilitation, a consisté à calculer $F_{\text{Form}}^{(1)}$, et à l'identifier avec le déterminant du Laplacien sur une courbe algébrique [P5], [P1]. Au chapitre 4 nous verrons l'expression de $F_{\text{Form}}^{(0)}$ et $F_{\text{Form}}^{(1)}$.

Par contre, la somme eq.(II.4-18) est une série asymptotique en puissances de $1/N^2$, et, en général, ne se resomme pas en une fonction analytique des paramètres.

Remarque: L'espace des modules du modèle formel est de dimension $d_1 + d_2 + 3 + d_1 d_2$, comme le modèle normal et le modèle normal brisé.

Remarque: Le modèle formel est celui qui est utilisé pour les applications des matrices aléatoires au dénombrement des surfaces discrétisées, et subséquentement, pour les applications aux théories des champs conformes, à la gravitation quantique et à la théorie des cordes en physique [21, 14, 17, 41, 30, 22].

5 Observables

Nous allons maintenant décrire les quantités que l'on cherche à calculer dans ces modèles. Lorsque cela est possible, on cherche bien sûr à calculer ces quantités pour tout N , mais l'objectif principal en physique est de les calculer pour N grand, dans divers régimes.

5.1 Fonction de partition, énergie libre et moments

La fonction de partition et l'énergie libre sont des observables fondamentales. Elles ont été définies précédemment pour les trois types de modèles de matrices.

Il est conjecturé¹ que la fonction de partition du modèle normal est une fonction τ isomonodromique au sens de Jimbo-Miwa-Ueno [48, 49, 65, 68], et il est connu que la fonction de partition du modèle formel est une fonction tau KP [21]. Dans les trois modèles, l'énergie libre a une limite N grand, reliée à la hiérarchie de Toda "sans dispersion" [21, 78].

Les dérivées de la fonction de partition par rapport aux coefficients des potentiels donnent accès aux moments:

$$\begin{aligned} T_{k_1, \dots, k_r; \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_s} &:= N^{-r-s} \langle \text{tr } M_1^{k_1} \dots \text{tr } M_1^{k_r} \text{tr } M_2^{l_1} \dots \text{tr } M_2^{l_s} \rangle \\ &= \left(-\frac{T}{N^2} \right)^{r+s} \frac{\prod_{i=1}^r k_i \prod_{i=1}^s l_i}{Z} \partial_{g_{k_1}} \dots \partial_{g_{k_r}} \partial_{\tilde{g}_{l_1}} \dots \partial_{\tilde{g}_{l_s}} Z \\ (II.5 - 1) \end{aligned}$$

Souvent, il est préférable de calculer les cumulants:

$$\begin{aligned} T_{\text{conn. } k_1, \dots, k_r; \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_s} &:= N^{r+s-2} \langle \text{tr } M_1^{k_1} \dots \text{tr } M_1^{k_r} \text{tr } M_2^{l_1} \dots \text{tr } M_2^{l_s} \rangle_{\text{conn.}} \\ &= -(-T)^{r+s-2} \prod_{i=1}^r k_i \prod_{i=1}^s l_i \partial_{g_{k_1}} \dots \partial_{g_{k_r}} \partial_{\tilde{g}_{l_1}} \dots \partial_{\tilde{g}_{l_s}} F \\ (II.5 - 2) \end{aligned}$$

Dans le modèle Normal et Normal-brisé, les $T_{\text{conn. } k_1, \dots, k_r; \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_s}$ sont des intégrales convergentes. Dans le modèle formel, les $T_{\text{conn. } k_1, \dots, k_r; \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_s}$ sont des fonctions génératrices de graphes ouverts [21, 30], avec r bords de signe $+$, et s bords de signe $-$.

5.2 Valeurs moyennes de traces mixtes

Notons que les dérivées de la fonction de partition et de l'énergie libre donnent accès seulement aux moments non mixtes, i.e. aux valeurs moyennes de produits de traces, telles que chaque trace ne contienne qu'un seul type de matrice (M_1 ou M_2).

¹Cela a été prouvé dans le cas d'une seule matrice [P7].

Pour les trois modèles de matrices, on peut souhaiter calculer la valeur moyenne de toute traces de la forme:

$$T_{k_{1,1}, \overline{l_{1,1}}, \dots, k_{1,r_1}, \overline{l_{1,r_1}}; \dots; k_{r,1}, \overline{l_{r,1}}, \dots, k_{r,r_r}, \overline{l_{r,r_r}}} := N^{-\sum_i r_i} \left\langle \prod_{s=1}^r \text{Tr} \left(M_1^{k_{s,1}} M_2^{l_{s,1}} \dots M_1^{k_{s,r_s}} M_2^{l_{s,r_s}} \right) \right\rangle \quad (\text{II.5-3})$$

dont l'exemple le plus simple est:

$$T_{k,\bar{l}} := \frac{1}{N} \langle \text{Tr} M_1^k M_2^l \rangle \quad (\text{II.5-4})$$

Ces observables ne peuvent pas être obtenues en dérivant l'énergie libre par rapport aux coefficients des potentiels. Elles ne peuvent pas non plus être obtenues à partir des densités de valeurs propres (en effet, on ne peut pas exprimer $\text{tr} M_1^k M_2^l$ à partir des valeurs propres de M_1 et M_2). Leur calcul est plus difficile, et représente l'un des défis de ce modèle.

Pour le modèle normal, l'observable eq.(II.5-4) a été calculée par (Bertola,Eynard) dans [P4], et une généralisation à toutes les autres observables mixtes a été obtenue par (Eynard, Prats-Ferrer) dans [36], en utilisant le théorème II.1.1.

Dans le modèle formel, les observables mixtes du type eq.(II.5-3) sont les fonctions génératrices de surfaces ouvertes, dont les bords peuvent porter plusieurs signes, autrement dit, avec des conditions de bords non-triviales [21]. L'étude des opérateurs de bords est un sujet actuel et actif en physique des théories conformes et en théorie des cordes, et où beaucoup reste à comprendre [55]. Les modèles de matrices pourraient apporter des résultats à ce domaine.

Une large classe de ces observables (incluant eq.(II.5-4)) a été calculée dans la limite $N \rightarrow \infty$ par (Eynard) dans [P3] et dans [32], et le calcul de toutes les autres observables mixtes est en voie d'être achevé à ce jour.

5.3 Densités et corrélations de valeurs propres

Considérons ici uniquement le modèle normal. Nous allons suivre les traces de Mehta [58, 62].

Donnons nous r et s deux entiers compris entre 0 et N (et l'un au moins non nul), et des entiers k_1, \dots, k_r compris entre 1 et d_1 et l_1, \dots, l_s compris entre 1 et d_2 .

Définition 5.1 *Densités de probabilités intégrées de eq.(II.2-13), sur $\left(\prod_{i=1}^r \Gamma^x_{k_i} \times \prod_{j=1}^s \Gamma^y_{l_j} \right)$:*

$$\begin{aligned} & \rho_{r;s}^{k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) dx_1 \dots dx_r dy_1 \dots dy_s \\ &:= \sum_{k_{r+1}, \dots, k_N} \sum_{l_{s+1}, \dots, l_N} \prod_{i=1}^N \int_{\forall i > r, x_i \in \Gamma^x_{k_i}} \int_{\forall i > s, y_i \in \Gamma^y_{l_i}} \\ & \quad d\nu_{\text{Norm}, k_1, \dots, k_N; l_1, \dots, l_N}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) \end{aligned} \quad (\text{II.5-5})$$

C'est la probabilité que $x_1 \in \Gamma_{k_1}^x, \dots, x_r \in \Gamma_{k_r}^x$ soient valeurs propres de M_1 et $y_1 \in \Gamma_{l_1}^y, \dots, y_s \in \Gamma_{l_s}^y$ soient valeurs propres de M_2 , simultanément.

Définition 5.2 *Fonctions de corrélations de valeurs propres*

$$\begin{aligned}
& R_{r;s}^{k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s}(X_1, \dots, X_r; Y_1, \dots, Y_s) \\
& := N^{-r-s} \left\langle \prod_{i=1}^r \text{Tr } \delta^{(x, k_i)}(X_i - M_1) \prod_{i=1}^s \text{Tr } \delta^{(y, l_i)}(Y_i - M_2) \right\rangle \\
& := N^{-r-s} \sum_{k_{r+1}, \dots, k_N} \sum_{l_{s+1}, \dots, l_N} \prod_{i=1}^N \int_{x_i \in \Gamma_{k_i}^x} \int_{y_i \in \Gamma_{l_i}^y} \\
& \prod_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^N \delta(X_i - x_j) \right) \prod_{i=1}^s \left(\sum_{j=1}^N \delta(Y_i - y_j) \right) \\
& \quad d\nu_{\text{Norm}, k_1, \dots, k_N; l_1, \dots, l_N}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N)
\end{aligned}
\tag{II.5-6}$$

où $\delta^{(x, k)}(x)$ (resp. $\delta^{(y, k)}(y)$) est la distribution δ de Dirac sur le contour Γ_k^x (resp. Γ_k^y).

On peut aussi définir la partie connexe (les cumulants), on la note:

$$R_{\text{conn. } r;s}^{k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s}(X_1, \dots, X_r; Y_1, \dots, Y_s) \tag{II.5-7}$$

Remarque 5.1 Les deux fonctions $R_{r;s}$ et $\rho_{r;s}$ sont presque égales. Lorsque tous les x_i sont distincts et tous les y_i sont distincts on a:

$$R_{r;s}^{k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) = \frac{N!^2 N^{-r-s}}{N - r! N - s!} \rho_{r;s}^{k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) \tag{II.5-8}$$

Remarque 5.2 On peut retrouver les quantités définies en eq.(II.5-1):

$$\begin{aligned}
& T_{p_1, \dots, p_r; \overline{q_1}, \dots, \overline{q_s}} \\
& = \sum_{k_1, \dots, k_r} \sum_{l_1, \dots, l_s} \int_{x_i \in \Gamma_{k_i}^x} \int_{y_i \in \Gamma_{l_i}^y} x_1^{p_1} \dots x_r^{p_r} y_1^{q_1} \dots y_s^{q_s} \\
& \quad R_{r;s}^{k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) dx_1 \dots dx_r dy_1 \dots dy_s
\end{aligned}
\tag{II.5-9}$$

Remarque 5.3 On a la relation de récurrence évidente:

$$\begin{aligned}
& \rho_{r-1;s}^{k_1, \dots, k_{r-1}; l_1, \dots, l_s}(x_1, \dots, x_{r-1}; y_1, \dots, y_s) dx_1 \dots dx_{r-1} dy_1 \dots dy_s \\
& = \sum_{k_r} \int_{x_r \in \Gamma_{k_r}^x} \rho_{r;s}^{k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) dx_1 \dots dx_r dy_1 \dots dy_s
\end{aligned}
\tag{II.5-10}$$

5.4 Fonctions génératrices

Il est plus commode d'introduire des fonctions génératrices pour les moments [21].

Définition 5.3 *La résolvante de la matrice M_1 est:*

$$W_1(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{x^{k+1}} = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} \right\rangle = \sum_k \int_{\Gamma_k} \frac{1}{x - x'} \rho_{1,0}^k(x') dx' \quad (\text{II.5-11})$$

Notons que $W_1(x)$ n'est qu'une série formelle en $1/x$ (pour les trois modèles), et il faut faire attention si on veut l'interpréter comme une série convergente, et comme une fonction analytique de x . En fait $W_1(x)$ est une série asymptotique au voisinage de $x \rightarrow \infty$ qui définit plusieurs fonctions analytiques différentes.

De même,

Définition 5.4 *La résolvante de la matrice M_2 est:*

$$W_2(y) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T_l}{y^{l+1}} = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle = \sum_l \int_{\Gamma^{y_l}} \frac{1}{y - y'} \rho_{0,1}^l(y') dy' \quad (\text{II.5-12})$$

Comme précédemment, c'est une série formelle, qui correspond à plusieurs fonctions analytiques différentes:

On introduit aussi des fonctions à deux points (voir notations de eq.(II.5-2)):

Définition 5.5 *Fonctions à deux points*

$$W_{1;2}(x; y) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T_{\text{conn. } k; \bar{l}}}{x^{k+1} y^{l+1}} = \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} \text{tr} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle - N^2 W_1(x) W_2(y) \quad (\text{II.5-13})$$

$$W_{1;1}(x; x') := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T_{\text{conn. } k; l}}{x^{k+1} x'^{l+1}} = \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} \text{tr} \frac{1}{x' - M_1} \right\rangle - N^2 W_1(x) W_1(x') \quad (\text{II.5-14})$$

$$W_{2;2}(y; y') := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T_{\text{conn. } \bar{k}; \bar{l}}}{y^{k+1} y'^{l+1}} = \left\langle \text{tr} \frac{1}{y - M_2} \text{tr} \frac{1}{y' - M_2} \right\rangle - N^2 W_2(y) W_2(y') \quad (\text{II.5-15})$$

Notons ce sont des séries formelles en x et y , i.e. des séries asymptotiques qui définissent plusieurs fonctions analytiques différentes.

On introduit aussi des fonctions à deux points contenant les traces mixtes du type eq.(II.5-4):

Définition 5.6 *Fonction de corrélation à deux points mixte*

$$W_{1,2}(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T_{k, \bar{l}}}{x^{k+1} y^{l+1}} = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle \quad (\text{II.5-16})$$

Conclusion

L'objet de l'étude des modèles de matrices est essentiellement de calculer toutes ces fonctions, en particulier dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Chapitre 3

Méthode des polynômes biorthogonaux et intégrabilité

Cette méthode ne s'applique qu'au modèle normal, on peut aussi lui donner un sens pour le modèle formel, mais nous ne le ferons pas ici. Nous nous placerons désormais dans le cadre du modèle normal défini dans le paragraphe II.2.3. Il y a de nombreuses références sur les polynômes orthogonaux: [58, 67, 20], voir aussi [1, 28, 21].

1 Polynômes biorthogonaux

Définition 1.1 *Considérons deux familles de polynômes moniques $\pi_n(x) = x^n + \dots$ et $\sigma_n(y) = y^n + \dots$, telles que:*

$$\int_{\Gamma} dx dy \pi_n(x) \sigma_m(y) e^{-\frac{N}{T}[V_1(x)+V_2(y)-xy]} = h_n \delta_{nm} \quad (\text{III.1-1})$$

1.1 Généralisation de la formule de Heine

Théorème 1.1 *Formule de Heine généralisée pour les polynômes biorthogonaux*

$$\pi_n(x) = \frac{\int_{H_n(\Gamma)} dM_1 dM_2 \det(x - M_1) e^{-\frac{N}{T}[V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2]}}{\int_{H_n(\Gamma)} dM_1 dM_2 e^{-\frac{N}{T}[V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2]}} \quad (\text{III.1-2})$$

autrement dit, π_n est la valeur moyenne du polynôme caractéristique de la matrice M_1 . De même:

$$\sigma_n(y) = \frac{\int_{H_n(\Gamma)} dM_1 dM_2 \det(y - M_2) e^{-\frac{N}{T}[V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2]}}{\int_{H_n(\Gamma)} dM_1 dM_2 e^{-\frac{N}{T}[V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2]}} \quad (\text{III.1-3})$$

Ce théorème semble être dû à Jean Zinn-Justin [77]. Il est exposé dans [P11]. Ecrit avec la mesure induite sur les valeurs propres, il donne une formule semblable à celle de Heine [67] pour les polynômes orthogonaux.

Il est clair que l'existence des polynômes biorthogonaux est équivalente à la non-annulation du dénominateur. Pour le modèle hermitien, avec des potentiels V_1 et V_2 réels, l'intégrand du dénominateur est strictement positif, et le dénominateur ne s'annule jamais (voir aussi [28]). Pour le cas général, il n'a pas encore été trouvé de critère simple sur V_1 et V_2 pour garantir l'existence des polynômes orthogonaux.

Remarquons d'après [P6], que le dénominateur est un polynôme de degré $\leq n$ dans les κ , et donc la non-existence des polynômes biorthogonaux (i.e. $\exists n$ tel que le dénominateur s'annule) est un sous-ensemble de mesure nulle (dénombrable) de $\mathbb{C}^{d_1 \times d_2}$. Autrement dit, pour V_1 et V_2 donnés, les polynômes biorthogonaux existent pour presque tout κ . Cet argument est dû à M. Bertola.

1.2 Notation, fonctions d'ondes

Nous allons suivre les notations de [P8], [P6]:

Définition 1.2 Fonctions d'ondes

$$\psi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{h_n}} \pi_n(x) e^{-\frac{N}{T} V_1(x)}, \quad \phi_n(y) := \frac{1}{\sqrt{h_n}} \sigma_n(y) e^{-\frac{N}{T} V_2(y)} \quad (\text{III.1-4})$$

Définition 1.3 Transformées de Fourier-Laplace des fonctions d'ondes

$$\begin{aligned} k = 1, \dots, d_1, \quad \tilde{\psi}_n^{(k)}(y) &:= \int_{\Gamma_k^{x_k}} \psi_n(x) e^{\frac{N}{T} xy} dx \\ k = 1, \dots, d_2, \quad \tilde{\phi}_n^{(k)}(x) &:= \int_{\Gamma_k^{y_k}} \phi_n(y) e^{\frac{N}{T} xy} dy \end{aligned} \quad (\text{III.1-5})$$

Définition 1.4 Transformées de Hilbert des fonctions d'ondes

$$\tilde{\psi}_n^{(0)}(y) := e^{\frac{N}{T} V_2(y)} \int_{\Gamma} \frac{\psi_n(x)}{y - y'} e^{-\frac{N}{T} V_2(y')} e^{\frac{N}{T} xy'} dx dy' \quad (\text{III.1-6})$$

$$\tilde{\phi}_n^{(0)}(x) := e^{\frac{N}{T} V_1(x)} \int_{\Gamma} \frac{\phi_n(y)}{x - x'} e^{-\frac{N}{T} V_1(x')} e^{\frac{N}{T} x'y} dx' dy \quad (\text{III.1-7})$$

Notons que les ψ_n , ϕ_n , ainsi que les $\tilde{\psi}^{(k)}$ et $\tilde{\phi}^{(k)}$ pour $k > 0$ sont des fonctions entières. Par contre, les transformées de Hilbert sont analytiques par morceaux dans $\mathbb{C}/\cup_j \Gamma_j^x$ (resp. $\mathbb{C}/\cup_j \Gamma_j^y$). La fonction $\tilde{\phi}_n^{(0)}(x)$ est discontinue chaque fois que x croise un contour Γ_j^x , et sa discontinuité vaut (x_+ et x_- désignent respectivement des points à gauche et à droite du contour):

$$\tilde{\phi}_n^{(0)}(x_+) = \tilde{\phi}_n^{(0)}(x_-) + 2i\pi \sum_{l=1}^{d_2} \kappa_{j,l} \tilde{\phi}_n^{(l)}(x) \quad (\text{III.1-8})$$

de même, si $y \in \Gamma_j^y$:

$$\tilde{\psi}_n^{(0)}(y_+) = \tilde{\psi}_n^{(0)}(y_-) + 2i\pi \sum_{l=1}^{d_1} \kappa_{l,j} \tilde{\psi}_n^{(l)}(y) \quad (\text{III.1-9})$$

On peut aussi définir des fonctions entières à partir des transformées de Hilbert, par prolongement analytique en déplaçant les contours. pour chaque composante connexe A de $\mathbb{C}/\cup_j \Gamma_j^x$, on obtient une fonction entière sur \mathbb{C} , qui coïncide avec $\tilde{\psi}_n^{(0)}(x)$ sur A . Cette procédure permet d'obtenir d_1 (resp. d_2) fonctions entières indépendantes, notées:

$$\tilde{\phi}_n^{(0,k)}(x), k = 1, \dots, d_1, \quad \tilde{\psi}_n^{(0,k)}(y), k = 1, \dots, d_2 \quad (\text{III.1-10})$$

2 Relations de récurrences et matrices à bandes finies

Les polynômes π_n forment une base, et l'on peut décomposer le polynôme $x\pi_n(x)$ sur cette base, et donc pour les ψ_n :

$$x\psi_n(x) = \sum_{m=0}^{n+1} Q_{nm} \psi_m(x) \quad (\text{III.2-1})$$

de même:

$$y\phi_n(y) = \sum_{m=0}^{n+1} P_{nm} \phi_m(y) \quad (\text{III.2-2})$$

où Q et P sont des matrices semi-infinies.

De même, on peut décomposer le polynôme $\pi'_n(x)$ sur la base des π_n , le terme de plus haut degré étant $n\pi_{n-1}$. La dérivée de ψ_n peut donc se décomposer sur la base des ψ_m , avec $m \leq n + d_1$ (à cause de la dérivée de $e^{-\frac{N}{T}V_1}$). Les coefficients de ce développement sont obtenus par l'identité

$$\forall n, m, \quad \int_{\Gamma} dx dy \partial_x \left(\psi_n(x) \phi_m(y) e^{\frac{N}{T}xy} \right) = 0 \quad (\text{III.2-3})$$

qui implique:

$$-\frac{T}{N} \partial_x \psi_n(x) = \sum_{m=n-1}^{n+d_1} P_{mn} \psi_m(x) \quad (\text{III.2-4})$$

On a vu plus haut que cette somme est en fait limitée à $m \leq n + d_1$, i.e.

$$P_{nm} = 0 \quad \text{si} \quad m > n + 1 \text{ ou } m < n - \deg V'_1 \quad (\text{III.2-5})$$

de même:

$$Q_{nm} = 0 \quad \text{si} \quad m > n + 1 \text{ ou } m < n - \deg V'_2 \quad (\text{III.2-6})$$

i.e. les matrices Q et P sont à bande finie.

