

Nombre de rotation dans les groupes de Thompson généralisés, automorphismes.

Isabelle LIOUSSE.

Abstract. We study the properties of rotation numbers for groups of piecewise linear homeomorphisms of the circle. We use these properties to prove non exoticity results for automorphisms of some generalized Thompson groups.

Keywords : PL homeomorphisms of the circle, rotation number, Thompson groups, automorphisms.

Mathematical subject classification : 37E10, 37C15, 20E

Résumé. Les groupes d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle ont fourni depuis R. Thompson de nombreux exemples de groupes simples infinis et de présentation finie. Les généralisations, de ce point de vue, les plus poussées sont dues à M. Stein. Dans [St 1992]), elle définit $T_{r,\Lambda,A}$ comme le groupe des homéomorphismes affines par morceaux du cercle $S_r = \frac{\mathbb{R}}{r\mathbb{Z}} = \frac{[0,r]}{0=r}$ dont les pentes appartiennent à un sous-groupe multiplicatif Λ de \mathbb{R}^{+*} , les points de coupure à un \mathbb{Z} -module Λ -invariant A contenant r et qui préservent A . Lorsque Λ est engendré par un entier m et A est l'ensemble $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$, le groupe $T_{r,\Lambda,A}$ est noté $T_{r,m}$. Dans [Gh2000], est posée la question de la détermination des nombres de rotation dans les groupes définis par Stein. Ici, nous montrons que pour tout couple d'entiers non nuls r et m , le nombre de rotation de tout élément de $T_{r,m}$ et plus généralement de $T_{r,<m>,\mathbb{Q}}$ est rationnel et que tout rationnel est réalisé comme nombre de rotation d'un élément d'ordre fini de $T_{m-1,m}$ (théorème 1). Lorsque $\Lambda = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$ le sous-groupe multiplicatif engendré par p entiers positifs n_i et $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 \dots n_p}]$, on note $T_{r,\Lambda,A} = T_{r,(n_i)}$. Pour tout couple (n_1, n_2) d'entiers indépendants (au sens où leurs logarithmes sont rationnellement indépendants), nous exhibons des entiers r pour lesquels le groupe $T_{r,(n_1, n_2)}$ contient des éléments dont le nombre de rotation est irrationnel (théorème 0).

Les homéomorphismes affines par morceaux qui nous ont permis d'obtenir les deux résultats précédents ont une propriété particulière "la propriété D" (définie au paragraphe 2). Nous montrons (théorème 2) qu'un homéomorphisme avec la propriété D est conjugué par un homéomorphisme affine par morceaux explicite à un modèle très simple dit "Boshernitzan" et en déduisons un moyen pour calculer leurs nombres de rotation. Le lecteur pourra trouver ces calculs explicites dans l'annexe.

L'existence d'éléments ayant D et un nombre de rotation irrationnel, le théorème 2 et un lemme de Minakawa ([Mi1997]) induisent des résultats sur les automorphismes de certains groupes de Thompson généralisés. Nous montrons que les groupes $T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$ d'homéomorphismes rationnels n'a pas d'automorphisme extérieur autre que l'involution standard sur S_r et que les groupes de Thompson généralisés du type $T_{d,(n_i)}$ avec $(n_i) \in \mathbb{N}^p$ ($p \geq 3$) indépendants et $d = \text{pgcd}(n_i - 1)$ n'ont pas d'automorphisme exotique; de plus, si les n_i sont premiers ces groupes n'ont pas d'automorphisme extérieur autre que l'involution standard sur S_r (théorème 3).

Table des matières

1	Introduction historique.	2
2	Préliminaires. Groupes de Thompson généralisés. Isomorphismes de Bieri-Strebel. Le théorème de McCleary-Rubin. Nombre de rotation. Propriété D.	3
3	Énoncés des résultats.	8
4	Exemples de Boshernitzan. Preuve des propositions 1 et 2.	13
4.1	Définitions.	13
4.2	Propriétés.	14
4.3	Les Boshernitzan sur S_r .	14
4.4	Boshernitzan rationnels- Preuve des propositions 1 et 2.	15

5	Nombre de rotation dans les groupes de Thompson généralisés. Preuves des théorèmes 0 et 1 et du corollaire 1.	17
5.1	Nombres de rotation irrationnels. Preuves du théorème 0 et du corollaire 1.	17
5.2	Nombres de rotation rationnels. Preuve du théorème 1.	18
6	Nombre de rotation des homéomorphismes affines par morceaux vérifiant la propriété D.	21
6.1	Preuve du théorème 2.	21
6.2	Preuve des corollaires 2 et 2'. Formule pour le nombre de rotation.	23
6.3	Preuve des corollaires 3, 3' et 4.	25
6.4	(ii) \Leftrightarrow (iii) du corollaire 3', lorsque le nombre de rotation est rationnel.	27
7	Automorphismes des groupes de Thompson généralisés.	28
8	Annexe. Exemples d'homéomorphismes avec la propriété D, calcul de nombre de rotation.	35
8.1	Famille 1.	35
8.2	Famille 2.	36
8.3	Famille 3.	39
8.4	Famille 4.	41
8.5	Boshernitzan commutants	44
9	Références.	45

1 Introduction historique.

Les groupes d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle sont connus pour avoir fourni d'intéressants exemples de groupes dénombrables. En 1965, R. Thompson exhiba le groupe T –qui porte son nom– des homéomorphismes dyadiques du cercle comme premier exemple de groupe infini simple et de type fini. Depuis de nombreux travaux sur le groupe de Thompson T et son sous-groupe F constitué des éléments fixant 0 ont été effectués.

Ghys et Sergiescu ont étudié la dynamique des actions de T sur le cercle. L'action standard contenant toutes les rotations d'angle dyadique a toutes ses orbites denses. Cependant, Ghys et Sergiescu ont montré qu'il existe une action lisse de T semi-conjugée à l'action standard et qui possède un minimal exceptionnel sur S^1 . En résulte, par le théorème de Denjoy et l'invariance par semi-conjugaison du nombre de rotation, que le nombre de rotation de tout homéomorphisme dyadique du cercle est rationnel. Dans [Gh2000], É. Ghys note que la preuve de ce dernier fait, nécessitant un lissage de T , est bien indirecte et exprime son souhait d'une preuve plus directe. Il demande si le nombre de rotation d'un homéomorphisme affine par morceaux dont les données (pentes, points de coupures et leurs images) sont rationnelles est rationnel. Boshernitzan ([Bo1993]) construit un homéomorphisme affine par morceaux du cercle avec deux pentes rationnelles, deux points de coupure rationnels et dont le nombre de rotation est irrationnel; dans le paragraphe 4, nous rappelons l'essentiel de [Bo1993].

Higman ([Hi1974]), Brown ([Bro1987]) puis Stein ([St 1992]) ont défini d'autres groupes d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle avec des propriétés algébriques (groupes de présentation finie, infinis et simples) et homologues analogues à celles de T . Nous indiquons ici les définitions les plus générales : celles de [St 1992].

Notre objectif est d'obtenir des propriétés sur ces groupes à travers l'étude des nombres de rotation de leurs éléments.

2 Préliminaires. Groupes de Thompson généralisés. Isomorphismes de Bieri-Strebel. Le théorème de McCleary-Rubin. Nombre de rotation. Propriété D.

Soit r un entier strictement positif, on note $S_r = \frac{\mathbb{R}}{r\mathbb{Z}} = \frac{[0,r]}{0=r}$ le cercle de longueur r .

On appelle **homéomorphisme affine par morceaux** de S_r un homéomorphisme f de S_r dont les relevés à \mathbb{R} sont des applications croissantes et affines par morceaux.

On note $Df : S_r \rightarrow \mathbb{R}$ sa dérivée, c'est une fonction constante par morceaux dont :

- les discontinuités sont appelées **point de coupure** de f ,
- les valeurs **pentés** de f .

Le rapport $\sigma_f(c) := \frac{Df_+(c)}{Df_-(c)}$ est appelé **saut** de f au point c .

On note $\mathbf{PL}^+(S_r)$ le groupe des homéomorphismes affines par morceaux de S_r .

Groupes de Thompson généralisés.

Définition. Soient r un entier strictement positif, Λ un sous-groupe multiplicatif de \mathbb{R}^{+*} et A un \mathbb{Z} -module de \mathbb{R} invariant par Λ et contenant r . On appelle groupe de Thompson-Higman-Brown-Stein ou groupe de **Thompson généralisé**, le sous-groupe de $PL^+(S_r)$ noté $\mathbf{T}_{r,\Lambda,A}$ formé des homéomorphismes f tels que :

- Df prend ses valeurs dans l'ensemble Λ ,
- les discontinuités de Df appartiennent à A et
- f préserve A (sous les deux conditions précédentes, celle-ci revient à $f(0) \in A$).

Remarque. Une rotation est dans $\mathbf{T}_{r,\Lambda,A}$ si et seulement si son angle (défini -modulo r - comme α tel que $x \mapsto x + \alpha$ est un relevé à \mathbb{R} de la rotation) est dans A .

Exemples.

- Les groupes d'homéomorphismes **rationnels** $\mathbf{T}_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$, avec $r \in \mathbb{N}^*$.

- Soient r et m deux entiers strictement positifs, on note $\mathbf{T}_{r,m}$ le groupe $\mathbf{T}_{r,\Lambda,A}$ lorsque $\Lambda = \langle m \rangle$ (où $\langle P \rangle$ désigne le sous-groupe multiplicatif de \mathbb{R}^{+*} engendré par une partie $P \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\langle m \rangle = \{m^p, p \in \mathbb{Z}\}$) et $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ est l'ensemble des nombres m -adiques, c'est à dire de la forme $\frac{N}{m^p}$ avec N et p entiers. En particulier, les homéomorphismes **dyadiques** forment le groupe de Thompson usuel $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{1,2}$.

Les groupes $\mathbf{T}_{r,(n_i)}$.

- Soient (n_1, \dots, n_p) un p -uplet d'entiers distincts strictement positifs, on note

$$\mathbf{T}_{r,(n_i)} := T_{r, \langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_p}]}$$

le sous-groupe de $PL^+(S_r)$ formé des homéomorphismes dont les pentés sont produits des n_i , n_i^{-1} et les points de coupure et l'image de 0 sont de la forme $\frac{N}{(n_1 \dots n_p)^s}$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{Z}$.

D'après Brown (voir [St1992] proposition 1.1), on peut toujours supposer (quitte à les changer) que n_1, n_2, \dots, n_p forment une base de $\langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$ comme groupe abélien libre, autrement dit que leurs logarithmes sont rationnellement indépendants.

On définit ainsi la notion d'indépendance : p entiers (rationnels) strictement positifs n_1, n_2, \dots, n_p sont dits **indépendants** si leurs logarithmes sont rationnellement indépendants. Dans la suite de cet article, on supposera toujours (sans perte de généralité) que les n_i sont indépendants. Il est facile de voir que n_1 et n_2 sont indépendants si et seulement si ils ne sont pas puissances d'un même entier.

Remarque.— Si $\langle m_1, \dots, m_s \rangle \subset \langle n_1, \dots, n_p \rangle$ on a $\mathbf{T}_{\mathbf{r},(m_j)} \subset \mathbf{T}_{\mathbf{r},(n_i)}$.

Isomorphismes de Bieri-Strebel entre groupes de Thompson généralisés.

Soient A et Λ comme dans la définition ci-dessus.

Fait.— *S'il existe $H : [0, r] \mapsto [0, r']$ un homéomorphisme affine par morceaux dont les pentes sont dans Λ et les points de coupure dans A , alors les groupes $\mathbf{T}_{r,\Lambda,A}$ et $\mathbf{T}_{r',\Lambda,A}$ sont isomorphes.*—

En effet, le conjugué $H \circ f \circ H^{-1}$ de $f \in \mathbf{T}_{r,\Lambda,A}$ est dans $\mathbf{T}_{r',\Lambda,A}$ et de même en changeant r par r' et H par H^{-1} .