On pose:

$$\alpha_k(n) := Q_{n,n-k}, \quad \beta_k(n) := P_{n,n-k} \quad (\text{III.2-7})$$

Le fait que les polynômes sont moniques implique:

$$\alpha_{-1}(n) = \beta_{-1}(n) = \sqrt{\frac{h_{n+1}}{h_n}} := \gamma_n \quad (\text{III.2-8})$$

Autrement dit:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_0(0) & \gamma_0 & 0 & \dots \\ \alpha_1(1) & \alpha_0(1) & \gamma_1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{d_2}(d_2) & \ddots & & & \gamma_{d_2} \\ 0 & \alpha_{d_2}(d_2 + 1) & \ddots & & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \ddots & \end{pmatrix} \quad (\text{III.2-9})$$

$$P = \begin{pmatrix} \beta_0(0) & \gamma_0 & 0 & \dots \\ \beta_1(1) & \beta_0(1) & \gamma_1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \beta_{d_1}(d_1) & \ddots & & & \gamma_{d_1} \\ 0 & \beta_{d_1}(d_1 + 1) & \ddots & & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \ddots & \end{pmatrix} \quad (\text{III.2-10})$$

2.1 Notations pour les matrices semi-infinies

Si on définit la matrice semi-infinie:

$$\Lambda := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \Lambda_{ij} = \delta_{i+1,j} \quad (\text{III.2-11})$$

et les matrices:

$$\alpha_k := \text{diag}(\alpha_k(n))_{n=0,\dots,\infty}, \quad \beta_k := \text{diag}(\beta_k(n))_{n=0,\dots,\infty}, \quad \gamma := \text{diag}(\gamma_n)_{n=0,\dots,\infty} \quad (\text{III.2-12})$$

on peut écrire:

$$Q = \gamma\Lambda + \sum_{k=0}^{d_2} \alpha_k \Lambda^{tk}, \quad P = \gamma\Lambda + \sum_{k=0}^{d_1} \beta_k \Lambda^{tk} \quad (\text{III.2-13})$$

On introduit aussi les projecteurs sur le sous espace des polynomes de degré $\leq n$:

$$\Pi_n := \text{diag}(1, \dots, 1(n+1 \text{ termes}), \dots, 1, 0, \dots) \quad (\text{III.2-14})$$

On a les relations:

$$\Lambda \Pi_n = \Pi_{n-1} \Lambda, \quad \Lambda \Lambda^t = 1, \quad \Lambda^t \Lambda = 1 - \Pi_0 \quad (\text{III.2-15})$$

Remarque 2.1 Notons que l'algèbre des matrices infinies considérée ici, n'est pas associative ($A(BC) \neq (AB)C$), car on ne peut pas échanger l'ordre de sommation pour les sommes infinies. Il n'y a associativité que si toutes les sommes impliquées sont finies, c'est le cas pour les matrices à bandes finies et les projecteurs Π_n .

2.2 Relations entre P et Q

Le fait que la décomposition de π'_n sur la base des π commence par:

$$\pi'_n(x) = n\pi_{n-1}(x) + \dots \quad (\text{III.2-16})$$

implique pour P et Q les relations:

$$(P^t)_{n,m} = (V'_1(Q))_{n,m} \quad \text{si } m \geq n, \quad (P^t)_{n,n-1} = (V'_1(Q))_{n,n-1} - \frac{Tn}{N\gamma_{n-1}} \quad (\text{III.2-17})$$

De même:

$$(Q^t)_{n,m} = (V'_2(P))_{n,m} \quad \text{si } m \geq n, \quad (Q^t)_{n,n-1} = (V'_2(P))_{n,n-1} - \frac{Tn}{N\gamma_{n-1}} \quad (\text{III.2-18})$$

Ces relations sont souvent appelées "équations du mouvement" [21].

Cela implique en particulier:

$$\Lambda^{d_2} \alpha_{d_2} = \tilde{g}_{d_2+1}(\gamma\Lambda)^{d_2}, \quad \Lambda^{d_1} \beta_{d_1} = g_{d_1+1}(\gamma\Lambda)^{d_1} \quad (\text{III.2-19})$$

On a aussi la relation de Heisenberg aussi appelée "équation des cordes" [21]:

$$[P^t, Q] = \frac{T}{N} 1 \quad (\text{III.2-20})$$

2.3 Relations de récurrences, résumé

On a l'ensemble de relations:

$$\begin{aligned} x\psi_n &= \sum_{k=-1}^{d_2} \alpha_k(n) \psi_{n-k}, & y\phi_n &= \sum_{k=-1}^{d_1} \beta_k(n) \phi_{n-k} \\ -\frac{T}{N} \partial_x \psi_n &= \sum_{k=-1}^{d_1} \beta_k(n+k) \psi_{n+k}, & -\frac{T}{N} \partial_y \phi_n &= \sum_{k=-1}^{d_2} \alpha_k(n+k) \phi_{n+k} \end{aligned} \quad (\text{III.2-21})$$

De plus, il est facile de montrer [P6] que pour tout $j \in [0, d_2]$:

$$\begin{aligned} x\tilde{\phi}_n^{(j)} &= \sum_{k=-1}^{d_1} \alpha_k(n+k) \tilde{\phi}_{n+k}^{(j)} + \delta_{j,0} \sqrt{\hbar_0} e^{\frac{N}{T} V_1(x)} \\ \frac{T}{N} \partial_x \tilde{\phi}_n^{(j)} &= \sum_{k=-1}^{d_1} \beta_k(n) \tilde{\phi}_{n-k}^{(j)} + \delta_{j,0} \sqrt{\hbar_0} e^{\frac{N}{T} V_1(x)} \left(\frac{V'_1(x) - V'_1(Q)}{x-Q} \right)_{0,n} \end{aligned} \quad (\text{III.2-22})$$

et pour tout $j \in [0, d_1]$:

$$\begin{aligned} y\tilde{\psi}_n^{(j)} &= \sum_{k=-1}^{d_1} \beta_k(n+k) \tilde{\psi}_{n+k}^{(j)} + \delta_{j,0} \sqrt{\hbar_0} e^{\frac{N}{T} V_2(y)} \\ \frac{T}{N} \partial_y \tilde{\psi}_n^{(j)} &= \sum_{k=-1}^{d_2} \alpha_k(n) \tilde{\psi}_{n-k}^{(j)} + \delta_{j,0} \sqrt{\hbar_0} e^{\frac{N}{T} V_2(y)} \left(\frac{V'_2(y) - V'_2(P)}{y-P} \right)_{0,n} \end{aligned} \quad (\text{III.2-23})$$

3 Noyaux et densités

On introduit [P10]:

Définition 3.1 *les noyaux*

$$K_{12}(x, y) := \sum_{j=0}^{N-1} \psi_j(x) \phi_j(y) \quad (\text{III.3-1})$$

$$K_{11}^{(k)}(x, x') := \sum_{j=0}^{N-1} \psi_j(x) \tilde{\phi}_j^{(k)}(x') \quad (\text{III.3-2})$$

$$K_{22}^{(k)}(y', y) := \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\psi}_j^{(k)}(y') \phi_j(y) \quad (\text{III.3-3})$$

$$\begin{aligned} K_{21}(y', x') &:= \sum_{k=1}^{d_1} \sum_{l=1}^{d_2} \kappa_{k,l} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\psi}_j^{(k)}(y') \tilde{\phi}_j^{(l)}(x') - e^{-\frac{N}{T}[V_1(x)+V_2(y)-xy]} \\ &= - \sum_{k=1}^{d_1} \sum_{l=1}^{d_2} \kappa_{k,l} \sum_{j=N}^{\infty} \tilde{\psi}_j^{(k)}(y') \tilde{\phi}_j^{(l)}(x') \end{aligned} \quad (\text{III.3-4})$$

Ces noyaux permettent de calculer les densités définies en eq.(II.5-5).

Théorème 3.1 (*Eynard, Mehta [P10]*) *les densités de valeurs propres définies en def.II.5.1 sont données par:*

$$\rho_{r;s}^{k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) = \det \begin{pmatrix} K_{11}^{(k_j)}(x_i, x_j) & K_{12}(x_i, y_j) \\ K_{21}(y_i, x_j) & K_{22}^{(l_i)}(y_i, y_j) \end{pmatrix} \quad (\text{III.3-5})$$

La preuve est exposée dans [P10], c'est une généralisation du théorème de Dyson pour les polynômes orthogonaux [25]. Elle utilise la relation de récurrence eq.(II.5-10) et les propriétés auto-reproduisantes des noyaux:

$$\sum_{k,k'} \kappa_{k,k'} \int_{\Gamma_k} du K_{11}^{(k')}(x, u) K_{11}^{(l)}(u, x') = K_{11}^{(l)}(x, x') \quad (\text{III.3-6})$$

$$\sum_{k,k'} \kappa_{k,k'} \int_{\Gamma^{y_k}} du K_{22}^{(k')}(y, u) K_{22}^{(l)}(u, y') = K_{22}^{(l)}(y, y') \quad (\text{III.3-7})$$

$$\sum_{k,l} \kappa_{k,l} \int_{\Gamma_k} du K_{21}(y, u) K_{11}^{(l)}(u, x) = K_{21}(y, x) \quad (\text{III.3-8})$$

$$\sum_{k,l} \kappa_{k,l} \int_{\Gamma^{y_l}} du K_{22}^{(k)}(y, u) K_{21}(u, x) = K_{21}(y, x) \quad (\text{III.3-9})$$

Grace à ce théorème, le calcul de ces quatre noyaux (notons que ceux ci s'obtiennent par transformée de Fourier à partir de K_{12}), est suffisant pour calculer toutes les fonctions de corrélations de valeurs propres du type eq.(II.5-5).

4 Matrices de Christoffel–Darboux

Théorème 4.1 *La matrice:*

$$A_n := [Q, \Pi_{n-1}] \quad (\text{III.4-1})$$

possède seulement un sous bloc de taille $d_2 + 1 \times d_2 + 1$ non identiquement nul:

$$(A_n)_{k,l} = \begin{cases} \alpha_{k-l}(k) & \text{si } n \leq k \leq n + d_2 - 1, n - d_2 \leq l \leq n - 1, k - l \leq d_2 \\ -\gamma_{n-1} & \text{si } k = n - 1 \text{ et } l = n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{III.4-2})$$

De même, $B_n := [P, \Pi_{n-1}]$, possède seulement un bloc de taille $d_1 + 1$ non nul:

$$(B_n)_{k,l} = \begin{cases} \beta_{k-l}(k) & \text{si } n \leq k \leq n + d_1 - 1, n - d_1 \leq l \leq n - 1, k - l \leq d_1 \\ -\gamma_{n-1} & \text{si } k = n - 1 \text{ et } l = n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{III.4-3})$$

Définition 4.1 *Les matrices A_n et B_n seront appelées matrices de Christoffel–Darboux.*

On a immédiatement la généralisation du théorème de Christoffel–Darboux [P8]:

Théorème 4.2 *théorème de Christoffel–Darboux généralisé*

$$(x' - x)K_{11,n}^{(k)}(x, x') = \sum_{i=n-1}^{n+d_2-1} \sum_{j=n-d_2}^n A_{ni,j} \psi_j(x) \tilde{\phi}_i^{(k)}(x') \quad (\text{III.4-4})$$

$$(y' - y)K_{22,n}^{(k)}(y', y) = \sum_{i=n-1}^{n+d_1-1} \sum_{j=n-d_1}^n B_{ni,j} \tilde{\psi}_i^{(k)}(y') \phi_j(y) \quad (\text{III.4-5})$$

Grâce à ce thémème, le calcul des noyaux se réduit au calcul de seulement $d_2 + 1$ polynomes de type ψ_n , et $d_1 + 1$ polynomes de type ϕ_n . Ceci est particulièrement utile dans la limite $n \rightarrow \infty$. Il n'est pas clair qui a découvert ce théorème pour la première fois.

Corollaire 4.1 *On a des relations additionnelles (Bertola, Eynard, Harnad [P8]), par exemple:*

$$(x + \frac{T}{N} \partial_y) K_{12,n}(x, y) = - \sum_{i=n-1}^{n+d_2-1} \sum_{j=n-d_2}^n A_{ni,j} \psi_j(x) \phi_i(y) \quad (\text{III.4-6})$$

$$(y + \frac{T}{N} \partial_x) K_{12,n}(x, y) = - \sum_{i=n-1}^{n+d_1-1} \sum_{j=n-d_1}^n B_{ni,j} \psi_i(x) \phi_j(y) \quad (\text{III.4-7})$$

$$\frac{T}{N} (\partial_x + \partial_{x'}) K_{11,n}^{(k)}(x, x') = \sum_{i=n-1}^{n+d_1-1} \sum_{j=n-d_1}^n B_{ni,j} \psi_i(x) \tilde{\phi}_j^{(k)}(x') \quad (\text{III.4-8})$$

5 Repliement sur une fenêtre

On a vu que les noyaux peuvent s'exprimer seulement à l'aide des polynômes de rang $\in [n - d_2, n]$ et des transformées de Fourier de rang $\in [n - 1, n + d_2 - 1]$.

Définition 5.1 *Les vecteurs suivants, formés de $d_2 + 1$ fonctions d'ondes ψ (resp. transformées de Fourier $\tilde{\phi}$) consécutifs sont appelés fenêtre et fenêtre duale:*

$$\Psi_n(x) := (\psi_{n-d_2}(x), \dots, \psi_n(x))^t, \quad \tilde{\Phi}_n^{(k)}(x) := (\tilde{\phi}_{n-1}^{(k)}(x), \dots, \tilde{\phi}_{n+d_2-1}^{(k)}(x))^t \quad (\text{III.5-1})$$

et de même:

Définition 5.2 *Les vecteurs suivants, formés de $d_1 + 1$ fonctions d'ondes ϕ (resp. transformées de Fourier $\tilde{\psi}$) consécutifs sont appelés fenêtre et fenêtre duale:*

$$\Phi_n(y) := (\phi_{n-d_1}(y), \dots, \phi_n(y))^t, \quad \tilde{\Psi}_n^{(k)}(y) := (\tilde{\psi}_{n-1}^{(k)}(y), \dots, \tilde{\psi}_{n+d_1-1}^{(k)}(y))^t \quad (\text{III.5-2})$$

Il est clair qu'on peut utiliser la première relation eq.(III.2-21) (multiplication par x) pour exprimer n'importe quel polynôme ψ_m avec $m \in [0, \infty[$, comme une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux en x de polynômes de la fenêtre.

Définition 5.3 *La matrice $F_n(x)$ de taille $\infty \times (d_2 + 1)$ telle que*

$$\forall m = 0, \dots, \infty, \quad \psi_m(x) = \sum_{j=n-d_2}^n (F_n(x))_{m,j} \psi_j(x) \quad (\text{III.5-3})$$

est appelée matrice de repliement sur la fenêtre Ψ_n .

On a $\deg (F_n)_{m,j} \leq n - d_2 - m$ si $m < n - d_2$ et $\deg (F_n)_{m,j} \leq m - n$ si $m > n$. La matrice $F_n(x)$ a été calculée par Bertola-Eynard dans [P2], et vaut:

Théorème 5.1 (Bertola, Eynard [P2]) *La matrice $F_n(x)$ est donnée par*

$$F_n(x) = ((Q - x)_L^{-1} - (Q - x)_R^{-1}) A_n \quad (\text{III.5-4})$$

où $(Q - x)_L^{-1}$ et $(Q - x)_R^{-1}$ sont respectivement les inverses à droite (triangulaire inférieure) et à gauche (triangulaire supérieure) de la matrice $Q - x$. On les calcule en introduisant les deux matrices suivantes respectivement strictement triangulaires supérieures et inférieures:

$$\mathcal{Q}_L := 1 - \frac{1}{\tilde{g}_{d_2+1}} (\gamma^{-1} \Lambda)^{d_2} (Q - x), \quad \mathcal{Q}_R := 1 - \Pi_0 - \Lambda^t \gamma^{-1} (Q - x) \quad (\text{III.5-5})$$

on a:

$$(Q - x)_L^{-1} = \frac{1}{\tilde{g}_{d_2+1}} (1 - \mathcal{Q}_L)^{-1} (\gamma^{-1} \Lambda)^{d_2} \quad (\text{III.5-6})$$

$$(Q - x)_R^{-1} = (1 - \mathcal{Q}_R)^{-1} \Lambda^t \gamma^{-1} \quad (\text{III.5-7})$$

la matrice $(1 - \mathcal{Q}_L)^{-1}$ est une notation pour $\sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{Q}_L)^k$, et il faut noter que pour le calcul d'un élément de $F_n(x)$, cette somme se réduit à une somme finie (cf remarque III.2.1).

De même on définit les matrices respectivement triangulaires inférieure et supérieure:

$$\tilde{\mathcal{Q}}_L := 1 - \Pi_{d_2-1} - \frac{1}{\tilde{g}_{d_2+1}} (\Lambda^t \gamma^{-1})^{d_2} (Q - x)^t, \quad \tilde{\mathcal{Q}}_R := 1 - \gamma^{-1} \Lambda (Q - x)^t \quad (\text{III.5-8})$$

et la matrice:

$$\tilde{F}_n(x) = \left(\frac{1}{\tilde{g}_{d_2+1}} (1 - \tilde{\mathcal{Q}}_L)^{-1} (\Lambda^t \gamma^{-1})^{d_2} - (1 - \tilde{\mathcal{Q}}_R)^{-1} \gamma^{-1} \Lambda \right) A_n^t \quad (\text{III.5-9})$$

qui assure le repliement des transformées de Fourier (pour tout $k = 1, \dots, d_2$):

$$\forall m = 0, \dots, \infty, \quad \tilde{\phi}_m^{(k)}(x) = \sum_{j=n-1}^{n+d_2-1} \tilde{F}_{mj,n}(x) \tilde{\phi}_j^{(k)}(x) \quad (\text{III.5-10})$$

Et on peut définir de façon similaire les repliements des ϕ et $\tilde{\psi}$:

$$\phi_m(y) = \sum_{j=n-d_1}^n G_{nm,j}(y) \phi_j(y), \quad \tilde{\psi}_m^{(k)}(y) = \sum_{j=n-1}^{n+d_1-1} \tilde{G}_{nm,j}(y) \tilde{\psi}_j^{(k)}(y) \quad (\text{III.5-11})$$

6 Systèmes différentiels

Théorème 6.1 *La fenêtre $\Psi_n(x)$ satisfait un système d'équation différentielles linéaires à coefficients polynomiaux*

$$-\frac{T}{N} \partial_x \Psi_n(x) = \mathcal{D}_{1,n}(x) \Psi_n(x) \quad (\text{III.6-1})$$

et $\mathcal{D}_{1,n}(x)$ est le seul bloc non nul de la matrice:

$$\mathcal{D}_{1,n}(x) = (\Pi_n - \Pi_{n-d_2-1}) P^t F_n(x) \quad (\text{III.6-2})$$

preuve: (voir [P8], [P2], mais ces systèmes ont été trouvés dans des cas particuliers avant) on utilise le repliement sur une fenêtre. On écrit la relation eq.(III.2-21) $(\partial_x \psi)$ pour tous les polynômes de la fenêtre, et l'on utilise eq.(III.5-3) pour exprimer le membre de droite sur la base des polynômes de la fenêtre:

$$\begin{aligned} \forall m = n - d_2, \dots, n, \quad -\frac{T}{N} \partial_x \psi_m(x) &= \sum_{k=m-1}^{m+d_1} P_{km} \psi_k(x) = \sum_{k=m-1}^{m+d_1} \sum_{j=n-d_2}^n P_{km} F_{kj,n}(x) \psi_j(x) \\ &= \sum_{j=n-d_2}^n (P^t F_n(x))_{mj} \psi_j(x) \end{aligned} \quad (\text{III.6-3})$$

QED.

Notons que $\mathcal{D}_{1,n}(x)$ est une matrice de taille $d_2 + 1 \times d_2 + 1$, dont les coefficients sont des polynômes en x de degré $\leq d_1$.

De même, on définit trois autres systèmes différentiels (on suppose $n > \max(d_1, d_2)$, sinon il y a des termes correspondant aux petites valeurs de n comme dans eq.(III.2-22)):

Définition 6.1 *Autres systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux*

$$\frac{T}{N} \partial_x \tilde{\Phi}_n^{(k)}(x) = \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x) \tilde{\Phi}_n^{(k)}(x) , \quad \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x) = (\Pi_{n+d_2-1} - \Pi_{n-2}) P \tilde{F}_n(x) \quad (\text{III.6-4})$$

$$-\frac{T}{N} \partial_y \Phi_n(y) = \mathcal{D}_{2,n}(y) \Phi_n(y) , \quad \mathcal{D}_{2,n}(y) = (\Pi_n - \Pi_{n-d_1-1}) Q^t G_n(y) \quad (\text{III.6-5})$$

$$\frac{T}{N} \partial_y \tilde{\Psi}_n^{(k)}(y) = \tilde{\mathcal{D}}_{2,n}(y) \tilde{\Psi}_n^{(k)}(y) , \quad \tilde{\mathcal{D}}_{2,n}(y) = (\Pi_{n+d_1-1} - \Pi_{n-2}) Q \tilde{G}_n(y) \quad (\text{III.6-6})$$

Notons que $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)$ est une matrice de taille $d_2 + 1 \times d_2 + 1$, dont les coefficients sont des polynômes en x de degré $\leq d_1$, comme $\mathcal{D}_{1,n}(x)$. De même, $\mathcal{D}_{2,n}(y)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_{2,n}(y)$ sont des matrices de taille $d_1 + 1 \times d_1 + 1$, dont les coefficients sont des polynômes en y de degré $\leq d_2$.

Dans [P2], nous avons obtenu des expressions encore plus explicites de ces systèmes.

Théorème 6.2 (Bertola, Eynard [P2]) *La matrice $\mathcal{D}_{1,n}(x)$ s'écrit:*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1,n}(x) = & \begin{pmatrix} V_1'(Q)_{n-d_2, n-d_2} & \cdots & V_1'(Q)_{n-d_2, n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & V_1'(Q)_{n-1, n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & V_1'(x) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \gamma(n-d_2-1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \gamma(n-1) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{d_2-1}(n-1)}{\alpha_{d_2}(n-1)} & \cdots & \frac{x-\alpha_0(n-1)}{\alpha_{d_2}(n-1)} & -\frac{\gamma(n-1)}{\alpha_{d_2}(n-1)} \\ 1 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} \frac{V_1'(Q)-V_1'(x)}{Q-x} & \cdots & \frac{V_1'(Q)-V_1'(x)}{Q-x} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{V_1'(Q)-V_1'(x)}{Q-x} & \cdots & \frac{V_1'(Q)-V_1'(x)}{Q-x} \end{pmatrix} A_N , \end{aligned} \quad (\text{III.6-7})$$

La preuve est détaillée dans [P2]. Elle utilise eq.(III.6-2) et eq.(III.2-17).

On a bien sûr des expressions similaires pour les 3 autres systèmes [P2].

7 Dualité spectrale

Il a été prouvé par Bertola-Eynard-Harnad [P8] que ces systèmes différentiels sont duaux.

Théorème 7.1 (*Bertola, Eynard, Harnad [P8]*) les matrices $\mathcal{D}_{1,n}(x)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}^t(x)$ sont conjuguées par la matrice de Christoffel–Darboux:

$$A_n \mathcal{D}_{1,n}(x) = \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}^t(x) A_n \quad (\text{III.7-1})$$

preuve: donnons ici une idée de la démonstration de [P8]:

Supposons que $n > d_2 + d_1$. Considérons deux solutions arbitraires des systèmes $\mathcal{D}_{1,n}(x)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)$:

$$f(x) = (f_{n-d_2}(x), \dots, f_n(x))^t, \quad \frac{T}{N} \partial_x f(x) = -\mathcal{D}_{1,n}(x) f(x) \quad (\text{III.7-2})$$

$$g(x) = (g_{n-1}(x), \dots, g_{n+d_2-1}(x))^t, \quad \frac{T}{N} \partial_x g(x) = \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x) g(x) \quad (\text{III.7-3})$$

On définit les fonctions $f_m(x)$ avec $n - d_2 - 1 \leq m \leq n + d_1$ et $g_m(x)$ avec $n - d_1 - 1 \leq m \leq n + d_2$, récursivement par:

$$\sum_{k=-1}^{d_2} \alpha_k(m) f_{m-k}(x) = x f_m(x), \quad \sum_{k=-1}^{d_2} \alpha_k(m+k) g_{m+k}(x) = x g_m(x) \quad (\text{III.7-4})$$

les équations eq.(III.7-2) et eq.(III.7-3) sont alors équivalentes à (voir [P8] pour détails):

$$\begin{aligned} \forall m \in [n - d_2, n] \quad & -\frac{T}{N} \partial_x f_m(x) = \sum_{k=-1}^{d_1} \beta_k(m+k) f_{m+k}(x) \\ \forall m \in [n - 1, n + d_2 - 1] \quad & \frac{T}{N} \partial_x g_m(x) = \sum_{k=-1}^{d_1} \beta_k(m) g_{m-k}(x) \end{aligned} \quad (\text{III.7-5})$$

c'est à dire les relations eq.(III.2-21) et eq.(III.2-22). On a donc:

$$\begin{aligned} & \frac{T}{N} g^t(x') \left(\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}^t(x') A_n - A_n \mathcal{D}_{1,n}(x) \right) f(x) \\ = & \frac{T}{N} \sum_{r=n-1}^{n+d_2-1} \sum_{s=n-d_2}^n g_r(x') f_s(x) \left(\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}^t(x') A_n - A_n \mathcal{D}_{1,n}(x) \right)_{r,s} \\ = & \sum_{r=n-d_1-1}^{n+d_2} \sum_{s=n-d_2-1}^{n+d_1} g_r(x') f_s(x) [P^t, A_n]_{r,s} \\ = & \sum_{r=n-d_1-1}^{n+d_2} \sum_{s=n-d_2-1}^{n+d_1} g_r(x') f_s(x) [P^t, [Q, \Pi]]_{r,s} \\ = & \sum_{r=n-d_1-1}^{n+d_2} \sum_{s=n-d_2-1}^{n+d_1} g_r(x') f_s(x) ([P^t, Q], \Pi + [Q, [P^t, \Pi]])_{r,s} \\ = & \sum_{r=n-d_1-1}^{n+d_2} \sum_{s=n-d_2-1}^{n+d_1} g_r(x') f_s(x) [Q, [P^t, \Pi]]_{r,s} \\ = & (x' - x) \sum_{r=n-d_1}^n \sum_{s=n-1}^{n+d_1-1} g_r(x') f_s(x) [P^t, \Pi]_{r,s} \end{aligned}$$

$$= (x - x') \sum_{r=n-d_1}^n \sum_{s=n-1}^{n+d_1-1} g_r(x') f_s(x) (B_n^t)_{r,s} \quad (\text{III.7-6})$$

qui s'annule pour $x' = x$. Ceci étant vrai pour toute solutions f et g , on doit avoir:

$$\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}^t(x) A_n = A_n \mathcal{D}_{1,n}(x) \quad (\text{III.7-7})$$

QED. Notons que l'on a utilisé la relation de Heisenberg entre P et Q :

$$[P^t, Q] = \frac{T}{N} 1 \quad (\text{III.7-8})$$

A partir de là, il a été prouvé par Bertola-Eynard-Harnad [P8] que ces quatres systèmes différentiels ont la même courbe spectrale:

Théorème 7.2 (Bertola, Eynard, Harnad [P8]) *Les 4 systèmes $\mathcal{D}_{1,n}(x)$, $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)$, $\mathcal{D}_{2,n}(y)$, $\tilde{\mathcal{D}}_{2,n}(y)$ ont la même courbe spectrale:*

$$\begin{aligned} E_n(x, y) &= \tilde{g}_{d_2+1} \det(y1 - \mathcal{D}_{1,n}(x)) = \tilde{g}_{d_2+1} \det(y1 - \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)) \\ &= g_{d_1+1} \det(x1 - \mathcal{D}_{2,n}(y)) = g_{d_1+1} \det(x1 - \tilde{\mathcal{D}}_{2,n}(y)) \end{aligned} \quad (\text{III.7-9})$$

idée de la preuve: les égalités diagonales (par exemple entre $\mathcal{D}_{1,n}(x)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_{2,n}(y)$) ne font pas intervenir les propriétés d'orthogonalité, elles sont conséquences de la transformée de Fourier, et peuvent être obtenues par simple réécriture des deux membres [P8].

Les égalités horizontales sont conséquences du théorème III.7.1.

8 Solution fondamentale

Considérons ici le système $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)$, et supposons $n > d_1$. Nous savons déjà que chacune des d_2 fonctions $\tilde{\phi}_n^{(k)}(x)$ avec $k = 0, \dots, d_2$ est solution de ce système. La solution fondamentale de $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)$ a été trouvée par Bertola-Eynard-Harnad dans [P6], et simultanément par A. Kapaev [50] seulement pour le cas $d_1 = d_2 = 2$.

Théorème 8.1 (Bertola, Eynard, Harnad [P6]) *La matrice carrée $\tilde{\Phi}_n(x)$ dont les colonnes sont les vecteurs $\tilde{\Phi}_n^{(k)}(x)$ avec $k = 0, \dots, d_2$, est une solution fondamentale du système $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)$:*

$$\frac{T}{N} \partial_x \tilde{\Phi}_n(x) = \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x) \tilde{\Phi}_n(x) \quad (\text{III.8-1})$$

preuve: Pour $n > d_1$, les relations de récurrences eq.(III.2-22) sont les mêmes pour $j = 0$ que pour $j = 1, \dots, d_2$, ce qui implique que la fenêtre duale $\tilde{\Phi}_n^{(0)}(x)$ (où $\tilde{\phi}_n^{(0)}(x)$ désigne l'une quelconque des fonctions entières définies par eq.(III.1-6)) est aussi solution du système $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)$, et donc $\tilde{\Phi}_n(x)$ satisfait eq.(III.8-1). Pour vérifier que cette matrice est bien une solution fondamentale, il suffit de calculer son déterminant, i.e. le Wronskien, et vérifier qu'il ne s'annule pas. Le théorème III.6.2, implique (voir [P2]):

Lemme 8.1 *Trace de la matrice $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)$:*

$$\mathrm{tr} \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x) = V_1'(x) - \frac{\tilde{g}_{d_2}}{\tilde{g}_{d_2+1}} \quad (\text{III.8-2})$$

ce qui implique

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \det \tilde{\Phi}_n(x) = \mathrm{tr} \tilde{\Phi}_n(x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\Phi}_n(x) = \mathrm{tr} \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x) = V_1'(x) - \frac{\tilde{g}_{d_2}}{\tilde{g}_{d_2+1}} \quad (\text{III.8-3})$$

et donc

$$\det \tilde{\Phi}_n(x) = C e^{\frac{N}{T} \left(V_1(x) - \frac{\tilde{g}_{d_2}}{\tilde{g}_{d_2+1}} x \right)} \quad (\text{III.8-4})$$

La constante C a été calculée dans la limite $x \rightarrow \infty$ dans [P6], [P2], et elle a été calculée directement dans [P2]. Elle est non nulle. QED.

Avant d'étudier les asymptotiques à x grand dans le paragraphe suivant, mentionons les solutions fondamentales des trois autres systèmes. La solution du système $\mathcal{D}_{1,n}(x)$ a été explicitée par [P6] sous une forme récursive, et explicitée précisément pour certains cas particuliers: potentiels cubiques par [50], et un cas particulier de potentiels de degrés $d_1 = 7, d_2 = 11$ par [P6]. Il apparaît clair que la construction de [P6] est générale, mais une expression fermée reste à trouver.

On peut aussi construire une solution fondamentale de $\mathcal{D}_{1,n}(x)$ en utilisant la dualité eq.(III.7-1).

Théorème 8.2 *(Bertola, Eynard, Harnad [P6]) La matrice*

$$\Psi_n(x) := A_n^{-1} \left(\tilde{\Phi}_n^t(x) \right)^{-1} \mathbf{C} \quad (\text{III.8-5})$$

où \mathbf{C} est n'importe quelle matrice constante inversible indépendante de x , est solution de $-\frac{T}{N} \partial_x \Psi_n(x) = \mathcal{D}_{1,n}(x) \Psi_n(x)$.

En effet, si $\Psi_n(x)$ est solution du système $\mathcal{D}_{1,n}(x)$, alors on a, d'après le théorème III.7.1:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\Phi}_n^t(x) A_n \Psi_n(x) \right) = \frac{T}{N} \tilde{\Phi}_n^t(x) (\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}^t(x) A_n - A_n \mathcal{D}_{1,n}(x)) \Psi_n(x) = 0 \quad (\text{III.8-6})$$

QED.

9 Asymptotiques $x \rightarrow \infty$ et phénomène de Stokes

Les asymptotiques de la solution fondamentale $\tilde{\Phi}_n(x)$ lorsque $x \rightarrow \infty$ ont été trouvées par Bertola-Eynard-Harnad [P6].

Définition 9.1 On introduit les notations suivantes:

$y_1(x), \dots, y_{d_2}(x)$ sont les d_2 solutions de l'équation $V_2'(y) = x$

$$T_k(x) := \sum_{l=0}^{d_2} \frac{l}{l+1} \tilde{g}_{l+1} y_k(x)^{l+1}, \quad T(x) = \text{diag}(V_1(x), T_1(x), \dots, T_{d_2}(x)) \quad (\text{III.9-1})$$

$$\omega := e^{\frac{2i\pi}{d_2}}, \quad \Omega_{00} = 1, \quad \Omega_{ij} = \omega^{ij} \quad \text{si } i, j > 0 \quad (\text{III.9-2})$$

$$G = \text{diag}\left(-n, \frac{2n+1-d_2}{2d_2}, \dots, \frac{2n-1+d_2}{2d_2}\right) \quad (\text{III.9-3})$$

$$Y_0 = \text{diag}\left(\sqrt{h_{n-1}}, \frac{\tilde{g}_{d_2+1}^{-\frac{n+1}{d_2}}}{\sqrt{h_n}}, \dots, \frac{\tilde{g}_{d_2+1}^{-\frac{n+d_2}{d_2}}}{\sqrt{h_{n+d_2-1}}}\right) \quad (\text{III.9-4})$$

Théorème 9.1 (Bertola, Eynard, Harnad [P6]) Asymptotiquement pour $x \rightarrow \infty$, on a:

$$\tilde{\Phi}_n(x) \sim Y_0 (1 + O(x^{-1/d_2})) x^G \Omega e^{\frac{N}{T} T(x)} C(x) \quad (\text{III.9-5})$$

où $C(x)$ est une matrice constante par morceaux donnée dans [P6]. $C(x)$ est constante dans des secteurs d'angle π/d_2 .

preuve: Nous n'allons que survoler la preuve détaillée de [P6].

Rappelons que par leur définition III.1.2, les fonctions d'ondes $\phi_j(y)$ sont entières, et leur comportement asymptotique à grand y est donné par:

$$\phi_j(y) \sim \frac{y^j}{\sqrt{h_j}} e^{-\frac{N}{T} V_2(y)} (1 + O(1/y)) \quad (\text{III.9-6})$$

Nous calculons alors les asymptotiques à grand x des $\tilde{\phi}_j^{(k)}(x)$ par la méthode du col.

Pour x donné, posons:

$$f_x(y) := V_2(y) - xy \quad (\text{III.9-7})$$

On cherche les points cols, solutions de $\partial_y f_x(y) = 0$, i.e.

$$V_2'(y) = x \quad (\text{III.9-8})$$

Il y a d_2 points cols $y_1(x), \dots, y_{d_2}(x)$. Pour $k = 1, \dots, d_2$, on définit le chemin de col $\gamma_k^y(x)$:

$$\gamma_k^y(x) = f_x^{-1}(f_x(y_k(x)) + R_+) \quad (\text{III.9-9})$$

Les d_2 chemins ainsi définis forment une base homologiquement équivalente à la base des Γ_k^y . Il existe donc une matrice de changement de base $M(x)$:

$$\Gamma_l^y = \sum_{k=1}^{d_2} M_{lk}(x) \gamma_k^y(x) \quad (\text{III.9-10})$$

La matrice $M(x)$ à coefficients entiers est constante par morceaux sur des domaines du plan complexe. Cette matrice a été calculée explicitement dans [P6]. Pour chaque chemin $\gamma_{y_k}(x)$, on a l'approximation du col:

$$\int_{\gamma_{y_k}(x)} \phi_n(y) e^{\frac{N}{T}xy} dy \sim \frac{y_k(x)^j}{\sqrt{h_j}} \sqrt{\frac{\pi T}{NV_2''(y_k(x))}} e^{-\frac{N}{T}f_x(y_k(x))} (1 + O(x^{-1/d_2})) \quad (\text{III.9-11})$$

et donc:

$$\tilde{\phi}_j^{(l)}(x) \sim \sum_k M_{lk} \frac{y_k(x)^j}{\sqrt{h_j}} \sqrt{\frac{\pi T}{NV_2''(y_k(x))}} e^{-\frac{N}{T}f_x(y_k(x))} (1 + O(x^{-1/d_2})) \quad (\text{III.9-12})$$

En ce qui concerne l'asymptotique de $\tilde{\phi}_j^{(0)}(x)$, choisissons $x \rightarrow \infty$ dans un secteur qui ne croise pas de Γ_k^x . Dans ce secteur, la relation d'orthogonalité implique:

$$\tilde{\phi}_j^{(0)}(x) \sim \sqrt{h_j} x^{-(n+1)} e^{\frac{N}{T}V_1(x)} (1 + O(x^{-1})) \quad (\text{III.9-13})$$

Les asymptotiques dans les autres secteurs se calculent par la relation de discontinuité eq.(III.1-8).

La matrice $C(x)$ est en partie constituée de la matrice $M(x)$ définie en eq.(III.9-10), et des relations de discontinuité eq.(III.1-8). Elle est donnée précisément dans [P6]. QED.

Les discontinuités de la matrice $C(x)$ représentent les matrices de Stokes:

$$C(x_-)^{-1} C(x_+) \quad (\text{III.9-14})$$

Celles ci sont calculées dans [P6], leur expression prendrait trop de place ici. Ce qui est important, c'est de remarquer que les matrices de Stokes, de même que les conditions de saut de eq.(III.1-8) sont indépendantes de n , de x , et des coefficients des potentiels. Nous avons donc affaire à un problème **isomonodromique**.

10 Problème de Riemann–Hilbert

Posons nous le problème suivant:

• *existe-t-il une matrice $\tilde{\Phi}_n(x)$ analytique par morceaux, et inversible pour tout x , qui satisfait les asymptotiques eq.(III.9-5), et les conditions de saut eq.(III.1-8) ?*

C'est le problème de Riemann–Hilbert. La réponse est oui est la solution est unique.

Le problème de Riemann–Hilbert pour les polynômes biorthogonaux a été trouvé simultanément par A. Kapaev [50] pour le cas où $d_1 = d_2 = 2$, et par Bertola-Eynard-Harnad [P6] pour le cas général. Notons qu'un autre problème de Riemann–Hilbert a été étudié dans [28].

L'approche par le problème de Riemann-Hilbert est particulièrement utile si l'on s'intéresse à la limite n grand. En effet, les discontinuités eq.(III.1-8) sont indépendantes de n , et les asymptotiques eq.(III.9-5) en dépendent d'une façon très simple.

L'idée est la suivante. On introduit un ansatz $\tilde{\Phi}_{n,\text{ansatz}}(x)$, dont on connaît toutes les discontinuités et asymptotiques. Si l'on peut montrer que pour $x \rightarrow \infty$:

$$\tilde{\Phi}_{n,\text{ansatz}}(x)\tilde{\Phi}_n^{-1}(x) = 1 + O(1/n) \quad (\text{III.10-1})$$

et que les discontinuités des asymptotiques de $\tilde{\Phi}_{n,\text{ansatz}}(x)\tilde{\Phi}_n^{-1}(x)$ sont d'ordre $O(1/n)$ partout, alors on a uniformément pour tout x :

$$\tilde{\Phi}_{n,\text{ansatz}}(x)\tilde{\Phi}_n^{-1}(x) = 1 + O(1/n) \quad (\text{III.10-2})$$

Cette approche a été développée avec un immense succès par Bleher et Its [10], et par [18, 19, 27, 20].

Ceci reste à faire pour les polynômes biorthogonaux, mais on peut espérer que ce sera fait très bientôt [6, 5].

11 Déformations isomonodromiques et intégrabilité

Remarquons que la propriété d'isomonodromie (i.e. le fait que les matrices de Stokes, et les matrices de saut eq.(III.1-8) ne dépendent ni de x , ni de n , ni des potentiels [39]) implique que la matrice $\left(\frac{T}{N}\partial_x \tilde{\Phi}_n(x)\right) \tilde{\Phi}_n(x)^{-1}$ n'a aucune discontinuité, elle doit donc être analytique entière, et du fait de son comportement à l'infini, ce doit être une matrice polynomiale. Elle doit être égale à $\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x)$ donnée dans eq.(III.6-7).

De même, la propriété d'isomonodromie implique que la matrice $\tilde{\mathcal{U}}_{k,n}(x) = \left(\frac{T}{N}\partial_{g_k} \tilde{\Phi}_n(x)\right) \tilde{\Phi}_n(x)^{-1}$ n'a aucune discontinuité, elle doit donc être analytique entière, et du fait de son comportement à l'infini, ce doit être une matrice polynomiale. De même pour les matrices $\tilde{\mathcal{V}}_{k,n}(x) = \left(\frac{T}{N}\partial_{\tilde{g}_k} \tilde{\Phi}_n(x)\right) \tilde{\Phi}_n(x)^{-1}$ et $\tilde{R}_n(x) = \left(\tilde{\Phi}_{n+1}(x)\right) \tilde{\Phi}_n(x)^{-1}$. Leurs expressions explicites sont données dans [P2].

Remarquons que l'on doit avoir les relations de commutation suivantes:

$$\begin{aligned} \left[\frac{T}{N}\partial_x - \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x), \frac{T}{N}\partial_{g_k} - \tilde{\mathcal{U}}_{k,n}(x) \right] &= 0 \\ \left[\frac{T}{N}\partial_x - \tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x), \frac{T}{N}\partial_{\tilde{g}_k} - \tilde{\mathcal{V}}_{k,n}(x) \right] &= 0 \\ \tilde{\mathcal{D}}_{1,n+1}(x)\tilde{R}_n(x) &= \tilde{R}_n(x)\tilde{\mathcal{D}}_{1,n}(x) + \frac{T}{N}\partial_x \tilde{R}_n(x) \\ \tilde{\mathcal{U}}_{k,n+1}(x)\tilde{R}_n(x) &= \tilde{R}_n(x)\tilde{\mathcal{U}}_{k,n}(x) + \frac{T}{N}\partial_{g_k} \tilde{R}_n(x) \\ \tilde{\mathcal{V}}_{k,n+1}(x)\tilde{R}_n(x) &= \tilde{R}_n(x)\tilde{\mathcal{V}}_{k,n}(x) + \frac{T}{N}\partial_{\tilde{g}_k} \tilde{R}_n(x) \end{aligned}$$

(III.11-1)

Ces relations de compatibilité de Frobenius, signifient que l'on a affaire à des systèmes intégrables.