Par exemple, $\mathbf{T}_{r,\Lambda,A}$ est isomorphe à $\mathbf{T}_{1,\Lambda,rA}$ (en écrivant ce qui précède avec $H = \mathcal{H}_r$ l'homothétie de rapport r). En particulier, les groupes $\mathbf{T}_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$, $r \in \mathbb{N}^*$ sont isomorphes. Tous les $\mathbf{T}_{r,\Lambda,\mathbb{Q}}$, $r \in \mathbb{N}^*$ sont isomorphes.

Proposition. ([BS1985], voir [St1992] appendice A_1 pour la preuve). *Soient a, a', c et c' dans A , il existe un homéomorphisme affine par morceaux $H : [a, c] \rightarrow [a', c']$ avec pentes dans Λ et points de coupure dans A si et seulement si $(c-a) - (c'-a') \in (I-\Lambda).A$, où $(I-\Lambda).A$ est le sous-module de A engendré par les éléments $(1-\lambda)a$, avec $\lambda \in \Lambda$ et $a \in A$.*

Proposition 0. *Pour $T_{r,(n_i)}$, avec n_i entiers indépendants et $d = \text{pgcd}(n_i - 1)$, on a $(I-\Lambda).A = \Lambda(d\mathbb{Z})$. De plus, un entier est dans $(I-\Lambda).A$ si et seulement s'il est un multiple de d .*

En effet, soit $x \in (I-\Lambda).A$ alors il existe $\lambda_i \in \Lambda$ et $a_i \in A$ tels que

$$x = \sum_i (1 - \lambda_i) a_i.$$

Réduisons les rationnels $(1 - \lambda_i) a_i$ au même dénominateur $\lambda \in \Lambda$, on obtient

$$(1 - \lambda_i) a_i = \frac{N_i}{\lambda} (n_1^{s_1} \dots n_p^{s_p} - n_1^{r_1} \dots n_p^{r_p}),$$

avec $N_i \in \mathbb{Z}$ et s_j, r_j dans \mathbb{N} .

Maintenant, écrivons $n_i = k_i d + 1$, avec $k_i \in \mathbb{N}$, on a

$$n_1^{s_1} \dots n_p^{s_p} - n_1^{r_1} \dots n_p^{r_p} = (k_1 d + 1)^{s_1} \dots (k_p d + 1)^{s_p} - (k_1 d + 1)^{r_1} \dots (k_p d + 1)^{r_p} = d M_i.$$

Finalement,

$$x = \frac{1}{\lambda} \sum_i N_i d M_i = \frac{1}{\lambda} d N \in \Lambda(d\mathbb{Z}).$$

Réciproquement, par Bezout, il existe des entiers α_i tels que $d = \sum \alpha_i (n_i - 1) = \sum (1 - n_i)(-\alpha_i) \in (I-\Lambda).A$

De plus, si un entier $M \in (I-\Lambda).A = \Lambda(d\mathbb{Z})$ alors $M = \lambda d N = \frac{d N'}{n_1^{s_1} \dots n_p^{s_p}}$ avec $N' \in \mathbb{Z}$ non divisible par les n_i et $s_i \in \mathbb{N}$. Or d est premier avec chacun des n_i (par Bezout

car $n_i - k_i d = 1$), l'écriture ci-dessus est donc réduite; elle représente un entier si et seulement si chaque s_i est nul.

Le fait et les deux propositions ci-dessus impliquent le

Théorème d'isomorphismes de Bieri-Strebel.

• Soit $m > 1$ un entier, si r et r' sont deux entiers positifs congrus modulo $m - 1$ alors $T_{r,m}$ et $T_{r',m}$ sont isomorphes. Ainsi, tout $T_{r',m}$ est isomorphe à l'un des $m - 1$ groupes $T_{r,m}$, $r \in 1, \dots, m - 1$.

• Soient n_1, \dots, n_p des entiers positifs en nombre p et $d = \text{pgcd}(n_1 - 1, \dots, n_d - 1)$, si r et r' sont deux entiers positifs congrus modulo d alors les groupes de Thompson généralisés $T_{r,(n_i)}$ et $T_{r',(n_i)}$ sont isomorphes. Tout groupe $T_{r,(n_i)}$ est isomorphe à l'un des d groupes $T_{r,(n_i)}$, $1 \leq r \leq d$.

• En particulier, pour tout entier positif r :

- Le groupe de Thompson généralisé $T_{r,(2,n_i)}$ est isomorphe à $T_{1,(2,n_i)}$.

- Le groupe de Thompson généralisé $T_{r,(3,n_i)}$ est isomorphe à l'un des deux groupes $T_{1,(3,n_i)}$ ou $T_{1,(2,n_i)}$.

Question (M. Brin) : Peut-il y avoir des isomorphismes entre groupes de Thompson généralisés autres que ceux de Bieri-Strebel ?

Automorphismes d'un groupe de Thompson généralisé.

Les groupes $T_{r,\Lambda,A}$ ont tous un automorphisme extérieur évident : la conjugaison par

l'involution standard sur S_r , définie par $i_r : \begin{cases} \begin{bmatrix} 0,r \\ 0=r \end{bmatrix} & \rightarrow \begin{bmatrix} 0,r \\ 0=r \end{bmatrix} \\ x & \mapsto r - x \end{cases}$.

Bieri et Strebel ont étudié les automorphismes réalisés comme conjugaison par des homéomorphismes affines par morceaux de certains sous-groupes de $PL^+(S_r)$ et ont introduit la notion d'automorphisme exotique pour désigner les éventuels autres automorphismes. Ensuite, Brin a montré que le groupe de Thompson $T_{1,2}$ n'a pas d'automorphisme extérieur autre que l'involution standard ([Bri1996]) et Brin et Guzman ont trouvé des automorphismes exotiques au groupe de Thompson généralisé $T_{m-1,m}$ ([BG1998]). Le théorème suivant donne des conditions permettant de réduire l'étude du groupe des automorphismes d'un groupe Γ d'homéomorphismes du cercle à celle de son normalisateur dans $\text{Homéo}(S^1)$ (quitte à composer par l'involution standard i_r , on peut se restreindre aux homéomorphismes qui préservent l'orientation).

Théorème de Mc Cleary-Rubin ([McCR1996], [R1996]).

Soit G un sous-groupe de $\text{Homéo}^+(S_r)$ tel que :

- G contient un élément non trivial dont l'ensemble des points fixes est d'intérieur non vide,

- G agit o - 3 -transitivement sur Δ un sous-ensemble dense de S_r (i.e. pour tout $x_1 < x_2 < x_3$ et $y_1 < y_2 < y_3$ de Δ il existe $g \in G$ tel que $g(x_i) = y_i$).

Alors, pour tout automorphisme α de G , il existe un unique homéomorphisme h de S_r tel que $\alpha(f) = h^{-1} \circ f \circ h$.

Remarque. Pour les groupes $T_{r,\Lambda,A}$, avec $\Lambda \neq \{1\}$, la première hypothèse est toujours vérifiée.

Le nombre de rotation d'un homéomorphisme de S_r .

L'application **nombre de rotation** $\rho : Homeo^+(S_r) \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ est définie par $\rho(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}^n(x) - x}{rn} \pmod{1}$, où \tilde{f} est un relevé de f à \mathbb{R} .

Avec cette définition et celle de "l'angle" d'une rotation, **le nombre de rotation de R_α la rotation de S_r d'angle α est $\frac{\alpha}{r}$** . Le nombre de rotation, ainsi défini, est invariant par conjugaison par homéomorphisme (de $S_{r'} \rightarrow S_r$).

Ici, nous montrons des propriétés de l'application "nombre de rotation" sur certains groupes de Thompson généralisés, à l'aide de constructions explicites, basées sur les exemples donnés par Boshernitzan ([Bo1993]) pour montrer le

Théorème (Boshernitzan). *Le groupe $T_{\mathbb{Q}}$ contient des éléments dont le nombre de rotation est irrationnel.*

Mais, beaucoup de groupes de Thompson généralisés dont $T_{1,m}$ ne contiennent pas d'exemple Boshernitzan (preuve en fin de paragraphe 4 pour $T_{1,m}$) et on ne peut pas espérer utiliser (directement) les calculs de Boshernitzan pour généraliser –par exemple– la preuve du résultat de Ghys et Sergiescu : "tout rationnel est réalisé comme nombre de rotation d'un homéomorphisme dyadique". Ce fait est prouvé, dans [GhSe1987], en produisant des homéomorphismes dyadiques d'ordre fini arbitraire (exemples attribués à un auteur inconnu), ces exemples ont leurs points de coupure sur une même orbite ; ils appartiennent à la famille des homéomorphismes affines par morceaux ayant la propriété D : "les points de coupure situés sur une même orbite ont des sauts qui se compensent". Dans une seconde partie de cet article, nous donnons de nombreuses caractérisations des homéomorphismes affines par morceaux ayant la propriété D et mettons en place une méthode pour calculer explicitement leurs nombres de rotation.

La propriété D et $\pi(f)$.

Définition.– On dit qu'un homéomorphisme affine f par morceaux a la **propriété D** si l'ensemble $\mathcal{D}f$ des points de coupure de f se partitionne de la manière suivante : $\mathcal{D}f = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$ avec $\mathcal{C}_i \subset \{f^{-l_i}(a_i), \dots, a_i\}$ et $\prod_{d \in \mathcal{C}_i} \sigma_f(d) = 1$.

Définition.– A un homéomorphisme affine f par morceaux avec la propriété D, on associe l'invariant

$$\pi(f) = \prod_{i \in I, 0 \leq k < l_i} \sigma_{f^{N+1}}(f^{-k}(a_i)),$$

où $N = \max l_i$ de la définition ci-dessus.

Propriétés-Remarques.–

- Quitte à réunir certains \mathcal{C}_i , on peut supposer qu'ils sont supportés par des f -orbites deux à deux distinctes.

- L'homéomorphisme f a la propriété D si et seulement si le produit des sauts de f sur la f -orbite de chaque point de coupure de f vaut 1.

Exemples.–

Les homéomorphismes affines par morceaux du cercle dont “ les points de coupure sont tous situés sur une même orbite” ont la propriété D , puisque le produit de tous les sauts d’un homéomorphisme affine par morceaux est toujours trivial. En particulier, les exemples de Boshernitzan et ceux utilisés par Ghys et Sergiescu ont leurs points de coupure sur une même orbite. Le lecteur trouvera des exemples explicites dans l’annexe au paragraphe 8.

Les homéomorphismes d’ordre fini ont la propriété D (voir la section 6.3).

Les homéomorphismes avec la propriété D et de nombres de rotation irrationnels sont exactement les homéomorphismes “good” introduits par Minakawa dans [Mi 1997] (bien que sa définition soit un peu différente de la notre) afin de poursuivre l’étude du phénomène “exotique” de $PL^+(S^1)$ (au sens où il ne se produit pas pour $\text{Diff}^+(S^1)$) qu’il mit à jour en 1995 ([Mi1995]) : le groupe $PL^+(S^1)$ contient des sous-groupes topologiquement conjugués mais non conjugués dans $PL^+(S^1)$ au cercle standard de $\text{Homeo}^+(S^1)$.

Cercles exotiques, résultats de Minakawa, h_π , Boshernitzan B_ρ^π .

On appelle **cercle standard** de $\text{Homéo}^+(S^1)$, son groupe noté $SO(2)$ formé des rotations. Un sous-groupe $S \subset \text{Homéo}^+(S^1)$ est appelé **cercle topologique** s’il existe $h \in \text{Homéo}^+(S^1)$ tel que $S = h \circ SO(2) \circ h^{-1}$ (par unique ergodicité des rotations irrationnelles, un tel h -normalisé par $h(0) = 0$ - est unique) .

Soit G un sous-groupe de $\text{Homéo}^+(S^1)$, un cercle topologique $S \subset G$ est appelé **cercle exotique de G** si $h \notin G$.