Tout ceci donne lieu à l'existence d'une fonction τ au sens de Jimbo-Miwa-Ueno [48, 49], qui est conjecturée être exactement la fonction de partition du modèle de matrice Z , définie en eq.(II.2-14), comme cela a été prouvé pour le modèle à une matrice dans [P7] par Bertola-Eynard-Harnad.

L'approche intégrabilité des modèles de matrices et polynômes orthogonaux a été abondamment étudiée [65, 68, 70, 45, 44, 26].

12 Traces mixtes

Nous avons mentionné au paragraphe 5.2, qu'un problème intéressant est de calculer des observables mixtes du type:

$$\langle \text{tr } M_1^k M_2^l \rangle \quad (\text{III.12-1})$$

A priori, les valeurs propres de $M_1^k M_2^l$ ne peuvent pas s'exprimer en fonction des valeurs propres de M_1 et de M_2 , et il semblait improbable de trouver une expression de eq.(III.12-1) en termes de polynômes biorthogonaux. Toutefois cela est possible, en utilisant la formule de Morozov du théorème II.1.3. Il a été trouvé par Bertola-Eynard [P4]:

Théorème 12.1 (*Bertola, Eynard, [P4]*) *La fonction génératrice de corrélations mixtes eq.(III.12-1) est donnée par*

$$\frac{T}{N} \left\langle \text{tr } \frac{1}{x - M_1} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle = 1 - \det \left(\mathbf{1}_N - \Pi_{N-1} \frac{1}{x - Q} \frac{1}{y - P^t} \Pi_{N-1} \right) \quad (\text{III.12-2})$$

La généralisation de cette formule pour toutes les autres fonctions de corrélations mixtes (i.e. produit d'un nombre quelconque de traces, chacune contenant un produit quelconque de matrices M_1 et M_2) a été trouvée très récemment par Eynard, Prats Ferrer [36], en utilisant le théorème II.1.1, mais sortirait trop du cadre de cette habilitation.

Chapitre 4

Méthode des boucles et Géométrie algébrique

La méthode des boucles exploite les équations de Schwinger–Dyson, i.e. l’invariance de l’intégrale par les reparamétrisations infinitésimales [21, 30, 66]. Contrairement à la méthode des polynômes biorthogonaux, celle ci ne fait pas appel à l’intégrale d’Itzykson–Zuber–Harish-Chandra.

La méthode des boucles s’applique au modèle formel comme au modèle normal. C’est toutefois pour le modèle formel qu’elle est le plus utile, car elle se développe facilement en puissances de $1/N^2$. En particulier, la méthode des boucles donne facilement accès à la limite $N \rightarrow \infty$.

Dans la limite $N \rightarrow \infty$, la méthode des boucles fait apparaître une courbe algébrique, qui n’est rien d’autre que la limite de la courbe spectrale des polynômes biorthogonaux vue en eq.(III.7-9). Toutes les observables du modèle, dans la limite $N \rightarrow \infty$, s’expriment donc à partir de propriétés géométriques de cette courbe. C’est le lien entre modèles de matrices et géométrie algébrique.

1 Equations de boucles

1.1 Changements de variables matriciels

On considère un changement de variable du type (δ infinitésimal):

$$M_1 \rightarrow M'_1 = M_1 + \delta f(M_1, M_2) + \bar{\delta} f^\dagger(M_1, M_2) \quad (\text{IV.1-1})$$

où f est une fonction analytique de ses deux variables (en pratique, ce sera un polynôme).

La mesure dM_1 est multipliée par un Jacobien:

$$dM'_1 = |J(f(M_1, M_2))| dM_1 \quad (\text{IV.1-2})$$

Définition 1.1 *La variation $J_1(f)$ du Jacobien à l’ordre 1 en $|\delta|$, est définie telle que:*

$$|J(f(M_1, M_2))| = (1 + 2\text{Re}(\delta J_1(f(M_1, M_2))) + O(|\delta^2|)) dM_1 \quad (\text{IV.1-3})$$

De même, l'action $e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2]}$ est changée, à l'ordre 1 en δ par:

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M'_1)+V_2(M_2)-M'_1 M_2]} \\ &= \left(1 - 2\text{Re} \left(\frac{N}{T} \delta \text{tr} [f(M_1, M_2)(V'_1(M_1) - M_2)] \right) + O(|\delta^2|) \right) e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2]} \\ (IV.1-4) \end{aligned}$$

L'invariance de l'intégrale par changement de variable $Z = \int dM_1 dM_2 e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2]} = \int dM'_1 dM_2 e^{-\frac{N}{T} \text{tr} [V_1(M'_1)+V_2(M_2)-M'_1 M_2]}$ implique:

$$\int dM_1 dM_2 \left(J_1(f(M_1, M_2)) - \frac{N}{T} \text{tr} [f(M_1, M_2)(V'_1(M_1) - M_2)] \right) e^{-N \text{tr} [V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2]} = 0 \quad (IV.1-5)$$

i.e.

Théorème 1.1 *équation de boucles: pour tout changement de variables f , on a:*

$$\frac{T^2}{N^2} \langle J_1(f(M_1, M_2)) \rangle = \frac{T}{N} \langle \text{tr} [f(M_1, M_2)(V'_1(M_1) - M_2)] \rangle \quad (IV.1-6)$$

L'équation eq.(IV.1-6) constitue la forme la plus générale possible de ce que l'on appelle les équations de boucles. Il s'agit maintenant de considérer des $f(M_1, M_2)$ bien choisis.

Remarquons que J_1 est linéaire, et que les règles de dérivations en chaîne s'appliquent si f est un produit. Il suffit donc de calculer J_1 pour des fonctions f assez simple et ensuite les combiner.

Lemme 1.1 *Pour toutes matrices A et B , on a:*

$$J_1(AM_1^k B) = \sum_{l=0}^{k-1} \text{tr} AM_1^l \text{tr} M_1^{k-1-l} B \quad (IV.1-7)$$

$$J_1(A \text{tr} (M_1^k B)) = \sum_{l=0}^{k-1} \text{tr} AM_1^l B M_1^{k-1-l} \quad (IV.1-8)$$

ou, sous forme de séries génératrices:

$$J_1 \left(A \frac{1}{x - M_1} B \right) = \text{tr} A \frac{1}{x - M_1} \text{tr} \frac{1}{x - M_1} B \quad (IV.1-9)$$

$$J_1 \left(A \text{tr} \left(\frac{1}{x - M_1} B \right) \right) = \text{tr} A \frac{1}{x - M_1} B \frac{1}{x - M_1} \quad (IV.1-10)$$

Les relations eq.(IV.1-7), eq.(IV.1-9) sont parfois appelées "split-rule", et les relations eq.(IV.1-8), eq.(IV.1-10) sont parfois appelées "merge-rule".

Remarque: Les équations de boucles du type eq.(IV.1-6), sont à prendre au sens formel, c'est à dire qu'elles sont vraies ordre par ordre en puissances de T et en puissances de $1/x$ lorsque

l'on fait intervenir des séries génératrices. Elles peuvent aussi se démontrer directement par la combinatoire des surfaces discr  tis  es [71, 72] vue au paragraphe II.4. Les équations de boucles sont un outil standard pour les physiciens de la gravitation quantique [21, 30, 2, 17, 14]. Pour le modèle à deux matrices elles ont d'abbord été consid  r  e par M. Staudacher [66], puis syst  matis  es par moi même [P11], [P9], [P3], [P5], [P1].

1.2 Equation de boucles ma  trese

Les équations de boucles donnent des relations entre les moments. Il s'agit maintenant de trouver des changements de variables $f(M_1, M_2)$ bien choisis, afin de trouver une relation ferm  e entre un nombre fini de moments, et ainsi pouvoir calculer tous les moments et observables.

Définition 1.2 *Définissons les observables suivantes (certaines ont déjà été définies au paragraphe II.5.4):*

$$W_1(x) := \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} \right\rangle \quad (\text{IV.1-11})$$

$$Y(x) := V'_1(x) - TW_1(x) \quad (\text{IV.1-12})$$

$$W_2(y) := \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle \quad (\text{IV.1-13})$$

$$X(y) := V'_2(y) - TW_2(y) \quad (\text{IV.1-14})$$

$$U(x, y) := \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{V'_2(y) - V'_2(M_2)}{y - M_2} \right\rangle \quad (\text{IV.1-15})$$

$$P(x, y) := \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{V'_1(x) - V'_1(M_1)}{x - M_1} \frac{V'_2(y) - V'_2(M_2)}{y - M_2} \right\rangle \quad (\text{IV.1-16})$$

$$R(x) := \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} V'_2(M_2) \right\rangle \quad (\text{IV.1-17})$$

$$U(x, y; x') := \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} \frac{V'_2(y) - V'_2(M_2)}{y - M_2} \text{tr} \frac{1}{x' - M_1} \right\rangle - N^2 U(x, y) W_1(x') \quad (\text{IV.1-18})$$

Remarquons que $U(x, y)$ et $U(x, y; x')$ sont des polynômes de degré $\leq d_2 - 1$ en y , et $P(x, y)$ est un polynôme de degré $d_1 - 1$ en x et de degré $d_2 - 1$ en y . On introduit aussi:

Définition 1.3 *Le polynôme $E(x, y)$, de degré $d_1 + 1$ en x et de degré $d_2 + 1$ en y , est défini par:*

$$E(x, y) := (V'_1(x) - y)(V'_2(y) - x) - TP(x, y) + T \quad (\text{IV.1-19})$$

Ce polynôme va jouer un rôle crucial dans toute la suite. La courbe $E(x, y) = 0$ sera appel  e "courbe spectrale".

Théorème 1.2 (Eynard [P5], [P1], [P3]) Pour tout x et y , on a (au sens des séries formelles):

$$(y - Y(x))(TU(x, y) - V_2'(y) + x) + \frac{T^2}{N^2}U(x, y; x) = E(x, y) \quad (\text{IV.1-20})$$

En particulier, en prenant $y = Y(x)$ on obtient

Théorème 1.3 (Eynard [P11], [P9], [P5], [P1], [P3]) **Equation maîtresse:**

$$\boxed{E(x, Y(x)) = \frac{T^2}{N^2}U(x, Y(x); x)} \quad (\text{IV.1-21})$$

Preuve:

L'existence d'une courbe algébrique dans la limite N grand avait été prévue par M. Staudacher [66] et explicitée pour des potentiels cubiques. La preuve la plus générale est donnée dans [P3], et elle avait déjà été esquissée, dans la limite N grand, dans [P11] et [P9].

Considérons le changement de variable suivant:

$$f(M_1, M_2) = \frac{1}{x - M_1} \frac{V_2'(y) - V_2'(M_2)}{y - M_2} \quad (\text{IV.1-22})$$

Le théorème IV.1.1, avec le Lemme IV.1.1, donne:

$$\begin{aligned} TW_1(x)U(x, y) + \frac{T}{N^2}U(x, y; x) \\ = V_1'(x)U(x, y) - P(x, y) - yU(x, y) + V_2'(y)W_1(x) - R(x) \end{aligned} \quad (\text{IV.1-23})$$

et avec le changement de variable suivant pour la matrice M_2

$$M_2 \rightarrow M_2 + \delta \frac{1}{x - M_1} \quad (\text{IV.1-24})$$

le théorème IV.1.1 donne:

$$R(x) = xW_1(x) - 1 \quad (\text{IV.1-25})$$

On en déduit:

$$(y - V_1'(x) + TW_1(x))U(x, y) + \frac{T}{N^2}U(x, y; x) = (V_2'(y) - x)W_1(x) - P(x, y) + 1 \quad (\text{IV.1-26})$$

Et, en écrivant $Y(x) := V_1'(x) - TW_1(x)$, on a:

$$(y - Y(x))U(x, y) + \frac{T}{N^2}U(x, y; x) = (V_2'(y) - x)W_1(x) - P(x, y) + 1 \quad (\text{IV.1-27})$$

En multipliant par T , on obtient le théorème IV.1.2. En corollaire, en prenant $y = Y(x)$, on obtient le théorème IV.1.3.

1.3 Fonction de corrélation mixte

De façon très similaire, on peut obtenir une équation de boucle pour l'observable mixte $W_{1,2}(x, y) := \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \right\rangle$.

Posons

$$W_{1,2;2}(x, y; y') := \left\langle \text{tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \text{tr} \frac{1}{y'-M_2} \right\rangle - N^2 W_{1,2}(x, y) W_2(y') \quad (\text{IV.1-28})$$

Théorème 1.4 (Eynard [P5], [P1], [P3]) $W_{1,2}(x, y)$ satisfait l'équation:

$$TW_{1,2}(x, y) = 1 - \frac{E(x, y)}{(x - X(y))(y - Y(x))} + \frac{T^2}{N^2} \left(\frac{U(x, y, x)}{(x - X(y))(y - Y(x))} - \frac{W_{1,2;2}(x, y; y)}{x - X(y)} \right) \quad (\text{IV.1-29})$$

preuve:

Avec le changement de variable

$$M_2 \rightarrow M_2 + \frac{\delta}{2} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} + \frac{\delta}{2} \frac{1}{y-M_2} \frac{1}{x-M_1} \quad (\text{IV.1-30})$$

on obtient:

$$\begin{aligned} TW_2(y)W_{1,2}(x, y) + \frac{T}{N^2} W_{1,2;2}(x, y; y) \\ = V_2'(y)W_{1,2}(x, y) - U(x, y) - xW_{1,2}(x, y) + W_2(y) \end{aligned} \quad (\text{IV.1-31})$$

i.e.

$$(x - V_2'(y) + TW_2(y))W_{1,2}(x, y) + \frac{T}{N^2} W_{1,2;2}(x, y; y) = W_2(y) - U(x, y) \quad (\text{IV.1-32})$$

Posons:

$$X(y) := V_2'(y) - TW_2(y) \quad (\text{IV.1-33})$$

on a:

$$\begin{aligned} (x - X(y))TW_{1,2}(x, y) + \frac{T^2}{N^2} W_{1,2;2}(x, y; y) &= V_2'(y) - X(y) - TU(x, y) \\ &= x - X(y) - \frac{E(x, y) - \frac{T^2}{N^2} U(x, y; x)}{y - Y(x)} \end{aligned} \quad (\text{IV.1-34})$$

QED.

Remarque: eq.(IV.1-29) dans la limite N grand (i.e. si on néglige le terme en $1/N^2$), on a:

$$TW_{1,2}(x, y) = 1 - \frac{E(x, y)}{(x - X(y))(y - Y(x))} + O(1/N^2) \quad (\text{IV.1-35})$$

qui n'est pas sans rappeler eq.(III.12-2) pour n fini (il faut noter que eq.(IV.1-29) a été calculée pour le modèle formel, alors que eq.(III.12-2) a été calculée pour le modèle normal).

2 Limite N grand

Notons que pour le modèle formel, par définition, les limites N grand et le développement en puissances de $1/N^2$ existent. Toutes les fonctions vues précédemment se développent donc:

$$W_1(x) = W_1^{(0)}(x) + \frac{1}{N^2}W_1^{(1)}(x) + \dots \quad (\text{IV.2-1})$$

$$Y^{(0)}(x) := V_1'(x) - TW_1^{(0)}(x) , \quad Y^{(1)}(x) := -TW_1^{(1)}(x) \dots \quad (\text{IV.2-2})$$

$$E(x, y) = E^{(0)}(x, y) + \frac{1}{N^2}E^{(1)}(x, y) + \dots \quad (\text{IV.2-3})$$

etc...

Dans la limite N grand, on enlève simplement le membre de droite de eq.(IV.1-21) et l'on obtient une équation algébrique pour $Y^{(0)}$ comme fonction de x . On peut également calculer la résolvante $W_2^{(0)}(y)$ et $X^{(0)}(y) = V_2'(y) - TW_2^{(0)}(y)$ par la même méthode. On a donc:

Théorème 2.1 $Y^{(0)}(x)$ et $X^{(0)}(y)$ satisfont la même équation algébrique:

$$E^{(0)}(x, Y^{(0)}(x)) = 0 , \quad E^{(0)}(X^{(0)}(y), y) = 0 \quad (\text{IV.2-4})$$

Comme dit plus haut, une relation algébrique était connue depuis les travaux de M. Staudacher [66], et l'équation eq.(IV.2-4) a été trouvée explicitement dans [P9] et [P11].

Remarque 2.1 On doit avoir:

$$Y^{(0)} \circ X^{(0)} = \text{Id} \quad (\text{IV.2-5})$$

conformément à ce qui a été trouvé par Matytsin [57] puis prouvé par [42] (voir aussi [78]).

Remarque 2.2 Rappelons que $W_1^{(0)}(x)$ a été définie comme une série formelle en puissances de $1/x$. Nous voyons ici que cette série a un rayon de convergence non nul. C'est une fonction analytique, et plus précisément algébrique de x . Elle possède des coupures (et donc un rayon de convergence fini).

2.1 Courbe algébrique

Nous avons donc une courbe algébrique \mathcal{E} , d'équation $E^{(0)}(x, y) = 0$, c'est à dire une surface de Riemann compacte de genre g , sur laquelle sont définies deux fonctions x et y , telles que pour tout point p de la courbe \mathcal{E} on ait:

$$Y^{(0)}(x(p)) = y(p) \quad (\text{IV.2-6})$$

La fonction $Y^{(0)}(x)$ est solution d'une équation de degré $d_2 + 1$, elle est multivaluée, elle possède $d_2 + 1$ branches. Autrement dit, la fonction $x(p)$ n'est pas injective, pour chaque x , il existe exactement $d_2 + 1$ points $p \in \mathcal{E}$ tels que $x(p) = x$.

Commençons par étudier ces branches pour x grand.

Points à l'infini

Théorème 2.2 *Les fonctions x et y possèdent seulement deux pôles sur \mathcal{E} , de diviseurs $[x] = \infty_x + d_2\infty_y$, et $[y] = \infty_y + d_1\infty_x$, et l'on a au voisinage de ces pôles:*

$$\forall k = 1, \dots, d_1, \quad \text{Res}_{\infty_x} x^{-k} y dx = -g_k \quad (\text{IV.2-7})$$

$$\forall k = 1, \dots, d_2, \quad \text{Res}_{\infty_y} y^{-k} x dy = -\tilde{g}_k \quad (\text{IV.2-8})$$

$$\text{Res}_{\infty_x} y dx = \text{Res}_{\infty_y} x dy = T \quad (\text{IV.2-9})$$

preuve: La résolvante $W_1(x)$ est définie comme une série formelle en puissances de $1/x$ telle que $W_1(x) = \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2})$. Il existe donc une solution de eq.(IV.2-4), telle que $Y^{(0)}(x) \sim V_1'(x) - \frac{T}{x} + O(x^{-2})$, ce qui implique qu'il existe au moins un point $\infty_x \in \mathcal{E}$ tel que:

$$x(\infty_x) = \infty, \quad y(p) \underset{p \rightarrow \infty_x}{\sim} V_1'(x(p)) - \frac{T}{x(p)} + O(x(p))^{-2} \quad (\text{IV.2-10})$$

De même, pour y grand, il est clair qu'il existe une solution de eq.(IV.2-4), telle que $x \sim V_2'(Y^{(0)}(x)) - \frac{T}{Y^{(0)}(x)} + O(Y^{(0)}(x)^{-2})$, il existe donc au moins un point $\infty_y \in \mathcal{E}$ tel que:

$$y(\infty_y) = \infty, \quad x(p) \underset{p \rightarrow \infty_y}{\sim} V_2'(y(p)) - \frac{T}{y(p)} + O(y(p))^{-2} \quad (\text{IV.2-11})$$

Autrement dit, près de ∞_y , $y(p) \sim x(p)^{1/d_2}$, et comme il y a d_2 racines d_2 -ièmes de l'unité, il y a d_2 branches de la fonction $Y(x)$ près de ∞_y . Comme la fonction $Y^{(0)}(x)$ possède exactement $d_2 + 1$ branches, cela implique que les fonctions $x(p)$ et $y(p)$ n'ont pas d'autres poles que ∞_x et ∞_y , et que: ∞_x est un pôle simple de la fonction $x(p)$, et un pôle de degré d_1 de la fonction $y(p)$, et ∞_y est un pôle simple de la fonction $y(p)$, et un pôle de degré d_2 de la fonction $x(p)$. QED.