Minakawa ([Mi1995]) a montré que $PL^+(S^1)$ contient des cercles exotiques et a obtenu la classification suivante :

Théorème (Minikawa [Mi1997]).– Soit $\pi \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, on note h_π l’homéomorphisme de $S^1 = \frac{[0,1]}{0=1}$ défini par $h_\pi(x) = \frac{\pi^x - 1}{\pi - 1}$, pour $x \in [0, 1]$.

Les cercles $h_\pi \circ SO(2) \circ h_\pi^{-1}$ sont des cercles exotiques de $PL^+(S^1)$ et tout cercle exotique de $PL^+(S^1)$ est le conjugué affine par morceaux de l’un de ces cercles.

Notation-Définition. On convient que pour $\pi = 1$, $h_\pi(x) = x$. On note B_π^ρ l’unique élément de $h_\pi \circ SO(2) \circ h_\pi^{-1}$ de nombre de rotation ρ . Le choix de la lettre B provient du fait que ces homéomorphismes sont de Boshernitzan (voir le paragraphe 4) et l’on peut considérer cette notation comme une définition des **Boshernitzan de S^1 de point de coupure final 0** (ou Boshernitzan standard). Les **Boshernitzan généraux** sont les conjugués par des rotations (pour déplacer le point de coupure final) et par des homothéties entières \mathcal{H}_r (pour les définir sur le cercle S_r) des B_π^ρ . Nous reviendrons sur ces définitions dans le paragraphe 4.

Pour démontrer son théorème de classification, Minakawa utilise le lemme suivant dont nous donnons dans le paragraphe 7, car ce lemme est un point clé pour nos résultats sur les automorphismes des groupes de Thompson généralisés.

Lemme de Minikawa ([Mi1997]).– Si f et g sont deux homéomorphismes affines par morceaux commutant et dont les nombres de rotations sont des irrationnels rationnellement indépendants alors f et g ont D et même invariant $\pi(f) = \pi(g)$.

3 Énoncés des résultats.

Théorème 1.–

A. *Pour tout entier strictement positif m , le nombre de rotation d'un homéomorphisme de $T_{r, \langle m \rangle, \mathbb{Q}}$ est rationnel.*

B. *Soit $m > 1$ un entier. Tout rationnel est le nombre de rotation d'un élément d'ordre fini de $T_{m-1, m}$.*

C. *Si m est impair, le groupe $T_{1, m}$ ne contient pas d'élément d'ordre pair.*

Conséquences.– *Soit $m > 2$ un entier impair, les groupes $T_{1, m}$ et $T_{m-1, m}$ ne sont pas isomorphes. Il y a exactement deux classes d'isomorphismes de groupes $T_{r, 3}$: celles de $T_{1, 3}$ et $T_{2, 3}$.*

Dans [Li2003], nous avons donné une preuve du fait que le nombre de rotation d'un homéomorphisme dyadique est rationnel. Le théorème 1.A en est une généralisation : “si les pentes d'un homéomorphisme sont puissances d'un même entier $m > 1$ et ses points de coupure sont rationnels alors son nombre de rotation est rationnel”, la preuve est quasiment la même que celle de [Li2003]. Dans le paragraphe 4, nous rappelons la famille d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle construite par [Bo1993] et le calcul explicite du nombre de rotation de ses éléments. L'intérêt de Boshernitzan étant la rationalité des données, il n'a travaillé que sur le cercle standard $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$. Bien sur ses exemples s'étendent aux cercles $S_r := \frac{\mathbb{R}}{r\mathbb{Z}}$ et nous en déduisons les deux propositions suivantes, elles indiquent les limites aux possibles généralisations du théorème 1.A.

Proposition 1. (Boshernitzan)– *Soit r un entier positif, pour tout couple (n_1, n_2) de nombres indépendants, le groupe de Thompson généralisé $T_{r, \langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Q}}$ contient des éléments dont le nombre de rotation est irrationnel.*

Proposition 2.– *Soient n_1, n_2 deux entiers distincts et indépendants. S'il existe $t, s \in \mathbb{N}$ tels que (1) $n_1^t = n_2^s + 1$ ou (2) $n_1^t = n_2^s + 2$ avec n_1 et n_2 impairs ou si (3) $n_2 - 1$ divise $n_1 - 1$ alors le groupe de Thompson $T_{1, \langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]}$ contient des éléments dont le nombre de rotation est irrationnel.*

Conséquence.– *Le groupe de Thompson $T_{1, (2, m)}$ contient des éléments dont le nombre de rotation est irrationnel (car $2 = m^0 + 1$).*

On montre, en utilisant les isomorphismes de Bieri-Strebel, les résultats plus généraux suivants.

Théorème 0.– *Soient n_1 et n_2 deux entiers indépendants et $d = \text{pgcd}(n_1 - 1, n_2 - 1)$. Si $r \in \{\text{pgcd}(\frac{n_1 - 1}{d}, d), \text{pgcd}(\frac{n_2 - 1}{d}, d)\}$ alors le groupe de Thompson $T_{r, (n_1, n_2)}$ contient des éléments avec la propriété D dont le nombre de rotation est irrationnel.*

Corollaire 1.– *Soient r un entier et n_1, n_2 deux entiers distincts indépendants. Si $d = \text{pgcd}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ est premier ou égal à 1 alors le groupe de Thompson $T_{r, (n_1, n_2)}$ contient des éléments avec la propriété D dont le nombre de rotation est irrationnel. De plus, si $d = 1$ ce groupe est isomorphe à $T_{1, (n_1, n_2)}$.*

Conséquences.– *Le groupe de Thompson $T_{r, (p+1, m)}$ avec p premier et m et $p + 1$ indépendants est isomorphe à $T_{1, (p+1, m)}$ et contient des éléments avec la propriété D dont le nombre de rotation est irrationnel.*

On voit que nos résultats sur l'application “nombre de rotation” dans certains groupes de Thompson généralisés proviennent des homéomorphismes avec la propriété D . Dans

des travaux précédents ([Li2004] et [Li 2005]) consistant à caractériser les homéomorphismes affines par morceaux du cercle de nombres de rotation irrationnels dont la mesure invariante est équivalente à la mesure de Haar, l'auteure (dans [Li2004]) a introduit la propriété D pour caractériser les homéomorphismes affines par morceaux f de nombre de rotation irrationnel pour lesquels le nombre de points de coupure des itérés de f est borné par une constante indépendante de l'ordre d'itération et montré le

Théorème ([Li2004]). *Soit f un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation α irrationnel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i). f est conjugué à la rotation d'angle α par un homéomorphisme C^1 par morceaux,
- (ii). le nombre de discontinuités de Df^n est borné,
- (iii). f est conjugué à un Boshernitzan de nombre de rotation α par un homéomorphisme affine par morceaux,
- (iv). f est conjugué à la rotation d'angle α par un homéomorphisme de classe P analytique par morceaux.

Nous n'avons pas considéré le cas où le nombre de rotation est rationnel. D'autre part la conjugaison H du (iii) n'était pas clairement explicitée et son existence utilisait l'irrationnalité du nombre de rotation. Ici, en améliorant certains calculs de [Li 2004], nous pouvons englober le cas où le nombre de rotation est rationnel et donner l'expression explicite de la conjugaison H . Ainsi, nous obtenons le théorème 2 qui est central dans notre étude.

Théorème 2.– *Soient r un entier strictement positif, Λ un sous-groupe multiplicatif de \mathbb{R}^{+*} et A un \mathbb{Z} -module de \mathbb{R} invariant par Λ contenant r et $f \in \mathbf{T}_{r,\Lambda,A}$ ayant la propriété D.*

A)– *Si $\pi(f) = 1$, alors f est conjugué par $H \in PL^+(S_r)$ à une rotation de S_r dont le nombre de rotation s'écrit $\rho(f) = \frac{b}{a}$, avec $a, b \in A$, on écrit $-H \circ f \circ H^{-1} = R_{\rho(f)}$.*

B)– *Si $\pi(f) \neq 1$ alors f est conjugué par $H \in PL^+(S_r)$ à un Boshernitzan B de S_r de point final $H(c)$ avec $c \in A \setminus \{0\}$ dont les pentes appartiennent à Λ , dont le nombre de rotation s'écrit $\rho(B) = \rho(f) = \frac{\alpha}{\beta}$, avec $\alpha, \beta \in \log \Lambda$ et d'invariant $\pi(B) = \pi(f)$; on écrit $-H \circ f \circ H^{-1} = B$.*

De plus dans ces deux cas, $H(0) = 0$, les points de coupure de H appartiennent à A , ses sauts à Λ , ses pentes λ_i^H vérifient $\frac{r}{\lambda_i^H} \in A$.

Conséquences : Conservation de la rationalité – *Lorsque f a la propriété D et est rationnel (i.e. $f \in T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$), la conjugaison H et le modèle (rotation ou Boshernitzan) sont aussi rationnels. **Tout élément avec $\pi(f) = 1$ rationnel a un nombre de rotation rationnel.***

Corollaire 2 (Interprétation, invariance de $\pi(f)$ -mesure invariante).– *Soit $f \in PL^+(S_r)$ ayant la propriété D. Alors :*

– *f est conjugué par un homéomorphisme affine par morceaux au Boshernitzan $B_{\rho(f)}^{\pi(f)}$ de S^1 , plus précisément $f = H^{-1} \circ R_{H(c)} \circ \mathcal{H}_r \circ B_{\rho(f)}^{\pi(f)} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c)}^{-1} \circ H$ où $\mathcal{H}_r : S^1 \rightarrow S_r$ est l'homothétie de rapport r , H et c sont donnés par le théorème 2, avec la convention que si $\pi(f) = 1$ alors $c = 0$.*

– *Interprétation, invariance de $\pi(f)$* – *Lorsque f a un nombre de rotation irrationnel, $\pi(f)$ correspond au π de l'unique Boshernitzan standard B_ρ^π auquel f est conjugué affinement par morceaux. Ainsi, **le couple $(\rho(f), \pi(f))$ est un invariant complet de***

conjugaison affine par morceaux pour les homéomorphismes de nombre de rotation irrationnel ayant D.

– f appartient au cercle topologique $h \circ SO(2) \circ h^{-1} \subset PL^+(S^1)$ où $h = H^{-1} \circ R_{H(c)} \circ \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(f)}$ et ce cercle est unique lorsque le nombre de rotation de f est irrationnel et est le centralisateur de f dans $PL^+(S^1)$.

– *Mesure invariante*– La mesure explicite $\mu = mh$ –définie par $mh(B) = m(h(B))$ – équivalente à la mesure de Haar et de densité C^ω par morceaux est f -invariante et vérifie la formule $\int \log Df d\mu = 0$.

Lorsque les points de coupure de f sont sur une même orbite, cette formule permet (sauf si elle s'écrit $0 = 0$) de calculer –explicitement et sans connaître μ – le nombre de rotation de f (voir le paragraphe 6.2 et l'annexe) et intervient pour montrer le

Corollaire 2'– *Lorsque f est un homéomorphisme affine par morceaux dont les points de coupure sont situés sur la même orbite et que les logarithmes des pentes de f sont rationnellement indépendants (par exemple lorsque les pentes sont des entiers premiers entre eux) alors le nombre de rotation de f est irrationnel.*

On obtient ainsi de nombreux exemples d'homéomorphismes rationnels à nombre de rotation irrationnel (cf annexe). D'autre part, un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation rationnel a la propriété D si et seulement si il est d'ordre fini et ceci nous permet de produire des exemples explicites d'homéomorphismes affines par morceaux d'ordre fini grand (qui ne sont pas des rotations) très facilement (cf annexe). Plus précisément, nous montrons le théorème suivant

Corollaire 3– Homéomorphismes affines par morceaux d'ordre fini.– *Soit f un homéomorphisme affine par morceaux de S^1 de nombre de rotation rationnel ρ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)- f possède la propriété D ,
- (ii)- f est contenu dans un cercle topologique de $PL^+(S^1)$,
- (iii)- f est topologiquement conjugué à la rotation d'angle ρ ,
- (iv)- f est conjugué dans $PL^+(S^1)$ à la rotation d'angle ρ ,
- (v)- il existe un entier p tel que $f^p = Id$ (i.e. f est d'ordre fini).

Remarque.– Il est facile de montrer qu'un homéomorphisme affine par morceaux d'ordre fini p est conjugué –par un homéomorphisme affine par morceaux– à une rotation rationnelle : l'homéomorphisme $h(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x)$ est une conjugaison convenable.

Corollaire 3'– Homéomorphismes affine par morceaux qui sont C^1 par morceaux conjugués aux rotations irrationnelles.– *Soit f un homéomorphisme affine par morceaux de S^1 et de nombre de rotation $\rho \notin \mathbb{Q}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)- f est C^1 par morceaux conjugué à la rotation d'angle ρ ,
- (ii)- le nombre de points de coupure des itérés de f est borné par une constante indépendante de l'ordre d'itération,
- (iii)- f possède la propriété D ,
- (iv)- f est conjugué dans $PL^+(S^1)$ à un Boshernitzan ou une rotation,
- (v)- f est contenu dans un cercle topologique de $PL^+(S^1)$,
- (vi)- le centralisateur de f dans $PL^+(S^1)$ est un cercle,
- (vii)- le centralisateur de f dans $PL^+(S^1)$ contient un homéomorphisme dont le nombre de rotation est un irrationnel rationnellement indépendant avec $\rho(f)$.

Remarque.– La propriété (ii) –le nombre de points de coupure des itérés de f est borné par une constante indépendante de l'ordre d'itération– n'est pas équivalente à la propriété D dans le cas où le nombre de rotation est rationnel. Nous indiquons un contre-exemple dans le paragraphe 6.4.

Corollaire 4.– *Soit $f \in PL^+(S_r)$ possédant la propriété D et $n \in \mathbb{N}$ alors f possède un racine n -ième dans $PL^+(S_r)$.*

Remarque.– Si $f \in T_{\mathbb{Q}}$ ses racines n -ièmes ne sont en général pas dans $T_{\mathbb{Q}}$.

L'existence d'éléments ayant D dans un groupe a des conséquences sur ses automorphismes. A l'aide du théorème 2 et du lemme de Minakawa, nous montrons les résultats suivants.

Notons $Inv(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour la multiplication dans A , on obtient la :

Proposition 3.– *Soit $\Gamma = T_{r,\Lambda,A} \subset T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$ tel que*

(i). Γ agit o - 3 -transitivement sur un sous-ensemble dense de S_r ,

(ii). Γ contient deux Boshernitzan de même point de coupure final 0 commutants et dont les nombres de rotations sont des irrationnels rationnellement indépendants.

Alors Γ n'a pas d'automorphisme exotique et ses automorphismes sont réalisés comme conjugaisons par des homéomorphismes affines par morceaux rationnels dont les discontinuités sont dans A et les pentes dans $Inv(A)$ (autrement dit, quitte à les composer avec l'involution standard i_r , ils appartiennent au groupe $T_{r,Inv(A),A}$) et les sauts dans Λ .

Si, de plus Γ vérifie (iii). $Inv(A) = \Lambda$, alors Γ n'a pas d'automorphisme extérieur autre que l'involution standard i_r .

En vérifiant ces hypothèses pour certains $T_{r,\Lambda,A}$, on montre que

Théorème 3.–

A. Les groupes de Thompson $T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$ n'ont pas d'automorphisme extérieur autre que l'involution standard sur S_r .

B. Soient $p \geq 3$ un entier et $n_1, n_2, n_3 \dots n_p$ des entiers distincts supérieurs à 2, indépendants et $d = \text{pgcd}(n_i - 1)$. Le groupe de Thompson $T_{d,(n_i)}$ n'a pas d'automorphisme exotique.

B'. Soient $p \geq 3$ un entier et $n_1, n_2, n_3 \dots n_p$ des entiers premiers supérieurs à 2 et $d = \text{pgcd}(n_i - 1)$ alors le groupe de Thompson $T_{d,(n_i)}$ n'a pas d'automorphisme extérieur autre que l'involution standard sur S_r .

C. Les groupes de Thompson $T_{r,\Lambda,\mathbb{Q}}$ n'ont pas d'automorphisme exotique et leurs automorphismes sont réalisés comme conjugaisons par des homéomorphismes rationnels, dès que $\Lambda \subset \mathbb{Q}$ contient trois rationnels indépendants.

Remarques sur l'optimalité de ces résultats.

Le normalisateur de $\Gamma = T_{r,\Lambda,A}$ contient toujours $T_{r,Inv(A),A}$. En effet, soit $h \in T_{r,Inv(A),A}$ et soit $f \in \Gamma$.

Par hypothèses, h et h^{-1} préservent A et donc

- les points de coupure de $h \circ f \circ h^{-1}$ sont dans A .

- Les pentes de $h \circ f \circ h^{-1}$ s'écrivent, $D(h \circ f \circ h^{-1})(h(x)) = Dh(f(x))Df(x)Dh^{-1}(h(x)) = \frac{Dh(f(x))}{Dh(x)}Df(x)$, ils appartiennent à Λ car $\frac{Dh(f(x))}{Dh(x)}$ est un produit de sauts de h et $Df(x) \in \Lambda$.

En conclusion, $h \circ f \circ h^{-1} \in \Gamma$.

La preuve de la proposition 3, montre qu'il y a égalité entre le normalisateur de Γ et $\langle T_{r, Inv(A), A}, i_r \rangle$ dès que (ii) est vérifiée.

Par exemple, la proposition 3 s'applique aux groupes de la forme $T_{d, (n_i), A}$, où $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 \dots n_p m}]$ avec $m \notin \langle n_i \rangle$ de manière optimale. En effet, un tel groupe possède comme automorphisme extérieur les conjugaisons par les homéomorphismes $H \in T_{d, (n_i, m), A}$ dont les sauts sont dans Λ et pour lesquels m apparait dans l'une des pentes.

Ainsi, le groupe $T_{1, \langle 2, 3, 5 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{30 \times 7}]}$ admet pour automorphisme extérieur la conjugaison par l'homéomorphisme affine par morceaux h

- de points de coupure 0 et $\frac{1}{21}$,
 - de pentes $\lambda_1^h = 7$ et $\lambda_2^h = \frac{7}{10}$,
- et tel que $h(0) = 0$.

D'autre part, les groupes de la forme $T_{d, (n_i)}$ avec l'un des n_i non premier, par exemple $n_1 = \alpha\beta$ ont des automorphismes extérieurs. En effet, pour un tel groupe $Inv(A) \neq \Lambda$ car $\alpha \in Inv(A) \setminus \Lambda$ et les conjugaisons par les homéomorphismes $H \in T_{d, (n_i, \alpha), A}$ dont les sauts sont dans Λ et la première pente est α sont des automorphismes extérieurs.

4 Exemples de Boshernitzan. Preuve des propositions 1 et 2.

Ces exemples sont apparus indépendamment et pour des considérations différentes dans plusieurs articles : [He1979 chap. V], [CLR1995], [Mi1997], [LM2002]. Le plus ancien est celui de Herman, dans lequel il souligne l'explicitation exceptionnelle de l'application qui conjugue les homéomorphismes affines par deux morceaux du cercle de nombre de rotation irrationnel avec points de coupure a et $0 = f^n(a)$ à la rotation. Cette conjugaison est la composée d'une application affine par morceaux et d'une exponentielle.

Ici, nous expliquons le cas particulier étudié par Boshernitzan en 1993 qui, partant d'expressions explicites des conjugaisons, obtient tous les homéomorphismes affines par deux morceaux avec points de coupure a et $0 = f(a)$ et peut expliciter le calcul de leur nombre de rotation. La particularité de [Bo1993] est d'exhiber ces exemples comme homéomorphismes affines par morceaux dont les données sont rationnelles mais pas le nombre de rotation.

Notons que dans la situation plus générale examinée par Herman, le calcul du nombre de rotation, lorsqu'il est irrationnel, fût déjà réalisé grâce à la formule $\int \log Df d\mu = 0$, où μ est une mesure de probabilité invariante par f (voir le paragraphe 6.2).

4.1 Définitions.

On appelle **Boshernitzan** (standard) un homéomorphisme f du cercle standard $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ affine par morceaux avec exactement deux points de coupure a et $0 = f(a)$. Le point 0 est appelé **point de coupure final**.

On identifie f à la bijection $\tilde{f} \pmod{1}$ de $[0, 1[$, représentée sur la figure 1. Cette application a une discontinuité en a ($f_-(a) = 0$ et $f_+(a) = 1$) qui est aussi une discontinuité de Df .

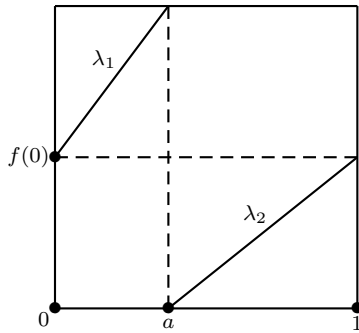


Figure 1

Etant donné le point de coupure final 0 , la donnée des deux pentes $Df_+(0) = Df_-(a) = \lambda_1$ et $Df_+(a) = Df_-(1) = \lambda_2$ suffit à caractériser f .— En effet, le point de coupure a est alors déterminé par $\lambda_1 a + \lambda_2(1 - a) = 1$ et l'image de 0 par $\lambda_1 a + f(0) = 1$. Aussi, pour que deux réels strictement positifs λ_1 et λ_2 soient les pentes d'un Boshernitzan, il suffit qu'ils ne soient pas tous les deux strictement supérieurs à 1 ou tous les deux strictement inférieurs à 1 . Ainsi, f sera noté $B_{(\lambda_1, \lambda_2)}^o$ (notation différente de celle des préliminaires).

4.2 Propriétés.

Soit $\pi \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, pour tout $\rho \in [0, 1[$, le difféomorphisme de $[0, 1[$ défini par $h_\pi(x) = \frac{\pi^x - 1}{\pi - 1}$ conjugue la bijection $R_\rho : x \mapsto x + \rho \pmod{1}$ au Boshernitzan $f = B_{(\lambda_1, \lambda_2)}^o$, où (λ_1, λ_2) et (π, ρ) sont biunivoquement liés par les relations $\pi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ et $\pi^\rho = \lambda_1$. Il suffit de calculer $h_\pi \circ R_\rho \circ h_\pi^{-1}$ et on conclut que l'homéomorphisme affine par morceaux

$$\boxed{B_{(\lambda_1, \lambda_2)}^o = h_\pi \circ R_\rho \circ h_\pi^{-1} = B_\rho^\pi} \text{ et}$$

- ▷ a pour point de coupure $a = \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1-\lambda_2}{\lambda_2(\pi-1)}$,
- ▷ a pour nombre de rotation $\rho(B_{(\lambda_1, \lambda_2)}^o) = \frac{\log \lambda_1}{\log \lambda_1 - \log \lambda_2} \pmod{1} = \frac{\log \lambda_1}{\log \pi} \pmod{1}$,
- ▷ a pour invariant $\pi(B_{(\lambda_1, \lambda_2)}^o) = \pi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

- Si λ_1 et λ_2 ne sont pas tous les deux puissances d'un même scalaire alors $\rho(B_{\lambda_1, \lambda_2})$ est irrationnel.

- Le centralisateur dans $PL^+(S^1)$ d'un Boshernitzan de nombre de rotation irrationnel est un cercle. – En effet, soit B_ρ^π un Boshernitzan de nombre de rotation irrationnel, son centralisateur dans $\text{Homeo}^+(S^1)$ est un cercle qui contient son centralisateur dans $PL^+(S^1)$. Le conjugué $h_\pi \circ SO(2) \circ h_\pi^{-1}$ est un cercle contenu dans $PL^+(S^1)$ et qui contient $B_{\lambda_1, \lambda_2}^o$. Un cercle ne pouvant avoir de cercle propre on conclut que le centralisateur dans $\text{Homeo}^+(S^1)$ d'un Boshernitzan de nombre de rotation irrationnel est égal à celui dans $PL^+(S^1)$ et est le cercle $h_\pi \circ SO(2) \circ h_\pi^{-1} = \{B_\rho^\pi, b \in S^1\}$.