Fractions de remplissage

La définition du modèle de matrice formel II.4.5 implique, que pour T assez petit:

Proposition 2.1 *Il existe $d_1 d_2$ contours disjoints \mathcal{A}_i , $i = 1, \dots, d_1 d_2$ dans le plan complexe de x , tels que:*

$$\forall i = 1, \dots, d_1 d_2 - 1 \quad \oint_{\mathcal{A}_i} Y(x) dx = 2i\pi T \epsilon_i := 2i\pi \eta_i \quad (\text{IV.2-12})$$

où les ϵ_i sont les fractions de remplissages données du modèle formel (voir section II.4), et où les η_i sont définis par $\eta_i := T \epsilon_i$.

idée de la preuve: en effet, pour T tendant vers 0, les \mathcal{A}_i peuvent être choisis comme des cercles de rayon $O(|T|)$ et centrés sur les $d_1 d_2$ valeurs de x telles que $V_2'(V_1'(x)) - x = 0$ (voir section II.4). L'intégrale de la résolvante $W_1(x) dx$ sur un tel contour est le "nombre de valeurs propres" de M_1 à l'intérieur du domaine délimité par ce contour, c'est donc par définition $-2i\pi \epsilon_i$. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, la résolvante et la courbe \mathcal{E} sont des fonctions analytiques de T (avec un rayon de convergence T_c), et l'on obtient des contours \mathcal{A}_i pour T fini par continuité.

Cycles non-triviaux

Les contours \mathcal{A}_i peuvent être relevés en cycles non-triviaux, notés aussi \mathcal{A}_i sur la courbe algébrique \mathcal{E} .

Sur une surface de genre g , il y a $2g$ cycles non-triviaux indépendants, et il est possible d'en choisir une base canonique $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, i = 1, \dots, g$, tels que:

$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = 0, \quad \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = 0, \quad \mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j = \delta_{i,j} \quad (\text{IV.2-13})$$

Les contours \mathcal{A}_i satisfont:

$$\forall i = 1, \dots, d_1 d_2 - 1 \quad \oint_{\mathcal{A}_i} Y(x) dx = 2i\pi T \epsilon_i := 2i\pi \eta_i \quad (\text{IV.2-14})$$

Genre

Une courbe algébrique de la forme eq.(IV.2-4) avec E de la forme eq.(IV.1-19) a un genre $g \leq d_1 d_2 - 1$, et a génériquement le genre maximal.

Une courbe de genre g possède exactement g cycles disjoints non-triviaux indépendants. Autrement dit, la courbe ne peut être dégénérée (i.e. $g < d_1 d_2 - 1$) que si certaines combinaisons linéaires entières d'intégrales eq.(IV.2-14) sont nulles, autrement dit si certaines combinaisons linéaires entières des fractions de remplissage sont nulles (pour T petit, si certaines fractions de remplissages sont nulles).

Nous supposons à partir d'ici, que $E^{(0)}(x, y)$ est un polynôme connu, de la forme eq.(IV.1-19), et que les conditions eq.(IV.2-9), eq.(IV.2-7), eq.(IV.2-8) et eq.(IV.2-14) sont satisfaites.

Feuillets

La fonction $x(p)$ n'est pas injective, pour chaque x , il existe $d_2 + 1$ points p tels que $x(p) = x$. On note:

Définition 2.1

$$x(p) = x \quad \leftrightarrow \quad p \in (p_0(x), p_1(x), \dots, p_{d_2}(x)) \quad (\text{IV.2-15})$$

et l'on suppose que $p_0(x)$ est tel que $p_0(x) \rightarrow \infty_x$ lorsque $x \rightarrow \infty$, et pour $k \geq 1$ $p_k(x) \rightarrow \infty_y$. On découpe ainsi la courbe \mathcal{E} en $d_2 + 1$ domaines disjoints appelés "feuillets", $\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_{d_2}$, tels que $p_k(x) \in \mathcal{E}_k$, et la fonction $x(p)$ restreinte à \mathcal{E}_k est une bijection.

Le feuillet numéro 0, i.e. celui qui contient ∞_x est appelé **feuillet physique**. C'est seulement dans ce feuillet que la fonction $W_1(x) = \frac{1}{T}(V_1'(x) - y(p_0(x)))$ se développe en puissances de $1/x$ pour x grand, et coïncide avec la fonction génératrice des moments eq.(II.5-11).

De même on note:

$$y(p) = y \quad \leftrightarrow \quad p \in (\tilde{p}_0(y), \tilde{p}_1(y), \dots, \tilde{p}_{d_1}(y)), \quad \tilde{p}_k(y) \in \tilde{\mathcal{E}}_k \quad (\text{IV.2-16})$$

Le feuillet numéro 0, i.e. celui qui contient ∞_y est appelé feuillet physique. C'est dans ce feuillet que la fonction $W_2(y) = \frac{1}{T}(V_2'(y) - x(\tilde{p}_0(y)))$ se développe en puissances de $1/y$ et coïncide avec la fonction génératrice des moments eq.(II.5-12).

Le choix des domaines \mathcal{E}_k (resp. $\tilde{\mathcal{E}}_k$) et de leurs frontières est essentiellement arbitraire. Les images des frontières par $x(p)$ (resp. $y(p)$) sont appelées les coupures.

La seule contrainte est que les points multiples de $x(p)$ (resp. $y(p)$) soient sur les coupures, ce sont les points de branchements.

Points de branchements et coupures

Les points multiples de $x(p)$ sont tels que $\exists k \neq l$ tels que $p_k(x) = p_l(x)$, ce sont les zéros de la différentielle $dx(p)$. La différentielle $dx(p)$ possède deux pôles: un pôle double en ∞_x et un pôle de degré $d_2 + 1$ en ∞_y . cela implique qu'elle doit avoir $d_2 + 1 + 2g$ zéros, que l'on note e_1, \dots, e_{d_2+1+2g} :

$$dx(p) = 0 \quad \leftrightarrow \quad p \in (e_1, \dots, e_{d_2+1+2g}) \quad (\text{IV.2-17})$$

De même la différentielle $dy(p)$ possède deux pôles: un pôle double en ∞_y et un pôle de degré $d_1 + 1$ en ∞_x . cela implique qu'elle doit avoir $d_1 + 1 + 2g$ zéros, que l'on note:

$$dy(p) = 0 \quad \leftrightarrow \quad p \in (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{d_1+1+2g}) \quad (\text{IV.2-18})$$

Définition 2.2 Les zéros e_1, \dots, e_{d_2+1+2g} (resp. $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{d_1+1+2g}$) de la différentielle dx (resp. dy) sont appelés "points de branchements" de x (resp. y).

Supposons ici que tous ces zéros sont **simples et distincts**. Près d'un zéro simple e de dx , la fonction $Y(x)$ se comporte en racine carrée;

$$Y(x) - Y(e) \sim \sqrt{x - x(e)} \quad (\text{IV.2-19})$$

Remarque 2.3 Points critiques

Les cas où les zéros de dx et dy ne sont pas simples et distincts, s'appellent points critiques. L'étude des points critiques est cruciale dans le cadre des applications des modèles de matrices aux théories conformes, mais sort largement du cadre de cette habilitation. Voir par exemple [52, 16, 21, 10, 12]...

Notons que si l'on est à un point critique, et que e est à la fois un zéro de degré $q - 1$ de dx et un zéro de degré $p - 1$ de dy , on a une singularité rationnelle:

$$Y(x) - Y(e) \sim (x - x(e))^{p/q} \quad (\text{IV.2-20})$$

Les points critiques décrivent donc des surfaces de Riemann singulières. Il est connu que les modèles de matrices avec singularités rationnelles d'exposant p/q , décrivent les modèles minimaux conformes (p, q) , voir [16].

2.2 Eléments de géométrie algébrique

Voir [38, 37, 15] pour une introduction.

différentielles holomorphes

Sur une surface de genre g , il existe g différentielles holomorphes (i.e. sans poles) indépendantes $du_i(p)$, $i = 1, \dots, g$. On peut les choisir telles que:

$$\oint_{\mathcal{A}_k} du_l(p) = \delta_{k,l} \quad (\text{IV.2-21})$$

On définit alors la matrice des périodes par les intégrales sur les \mathcal{B} -cycles:

$$\tau_{k,l} := \oint_{\mathcal{B}_k} du_l(p) \quad (\text{IV.2-22})$$

Un résultat classique de géométrie algébrique [37, 38] montre que $\tau_{k,l} = \tau_{l,k}$ et $\text{Im}\tau_{k,l} > 0$.

Fonction d'Abel

Donnons nous un point $p_O \in \mathcal{E}$, arbitraire. On définit alors la fonction d'Abel:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \setminus (\cup_i \mathcal{A}_i \cup_i \mathcal{B}_i) &\rightarrow \mathbb{C}^g \\ p &\rightarrow u(p) \quad \text{où } u_i(p) := \int_{p_O}^p du_i \end{aligned} \quad (\text{IV.2-23})$$

où le chemin d'intégration ne doit croiser aucun des cycles \mathcal{A}_i , \mathcal{B}_j .

Cette fonction s'étend naturellement comme un plongement de \mathcal{E} dans la Jacobienne $\mathbb{C}^g / (Z^g + \tau Z^g)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{C}^g / (Z^g + \tau Z^g) \\ p &\rightarrow [u(p)] \text{ modulo } Z^g + \tau Z^g \end{aligned} \quad (\text{IV.2-24})$$

Fonctions theta

Etant donné une matrice τ de taille $g \times g$, telle que $\text{Im}\tau > 0$, on définit la fonction entière suivante:

$$\begin{aligned} \theta : \quad \mathbb{C}^g &\rightarrow \mathbb{C} \\ u &\rightarrow \theta(u, \tau) = \sum_{n \in Z^g} e^{i\pi(n^t \tau n)} e^{2i\pi(n^t u)} \end{aligned} \quad (\text{IV.2-25})$$

Par abus de notation, on ometra souvent la dépendance en τ .

La fonction θ possède les propriétés suivantes, pour tout $n \in Z^g$:

$$\theta(u + n) = \theta(u) , \quad \theta(u + \tau n) = \theta(u) e^{-i\pi(2(n^t u) + (n^t \tau n))} , \quad \theta(-u) = \theta(u) \quad (\text{IV.2-26})$$

L'ensemble des zéros de la fonction θ est une sous-variété de codimension 1 de \mathbb{C}^g , notée $[\theta]$. En particulier, il est clair que les points demi-entiers suivants appartiennent à $[\theta]$:

$$\frac{n + \tau m}{2} \in [\theta] \quad \text{si } (m^t n) \text{ est impair} \quad (\text{IV.2-27})$$

Ils sont appelés demi-périodes impaires.

Formes premières et fonctions Theta

Soit z une demi-période impaire. Considérons la forme différentielle holomorphe suivante:

$$dh_z(p) := \sum_{i=1}^g \frac{\partial \theta(u)}{\partial u_i} \Big|_{u=z} du_i(p) \quad (\text{IV.2-28})$$

Alors, on définit la forme primaire sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$

$$E(p, q) := \frac{\theta(u(p) - u(q) + z)}{\sqrt{dh_z(p)dh_z(q)}} \quad (\text{IV.2-29})$$

dont on peut montrer qu'elle ne dépend pas du choix de z , ni du choix de l'origine p_O . $E(p, q)$ s'annule si et seulement si $p = q$.

Noyau de Bergmann

Le noyau de Bergmann $B(p, q)$ est l'unique forme différentielle bilinéaire, qui, vue comme forme différentielle en p possède un unique pole double à $p = q$, sans résidu, tel que dans n'importe quelle paramétrisation $x(p)$ on ait:

$$B(p, q) \underset{p \rightarrow q}{\sim} \frac{dx(p)dx(q)}{(x(p) - x(q))^2} + \text{fini} \quad (\text{IV.2-30})$$

et telle que:

$$\forall i = 1, \dots, g \quad \oint_{p \in \mathcal{A}_i} B(p, q) = 0 \quad (\text{IV.2-31})$$

Cette forme est unique, elle est symétrique $B(p, q) = B(q, p)$, et elle est donnée par:

$$B(p, q) := d_p d_q \ln \theta(u(p) - u(q) + z) = d_p d_q \ln E(p, q) \quad (\text{IV.2-32})$$

On a la propriété:

$$\forall i = 1, \dots, g \quad \oint_{p \in \mathcal{B}_i} B(p, q) = 2i\pi du_i(q) \quad (\text{IV.2-33})$$

Connexion projective

Etant donné une fonction $f(p)$ à valeur complexes, non constante, on définit:

$$\frac{1}{6} \mathcal{S}_f(p) := \lim_{q \rightarrow p} \left(\frac{B(p, q)}{df(p)df(q)} - \frac{1}{(f(p) - f(q))^2} \right) \quad (\text{IV.2-34})$$

Différentielles de 3e espèces

Etant donnés deux points p_1 et p_2 distincts sur \mathcal{E} , il existe une unique forme différentielle $dS_{p_1, p_2}(p)$ telle que: dS_{p_1, p_2} possède un pole simple à $p = p_1$ avec résidu $+1$, un pole simple à $p = p_2$ avec résidu -1 , et pas d'autres poles, et

$$\forall i = 1, \dots, g \quad \oint_{p \in \mathcal{A}_i} dS_{p_1, p_2}(p) = 0 \quad (\text{IV.2-35})$$

Cette forme est unique, et donnée par:

$$dS_{p_1, p_2}(p) = d \ln \frac{E(p, p_1)}{E(p, p_2)} = \int_{q=p_2}^{p_1} B(p, q) \quad (\text{IV.2-36})$$

où cette dernière intégrale est calculée le long d'un chemin qui ne croise aucun cycle $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j$.

On a la propriété:

$$\forall i = 1, \dots, g \quad \oint_{p \in \mathcal{B}_i} dS_{p_1, p_2}(p) = 2i\pi (u_i(p_1) - u_i(p_2)) \quad (\text{IV.2-37})$$

2.3 Observables, énergie libre, et leurs dérivées

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont classiques et ont été développés par de nombreux auteurs. Voir [P3], [56, 51, 74, 4]. Ils sont présentés pour rendre l'exposé complet, et car ils seront utilisés au chapitre V.

Théorème 2.3 *Les fonctions à deux points sont données par:*

$$W_{1;1}^{(0)}(x(p); x(q)) \, dx(p) \, dx(q) = B(p, q) - \frac{dx(p)dx(q)}{(x(p) - x(q))^2} \quad (\text{IV.2-38})$$

$$W_{2;2}^{(0)}(y(p); y(q)) \, dy(p) \, dy(q) = B(p, q) - \frac{dy(p)dy(q)}{(y(p) - y(q))^2} \quad (\text{IV.2-39})$$

$$W_{1;2}^{(0)}(x(p); y(q)) \, dx(p) \, dy(q) = -B(p, q) \quad (\text{IV.2-40})$$

où B est le noyau de Bergmann, et où les $W_{k;l}^{(0)}$ sont les limites $N \rightarrow \infty$ des observables $W_{k;l}$ qui ont été définies au paragraphe II.5.4:

$$W_{1;1}(x; x') := \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} \text{tr} \frac{1}{x' - M_1} \right\rangle_c \quad (\text{IV.2-41})$$

$$W_{2;2}(y; y') := \left\langle \text{tr} \frac{1}{y - M_2} \text{tr} \frac{1}{y' - M_2} \right\rangle_c \quad (\text{IV.2-42})$$

$$W_{1;2}(x; y) := \left\langle \text{tr} \frac{1}{x - M_1} \text{tr} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle_c \quad (\text{IV.2-43})$$

Corollaire 2.1 *En particulier, à points coïncidents:*

$$W_{1;1}^{(0)}(x(p); x(p)) = \frac{1}{6} \mathcal{S}_x(p) \, , \quad W_{2;2}^{(0)}(y(p); y(p)) = \frac{1}{6} \mathcal{S}_y(p) \quad (\text{IV.2-44})$$

Théorème 2.4 *Les dérivées de la résolvante sont données par:*

$$\left. \frac{\partial TW_1^{(0)}(x(p))}{\partial g_k} \right|_{x(p)} dx(p) = x(p)^{k-1} dx(p) + \frac{1}{k} \operatorname{Res}_{q \rightarrow \infty_x} x(q)^k B(p, q) \quad (\text{IV.2-45})$$

$$\left. \frac{\partial TW_1^{(0)}(x(p))}{\partial \tilde{g}_k} \right|_{x(p)} dx(p) = -\frac{1}{k} \operatorname{Res}_{q \rightarrow \infty_y} y(q)^k B(p, q) \quad (\text{IV.2-46})$$

$$\left. \frac{\partial TW_1^{(0)}(x(p))}{\partial T} \right|_{x(p)} dx(p) = -dS_{\infty_x, \infty_y}(p) \quad (\text{IV.2-47})$$

$$\left. \frac{\partial TW_1^{(0)}(x(p))}{\partial \eta_i} \right|_{x(p)} dx(p) = -2i\pi du_i(p) \quad (\text{IV.2-48})$$

2.4 Energie libre et ses dérivées premières et secondes

De même, les formules suivantes sont classiques (voir [P3], [4, 56, 51, 74].

Théorème 2.5 *La limite N grand de l'énergie libre est donnée par:*

$$F^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{d_1} g_k \frac{\partial F^{(0)}}{\partial g_k} + \sum_{k=0}^{d_2} \tilde{g}_k \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \tilde{g}_k} + \sum_{i=1}^g \eta_i \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \eta_i} + T \frac{\partial F^{(0)}}{\partial T} - \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\infty_x} xy^2 dx \right) \quad (\text{IV.2-49})$$

avec:

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial g_k} = \frac{1}{k} \operatorname{Res}_{\infty_x} x^k y dx, \quad \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \tilde{g}_k} = \frac{1}{k} \operatorname{Res}_{\infty_y} y^k x dy, \quad \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \eta_i} = \oint_{\mathcal{B}_i} y dx, \quad (\text{IV.2-50})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial T} &= \int_{\infty_x}^p (y - V_1'(x) + \frac{T}{x}) dx + \int_{\infty_y}^p (x - V_2'(y) + \frac{T}{y}) dy \\ &\quad + V_1(x(p)) + V_2(y(p)) - x(p)y(p) - T \ln x(p) - T \ln y(p) \end{aligned} \quad (\text{IV.2-51})$$

cette dernière expression étant indépendante du point p . On peut la voir comme une régularisation de l'intégrale $\int_{\infty_x}^{\infty_y} y dx$.

Remarque 2.4 si l'on introduit un coefficient h devant le $\operatorname{Tr} M_1 M_2$:

$$Z = \int dM_1 dM_2 e^{-\frac{N}{T} \operatorname{Tr} [V_1(M_1) + V_2(M_2) - h M_1 M_2]} \quad (\text{IV.2-52})$$

alors on a:

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\infty_x} xy^2 dx = \left. \frac{\partial F^{(0)}}{\partial h} \right|_{h=1} \quad (\text{IV.2-53})$$

ce qui rend l'expression eq.IV.2-49 homogène.

Théorème 2.6 *Les dérivées secondes de $F^{(0)}$ sont données par:*

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial g_k \partial g_j} = \text{Res}_{\infty_x} \text{Res}_{\infty_x} x(p)^k x(q)^j B(p, q) \quad (\text{IV.2-54})$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \tilde{g}_k \partial \tilde{g}_j} = \text{Res}_{\infty_y} \text{Res}_{\infty_y} y(p)^k y(q)^j B(p, q) \quad (\text{IV.2-55})$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial g_k \partial \tilde{g}_j} = \text{Res}_{\infty_x} \text{Res}_{\infty_y} x(p)^k y(q)^j B(p, q) \quad (\text{IV.2-56})$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \eta_i \partial \eta_j} = -2i\pi \tau_{ij} , \quad \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial T \partial \eta_i} = -2i\pi (u_i(\infty_x) - u_i(\infty_y)) \quad (\text{IV.2-57})$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial T^2} = -\ln \gamma \tilde{\gamma} , \quad \gamma := \lim_{p \rightarrow \infty_x} x(p) \frac{E(p, \infty_x)}{E(p, \infty_y)} , \quad \tilde{\gamma} := \lim_{p \rightarrow \infty_y} y(p) \frac{E(p, \infty_y)}{E(p, \infty_x)} \quad (\text{IV.2-58})$$

...etc.

2.5 Autres dérivées

Les dérivées troisièmes de l'énergie libre ont été trouvées par plusieurs auteurs [56, 4], elles se réduisent essentiellement à la formule variationnelle de Rauch [37, 38]. Pour calculer les dérivées suivantes, il suffit en principe d'appliquer récursivement la formule variationnelle de Rauch, mais en pratique les expressions obtenues ainsi sont assez fastidieuses, et leur structure ne saute pas aux yeux.

Une méthode diagrammatique a récemment été inventée, par moi même [33] pour le modèle à une matrice, et a été généralisée au modèle à deux matrices avec mon étudiant N. Orantin [35]. Elle permet d'écrire directement n'importe quelle dérivée, comme une somme de diagrammes de Feynman en arbres. Cette méthode est non récursive, et met en évidence une structure très riche. Hélas, elle sort trop du cadre de cette habilitation...