- Pour tout entier positif n , le Boshernitzan $B_\rho^\pi = B_{(\lambda_1, \lambda_2)}^o$ admet pour racine n -ième $B_{\frac{\rho}{n}}^\pi = B_{(\lambda_1', \lambda_2')^o}$, où $\lambda_1' = \lambda_1^{\frac{1}{n}}$ et $\lambda_2' = \pi^{-1} \lambda_1^{\frac{1}{n}}$.

Le changement de point final est donné par la formule :

$$\boxed{B_{(\lambda_1, \lambda_2)}^c = R_c \circ B_{(\lambda_1, \lambda_2)}^o \circ R_c^{-1}.}$$

- Deux Boshernitzan de nombres de rotation irrationnels commutent si et seulement si ils ont le même point de coupure final 0 et le même invariant π , car ils sont conjugués par le même unique homéomorphisme normalisé $R_c \circ h_\pi$ à R_ρ .

- Deux Boshernitzan standard B_ρ^π et B_σ^σ de nombre de rotation ρ irrationnel ne sont jamais conjugués dans $PL^+(S^1)$ (sinon $h_\pi \circ h_\sigma^{-1}$ serait affine par morceaux et le calcul montre que ce n'est possible que si $\pi = \sigma$, voir la preuve du lemme 7.2, paragraphe 7).

4.3 Les Boshernitzan sur S_r .

Soit r un entier, on appelle **Boshernitzan** sur S_r de point de coupure final 0 un homéomorphisme f du cercle standard $S_r = \frac{\mathbb{R}}{r\mathbb{Z}}$ affine par morceaux avec exactement deux points de coupure a et $0 = f(a)$. On représente f par son identification à la bijection $\tilde{f} \pmod{r}$ de $[0, r[$.

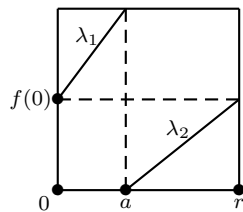


Figure 2

Un tel homéomorphisme

▷ a pour point de coupure $a = r \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$,

▷ est conjugué, par l'homothétie $\mathcal{H}_r : \begin{cases} S^1 = \frac{[0,1]}{0=1} & \rightarrow S_r = \frac{[0,r]}{0=r} \\ x & \mapsto rx \end{cases}$ au Boshernitzan

standard de mêmes pentes,

▷ a pour nombre de rotation $\rho(f) = \frac{\log \lambda_1}{\log \lambda_1 - \log \lambda_2} (\text{mod } 1)$.

Pour montrer qu'un Boshernitzan f de S_r de point de coupure final 0 appartient à un groupe $T_{r,\Lambda,A}$, il suffit de montrer que ses deux pentes λ_1 et λ_2 sont dans Λ et que $a \in A$. En effet, on aura automatiquement $f(0) \in A$ car $f(0) = r - \lambda_1 a = \lambda_2(r - a)$.

4.4 Boshernitzan rationnels- Preuve des propositions 1et 2.

Dans tout ce paragraphe, nous supposons fixé le point de coupure final 0.

Soit f un Boshernitzan de S^1 de pentes $\lambda_1 = n_1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{n_2}$ avec n_1 et n_2 deux nombres indépendants. Toutes les données de f (ses pentes, ses points de coupure et leurs images) sont rationnelles. Ainsi, $f \in T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$ mais son nombre de rotation $\rho(f) = \frac{\log n_1}{\log n_1 + \log n_2} \notin \mathbb{Q}$. En résulte que *le groupe de Thompson généralisé $T_{1,\langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Q}}$ contient des éléments dont le nombre de rotation est irrationnel*. Puisque l'homothétie \mathcal{H}_r conjugue $T_{1,\langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Q}}$ et $T_{r,\langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Q}}$, on a la proposition 1.

Que dire des groupes de Thompson intermédiaires $T_{r,(n_1,n_2)} := T_{r,\langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]}$?

Le calcul de a en fonction de λ_1 et λ_2 donne $a = \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$. Lorsque λ_1 et λ_2 sont des puissances de n_1 et n_2 , le point de coupure a est clairement un rationnel mais n'est pas en général dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]$. *Pour un Boshernitzan rationnel, les points de coupures 0 et a ainsi que leurs images sont de la forme $\frac{P}{Q}$, où $P, Q \in \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]$* . La proposition 2 contient les cas particuliers où (1) $n_1^t = n_2^s + 1$, (2) $n_1^t = n_2^s + 2$ et (3) $n_1 - 1 = k(n_2 - 1)$.

Preuve de la proposition 2-

(1)- Soient n_1 et n_2 deux entiers strictement positifs indépendants et soit $(t, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tels que $n_1^t = n_2^s + 1$. Considérons le Boshernitzan B sur S^1 défini par son point de coupure final 0 et ses pentes :

$$\lambda_1 = n_1^p n_2^q \quad \text{et}$$

$$\lambda_2 = n_1^{t+p} n_2^q > \lambda_1, \text{ on a } \pi(B) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_1^{-t},$$

où p et q sont des entiers relatifs choisis pour que $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$ et que λ_1 ne soit pas une puissance de n_1 .

L'existence de tels entiers est assurée par la densité du sous-groupe additif réel qu'engendrent $\log n_1$ et $\log n_2$ et la discrétion de $(\log n_1)\mathbb{Z}$. En effet,

pour que $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$, il faut et il suffit que $-t \log n_1 < p \log n_1 + q \log n_2 < 0$ et pour que λ_1 ne soit pas une puissance de n_1 il faut et il suffit que $p \log n_1 + q \log n_2 \notin (\log n_1)\mathbb{Z}$.

Autrement dit, il suffit de trouver $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$p \log n_1 + q \log n_2 \in] -t \log n_1, 0 [\setminus (\log n_1)\mathbb{Z},$$

cet ensemble est ouvert puisque $(\log n_1)\mathbb{Z}$ est discret. La densité du sous-groupe additif engendré par $\log n_1$ et $\log n_2$ permet de conclure.

L'autre point de coupure de B est $a = \frac{1-n_1^{t+p}n_2^q}{n_1^p n_2^q - n_1^{t+p}n_2^q} = \frac{1-n_1^{t+p}n_2^q}{n_1^p n_2^q (1-n_1^t)} = \frac{1-n_1^{t+p}n_2^q}{n_1^p n_2^q (-n_2^s)}$ est bien un point de $\mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]$.

Le nombre de rotation de B est alors

$$\rho(B) = \frac{\log \lambda_1}{\log \pi(B)} = \frac{p \log n_1 + q \log n_2}{-t \log n_1} = -\frac{p}{t} - \frac{q \log n_2}{t \log n_1} \pmod{1}$$

. Ce réel est irrationnel puisque n_1 et n_2 sont indépendants.

Remarque.– On obtient d'autres familles d'exemples en prenant pour pentes :

- $\lambda_1 = n_1^p n_2^q$ et $\lambda_2 = n_1^{p-t} n_2^q$, ou
- $\lambda_1 = n_1^p n_2^q$ et $\lambda_2 = n_1^{p-t} n_2^{-s+q}$, ou
- $\lambda_1 = n_1^p n_2^q$ et $\lambda_2 = n_1^{p+t} n_2^{-s+q}$.

(2)- Soient n_1 et n_2 deux entiers strictement positifs indépendants impairs et soit $(t, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tels que $n_1^t = n_2^s + 2$. Considérons le Boshernitzan B défini par son point de coupure final 0 et ses pentes :

λ_2 et λ_1 dans $\langle n_1, n_2 \rangle$ choisies comme dans (1) pour ne pas être du même côté de 1, de rapport $\pi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = n_1^t n_2^{-s}$ et de sorte que $\log \lambda_1$ et $\log \pi$ ne soit pas puissance d'un même entier.

Son point de coupure $a = \frac{1-\lambda_2}{\lambda_2 n_2^{-s} (n_1^t - n_2^s)} = \frac{1-\lambda_2}{2\lambda_2 n_2^{-s}}$ est $n_1 n_2$ -adique car n_1 et n_2 étant impairs, $1 - \lambda_2$ est divisible par 2.

Remarque.– Cette construction est valable dès qu'il existe s et t tels que $n_1^t = n_2^s + d$ avec $d = \text{pgcd}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ car $1 - \lambda_2$ est toujours à un facteur multiplicatif dans $\langle n_1, n_2 \rangle$ près un multiple entier de d , d'après la proposition 0.

(3)- Si $(n_1 - 1)k = (n_2 - 1)$ alors le Boshernitzan de point de coupure final 0 et de pentes $\lambda_1 \in \langle n_1, n_2 \rangle$ et $\lambda_2 = n_1 \lambda_1$ est dans $T_{1, (n_1, n_2)}$ car son autre point de coupure $a = \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1(1-n_1)} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]$ d'après la proposition 0 et puisque $(n_1 - 1) = \text{pgcd}(n_1 - 1, n_2 - 1)$.
◀

Remarque.– $T_{1, m}$ **ne contient pas de Boshernitzan.**– En effet, sinon, quitte à permuter ses deux points de coupures 0 et a , on peut supposer que $T_{1, m}$ contient $B_{\lambda_1, \lambda_2}^o$ avec $\lambda_1 = m^s > 1 > \lambda_2 = m^{-p}$ avec $s, p \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $a = \frac{1-m^{-p}}{m^s - m^{-p}} = \frac{m^p - 1}{m^{s+p} - 1}$ et $a \in]0, 1[$ est m -adique si et seulement si (*) $\frac{m^p - 1}{m^{s+p} - 1} = \frac{N}{m^q}$ avec $0 < N < m$ entier non divisible par m et $q \in \mathbb{N}^*$.

(*) $\iff m^{p+q} - m = N m^{s+p} - N \iff N = m^{p+q} - m^q - N m^{s+p}$ est divisible par m car tous les exposants $p + q$, q et $s + p$ sont strictement positifs. Ce qui est contraire à l'une de nos hypothèses.

Mais certains $T_{r, m}$ contiennent des Boshernitzan, grace aux isomorphismes de Bieri-Strebel, nous pouvons "les ramener" dans $T_{1, m}$ et obtenons le théorème 0 : c'est le paragraphe suivant.

5 Nombre de rotation dans les groupes de Thompson généralisés. Preuves des théorèmes 0 et 1 et du corollaire 1.

5.1 Nombres de rotation irrationnels. Preuves du théorème 0 et du corollaire 1.

Soient n_1 et n_2 deux entiers strictement positifs, distincts et indépendants. Posons $d = \text{pgcd}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ et écrivons $n_1 - 1 = k_1 d$ et $n_2 - 1 = k_2 d$ avec k_i entiers.

- Soit $r' = mk_2$, où $m \in \mathbb{N}^*$ est un entier quelconque fixé.

Considérons le Boshernitzan B de $S_{r'}$ défini par son point de coupure final 0 et ses deux pentes λ_2 et $\lambda_1 = n_2 \lambda_2 > \lambda_2$, ainsi $\pi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_2$, où λ_2 est choisi dans $\langle n_1, n_2 \rangle \cap]\frac{1}{n_2}, 1[$ de sorte que $\lambda_2 < 1 < \lambda_1$ et que λ_1 ne soit pas une puissance de n_2 un tel choix est toujours possible par densité dans \mathbb{R} du sous-groupe additif engendré par $\log n_1$ et $\log n_2$ et discrétion de $(\log n_2)\mathbb{Z}$ (voir 4.4). On a

$$a = r' \cdot \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = mk_2 \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_2 k_2 d} = m \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_2 d} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}],$$

car $1 - \lambda_2$ est toujours modulo multiplication par un élément de $\langle n_1, n_2 \rangle$ un multiple de d .

D'autre part, $\lambda_1 = n_1^p n_2^q$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$ et le nombre de rotation de ce Boshernitzan est $\rho = \frac{\log \lambda_1}{\log \pi} = \frac{p \log n_1 + q \log n_2}{\log n_2} = q + p \frac{\log n_1}{\log n_2} \notin \mathbb{Q}$ car $p \in \mathbb{Z}^*$ et n_1 et n_2 sont indépendants.

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le groupe $T_{mk_2, \langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]}$ contient un Boshernitzan dont le nombre de rotation est irrationnel.

- Soit $r'' = mk_1$, où $m \in \mathbb{N}^*$ est un entier quelconque fixé.

En intervertissant les rôles de n_1 et n_2 , on définit un Boshernitzan de $S_{r''}$ appartenant à $T_{r'', \langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]}$ pour lequel $\pi = n_1$. Le nombre de rotation de ce Boshernitzan est -modulo 1- $\rho = p' \frac{\log n_2}{\log n_1} \notin \mathbb{Q}$.

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le groupe $T_{mk_1, \langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]}$ contient un Boshernitzan dont le nombre de rotation est irrationnel.

Utilisons maintenant les isomorphismes de Bieri-Strebel, pour cela, nous devons déterminer les classes -modulo d - décrites par les entiers mk_i , lorsque m décrit \mathbb{N}^* .

Si l'entier k_i est premier avec d alors (par Bezout) k_i est un générateur de $\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$, ainsi, tout entier r vérifie $r = mk_i \pmod{d}$. Par conséquent, tout groupe de Thompson $T_{r, \langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]}$ est isomorphe à l'un des $T_{mk_i, \langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]}$ et cet isomorphisme est réalisé comme conjugaison par un homéomorphisme affine par morceaux. On en déduit que tous les groupes de Thompson $T_{r, (n_1, n_2)}$, $r \in \mathbb{N}^*$ contiennent tous un conjugué affine par morceaux d'un Boshernitzan dont le nombre de rotation est irrationnel, autrement dit un homéomorphisme affine par morceaux avec la propriété D et de nombre de rotation irrationnel.

En particulier, lorsque **d est un nombre premier ou est égal à 1**, on est dans cette situation, car au moins l'un des deux k_i est premier avec d (sinon, ils sont tous les deux multiples de d , qui ne peut ainsi plus être le pgcd des $k_i d$) on obtient ainsi le corollaire 1. La fin de l'énoncé du corollaire 1 est une conséquence immédiate de l'isomorphisme de Bieri-Strebel.

En général, le sous-groupe de $\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$ engendré par k_2 est égal au sous-groupe engendré par $\text{pgcd}(k_2 = \frac{n_2-1}{d}, d)$. Par conséquent, le groupe de Thompson $T_{r, \langle n_1, n_2 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1 n_2}]}$ avec $r = \text{pgcd}(\frac{n_2-1}{d}, d)$ contient un homéomorphisme affine par morceaux avec la propriété D et de nombre de rotation irrationnel. En reprenant cet argument avec k_1 , on obtient le théorème 0.

Remarques.— *La proposition 2 est un cas particulier du corollaire 1.*— En effet, plus généralement, si $n_1^t = n_2^s + p$ avec p premier alors on a $n_1^t - 1 - (n_2^s - 1) = p$. Or $d = \text{pgcd}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ divise $n_1^t - 1$ et $n_2^s - 1$ donc divise p premier ainsi $d = 1$ ou $d = p$ et on peut appliquer le corollaire 1. L'intérêt de ces cas particuliers est que les Boshernitzan sont explicites dans les groupes considérés et non obtenus par conjugaison de Bieri-Strebel à partir de Boshernitzan dans d'autres groupes de Thompson.

5.2 Nombres de rotation rationnels. Preuve du théorème 1.

Preuve du théorème 1.A. Pour celà, nous commençons par montrer que :

Le nombre de rotation de tout $f \in \mathbf{T}_{r,m}$ est rationnel.

Soit $f \in \mathbf{T}_{r,m}$ un homéomorphisme de $S_r = \frac{[0,r]}{0=r}$ que nous identifions à la bijection \tilde{f} (mod r) de $[0, r[$.

Pour tout $x \in [0, r[$, on a $f(x) = m^{e(x)}x + \frac{p(x)}{m^{k(x)}}$, avec $e(x) \in \mathbb{Z}$, $p(x) \in \mathbb{Z}$ et $k(x) \in \mathbb{N}$ qui sont des fonctions bornées par des constantes qui ne dépendent pas des itérées de f .

L'orbite de 0 est constituée de nombres m -adiques, nous écrivons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^n(0) = \frac{M_n}{m^{N_n}},$$

avec $N_n \in \mathbb{N}$ et (*) $M_n \in \mathbb{N}$ n'est pas divisible par m ou est nul. Notons que si m n'est pas premier cette fraction peut ne pas être réduite, mais la condition (*) garantit l'unicité d'une telle écriture.

S'il existe un entier n non nul pour lequel M_n est nul alors $f^n(0) = 0$, l'orbite de 0 est périodique et le nombre de rotation de f rationnel. Nous supposons dans la suite que pour tout n entier non nul M_n n'est pas divisible par m .

Fait 1 : $N_n \rightarrow +\infty$ ou bien l'orbite de 0 est périodique.

La suite N_n ne tend pas vers $+\infty$ signifie qu'il existe une sous-suite N_{s_n} bornée par un certain B . Dans ce cas, la suite $f^{s_n}(0)$ de points de l'orbite de 0 est contenue dans l'ensemble fini : $\{\frac{p}{m^k} : 0 \leq p \leq r.m^B \text{ et } 0 \leq k \leq B\}$, ce qui n'est possible que lorsque l'orbite de 0 est périodique.

Fait 2 : si $N_n \rightarrow +\infty$ alors $Df^n(0) \rightarrow 0$.

En effet, supposons $N_n \rightarrow +\infty$ et calculons $f^{n+1}(0)$:

$$f^{n+1}(0) = f(f^n(0)) = m^{e(f^n(0))} \frac{M_n}{m^{N_n}} + \frac{p(f^n(0))}{m^{k(f^n(0))}} = \frac{M_n}{m^{N_n - e(f^n(0))}} + \frac{p(f^n(0))}{m^{k(f^n(0))}}.$$

Puisque la suite N_n tend vers $+\infty$ et que e et k sont bornées, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $N_n - e(f^n(0)) > k(f^n(0))$. Il en résulte que :

$$f^{n+1}(0) = \frac{M_n + m^{N_n - e(f^n(0)) - k(f^n(0))} p(f^n(0))}{m^{N_n - e(f^n(0))}} = \frac{M_{n+1}}{m^{N_{n+1}}}.$$

Puisque m divise $m^{N_n - e(f^n(0)) - k(f^n(0))}$ mais ne divise pas M_n , m ne divise pas $M_n + m^{N_n - e(f^n(0)) - k(f^n(0))} p(f^n(0))$. Par unicité de l'écriture de $f^{n+1}(0)$ sous la forme $\frac{M_{n+1}}{m^{N_{n+1}}}$, on a $N_{n+1} = N_n - e(f^n(0))$, pour tout $n \geq n_0$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $N_{n_0+p} = N_{n_0} - (e(f^{n_0}(0)) + \dots + e(f^{n_0+p-1}(0)))$.

Par conséquent, $e(f^{n_0}(0)) + \dots + e(f^{n_0+p-1}(0)) \rightarrow -\infty$ lorsque $p \rightarrow +\infty$. Finalement, $e(0) + e(f(0)) + \dots + e(f^n(0)) \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Or $Df^n(0) = m^{e(0) + e(f(0)) + \dots + e(f^n(0))}$ donc $Df^n(0) \rightarrow 0$.

Conclusion. Si le nombre de rotation de f est irrationnel :

- La f -orbite de 0 n'est pas périodique, impliquant par le fait 1 que $N_n \rightarrow +\infty$ et par suite par le fait 2 que $Df^n(0) \rightarrow 0$.

- Les inégalités de Denjoy s'appliquent à f et on a $Df^{q_n}(0) \geq e^{-\text{Varlog}Df}$ ne peut donc tendre vers 0.

De cette contradiction, on conclut que le nombre de rotation de $f \in T_{r,m}$ est rationnel.

Fin de la Preuve du théorème 1.A

Identifions $T_{r,<m>,\mathbb{Q}}$ à l'ensemble des bijections affines par morceaux de $[0, r[$ dont les pentes sont des puissances de m et dont les points de coupure et leurs images sont rationnels. Soit $f \in T_{r,<m>,\mathbb{Q}}$, sur chaque intervalle de continuité de Df , on écrit $f(x) = m^{e(x)}.x + \frac{p(x)}{q(x)}$. Notons Q le ppcm des $q(x)$, l'homothétie $\mathcal{H}_Q : S_r \rightarrow S_{Qr}$ conjugue f à un élément de $T_{Qr,m}$ pour lequel la première partie s'applique.

Preuve du théorème 1.B.

Fait. – Soient r, m des entiers strictement positifs, le groupe $T_{r,m}$ contient la rotation d'angle $k = \frac{r}{q}$ (d'ordre q), pour tout diviseur q de r .

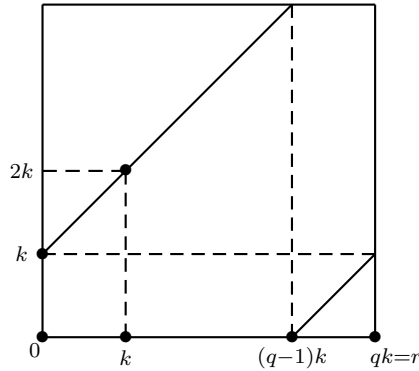


Figure 3

D'après l'isomorphisme de Bieri-Strebel, pour tout entier positif q , le groupe $T_{m-1,m}$ est isomorphe à $T_{q(m-1),m}$. D'après le fait précédent, ce groupe contient la rotation d'angle $k = \frac{r}{q}$. Par conséquent, $T_{m-1,m}$ contient un élément f d'ordre q (conjugué à la rotation de S^1 d'angle $\frac{1}{q}$) de nombre de rotation $\frac{1}{q}$. Pour tout entier p , le groupe $T_{m-1,m}$ contient l'élément f^p d'ordre fini q et de nombre de rotation $\frac{p}{q}$.

Preuve du théorème 1.C.

Soit m un entier impair, pour montrer que $T_{1,m}$ ne contient pas d'élément d'ordre pair, il suffit de montrer que $T_{1,m}$ ne contient pas d'élément d'ordre 2. – En effet, si f est d'ordre $2p$, son itéré f^p est d'ordre 2.

Un élément d'ordre 2 est un élément avec la propriété D dont chacune des orbites de points de coupure est de cardinal 2 : $\{a, f(a)\}$. En utilisant le fait que \tilde{f} est un homéomorphisme croissant, on peut voir que f a un nombre pair $2p$ de points de coupure qui s'écrivent $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_p < f(a_1) < f(a_2) < \dots < f(a_p) < 1$. La bijection \tilde{f} (mod 1) a l'allure suivante.

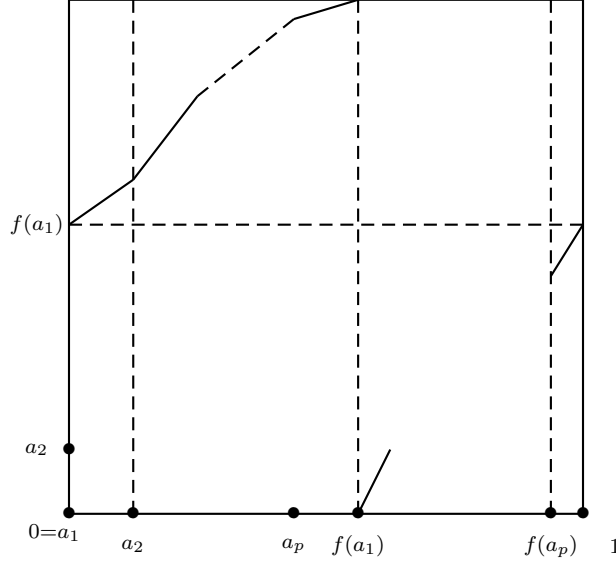


Figure 4

Les pentes de f sont $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_p})$ et les longueurs de ses intervalles de dérivabilité sont $(l_1, l_2, \dots, l_p, \lambda_1 l_1, \lambda_2 l_2, \dots, \lambda_p l_p)$ et vérifient $\sum (1 + \lambda_i) l_i = 1$.