3 Développement topologique

On peut développer l'équation eq.(IV.1-21) au premier ordre en $1/N^2$:

$$W_1(x) = W_1^{(0)}(x) + \frac{1}{N^2} W_1^{(1)}(x) + \dots \quad (\text{IV.3-1})$$

Nous venons de voir que $W_1^{(0)}(x)$ est solution d'une équation algébrique. Nous voulons maintenant calculer $W_1^{(1)}(x)$. Ceci a été fait dans [P5](pour $g = 0$) ou [P1](pour g quelconque). Je vais présenter ici, une méthode différente de [P5] ou [P1], et inspirée de mon récent travail [33, 35] pour obtenir le théorème suivant:

Théorème 3.1 (*Eynard, Kokotov, Korotkin [P5], [P1], (Eynard, Orantin [35]), La résolvante à l'ordre $1/N^2$ est donnée par:*

$$TW_1^{(1)}(x(p)) dx(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} \operatorname{Res}_{p' \rightarrow q} \frac{dS_{q,p'}(p) B(q, p')}{(y(q) - y(p'))(x(q) - x(p'))} \quad (\text{IV.3-2})$$

Idée de la preuve:

L'équation maîtresse eq.(IV.1-21) développée au premier ordre en $1/N^2$ donne:

$$TW_1^{(1)}(x) = -\frac{T^2 U^{(0)}(x, Y(x); x) + TP^{(1)}(x, Y(x))}{E_y(x, Y(x))} \quad (\text{IV.3-3})$$

De plus, on a (nous ne détaillerons pas ici le calcul (voir [P5], [P1]), qui permet de trouver $U^{(0)}(x, y; x')$ à partir de eq.(IV.1-20) et eq.(IV.2-38)):

$$\frac{T^2 U^{(0)}(x(q), y(q); x(q))}{E_y(x(q), y(q))} dx(q) = -\sum_{k=1}^{d_2} \frac{B(q, p_k(q))}{(y(q) - y(p_k(q))) dx(p_k(q))} \quad (\text{IV.3-4})$$

où les $p_k(q)$ sont les solutions de $x(p_k(q)) = x(q)$ dans les autres feuillets (on suppose $p_0(q) = q$).

En manipulant eq.(IV.3-3), on peut montrer (cf [P1]) que $W_1^{(1)}(x(p)) dx(p)$ est une différentielle sur \mathcal{E} . L'hypothèse eq.(IV.2-14) du modèle formel, implique que:

$$\forall i = 1, \dots, g \quad \oint_{\mathcal{A}_i} W_1^{(1)}(x) dx = 0 \quad (\text{IV.3-5})$$

et implique aussi que $W_1^{(1)}(x) dx$ ne possède pas d'autres résidus sur \mathcal{E} . En particulier $W_1^{(1)}(x) dx$ ne possède pas de poles aux zéros de $E_y(x, Y(x))$ autres que les points de branchements. Tout ceci implique que $W_1^{(1)}(x) dx$ est une différentielle sur \mathcal{E} avec des poles (de degré 4) seulement aux points de branchements e_i , et qui satisfait eq.(IV.3-5).

La formule de Cauchy permet d'écrire (pour tout $\alpha \in \mathcal{E}$):

$$W_1^{(1)}(x(p)) dx(p) = -\operatorname{Res}_{q \rightarrow p} dS_{q,\alpha}(p) W_1^{(1)}(x(q)) dx(q) \quad (\text{IV.3-6})$$

où le résidu est calculé comme une intégrale le long d'un petit cercle entourant le point p . On peut déformer ce contour d'intégration, de façon à transformer le résidu en p , en résidus aux points de branchements. En vertu de l'identité bilinéaire de Riemann [38, 37], et grâce aux relations eq.(IV.2-35) et eq.(IV.3-5), il n'y a pas de contribution des cycles $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j$. Il reste donc:

$$W_1^{(1)}(x(p)) dx(p) = \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} dS_{q,\alpha}(p) W_1^{(1)}(x(q)) dx(q) \quad (\text{IV.3-7})$$

On insère donc eq.(IV.3-3) dans eq.(IV.3-7), et l'on remarque que $\frac{P^{(1)}(x, Y(x))}{E_y(x, Y(x))} dx$ n'a pas de résidu aux points de branchements car $P^{(1)}(x, y)$ est un polynôme. D'où:

$$W_1^{(1)}(x(p)) dx(p) = -T \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} dS_{q,\alpha}(p) \frac{U^{(0)}(x(q), y(q); x(q))}{E_y(x(q), y(q))} dx(q) \quad (\text{IV.3-8})$$

Et donc, en utilisant eq.(IV.3-4):

$$\begin{aligned}
TW_1^{(1)}(x(p)) dx(p) &= \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} dS_{q,\alpha}(p) \sum_{k=1}^{d_2} \frac{B(q, p_k(q))}{(y(q) - y(p_k(q))) dx(p_k(q))} \\
&= \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} dS_{q,\alpha}(p) \sum_{k=1}^{d_2} \operatorname{Res}_{p' \rightarrow p_k(q)} \frac{B(q, p')}{(y(q) - y(p'))(x(p') - x(q))} \\
&= - \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} dS_{q,\alpha}(p) \operatorname{Res}_{p' \rightarrow q} \frac{B(q, p')}{(y(q) - y(p'))(x(p') - x(q))} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} dS_{q,\alpha}(p) \sum_{k=1}^{d_1} \operatorname{Res}_{p' \rightarrow \tilde{p}_k(q)} \frac{B(q, p')}{(y(q) - y(p'))(x(p') - x(q))} \\
&= \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} dS_{q,\alpha}(p) \operatorname{Res}_{p' \rightarrow q} \frac{B(q, p')}{(y(q) - y(p'))(x(q) - x(p'))} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} dS_{q,\alpha}(p) \sum_{k=1}^{d_1} \frac{B(q, \tilde{p}_k(q))}{dy(\tilde{p}_k(q))(x(\tilde{p}_k(q)) - x(q))} \\
&= \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} \operatorname{Res}_{p' \rightarrow q} \frac{dS_{q,\alpha}(p) B(q, p')}{(y(q) - y(p'))(x(q) - x(p'))} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d_2+1+2g} \operatorname{Res}_{q \rightarrow e_i} \operatorname{Res}_{p' \rightarrow q} \frac{dS_{q,p'}(p) B(q, p')}{(y(q) - y(p'))(x(q) - x(p'))} \\
&\quad (IV.3-9)
\end{aligned}$$

L'égalité entre la ligne 1 et 2 est une simple réécriture de $x(p_k(q)) = x(q)$ sous forme de résidus. L'égalité entre la ligne 2 et 3 est obtenue en déplaçant le contour, pour prendre tous les autres résidus, i.e. $p' = q$ et les d_1 autres solutions de $y(p') = y(q)$, que l'on appelle $\tilde{p}_k(q)$, $k = 1, \dots, d_1$. Dans la quatrième ligne, on calcule explicitement les résidus en $p' = \tilde{p}_k(q)$, et l'on voit qu'ils n'ont pas de poles lorsque $q = e_i$. Le passage de la cinquième à la sixième ligne, est obtenu en échangeant l'ordre des résidus, il montre que cette expression est bien indépendante du choix du point α . On trouve donc eq.(IV.3-2), QED.

à partir de là, on obtient:

Théorème 3.2 (Eynard, Kokotov, Korotkin [P5], [P1]) *L'énergie libre à l'ordre $1/N^2$ est donnée par:*

$$F^{(1)} = -\frac{1}{24} \ln \left(\tilde{g}_{d_2+1}^{1-1/d_2} \tau_x^{12} \prod_{i=1}^{d_2+1+2g} y'(e_i) \right) \quad (IV.3-10)$$

où

$$\zeta_i(p) := \sqrt{x(p) - x(e_i)} \quad (IV.3-11)$$

$$y'(e_i) := \frac{dy(e_i)}{d\zeta_i(e_i)} \quad (IV.3-12)$$

et τ_x est déterminée par [P1], [54]:

$$\frac{\partial \ln \tau_x}{\partial x(e_i)} = -\frac{1}{12} \mathcal{S}_{\zeta_i}(e_i) \quad (\text{IV.3-13})$$

La formule variationnelle de Rauch implique que eq.(IV.3-13) définit bien une fonction τ_x , parfois appelée fonction τ de Bergmann [54]. On peut définir une fonction τ_y de façon similaire, et on peut vérifier que eq.(3.2) est bien symétrique dans l'échange $x \leftrightarrow y$.

Idée de la preuve:

Il s'agit de vérifier que l'expression eq.(IV.3-10) satisfait bien toutes les relations du type eq.(II.5-2), i.e. par exemple:

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial g_k} = -\frac{T}{k} \text{Res}_{\infty_x} x^k W_1^{(1)}(x) dx \quad (\text{IV.3-14})$$

On calcule le membre de gauche de eq.(IV.3-14), i.e. les dérivées par rapport à g_k , en utilisant les relations du théorème IV.2.4, et on calcule le membre de droite de eq.(IV.3-14) en utilisant le thórème IV.3.1. La preuve, fastidieuse. est exposée dans [P1], et elle est trop longue pour apparaître ici.

Par ailleurs, la fonction τ_x est connue pour être proportionnelle au déterminant d'un Laplacien sur \mathcal{E} (voir [P1], [54, 76]).

Le développement systématique de la résolvante et de ses dérivées a été obtenu très récemment par (Eynard, Orantin) [35], par une méthode diagrammatique, que je ne présenterai pas ici. Toutefois, cette méthode diagrammatique n'a pas encore pu s'appliquer au calcul du développement de l'énergie libre en $1/N^2$. Ceci reste à comprendre. Pour l'instant, il n'existe pas d'expression connue pour $F^{(2)}$ par exemple.

Chapitre 5

Asymptotiques des polynômes biorthogonaux

Dans ce chapitre, nous allons voir comment on peut deviner les asymptotiques à n grand, pour les polynômes biorthogonaux. Les chapitres précédents n'étaient qu'une introduction à ce calcul, pour poser les notations, et mettre en place les éléments nécessaires.

L'idée est la suivante: la formule de Heine eq.(III.1-2) permet de voir les polynômes orthogonaux comme des fonctions de partition d'un modèle normal. Le modèle normal est lui même la transformée de Fourier d'un modèle normal à symétrie brisée. Le modèle à symétrie brisée, a, sous certaines hypothèses, le même développement asymptotique qu'un modèle formel. Par la méthode des équations de boucles, nous pouvons trouver les asymptotiques du modèle formel en termes de géométrie algébrique. Il suffit alors de refaire la transformée Fourier inverse pour obtenir les asymptotiques des polynômes. Cette méthode a été introduite dans [P11] et [P9], et a été présentée aux Houches en 2004 [31].

Les asymptotiques ainsi obtenus s'expriment naturellement en termes de géométrie algébrique d'une courbe complexe, et l'on voit aisément que cette courbe complexe n'est rien d'autre que la limite n grand de la courbe spectrale vue en eq.(III.7-9).

Il faut noter que les asymptotiques présentés ci-dessous ne sont que des **conjectures** (à ce jour), soutenues par des arguments physiques très raisonnables, mais ils ne sont pas démontrés mathématiquement. La méthode la plus prometteuse pour les démontrer est la méthode de Riemann–Hilbert introduite par [10, 11] et [18, 19, 20, 27]. Il apparaît également probable que l'on puisse un jour justifier rigoureusement les hypothèses présentées ci-dessous, sur lesquelles se base l'intuition physique, sans passer par Riemann–Hilbert.

Les asymptotiques présentés ci-dessous ont été introduits pour la première fois en 1997 dans [P11] et [P9] pour le cas où la courbe spectrale est de genre 0, et ils ont été présentés à la conférence de l'AMS à Montréal en 2002 [6].

1 La courbe spectrale

Supposons qu'il existe une courbe algébrique \mathcal{E} d'équation $E(x, y) = 0$ avec:

$$E(x, y) = (V_1'(x) - y)(V_2'(y) - x) - P(x, y) + 1 \quad (\text{V.1-1})$$

où $\deg P = (d_1 - 1, d_2 - 1)$, et telle que pour tout cycle sur \mathcal{E} , on ait:

$$\text{Re} \oint y dx = 0 \quad (\text{V.1-2})$$

Supposons que la courbe est de genre $g \leq d_1 d_2 - 1$, et que l'on ait pu choisir des cycles \mathcal{A}_I , entourant des coupures $[a_{2I-1}, a_{2I}]$, tels que les:

$$\epsilon_I := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_I} y dx, \quad \epsilon_{g+1} := 1 - \sum_{I=1}^g \epsilon_I \quad (\text{V.1-3})$$

soient tous positifs.

Remarque 1.1 L'existence d'une telle courbe est obtenue à partir de la courbe algébrique du modèle formel, vue au chapitre précédent. Pour chaque $\epsilon_I \geq 0$, il existe une courbe algébrique, et la partie réelle de l'énergie libre associée est une fonction convexe des ϵ (en effet, sa dérivée seconde est $-2i\pi\tau$, dont la partie réelle est toujours positive). Elle admet donc un unique minimum, et c'est ce minimum que l'on considère ici. Le minimum peut être atteint aux bords, dans ce cas certains ϵ_I sont nuls, et le genre est donné par le nombre de fractions de remplissage non nulles. Au minimum d'un $\epsilon_I \neq 0$, on a $\frac{\partial \text{Re} F}{\partial \epsilon_I} = 0$, i.e. $\text{Re} \oint_{\mathcal{B}_I} y dx = 0$.

1.1 Feuilletts

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, cette courbe possède deux points à l'infini, notés ∞_x et ∞_y , et possède $d_2 + 1$ (resp. $d_1 + 1$) feuilletts en x (resp. en y). C'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{C}$ (resp. $y \in \mathbb{C}$), il existe $d_2 + 1$ (resp. $d_1 + 1$) points de \mathcal{E} tels que:

$$\forall i = 0, \dots, d_2, \quad x(p_i(x)) = x, \quad (\text{resp. } \forall i = 0, \dots, d_1, \quad y(\tilde{p}_i(y)) = y) \quad (\text{V.1-4})$$

On note $p_0(x)$ (resp. $\tilde{p}_0(y)$) le point qui est dans le feuillet physique, i.e. qui s'approche de ∞_x (resp. ∞_y) lorsque $x \rightarrow \infty$ (resp. $y \rightarrow \infty$). Les autres points $p_i(x)$ (resp. $\tilde{p}_i(y)$) avec $i > 0$ s'approchent de ∞_y (resp. ∞_x) lorsque $x \rightarrow \infty$ (resp. $y \rightarrow \infty$).

1.2 coupures, points de branchelents et bases d'homologies

Les points de branchement en x (resp. en y) sont les zéros de dx (resp. dy), on les note e_i (resp. \tilde{e}_i). On supposera ici qu'ils sont simples et tous distincts. On notera:

$$a_i := x(e_i), \quad (\text{resp. } b_i := y(\tilde{e}_i)) \quad (\text{V.1-5})$$

Chaque point de branchement du feuillet physique a_i (resp. b_i), est tel que $\exists j > 0$ tel que:

$$p_j(a_i) = p_0(a_i) , \quad (\text{resp. } \tilde{p}_j(b_i) = \tilde{p}_0(b_i)) \quad (\text{V.1-6})$$

Définissons le potentiel effectif:

$$V_{1,\text{eff}(i)}(x) := \int_{p_j(x)}^{p_0(x)} y dx , \quad (\text{resp. } V_{2,\text{eff}(i)}(y) := \int_{\tilde{p}_j(y)}^{\tilde{p}_0(y)} x dy) \quad (\text{V.1-7})$$

On a:

$$V_{1,\text{eff}(i)}(a_i) = 0 , \quad (\text{resp. } V_{2,\text{eff}(i)}(b_i) = 0) \quad (\text{V.1-8})$$

et $V_{1,\text{eff}(i)}(x)$ (resp. $V_{2,\text{eff}(i)}(y)$) se comporte en $(x - a_i)^{3/2}$ (resp. $(y - b_i)^{3/2}$) au voisinage de a_i (resp. b_i). Il existe des directions où $V_{1,\text{eff}(i)}(x)$ (resp. $V_{2,\text{eff}(i)}(y)$) est réel et strictement croissant. Ceci définit (au moins) un chemin allant de a_i (resp. b_i) à l'infini. Pour chaque coupure I , i.e. reliant deux points de branchements $[a_{2I-1}, a_{2I}]$ (resp. $[b_{2I-1}, b_{2I}]$), on a donc deux chemins, partant chacun d'une extrémité de la coupure. Notons Γ^x_I (resp. Γ^y_I) le chemin allant de ∞ à ∞ , constitué de la réunion de la coupure et des deux chemins à potentiel effectifs croissant à partir des deux bords. Les chemins Γ^x_I ainsi obtenus sont nécessairement sans intersections, et vont nécessairement à l'infini dans des directions où $\text{Re}V_1(x) > 0$ (resp. $\text{Re}V_2(y) > 0$). On peut aussi facilement montrer qu'ils sont homologiquement non nuls, et que les $\Gamma^x_I \times \Gamma^y_I$ forment bien une base d'homologie (cf chemins similaires dans [63]).

Nous utiliserons cette base pour définir le produit scalaire des polynômes biorthogonaux, i.e. il faut multiplier la matrice κ vue en II.2-4 qui a servi à définir le produit scalaire des polynômes biorthogonaux. Nous supposerons désormais que κ est la matrice des coefficients qui décrit le chemin Γ des polynômes biorthogonaux dans cette base:

$$\Gamma = \sum_I \kappa_I \Gamma^x_I \times \Gamma^y_I \quad (\text{V.1-9})$$

$$\int_{\Gamma} \pi_n(x) \sigma_m(y) e^{-(V_1(x) + V_2(y) - xy)} dx dy = h_n \delta_{nm} \quad (\text{V.1-10})$$

Nous noterons:

$$\kappa_I = e^{2i\pi\nu_I} \quad (\text{V.1-11})$$

Remarquons que dans les applications les plus fréquentes, les κ_I valent ± 1 , et donc les ν_I sont des entiers ou demi-entiers.

Si un coefficient κ_I est nul, il faut choisir $\epsilon_I = 0$. Le genre de la courbe est donné par le nombre de coefficients non nuls. Remarquons que si le chemin est l'axe réel, celui ci est somme d'au plus la moitié des chemins, et donc le genre est au plus:

$$g \leq \frac{d_1 + 1}{2} \frac{d_2 + 1}{2} \quad (\text{V.1-12})$$

1.3 Notations

Rappelons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Res}_{\infty_x} ydx = \text{Res}_{\infty_y} xdy = 1 \quad , \quad \forall I \quad , \quad \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_I} ydx = \epsilon_I \geq 0 \quad , \quad \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{B}_I} ydx = \zeta_I \quad (\in \mathbb{R}) \\ \forall X \quad , \quad \text{Res}_{\infty_x} \frac{1}{x-X} ydx = V'_1(X) \quad , \quad \forall Y \quad , \quad \text{Res}_{\infty_y} \frac{1}{y-Y} xdy = V'_2(Y) \end{array} \right. \quad (\text{V.1-13})$$

On choisit une base canonique de différentielles holomorphes:

$$\oint_{\mathcal{A}_I} du_J := \delta_{IJ} \quad (\text{V.1-14})$$

et la matrice des périodes associée τ (on a $\tau^t = \tau$ et $\text{Im}\tau > 0$):

$$\oint_{\mathcal{B}_I} du_J := \tau_{IJ} \quad (\text{V.1-15})$$

On choisit une demi période impaire $z = \frac{n+\tau m}{2}$ avec $\sum_I n_I m_I \in 2\mathbb{Z} + 1$, et on considère $\theta_z(u, \tau) := \theta(u + z, \tau)$. On définit la différentielle holomorphe:

$$dh_z(p) := \sum_I du_I(p) \left. \frac{\partial \theta_z(v, \tau)}{\partial v_I} \right|_{v=0} \quad (\text{V.1-16})$$

On définit (sur un domaine fondamental du recouvrement universel, et avec une coupure le long d'une ligne $[\infty_x, \infty_y]$):

$$T(p) := V_1(x(p)) - \ln(x(p)) + \int_{q=\infty_x}^p \left(y(q) - V'_1(x(q)) + \frac{1}{x(q)} \right) dx(q) \quad (\text{V.1-17})$$

$$\tilde{T}(p) := V_2(y(p)) - \ln(y(p)) + \int_{q=\infty_y}^p \left(x(q) - V'_2(y(q)) + \frac{1}{y(q)} \right) dy(q) \quad (\text{V.1-18})$$

Notons que $e^{T(p)}$ n'a pas de coupure le long de $[\infty_x, \infty_y]$.

On définit:

$$\mu := T(p) + \tilde{T}(p) - x(p)y(p) \quad (\text{V.1-19})$$

qui est indépendant du point p (en effet $d\mu = ydx + xdy - d(xy) = 0$).

On définit aussi:

$$\Lambda(p) := \frac{\theta_z(u(p) - u(\infty_y), \tau)}{\theta_z(u(p) - u(\infty_x), \tau)} \quad , \quad \gamma := \lim_{p \rightarrow \infty_x} \frac{x(p)}{\Lambda(p)} \quad , \quad \tilde{\gamma} := \lim_{p \rightarrow \infty_y} y(p)\Lambda(p) \quad (\text{V.1-20})$$

$$H(p) := \gamma \frac{dh_z(p) \theta_z(u(\infty_y) - u(\infty_x))}{dx(p) \theta_z(u(p) - u(\infty_x))^2} \quad , \quad \tilde{H}(p) := \tilde{\gamma} \frac{dh_z(p) \theta_z(u(\infty_x) - u(\infty_y))}{dy(p) \theta_z(u(p) - u(\infty_y))^2} \quad (\text{V.1-21})$$

Notons que $H(\infty_x) = 1$, resp. $\tilde{H}(\infty_y) = 1$, et

$$\frac{H(p)}{\tilde{H}(p)} = -\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \Lambda(p)^2 \frac{dy(p)}{dx(p)} \quad (\text{V.1-22})$$

Posons:

$$\eta_k := N(\tau\epsilon - \zeta) - \nu + k(u(\infty_x) - u(\infty_y)) \quad (\text{V.1-23})$$

et

$$\tilde{h}_k := \frac{2\pi}{(\gamma\tilde{\gamma})^k} \sqrt{\frac{2\pi\gamma\tilde{\gamma}}{N}} e^{-N\mu} e^{-2i\pi N\epsilon(u(\infty_x) - u(\infty_y))} \frac{\theta(\eta_{k-1}, \tau)}{\theta(\eta_k, \tau)} \quad (\text{V.1-24})$$

Définition 1.1 *Nous définissons les fonction suivantes:*

$$f_k(p) := \sqrt{\frac{H(p)}{\tilde{h}_k}} (\gamma\Lambda(p))^{-k} e^{2i\pi N\epsilon(u(p) - u(\infty_x))} \frac{\theta(\eta_k + u(p) - u(\infty_x), \tau)}{\theta(\eta_k, \tau)} \quad (\text{V.1-25})$$

$$\tilde{f}_k(p) := \sqrt{\frac{\tilde{H}(p)}{\tilde{h}_k}} \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\Lambda(p)} \right)^{-k} e^{-2i\pi N\epsilon(u(p) - u(\infty_y))} \frac{\theta(\eta_k - u(p) + u(\infty_y), \tau)}{\theta(\eta_k, \tau)} \quad (\text{V.1-26})$$

$$g_k(p) := \frac{1}{2i\pi} \sqrt{\tilde{h}_{1-k} \tilde{H}(p)} \left(\frac{\Lambda(p)}{\tilde{\gamma}} \right)^k e^{2i\pi N\epsilon(u(p) - u(\infty_y))} \frac{\theta(\eta_{1-k} + u(p) - u(\infty_x), \tau)}{\theta(\eta_{-k}, \tau)} \quad (\text{V.1-27})$$

$$\tilde{g}_k(p) := \frac{1}{2i\pi} \sqrt{\tilde{h}_{1-k} H(p)} (\gamma\Lambda(p))^{-k} e^{-2i\pi N\epsilon(u(p) - u(\infty_x))} \frac{\theta(\eta_{1-k} - u(p) + u(\infty_y), \tau)}{\theta(\eta_{-k}, \tau)} \quad (\text{V.1-28})$$

Notons que $f_k(p)e^{-NT(p)}$ n'a pas de discontinuité le long des cycles \mathcal{B}_I , et est multipliée par une phase $e^{2i\pi(\nu_I + z_I)} = e^{2i\pi z_I} \kappa_I$ lorsqu'on traverse un cycle \mathcal{A}_I .

$f_k(p)$ se comporte asymptotiquement à l'infini comme:

$$f_k(p)e^{-NT(p)} \underset{p \rightarrow \infty_x}{\sim} x(p)^{N-k} e^{-NV_1(x(p))} (1 + O(1/x)) \quad (\text{V.1-29})$$

Définition 1.2 *Définissons les matrices carrées suivantes de taille $d_2 + 1$*

$$\mathbf{T}(x) := \text{diag}(T(p_0(x)), T(p_1(x)), \dots, T(p_{d_2}(x))) \quad (\text{V.1-30})$$

$$F_{ij}(x) := f_i(p_j(x)) \ , \quad i, j = 0, \dots, d_2 \quad (\text{V.1-31})$$

$$\tilde{G}_{ij}(x) := \tilde{g}_i(p_j(x)) \ , \quad i, j = 0, \dots, d_2 \quad (\text{V.1-32})$$

et les matrices carrées suivantes de taille $d_1 + 1$

$$\tilde{\mathbf{T}}(y) := \text{diag}(\tilde{T}(\tilde{p}_0(y)), \tilde{T}(\tilde{p}_1(y)), \dots, \tilde{T}(\tilde{p}_{d_1}(y))) \quad (\text{V.1-33})$$

$$\tilde{F}_{ij}(y) := \tilde{f}_i(\tilde{p}_j(y)) \ , \quad i, j = 0, \dots, d_1 \quad (\text{V.1-34})$$

$$G_{ij}(y) := g_i(\tilde{p}_j(y)) \ , \quad i, j = 0, \dots, d_1 \quad (\text{V.1-35})$$

2 Conjecture

Conjecture 2.1 (*Eynard [P11], [P9]*) *les asymptotiques des systèmes fondamentaux des polynômes biorthogonaux (définis par le theoreme 8.1), dans le régime*

$$n \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, |n - N| = O(1) \quad (\text{V.2-1})$$

sont donnés par:

$$\Psi_N(x) \sim F(x) e^{-N\mathbf{T}(x)} C_x (1 + O(1/N)) \quad (\text{V.2-2})$$

$$\Phi_N(y) \sim \tilde{F}(y) e^{-N\tilde{\mathbf{T}}(y)} C_y (1 + O(1/N)) \quad (\text{V.2-3})$$

$$\tilde{\Psi}_N(y) \sim G(y) e^{N\tilde{\mathbf{T}}(y)} \tilde{C}_y (1 + O(1/N)) \quad (\text{V.2-4})$$

$$\tilde{\Phi}_N(x) \sim \tilde{G}(x) e^{N\mathbf{T}(x)} \tilde{C}_x (1 + O(1/N)) \quad (\text{V.2-5})$$

où $C_x, \tilde{C}_x, C_y, \tilde{C}_y$ sont des matrices carrées constantes par morceaux.

Remarque 2.1 Ces asymptotiques ont été introduits pour la première fois en 1997 dans [P11] et [P9] pour le cas où la courbe spectrale est de genre 0, et ils ont été présentés à la conférence de l'AMS à Montréal en 2002 [6]. Ces asymptotiques sont des ansatz, qu'il faudrait maintenant prouver, par exemple par la méthode de Riemann–Hilbert [10] et [18].

Remarque 2.2 Les polynômes orthogonaux $\psi_{N-i}(x)$ sont obtenus dans la première colonne de la matrice $\Psi_N(x)$:

$$\psi_{N-i}(x) = (\Psi_N(x))_{i0} \quad (\text{V.2-6})$$

Remarque 2.3 Ces asymptotiques sont uniforme pour tout x , hors du voisinage des points de branchements. Les lignes de discontinuité des C_x , sont données par:

$$\operatorname{Re} \int_{p_i(x)}^{p_j(x)} y dx = 0 \quad (\text{V.2-7})$$

Remarque 2.4 La méthode euristique pour obtenir ces asymptotiques est présentée dans [P11] et [P9], de même que dans [34] pour le genre zéro. Lorsque la courbe a un genre plus élevé, la sommation sur les fractions de remplissages (cf eq.II.3-10), produit une fonction θ , comme dans [13]. De plus, cette méthode euristique fonctionne à x fixé, i.e. on peut calculer la matrice C_x très explicitement pour un x donné, sans avoir à se préoccuper des discontinuités. La matrice C_x provient de la matrice de changement de base d'homologie pour calculer les transformées de Fourier et Hilbert, par la méthode du col (méthode du col habituelle en dimension 1). Les discontinuités sont obtenues à posteriori. Les lignes de discontinuités apparaissent d'abord car les $p_j(x)$ sont par définition discontinus le long des coupures, puis, par un phénomène de Stokes lorsque l'on calcule les transformées de Fourier et transformées de Hilbert par la méthode du col. Les matrices de Stokes et de saut le long des coupures pourraient être calculées très explicitement par cette méthode euristique.

3 Vérifications

Vérifions que cet ansatz satisfait certaines propriétés attendues:

3.1 Asymptotiques

On a:

$$f_k(p) \underset{p \rightarrow \infty_x}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\tilde{h}_k}} x(p)^{-k} (1 + O(1/x)) \quad (\text{V.3-1})$$

$$f_k(p) \underset{p \rightarrow \infty_y}{\sim} O\left(y(p)^{k - \frac{d_2+1}{2}}\right) \quad (\text{V.3-2})$$

ce qui garantit bien que:

$$p_{N-k}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} C_{x0,0} x^{N-k} (1 + O(1/x)) \quad (\text{V.3-3})$$

Il faut donc choisir $C_{x0,0} = 1$ dans les secteurs où $x \rightarrow \infty$.

De façon générale, on trouve que les systèmes fondamentaux donnés dans la conjecture V.2.1, satisfont les mêmes asymptotiques à x grand que ceux donnés au théorème III.9.1.

3.2 Transformées de Fourier et Hilbert

On peut vérifier que pour $j > 0$,

$$\tilde{\psi}_{N-i}^{(j)}(y) = \int \psi_{N-i}(x) e^{Nxy} dx \quad (1 + O(1/N)) \quad (\text{V.3-4})$$

l'intégration se fait par la méthode du col habituelle. Le chemin d'intégration non précisé ici, dépend de x de façon constante par morceaux, car il dépend de la matrice C_x , et de la classe d'homologie des chemins passant par les points cols.

On peut aussi vérifier par la méthode du col et la formule de Cauchy, que

$$\tilde{\psi}_{N-i}^{(0)}(y) = \int \int \frac{1}{y - y'} \psi_{N-i}(x) e^{Nxy'} dx dy' \quad (1 + O(1/N)) \quad (\text{V.3-5})$$

3.3 Orthogonalité

On peut vérifier que:

$$\int \int \psi_{N-i}(x) \phi_{N-j}(y) e^{Nxy} dx dy = \delta_{ij} + O(1/N) \quad (\text{V.3-6})$$

en effet, l'intégration se réduit à un résidu au point ∞_x (ou au point ∞_y) sur la courbe algébrique, de la forme:

$$\sqrt{\frac{\tilde{h}_i}{\tilde{h}_j}} \operatorname{Res}_{p \rightarrow \infty_x} \frac{dh_z(p) \theta_z(u(\infty_x) - u(\infty_y)) (\gamma \Lambda(p))^{j-i} \theta(\eta_i + u(p) - u(\infty_x)) \theta(\eta_j - u(p) + u(\infty_y))}{\theta_z(u(p) - u(\infty_x)) \theta_z(u(p) - u(\infty_y)) \theta(\eta_i) \theta(\eta_{j-1})} = \delta_{ij}$$

(V.3-7)

si $i > j$, il n'y a pas de pôle en ∞_x et le résidu s'annule, de même, si $j > i$, il n'y a pas de pôle en ∞_y et le résidu s'annule, et si $i = j$, le résidu vaut bien 1. Ceci montre que le coefficient h_n (def.III.1.1) vaut:

$$h_n \sim \tilde{h}_{N-n} (1 + O(1/N)) \quad (\text{V.3-8})$$

de même, le coefficient γ_n (def.III.2-8) vaut:

$$\gamma_n \sim \sqrt{\gamma \tilde{\gamma}} \sqrt{\frac{\theta(\eta_{N-n})\theta(\eta_{N-n-2})}{\theta(\eta_{N-n-1})^2}} (1 + O(1/N)) \quad (\text{V.3-9})$$

3.4 Systèmes différentiels, courbe spectrale et dualité spectrale

Les 4 systèmes de la conjecture V.2.1 satisfont 4 systèmes d'équations différentiels:

$$\mathcal{D}_1(x) \sim F(x) \mathbf{T}'(x) F(x)^{-1} + O(1/N) \quad (\text{V.3-10})$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_1(x) \sim \tilde{G}(x) \mathbf{T}'(x) \tilde{G}(x)^{-1} + O(1/N) \quad (\text{V.3-11})$$

$$\mathcal{D}_2(y) \sim \tilde{F}(y) \tilde{\mathbf{T}}'(y) \tilde{F}(y)^{-1} + O(1/N) \quad (\text{V.3-12})$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_2(y) \sim G(y) \tilde{\mathbf{T}}'(y) G(y)^{-1} + O(1/N) \quad (\text{V.3-13})$$

Les valeurs propres de $\mathcal{D}_1(x)$ sont donc celles de $\mathbf{T}'(x)$, i.e. ce sont les $y(p_i(x))$, autrement dit la courbe algébrique que nous avons introduite est bien la limite de la courbe spectrale, et ce pour les 4 systèmes. Nous retrouvons le théorème de dualité spectrale:

Théorème 3.1 *Les 4 systèmes différentiels ci-dessus ont la même courbe spectrale, qui est la courbe algébrique \mathcal{E} .*

Remarque 3.1 La matrice $\mathcal{D}_1(x)$ n'a pas nécessairement de limite lorsque $N \rightarrow \infty$, car $F(x)$ dépend explicitement de N .

3.5 Dualité et Christoffel–Darboux

Théorème 3.2 *La matrice*

$$A = (F(x)\tilde{G}(x)^t)^{-1} \quad (\text{V.3-14})$$

ne dépend pas de x , et a la forme de la matrice de Christoffel Darboux (cf théorème III.4.1, écrite dans une autre base): $A_{ij} = 0$ si ($i = 0$ et $j \neq 0$) ou si ($j = 0$ et $i \neq 0$) ou si ($i > 0$, $j > 0$, et $i + j > d_2$). On a $A_{00} = -\gamma_{N-1}$.

idée de la preuve: Chacun des A_{ij} peut être écrit comme des combinaisons de fonctions sur la courbe \mathcal{E} . On vérifie que cette fonction est bien une fonction méromorphe sur \mathcal{E} , i.e. qu'elle reprend bien sa valeur après un tour autour de chaque \mathcal{A}_I et chaque \mathcal{B}_I , et qu'elle n'a pas de pôles. Toute fonction méromorphe sans pôle étant constante, on trouve que A ne dépend pas de x . La valeur des A_{ij} peut donc être calculée pour x grand, et l'on trouve le résultat annoncé.

4 Idée euristique sous-tendant la conjecture

Nous allons exposer rapidement les idées qui conduisent à cette conjecture. Elles se basent sur les articles [P11] et [P9], et sur [13] (voir aussi [31]).

4.1 Formule de Heine et modèle normal avec potentiel rationnel

La formule de Heine eq.(III.1-2) permet de voir les polynômes orthogonaux comme des fonctions de partition d'un modèle normal:

$$\pi_n(\xi) = \frac{Z_{\text{Norm}}(N, T, r, \kappa)}{Z_{\text{Norm}}(N, T, 0, \kappa)} \quad (\text{V.4-1})$$

où $T = \frac{n}{N}$ et $r = -\frac{1}{N}$ et:

$$Z_{\text{Norm}}(N, T, r, \kappa) := \int_{(H_n \times H_n)(\Gamma)} dM_1 dM_2 e^{-\frac{n}{T} \text{tr} [V_1(M_1) + r \ln(\xi - M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2]} = e^{-\frac{n^2}{T^2} F_{\text{Norm}}(N, T, r, \kappa)} \quad (\text{V.4-2})$$

autrement dit, on a simplement ajouté un terme logarithmique au potentiel V_1 , et une température $T = \frac{n}{N}$. Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des potentiels polynomiaux, mais il est connu [8] que tout les raisonnements précédents se généralisent bien au cas où V_1' est une fraction rationnelle. De plus, ici, le terme logarithmique est multiplié par $r = -1/N$ qui est petit, et nous allons effectuer un développement de Taylor au voisinage d'un potentiel polynomial.

4.2 Transformée de Fourier d'un modèle normal brisé

Pour un chemin d'intégration $\Gamma = \sum_I \kappa_I \Gamma_I^x \times \Gamma_I^y$, on a, d'après eq.(II.3-10):

$$Z_{\text{Norm}}(N, T, r, \kappa) = \sum_{\sum_I m_I = n} \kappa_I^{m_I} Z_{\text{Normb}}(N, T, r, m_I) \quad (\text{V.4-3})$$

avec:

$$\begin{aligned} Z_{\text{Normb}}(N, T, r, m_I) &:= e^{-n^2 \text{over} T^2 F_{\text{Normb}}(N, T, r, m_I)} \\ &:= \prod_I \int_{H_{m_I}(\Gamma_I^x) \times H_{m_I}(\Gamma_I^y)} dM_{x,I} dM_{y,I} \\ &\quad e^{-\frac{n}{T} \text{tr} [V_1(M_{x,I}) + r \ln(\xi - M_{x,I}) + V_2(M_{y,I}) - M_{x,I} M_{y,I}]} \\ &\quad \prod_{(I) < (k,l)} \det(M_{x,I} \otimes \mathbf{1}_{n_{k,l}} - \mathbf{1}_{n_I} \otimes M_{x,k,l}) \\ &\quad \prod_{(I) < (k,l)} \det(M_{y,I} \otimes \mathbf{1}_{n_{k,l}} - \mathbf{1}_{n_I} \otimes M_{y,k,l}) \end{aligned} \quad (\text{V.4-4})$$

On fait l'hypothèse, que si les chemins Γ_I sont "bien choisis" (i.e. section 1.2), alors l'énergie libre du modèle normal brisé possède un développement en puissances de $1/N^2$ pour N grand,

i.e. on identifie le modèle normal brisé à un modèle formel (à des termes exponentiellement petits près):

$$Z_{\text{Normb}}(N, T, r, m_I) \equiv Z_{\text{Form}}(N, T, r, \frac{1}{N}m_I) = e^{-\frac{n^2}{T^2} F_{\text{Form}}(N, T, r, \frac{1}{N}m_I)} \quad (\text{V.4-5})$$

4.3 Développement à N grand du modèle formel

Nous savons que le modèle formel peut se développer en puissances de $1/N^2$:

$$-\frac{1}{N^2} \ln Z_{\text{Form}}(N, T, r, \eta_I) = F^{(0)}(T, r, \eta_I) + \frac{1}{N^2} F^{(1)}(T, r, \eta_I) + O(\frac{1}{N^4}) \quad (\text{V.4-6})$$

où $F^{(0)}(T, r, \eta_I)$, $F^{(1)}(T, r, \eta_I)$, ..., etc, sont données par Th.2.5, Th.3.2, et sont analytiques dans tous leurs paramètres.

Nous poserons $F = F^{(0)}$ car nous n'aurons pas besoin de l'ordre suivant.

En utilisant les théorèmes IV.2.4, IV.2.5 et IV.2.6, on a (en écrivant $\xi = x(q)$):

$$F_\eta := \frac{\partial F}{\partial \eta_I} = - \oint_{\mathcal{B}_I} y dx = -2i\pi \zeta_I \quad (\text{V.4-7})$$

$$F_r := \frac{\partial F}{\partial r} = -(T(q) - V_1(x(q))) \quad (\text{V.4-8})$$

$$F_T := \frac{\partial F}{\partial T} = \mu \quad (\text{V.4-9})$$

$$F_{\eta\eta} := \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_I \partial \eta_J} = -2i\pi \tau_{IJ} \quad (\text{V.4-10})$$

$$F_{rr} := \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -\ln H(q) \quad (\text{V.4-11})$$

$$F_{TT} := \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -\ln \gamma \tilde{\gamma} \quad (\text{V.4-12})$$

$$F_{\eta r} := \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_I \partial r} = -2i\pi(u(q) - u(\infty_x)) \quad (\text{V.4-13})$$

$$F_{\eta T} := \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_I \partial T} = -2i\pi(u(\infty_x) - u(\infty_y)) \quad (\text{V.4-14})$$

$$F_{rt} := \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial T} = \ln \gamma \Lambda(q) \quad (\text{V.4-15})$$

Au voisinage de $T = 1$, $r = 0$ et $\eta = \epsilon$, en posant $m = N\eta$, la formule de Taylor à l'ordre 2 donne:

$$e^{-\frac{n^2}{T^2} F(T, r, \eta)} \sim e^{-N^2 F(1, 0, \epsilon)} e^{-N(m - N\epsilon) F_\eta} e^{N F_r} e^{-N(n - N) F_T} \\ e^{-\frac{1}{2}(m - N\epsilon)^t F_{\eta\eta}(m - N\epsilon)} e^{-\frac{1}{2} F_{rr}} e^{-\frac{1}{2}(n - N)^2 F_{TT}} \\ e^{F_{\eta r}(m - N\epsilon)} e^{-(n - N) F_{\eta T}(m - N\epsilon)} e^{(n - N) F_{rT}}$$

$$\begin{aligned}
& \sim (\gamma\tilde{\gamma})^{\frac{1}{2}(n-N)^2} e^{-N^2 F(1,0,\epsilon)} e^{-N(n-N)\mu} \\
& \quad \sqrt{H(q)} \Lambda(q)^{n-N} e^{-N(T(q)-V_1(x(q)))} \\
& \quad e^{i\pi(m-N\epsilon)^t \tau(m-N\epsilon)} e^{2i\pi N \zeta^t(m-N\epsilon)} \\
& \quad e^{-2i\pi(u(q)-u(\infty_x))^t(m-N\epsilon)} e^{2i\pi(n-N)(u(\infty_x)-u(\infty_y))^t(m-N\epsilon)} \\
& (V.4 - 16)
\end{aligned}$$

où toutes les dérivées sont calculées en $T = 1$, $r = 0$ et $\eta = \epsilon$.