Ainsi, le groupe $T_{1,m}$ contient un élément d'ordre 2 si et seulement si il existe $p \geq 1$ un entier et il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \{m^s, s \in \mathbb{Z}\}$ et $(l_1, l_2, \dots, l_p) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ tels que (*) $\sum (1 + \lambda_i) l_i = 1$.

Ecrivons $l_i = \frac{N_i}{m^{s_i}}$ –avec m ne divise pas N_i et $s_i > 0$ –

et $\lambda_i = m^{\varepsilon p_i}$ –avec $p_i \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ –.

La formule (*) s'écrit :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum (1 + m^{p_i}) \frac{N_i}{m^{s_i}} + \sum (1 + m^{-p_i}) \frac{N_i}{m^{s_i}} = \\ &= \sum (1 + m^{p_i}) \frac{N_i}{m^{s_i}} + \sum (1 + m^{p_i}) \frac{N_i}{m^{s_i + p_i}} = \sum (1 + m^{p_i}) \frac{N_i}{m^{s'_i}}, \end{aligned}$$

avec $s'_i > 0$.

Par conséquent, (*) est équivalente à $\sum (1 + m^{p_i}) N_i m^{s - s'_i} = m^s$, où $s := \sup s'_i$.

Maintenant, dès que m est impair, $(1 + m^{p_i})$ est pair et par suite $(1 + m^{p_i}) N_i m^{s - s'_i}$ est un entier pair, leur somme aussi et donc ne peut pas être une puissance de m impair. L'égalité (*) est impossible.

6 Nombre de rotation des homéomorphismes affines par morceaux vérifiant la propriété D .

6.1 Preuve du théorème 2.

La preuve du théorème 2 est basée sur l'**expression explicite** d'un homéomorphisme H qui conjugue f à une rotation ou un Boshernitzan.

Soit f un homéomorphisme affine par morceaux du cercle S_r possédant la propriété D , nous reprenons la partition de l'ensemble des points de coupure de f ainsi que les notations correspondantes données dans la définition de la propriété D . Nous écrivons la décomposition de son ensemble de points de coupure : $\mathcal{D}f = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$ avec $\mathcal{C}_i \subset \{f^{-l_i}(a_i), \dots, a_i\}$ et $\prod_{d \in \mathcal{C}_i} \sigma_f(d) = 1$ et les \mathcal{C}_i sont supportés par des f -orbites deux à deux distinctes.

Considérons un homéomorphisme affine par morceaux H de $S_r = \frac{[0,r]}{0=r}$ avec les propriétés suivantes :

- (i) $H(0) = 0$,
- (ii) les points $f^{-k}(a_i)$, pour $i \in I$ et $k \in \{0, \dots, l_i - 1\}$ sont des points de coupure de H ,
- (iii) les sauts de H sont donnés par $\sigma_H(f^{-k}(a_i)) = \sigma_{f^{N+1}}(f^{-k}(a_i))$, pour tout $i \in I$, où $N = \max l_i$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel homéomorphisme existe et n'ait pas d'autres points de coupure que ceux du (ii) est :

$$\prod_{i,k} \sigma_H(f^{-k}(a_i)) = \pi(f) = 1.$$

Lorsque cette égalité est vérifiée, la dérivée à droite en 0 notée λ_1 et par suite toutes les pentes λ_i de H sont uniquement déterminées par l'identité

$$r = \sum_{i=1}^p \lambda_i (d_{i+1} - d_i) = \lambda_1 \sum_{i=1}^p (\sigma_H(d_2) \dots \sigma_H(d_i)) (d_{i+1} - d_i),$$

avec la convention que les d_i représentent les points de coupure de H et $d_1 = 0$ et $d_{p+1} = r$.

Lorsque $\pi(f)$ ne vaut pas 1, pour obtenir H vérifiant (i), (ii) et (iii), nous devons ajouter un point de coupure c à H de sorte que le saut de H en c

$$\sigma_H(c) = \frac{1}{\pi(f)}.$$

De plus, nous choisissons c appartenant à A et distinct des $f^{-k}(a_i)$ ($i \in I$ et $k = 0, \dots, l_i$) et de leurs images par f^{N+1} .

Comme précédemment, λ_1 la dérivée à droite en d_1 et les autres pentes λ_i of H sont uniquement déterminées par l'identité

$$\frac{r}{\lambda_1} = \sum_{i=1}^{p-1} \sigma_H(d_2) \dots \sigma_H(d_i) |d_{i+1} - d_i| + \sigma_H(d_2) \dots \sigma_H(d_p) |c - d_p| + \sigma_H(d_2) \dots \sigma_H(d_p) \sigma_H(c) |d_1 - c|.$$

Maintenant que l'existence de H est assurée, nous déterminons les éventuels points de coupure du conjugué $H \circ f \circ H^{-1}$ et les sauts en ces points.

- Les éventuels points de coupure de $H \circ f \circ H^{-1}$ sont
- les points de coupure de H^{-1} c'est à dire $H(f^{-k}(a_i))$ avec $k = 0, \dots, l-1, i \in I$ et $H(c)$,
 - les images par H des points de coupure de f et qui sont déjà tous apparus dans la ligne précédente sauf $H(f^{-1}(a_i))$ puis
 - les images par $H \circ f^{-1}$ des points de coupure de H c'est à dire $H \circ f^{-1}(f^{-k}(a_i)) = H \circ f^{-k'}(a_i)$ avec $k' = 1, \dots, l, i \in I$ (déjà tous sus-cités) et $H \circ f^{-1}(c)$.

Les sauts en ces points sont :

En les $f^{-k}(a_i)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{H \circ f \circ H^{-1}}(H(f^{-k}(a_i))) &= \frac{\sigma_H(f^{-k+1}(a_i))\sigma_f(f^{-k}(a_i))}{\sigma_H(f^{-k}(a_i))} \\ &= \frac{\sigma_{f^{N+1}}(f^{-k+1}(a_i))\sigma_f(f^{-k}(a_i))}{\sigma_{f^{N+1}}(f^{-k}(a_i))} \\ &= \frac{\sigma_{f^{N+2}}(f^{-k}(a_i))}{\sigma_{f^{N+1}}(f^{-k}(a_i))} = 1. \end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \geq N$ on a :

$$\sigma_{f^{n+1}}(f^{-k}(a_i)) = \prod_{s=-k}^{n-k} \sigma_f(f^s(a_i)) = \prod_{s=-k}^0 \sigma_f(f^s(a_i))$$

car $n - k \geq 0$. Cette quantité ne dépend donc pas de n .

En $H(c)$ et $c' = H \circ f^{-1}(c)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{H \circ f \circ H^{-1}}(H(c)) &= \frac{\sigma_H(f(c))\sigma_f(c)}{\sigma_H(c)} = \frac{1}{\sigma_H(c)} = \pi(f) \text{ et} \\ \sigma_{H \circ f \circ H^{-1}}(c') &= \frac{1}{\pi(f)}. \end{aligned}$$

Conclusion.— Lorsque $\pi(f) \neq 1$, l'homéomorphisme de S_r affine par morceaux $H \circ f \circ H^{-1}$ a deux points de coupure $H \circ f^{-1}(c)$ et son image $H \circ f \circ H^{-1}(H \circ f^{-1}(c)) = H(c)$. c'est donc un Boshernitzan de S_r de point de coupure final $H(c)$ et dont les pentes sont données par $\lambda_{\pm} = D_{\pm}(H \circ f \circ H^{-1})(c) = Df(c) \times \frac{DH_{\pm}(f(c))}{DH_{\pm}(c)}$ représentant respectivement la valeur de la dérivée à droite [gauche] en le premier point de coupure $H(c)$.

Lorsque $\pi(f) = 1$, l'homéomorphisme affine par morceaux $H \circ f \circ H^{-1}$ n'a pas de point de coupure, c'est donc une rotation de S_r d'angle $H(f(0))$.

Dans les deux cas ci-dessus, nous allons préciser :

Les caractéristiques de H .

Les sauts de H sont dans Λ .— En effet par définition, les sauts de H appartiennent à Λ , car ils sont des sauts de f^{N+1} donc des produits de sauts de f .

Les pentes de H sont de la forme $\frac{r}{a'}$ avec $a' \in A$.— En effet, nous avons déjà considéré la relation : $r = \lambda_1 \sum_i (\sigma_H(d_2) \dots \sigma_H(d_i)) \cdot (d_{i+1} - d_i) (*)$

Or $d_{i+1} - d_i \in A$ et $\sigma_H(d_2) \dots \sigma_H(d_i) \in \Lambda$. Ainsi, $\lambda_1 = \frac{r}{a}$ avec $a \in A$.

Le rapport entre deux pentes de H est toujours dans Λ , car les pentes de H s'obtiennent en multipliant λ_1 par des sauts de H , c'est à dire par des éléments de Λ ou en écrivant une relation analogue à $(*)$, elles sont aussi de la forme $\frac{r}{a'}$ avec $a' \in A$.

Les coefficients additifs de H sont de la forme $\lambda_1 \times b$ avec $b \in A$.— En effet, par définition $H(0) = 0$ et nous convenons que, sur l'intervalle $[d_i, d_{i+1}]$, l'homéomorphisme H s'écrit $H(x) = \lambda_i x + \beta_i$. Un petit calcul montre que les coefficients additifs β_i de H se calculent récursivement par la formule $\beta_i = (\lambda_{i-1} - \lambda_i)d_i + \beta_{i-1}$.

Ecrivons $\lambda_i = \lambda_1 \sigma_i$ avec $\sigma_i \in \Lambda$, on obtient $\beta_i = \lambda_1(\sigma_{i-1} - \sigma_i)d_i + \beta_{i-1} = \lambda_1 \sum_k (\sigma_{k-1} - \sigma_k)d_k = \lambda_1 b_i$, avec $b_i \in A$.

Les caractéristiques du modèle $H \circ f \circ H^{-1}$.

Lorsque $\pi(f) \neq 1$, les pentes du Boshernitzan modèle sont données par :

$$\lambda_{\pm} = D_{\pm}(H \circ f \circ H^{-1})(H(c)) = Df(c) \times \frac{DH_{\pm}(f(c))}{DH_{\pm}(c)}.$$

Par hypothèse, $Df(c) \in \Lambda$ et $\frac{DH_{\pm}(f(c))}{DH_{\pm}(c)}$ est un produit de sauts de H donc un produit d'éléments de Λ . Par conséquent, les pentes de $H \circ f \circ H^{-1}$ sont dans Λ .

Le nombre de rotation du Boshernitzan $B = H \circ f \circ H^{-1}$ est $\frac{\rho(f) = \rho(B) \log \lambda_+}{\log(\lambda_+/\lambda_-)} \pmod{1}$.

L'invariant de B est $\pi(B) = \lambda_+/\lambda_- = \frac{DH_-(c)}{DH_+(c)} = \sigma_H(c)^{-1} = \pi(f)$.

Lorsque $\pi(f) = 1$, la rotation modèle a pour angle $H \circ f(0) = \lambda_i(f(0)) + \beta_i = \lambda_1(\sigma_i f(0) + b_i)$. Puisque $f(0) \in A$, $\sigma_i \in \Lambda$ et $b_i \in A$, cet angle est de la forme $\lambda_1 b$ avec $b \in A$, une fraction à numérateurs et dénominateurs dans A . Notons que l'on peut toujours, quitte à multiplier numérateur et dénominateur par un élément de Λ convenable, supposer que le dénominateur est toujours celui de λ_1 , c'est à dire $a = \sum_{i=1}^p \sigma_i(d_{i+1} - d_i)$. Ceci achève la preuve du Théorème 2. ◀

6.2 Preuve des corollaires 2 et 2'. Formule pour le nombre de rotation.

Preuve du corollaire 2.