4.4 Sommation sur les fractions de remplissage

Comme la matrice des périodes τ_{IJ} a toujours une partie imaginaire positive (voir paragraphe 2.2), $\text{Re}F(1, 0, \eta)$ est une fonction convexe des η_I . Notons ϵ son minimum. La condition de minimalité s'écrit:

$$\frac{\partial \text{Re}F}{\partial \eta_I} = 0 = 2\pi \text{Im} \zeta_I \quad (V.4-17)$$

ce qui implique que les ζ_I sont réels. La convexité de $\text{Re}F$, implique que dans la somme sur les m_I , seuls les m_I tels que $|m_I - N\epsilon_I| \sim O(1)$ contribuent notablement à la somme. ceci entraine, d'une part, on peut se contenter de l'approximation de Taylor de l'énergie libre au 2e ordre, et d'autre part, on peut sommer sur les m_I allant de $-\infty$ à $+\infty$, ce qui produit une fonction θ :

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Norm}}(N, T, r, \kappa) & \sim (\gamma\tilde{\gamma})^{\frac{1}{2}(n-N)^2} e^{-N^2 F(1,0,\epsilon)} e^{-N(n-N)\mu} \\
& \quad \sqrt{H(q)} \Lambda(q)^{n-N} e^{-N(T(q)-V_1(x(q)))} \\
& \quad \sum_{m_I} e^{2i\pi \nu^t m} e^{i\pi(m-N\epsilon)^t \tau(m-N\epsilon)} e^{2i\pi N \zeta^t(m-N\epsilon)} \\
& \quad e^{-2i\pi(u(q)-u(\infty_x))^t(m-N\epsilon)} e^{2i\pi(n-N)(u(\infty_x)-u(\infty_y))^t(m-N\epsilon)} \\
& \sim (\gamma\tilde{\gamma})^{\frac{1}{2}(n-N)^2} e^{-N^2 F(1,0,\epsilon)} e^{-N(n-N)\mu} \\
& \quad \sqrt{H(q)} \Lambda(q)^{n-N} e^{-N(T(q)-V_1(x(q)))} \\
& \quad e^{i\pi N \epsilon^t \tau N \epsilon} e^{-2i\pi N \zeta^t N \epsilon} e^{2i\pi(u(q)-u(\infty_x))^t N \epsilon} e^{-2i\pi(n-N)(u(\infty_x)-u(\infty_y))^t N \epsilon} \\
& \quad \theta(\eta_{N-n} + u(q) - u(\infty_x), \tau) \\
& (V.4 - 18)
\end{aligned}$$

et le rapport $Z_{\text{Norm}}(N, T, r, \kappa)/Z_{\text{Norm}}(N, T, 0, \kappa)$ vaut dans cette approximation:

$$\begin{aligned}
\pi_n(x(q)) = \frac{Z_{\text{Norm}}(N, T, r, \kappa)}{Z_{\text{Norm}}(N, T, 0, \kappa)} & \sim \sqrt{H(q)} \Lambda(q)^{n-N} e^{-N(T(q)-V_1(x(q)))} \\
& e^{2i\pi N \epsilon^t (u(q)-u(\infty_x))} \frac{\theta(\eta_{N-n} + u(q) - u(\infty_x), \tau)}{\theta(\eta_{N-n}, \tau)} \\
& (V.4 - 19)
\end{aligned}$$

i.e. on retrouve la fonction $f_{N-n}(p)$ définie à l'équation V.1-25.

Les arguments présentés ici sont euristiques et indicatifs. Ils servent juste à deviner la bonne forme à donner à la conjecture.

Je pense qu'il doit être possible de justifier rigoureusement toute cette approche, et donc de prouver la conjecture, sans passer par une méthode de Riemann–Hilbert. Mais ceci reste à faire...

Chapitre 6

Conclusion

Ce mémoire fait un résumé de plus de 10 années de mes travaux sur le modèle à deux matrices. Les travaux les plus anciens ne concernaient que les courbe spectrale de genre 0, et c'est petit à petit que la géométrie algébrique un peu plus évoluée, a fait son apparition, et a permis d'étudier les courbes de genre quelconque.

Mes travaux avaient débuté en temps que physicien, le but étant de comprendre un peu mieux la gravitation quantique et les théories conformes. Dans ce cadre, les physiciens étaient très intéressés par le développement topologique du modèle formel, et seul le cas de genre zéro correspondait vraiment à la "gravité quantique" (en effet, la fonction de partition est une somme sur des surfaces discrétisées colées seulement par leur bords, pas par leurs centres).

L'idée de regarder les courbes de genre plus élevé, c'est imposée naturellement, d'une part par souci de complétude, d'autre part pour résoudre le "puzzle de Brézin et Deo" (depuis résolu par Deift & co [18]), et enfin car la théorie de Dijkgraaf et Vafa a mis en évidence le rôle joué par les courbes de genre plus élevé en théorie des cordes.

Dans ce mémoire, j'ai commencé par définir les modèles de matrices, de la façon dont je les comprends, puis j'ai expliqué ce que l'on sait faire avec la méthode des polynômes biorthogonaux, et ensuite par la méthode des équations de boucles. Le dernier chapitre montre que lorsque l'on combine les deux méthodes, on obtient une compréhension beaucoup plus grande, et ceci permet par exemple de deviner la forme des asymptotiques des polynômes biorthogonaux. Bref, on gagne toujours à attaquer un problème par plusieurs cotés, et à connaître aussi bien les travaux des mathématiciens que des physiciens.

Les perspectives de ces travaux sont nombreuses, tant en mathématique qu'en physique.

Coté mathématique, il reste bien évidemment à démontrer les asymptotiques, mais il reste aussi de nombreuses questions en suspens, comme la fonction tau isomonodromique.

Coté physique, les matrices aléatoires ne sont qu'un outil. Le modèle à deux matrices semble riche de perspectives pour mieux comprendre, voire pour donner un sens rigoureux, aux théories de champs conformes, en particulier sur les surfaces avec bords [55]. Les opérateurs de bords dans

les théories conformes sont encore assez mal connus, et le modèle à deux matrices semble fournir un très bon outil pour avancer sur ce sujet, surtout depuis que l'on sait calculer des observables contenant des traces mixtes.

D'une façon plus lointaine et ambitieuse, il semble que de nombreux concepts physiques et mathématiques sont en train de converger: il s'agit de comprendre en profondeur la relation entre intégrabilité(s) (au sens isomonodromique, au sens Yang–Baxter, au sens Ansatz de Behté), géométrie algébrique, combinatoire,... Mais ceci est plus un espoir qu'une réalité à l'heure actuelle...

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier tous mes collaborateurs durant ces années de recherches, par ordre alphabétique: Marco Bertola, Pavel Bleher, Gabrielle Bonnet, François David, Philippe Di Francesco, Emmanuel Guitter, John Harnad, Jacques Hurtubise, Alexey Kokotov, Dmitri Korotkin, Charlotte Kristjansen, Madan Lal Mehta, Nicolas Orantin, Aleix Prats Ferrer, Jean Zinn-Justin. Je tiens à remercier également tous ceux avec qui j'ai eu des discussions fructueuses sur ce sujet, en particulier dans mon laboratoire Ivan Kostov, Jean-Bernard Zuber, Michel Bergère, Jean-Marie Normand. Je dois remercier mon laboratoire le Service de Physique Théorique du CEA à Saclay, ainsi que tous les laboratoires qui m'ont accueilli lorsque je travaillais sur ces sujets: L'Université de Durham (UK), Le Niels Bohr Institutet (Copenhague, Danemark), l'Université de Colombie Britannique (Vancouver, Canada, BC), le CRM (Montréal, Canada QC). Je dois remercier également les réseaux Européens Eurogrid et Euclide dont le support matériel ainsi que les échanges qu'ils m'ont permis de développer ont joué un rôle essentiel dans ma recherche. Je remercie également Anne Boutet de Monvel et Jean-Jacques Sansuc, qui m'ont encouragé et permis de soutenir cette habilitation à l'université Paris VII. Pour finir, je remercie ma femme Sandra et mes filles Salomé et Maève, pour m'avoir accompagné tout ce temps.

Publications de l'auteur contenues dans le mémoire

- [P1] Genus one contribution to free energy in hermitian two-matrix model, (B.E., D. Korotkin, A. Kokotov), 25 pages, Nucl.Phys. B694 (2004) 443-472, SPHT T04/020. xxx, hep-th/0403072.
- [P2] The PDEs of biorthogonal polynomials arising in the 2-matrix model, (M. Bertola, B.E.), 20 pages, Preprint SPHT T03/139, nlin.SI/0311033.
- [P3] Master loop equations, free energy and correlations for the chain of matrices, (B.E.) , 43 pages, SPHT T03/125. JHEP11(2003)018. xxx, hep-th/0309036, ccsd-00000572.
- [P4] Mixed Correlation Functions of the Two-Matrix Model (M. Bertola, B.E.) , 16 pages, SPHT T03/028, CRM-2961 (2003). J. Phys. A36 (2003) 7733-7750. xxx, hep-th/0303161.
- [P5] Large N expansion of the 2-matrix model (B.E.) , 41 pages, SPHT T02/128, CRM-2868. JHEP 01 (2003) 051. xxx, hep-th/0210047.
- [P6] Differential systems for bi-orthogonal polynomials appearing in two-matrix models and the associated Riemann-Hilbert problem. (M. Bertola, B.E., J. Harnad) , 60 pages, SPHT 02/097, CRM-2852. Comm. Math. Phys. 243 no.2 (2003) 193-240, xxx, nlin.SI/0208002.
- [P7] Partition functions for Matrix Models and Isomonodromic Tau Functions. (M. Bertola, B.E., J. Harnad) , 17 pages, SPHT 02/050, CRM 2841 , J. Phys. A Math. Gen. 36 No 12 (28 March 2003) 3067-3083. xxx, nlin.SI/0204054.
- [P8] Duality, Bi-orthogonal Polynomials and Multi-Matrix Models. (M. Bertola, B.E., J. Harnad) , 35 pages SPHT 01/047, CRM-2749 , Commun.Math.Phys. 229 (2002) 73-120. xxx, nlin.SI/0108049.
- [P9] Correlation functions of eigenvalues of multi-matrix models, and the limit of a time dependent matrix. (B.E.) , 27 pages. SPHT 98/001 DTP 97-59 , Journal of Physics A 40 (1998) 8081, xxx, cond-mat/9801075.
- [P10] Matrices coupled in a chain: eigenvalue correlation. (M.L. Mehta, B.E.) , 8 pages. SPHT 97/112. Journal of Physics A 19 (1998) 4449, xxx, cond-mat/9710230.
- [P11] Eigenvalue distribution of large random matrices, from one matrix to several coupled matrices. (B.E.) , 31 pages. SPHT 97031. Nuc. Phys. B506,3 633-664 (1997). xxx, cond-mat/9707005.

Bibliography

- [1] M. Adler and P. Van Moerbeke, “The Spectrum of Coupled Random Matrices”, *Ann. Math.*, 921–976 (1999).
- [2] J. Ambjorn, L. Chekhov, C.F. Kristjansen, Yu. Makeenko, “Matrix Model Calculations beyond the Spherical Limit”, *Nucl.Phys.* **B404** (1993) 127-172. Erratum-ibid. **B449** (1995) 681.
- [3] M. Bertola, “Bilinear semi-classical moment functionals and their integral representation”, J. App. Theory (at press), math.CA/0205160
- [4] M. Bertola, ”Second and Third Order Observables of the Two-Matrix Model”, JHEP 0311 (2003) 062, hep-th/0309192.
- [5] M. Bertola, B. Eynard, J. Harnad, “An ansatz for the solution of the Riemann–Hilbert problem for biorthogonal polynomials”, in preparation.
- [6] M. Bertola, B. Eynard, J. Harnad, “ Heuristic asymptotics of biorthogonal polynomials ? ”, Presentation by B.E. at AMS Northeastern regional meeting, Montreal May 2002.
- [7] M. Bertola, B. Eynard, J. Harnad, ”Semiclassical orthogonal polynomials, matrix models and isomonodromic tau functions” SPHT T04/019. CRM-3169 (2004), xxx, nlin.SI/0410043.
- [8] M. Bertola, B. Eynard, ”Higher Order Observables of the Two–Matrix Model with semiclassical potentials”, in preparation.
- [9] P.M. Bleher and A.R. Its, eds., “Random Matrix Models and Their Applications”, *MSRI Research Publications* **40**, Cambridge Univ. Press, (Cambridge, 2001).
- [10] P. Bleher, A. Its, “Semiclassical asymptotics of orthogonal polynomials, Riemann-Hilbert problem, and universality in the matrix model” *Ann. of Math.* (2) **150**, no. 1, 185–266 (1999).
- [11] P. Bleher, A. Its, “On asymptotic analysis of orthogonal polynomials via the Riemann-Hilbert method”, Symmetries and integrability of difference equations (Canterbury, 1996), 165–177, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **255**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

- [12] P. Bleher, B. Eynard, "Double scaling limit in random matrix models and a non-linear hierarchy of differential equations", J. Phys. A36 (2003) 3085-3106, xxx, hep-th/0209087.
- [13] G. Bonnet, F. David, and B. Eynard, "Breakdown of Universality in multi-cut matrix models", J. Phys. A33, 6739 (2000), xxx, cond-mat/0003324.
- [14] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. Zuber, Comm. Math. Phys. **59**, 35 (1978).
- [15] V.I. Danilov, V.V. Shokurov, "Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes", Springer (1998).
- [16] J.M. Daul, V. Kazakov, I.K. Kostov, "Rational Theories of 2D Gravity from the Two-Matrix Model", Nucl. Phys. B409, 311-338 (1993), hep-th/9303093.
- [17] F. David, "Planar diagrams, two-dimensional lattice gravity and surface models", Nucl. Phys. B 257 [FS14] 45 (1985).
- [18] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T. R. McLaughlin, S. Venakides, Z. Zhou, "Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory", Commun. Pure Appl. Math. **52**, 1335-1425 (1999).
- [19] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T. R. McLaughlin, S. Venakides, Z. Zhou, "Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights", Commun. Pure Appl. Math. **52**, 1491-1552, (1999).
- [20] P. Deift, *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: a Riemann-Hilbert Approach*, Courant (New York University Press, ., 1999).
- [21] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, "2D Gravity and Random Matrices", Phys. Rep. **254**, 1 (1995).
- [22] R. Dijkgraaf, C. Vafa, "A Perturbative Window into Non-Perturbative Physics", hep-th/0208048,
- [23] F. Dyson, Journal of Mathematical Physics **3**, 140,157,166,1199 (1962).
- [24] F. Dyson and M. L. Mehta, J. Math. Phys. **4**, 701, 713 (1963).
- [25] F.J. Dyson, "Correlations between the eigenvalues of a random matrix", Comm. Math. Phys. **19** (1970) 235-250.
- [26] B. Dubrovin, Y. Zhang, "Bihamiltonian Hierarchies in 2D Topological Field Theory At One-Loop Approximation", Commun.Math.Phys. **198** (1998) 311-361, hep-th/9712232.

- [27] N. Ercolani K. Mac Laughlin, "Asymptotics of the partition function for random matrices via Riemann–Hilber technics and applications to graphical enumeration", IMRN 22003, no 14, 755-820.
- [28] N. M. Ercolani, K. T.-R. McLaughlin, "Asymptotics and integrable structures for biorthogonal polynomials associated to a random two matrix model", *Physica D* **152-153**, 232 (2001).
- [29] B. Eynard, "A short note about Morozov's formula", SPHT T04/077. xxx, math-ph/0406063, ccscd-00002150.
- [30] B. Eynard "An introduction to random matrices", lectures given at Saclay, October 2000, notes available at <http://www-spht.cea.fr/articles/t01/014/>.
- [31] B. Eynard, "Asymptotics of Orthogonal polynomials", Lecture given in Les Houches, June 2004, written notes available at: <http://www-spht.cea.fr/pisp/serban/Eynard.pdf> .
- [32] B. Eynard, "Large N expansion of the 2-matrix model", JHEP 01 (2003) 051, xxx, hep-th/0210047.
- [33] B. Eynard, "Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions" JHEP: JHEP/024A/0904, hep-th/0407261.
- [34] B. Eynard, "Asymptotics of skew orthogonal polynomials", *J. Phys A.* **34** (2001) 7591, cond-mat/0012046.
- [35] B. Eynard, N. Orantin, "Topological expansion for the 2 matrix model correlation functions", in preparation.
- [36] B. Eynard, A. Prats Ferrer, "2-matrix versus complex matrix model, integrals over the unitary group as triangular integrals", xxx, hep-th/0502041.
- [37] H.M. Farkas, I. Kra, "Riemann surfaces" 2nd edition, Springer Verlag, 1992.
- [38] J. Fay, "Theta Functions on Riemann Surfaces", Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1973.
- [39] A. Fokas, A. Its, A. Kitaev, "The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity", *Commun. Math. Phys.* **147**, 395–430 (1992).
- [40] W. Fulton, J. Harris, "Representation theory", Series Graduate Texts in Mathematics, vol 129, Springer, 1991.
- [41] *Two dimensional quantum gravity and random surfaces*, edited by D. Gross, T. Piran, and S. Weinberg (Jerusalem winter school, World Scientific, ., 1991).

- [42] A. Guionnet, Zeitouni, “Large deviations asymptotics for spherical integrals”, *J. F. A.* **188**, 461–515 (2002).
- [43] T. Guhr, A. Mueller-Groeling, H.A. Weidenmuller, “Random matrix theories in quantum physics: Common concepts”, *Phys. Rep.* **299**, 189 (1998).
- [44] J. Harnad, “Dual Isomonodromic Tau Functions and Determinants of Integrable Fredholm Operators”, in: *Random Matrices and Their Applications*, MSRI Research Publications **40**, Cambridge Univ. Press, (Cambridge, 2001, eds. P.M. Bleher and A.R. Its).
- [45] J. Harnad, C.A. Tracy and H. Widom, H., “Hamiltonian Structure of Equations Appearing in Random Matrices”, in: *Low Dimensional Topology and Quantum Field Theory*, ed. H. Osborn, (Plenum, New York, 1993).
- [46] Harish-Chandra, *Amer. J. Math.* **80** (1958) 241.
- [47] C. Itzykson and J.B. Zuber, “The planar approximation (II)”, *J. Math. Phys.* **21**, 411 (1980).
- [48] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, “Monodromy Preserving Deformation of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients I.”, *Physica* **2D**, 306-352 (1981).
- [49] Jimbo, M., Miwa, T., “Monodromy Preserving Deformation of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients II, III”, *Physica* **2D**, 407-448 (1981); *ibid.*, **4D**, 26–46 (1981).
- [50] A. Kapaev, “The Riemann-Hilbert Problem for the Bi-Orthogonal Polynomials”, (2002), preprint: nlin.SI/0207036.
- [51] V.A. Kazakov, A. Marshakov, ”Complex Curve of the Two Matrix Model and its Tau-function”, *J.Phys.* **A36** (2003) 3107-3136, hep-th/0211236.
- [52] V.A. Kazakov, “Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution”, *Phys Lett.* **A119**, 140-144 (1986).
- [53] V. Knizhnik, A. Polyakov, and A. Zamolodchikov, *Mod. Phys. Lett.* **A3**, 819 (1988).
- [54] A.Kokotov, D.Korotkin, Tau-functions on Hurwitz spaces, math-ph/0202034 *Mathematical Physics, Analysis and Geometry* (2004), to appear.
- [55] I. K. Kostov, ”Boundary Correlators in 2D Quantum Gravity: Liouville versus Discrete Approach”, *Nucl.Phys.* **B658** (2003) 397-416, hep-th/0212194.
- [56] I. Krichever, “The τ -Function of the Universal Whitham Hierarchy, Matrix Models and Topological Field Theories”, *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994), no. 4, 437–475.

- [57] A. Matytsin, “on the large N limit of the Itzykson Zuber Integral”, *Nuc. Phys.* **B411**, 805 (1994), hep-th/9306077.
- [58] M.L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd edition, (Academic Press, New York, 1991).
- [59] M.L. Mehta, “A method of integration over matrix variables”, *Commun. Math. Phys.* **79**, 327 (1981).
- [60] M. L. Mehta and M. Gaudin, *Nuc. Phys.* **A18**, 395 (1960).
- [61] M. L. Mehta and M. Gaudin, *Nuc. Phys.* **A25**, 447 (1961).
- [62] M.L. Mehta, P. Shukla, ”Two coupled matrices: Eigenvalue correlations and spacing functions”. *J. Phys. A: Math Gen.* 27 (1994) 7793-7803.
- [63] G. Moore, “Geometry of the string equations”, *Comm. Math. Phys.* **133**, no. 2, 261–304 (1990).
- [64] A. Morozov, “Pair correlator in the Itzykson–Zuber Integral”, *Modern Phys. Lett. A* **7**, no. 37 3503–3507 (1992).
- [65] M. Sato, Y. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold”, *Nonlinear partial differential equations in applied science* (Tokyo, 1982), 259–271, *North-Holland Math. Stud.*, **81**, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [66] M. Staudacher, “Combinatorial Solution of the Two–Matrix Model”, *Phys. Lett. B* **305** 332–338 (1993).
- [67] G. Szegő, ”Orthogonal Polynomials”, American Mathematical Society, Providence, 1967.
- [68] K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group representations and systems of differential equations*, 1–95, *Adv. Stud. Pure Math.*, **4**, (Tokyo, 1982) North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [69] G. ’t Hooft, *Nuc.Phys.* **B72**, 461 (1974).
- [70] C.A. Tracy and H. Widom, “Fredholm determinants, differential equations and matrix models”, *Commun. Math. Phys.* **161**, 289-309 (1994).
- [71] W.T. Tutte, ”A census of planar triangulations”, *Can. J. Math.* **14** (1962) 21-38.
- [72] W.T. Tutte, ”A census of planar maps”, *Can. J. Math.* **15** (1963) 249-271.
- [73] P. Van Moerbeke, *Random Matrices and their applications*, MSRI-publications **40**, 4986 (2000).

- [74] P. Wiegmann, A. Zabrodin, “Large N expansion for normal and complex matrix ensembles”, hep-th/0309253.
- [75] E.P. Wigner, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **47**, 790 (1951).
- [76] A.Hassell, S.Zelditch, Determinants of Laplacians in exterior domains. IMRN **1999** no. 18, 971-1004 (1999)
- [77] private conversation with J. Zinn-Justin in 1992.
- [78] P. Zinn-Justin, J.-B. Zuber, ”On some integrals over the $U(N)$ unitary group and their large N limit”, *J.Phys.* **A36** (2003) 3173-3194, math-ph/0209019.