Preuve du premier point.

Comme f avec la propriété D , d'après le théorème 2, il existe H dans $PL^+(S_r)$ tel que $H \circ f \circ H^{-1} = B$ un Boshernitzan ou une rotation de S_r avec même invariant $\pi(f)$ et même nombre de rotation $\rho(f)$ et ayant pour point de coupure final $H(c)$. Par définition et propriétés des Boshernitzan, $B = R_{H(c)} \circ \mathcal{H}_r \circ B_{\rho(f)}^{\pi(f)} \circ \mathcal{H}_r^{-1} R_{H(c)}^{-1}$.

Donc $f = H^{-1} \circ R_{H(c)} \circ \mathcal{H}_r \circ B_{\rho(f)}^{\pi(f)} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c)}^{-1} \circ H$.

Preuve du second point.

Lorsque $\rho \notin \mathbb{Q}$, le Boshernitzan B_{ρ}^{π} est l'unique Boshernitzan standard dans sa classe de conjugaison affine par morceaux. Par conséquent, deux homéomorphismes ayant D et de nombre de rotation irrationnel qui sont conjugués par un homéomorphisme affine par morceaux ont même nombre de rotation et sont conjugués affinement par morceaux au même Boshernitzan standard. Ils ont le même invariant π .

Preuve du troisième point.

Le Boshernitzan $B_{\rho(f)}^{\pi(f)}$ appartient au cercle $h_{\pi(f)} \circ SO(2) \circ h_{\pi(f)}^{-1}$ contenu dans $PL^+(S^1)$. Par conséquent, f est contenu dans le cercle $h \circ SO(2) \circ h^{-1}$ de $PL^+(S^1)$, où $h = H^{-1} \circ R_{H(c)} \circ \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(f)}$. Lorsque $\rho(f)$ est irrationnel, le cercle $h_{\pi(f)} \circ SO(2) \circ h_{\pi(f)}^{-1}$ est l'unique cercle de $PL^+(S^1)$ qui contient $B_{\rho(f)}^{\pi(f)}$ et est son centralisateur à la fois dans $PL^+(S^1)$ et dans $\text{Homéo}^+(S^1)$. La conjugaison de f à $B_{\rho(f)}^{\pi(f)}$ étant affine par morceaux, on a le même résultat pour f .

Preuve du quatrième point.

D'après le point précédent, f est contenu dans le cercle $h \circ SO(2) \circ h^{-1}$ de $PL^+(S^1)$, il préserve donc la mesure image par h^{-1} de la mesure de Haar. D'autre part, (*) est résultat classique pour les homéomorphismes de classe P de nombres de rotation irrationnels, elle résulte de l'unique ergodicité (voir par exemple [He1979] p 71).

Considérons un homéomorphisme f de nombre de rotation rationnel ρ . On construit une suite f_n d'homéomorphismes affines par morceaux de nombres de rotation irrationnels, contenue dans le cercle $h^{-1} \circ SO(2) \circ h$ et qui converge vers $f = h^{-1} \circ R_{\rho} \circ h$: soit (ρ_n) une suite d'irrationnels qui converge vers ρ , on pose $f_n = h^{-1} \circ R_{\rho_n} \circ h$. On a $Df(x) = Dh^{-1}(R_{\rho}(h(x)))Dh(x)$ et $Df_n(x) = Dh^{-1}(R_{\rho_n}(h(x)))Dh(x)$. Ainsi,

$$|\log Df(x) - \log Df_n(x)| = |\log Dh^{-1}(R_{\rho}(h(x))) - \log Dh^{-1}(R_{\rho_n}(h(x)))| \leq K|\rho_n - \rho|,$$

où $K = \sup\{|\log Dh^{-1}(x)|, x \in S^1\}$ est fini, puisque h^{-1} est un homéomorphisme C^1 par morceaux de classe P (l'homéomorphisme h est explicité dans le théorème 2).

Par conséquent, $\log Df_n(x) - K|\rho_n - \rho| \leq \log Df(x) \leq \log Df_n(x) + K|\rho_n - \rho|$. En intégrant par rapport à μ sur S^1 puis en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\int \log Dfd\mu = 0$. ◀

Preuve du corollaire 2'.

Supposons par l'absurde qu'il existe f un homéomorphisme affine par morceaux d'ordre fini, de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ et dont les points de coupure sont situés sur une même orbite que l'on peut supposer être celle de 0. Ainsi, les points de coupure de f sont contenus dans $\{0 = a_0, a_1 = f(a_0), \dots, a_{q-1} = f^{q-1}(a_0)\}$ et certains de ces points peuvent ne pas être des points de coupure de f .

On note I_i pour $i = 1, \dots, p$, les intervalles de continuité de Df et λ_i la valeur de Df sur I_i . Par hypothèse, les logarithmes des λ_i sont \mathbb{Q} -indépendants.

Puisque f a la propriété D, f est conjugué par l'homéomorphisme h du corollaire 2 à la rotation d'angle $\frac{p}{q}$. Les points $h(a_i)$, $i = 0, \dots, p-1$ sont exactement les $\frac{i}{q}$, $i = 0, \dots, p-1$ mais dans un ordre différent. Par conséquent, les intervalles de continuité de Df ont pour des mesures pour $\mu = mh$ de la forme $\mu(I_i) = |h(a_j) - h(a_k)| = \frac{n_i}{q}$, pour un certain $n_i \in \mathbb{N}^*$.

Maintenant, $0 = \int \log Dfd\mu = \sum \mu(I_i) \log \lambda_i = \frac{1}{q} \sum n_i \log \lambda_i = 0$, ce qui contredit l'hypothèse d'indépendance sur les $\log \lambda_i$. On a le corollaire 2'. ◀

Application de (*) aux calculs de nombres de rotation.

Soit f un homéomorphisme affine par morceaux dont les points de coupure sont sur l'orbite de 0 et de nombre de rotation ρ . Ecrivons (*)

$$0 = \int \log Dfd\mu = \sum \mu(I_i) \log \lambda_i = \sum \log \lambda_i |h(a_{i+1}) - h(a_i)|,$$

où $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ sont les intervalles de continuité de Df , λ_i la valeur de Df sur I_i et h l'homéomorphisme du corollaire 2.

Les points de coupure de f étant tous sur l'orbite de 0, on a $a_i = f^{n_i}(0)$ et en appliquant h il vient $h(a_i) = R_\rho^{n_i}(0) = n_i\rho + p_i$, avec $p_i \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant dans (*), on trouve $0 = \sum \log \lambda_i(n_i\rho + p_i) = \rho \sum n_i \log \lambda_i + \sum p_i \log \lambda_i$ et finalement si $\sum n_i \log \lambda_i \neq 0$ on obtient

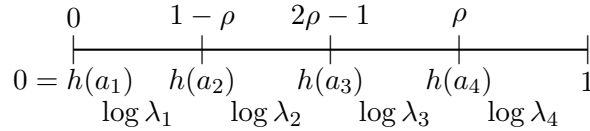
$$\rho = -\frac{\sum p_i \log \lambda_i}{\sum n_i \log \lambda_i}.$$

Les p_i se déterminent en comparant l'ordre des a_i sur le cercle à leur ordre comme images itérées de 0.

Par exemple, considérons un homéomorphisme affine par morceaux de S^1 avec quatre points de coupure $0 = a_1, a_2, a_3$ et a_4 sur l'orbite de 0 et de nombre de rotation ρ :

$$\begin{array}{ccccccc} a_2 & \xrightarrow{f} & 0 = a_1 & \xrightarrow{f} & a_4 & \xrightarrow{f} & a_3 \\ -\rho & \xrightarrow{R_\rho} & 0 & \xrightarrow{R_\rho} & \rho & \xrightarrow{R_\rho} & 2\rho \end{array}$$

Sur la figure suivante, nous représentons les images par h des a_i , ainsi nous pouvons compléter leur valeurs $n_i\rho$ par les entiers p_i qui sont compatibles avec l'ordre de ces points.



La formule (*) s'écrit : $\log \lambda_1(1 - \rho) + \log \lambda_2(3\rho - 2) + \log \lambda_3(1 - \rho) + \log \lambda_4(1 - \rho) = 0$

On obtient

$$\rho = \frac{\log \lambda_1 - 2 \log \lambda_2 + \log \lambda_3 + \log \lambda_4}{\log \lambda_1 - 3 \log \lambda_2 + \log \lambda_3 + \log \lambda_4}.$$

6.3 Preuve des corollaires 3, 3' et 4.

Preuve du Corollaire 3.

(i) \Rightarrow (ii) résulte du corollaire 2.

(ii) \Rightarrow (iii) est évident.

(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v), lorsque f est un homéomorphisme de nombre de rotation rationnel ρ , est classique. En effet, nous allons montrer que (iii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii).

Si f est topologiquement conjugué à une rotation rationnelle d'ordre p , f est aussi d'ordre fini p . Si f est d'ordre fini p , l'homéomorphisme $h = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k$ est un homéomorphisme dans $PL^+(S^1)$ qui conjugue f à la rotation d'angle ρ . Finalement si f est conjugué dans $PL^+(S^1)$ à la rotation d'angle ρ , il est topologiquement conjugué à la rotation d'angle ρ .

Il nous reste à voir (v) \Rightarrow (i).

En effet, si f est d'ordre fini p , pour toute discontinuité d de Df on a $f^p(d) = d$, la f -orbite de d est $\{d, f(d), \dots, f^{p-1}(d)\}$ et $\sigma_{f^p}(d) = 1$.

Or $\sigma_{f^p}(d) = \sigma_f(d)\sigma_f(f(d))\dots\sigma_f(f^{p-1}(d)) = 1$.

On en déduit que le produit des sauts de f sur la f -orbite de chaque point de coupure de f vaut 1, autrement dit que f à la propriété D .

Preuve du corollaire 3'.

(i) \Rightarrow (ii).

En effet, notons H l'homéomorphisme C^1 par morceaux qui conjugue f à la rotation d'angle ρ (on écrit $H \circ f = R_\rho \circ H$), le calcul simple : $D(H \circ f)(x) = DH(f(x)).Df(x) = DH(x)$ sauf pour un nombre fini de points, la densité des orbite de f et la continuité par morceaux de DH implique que $DH(x) \neq 0$ et que la réciproque H^{-1} de H est aussi C^1 par morceaux et a le même nombre N de points de coupure que H .

Par conséquent $f^n = H^{-1} \circ R_n \rho \circ H$ a au plus $2N$ points de coupure, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) \Rightarrow (iii)

En effet, supposons que pour tout entier n , le cardinal de l'ensemble $\mathcal{D}f^n$ des points de coupure de f^n soit borné par une constante M . Soit c un point de coupure de f . Puisque l'orbite de c est infinie (le nombre de rotation de f est irrationnel), pour tout entier $n > M$, au moins un point parmi les n points (distincts) $c, f^{-1}(c), \dots, f^{-n+1}(c)$ n'est pas un point de $\mathcal{D}f^n$. Autrement dit, le saut de Df^n en ce point vaut 1. Ce point s'écrit $f^{-K}(c)$ avec $0 \leq K < n$ et

$$\sigma_{f^n}(f^{-K}(c)) = \sigma_f(f^{-K}(c)) \times \dots \times \sigma_f(c) \times \dots \times \sigma_f(f^{n-K-1}(c)) = 1.$$

Comme $\sigma_f(c) \neq 1$, l'orbite de c contient nécessairement un autre point de coupure de f .

Soient c_0 un point de coupure de f et $\mathcal{S} = \{c_0, \dots, f^N(c_0)\}$ un segment de l'orbite de c contenant tous les points de coupure de f situés sur l'orbite de c . Le produit des sauts de Df sur l'orbite de c est égal au produit des sauts de Df sur \mathcal{S} . Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $0 \leq k < n - 1 - N$, le segment $\{f^{-k}(c_0), \dots, c_0, \dots, f^{n-k-1}(c_0)\}$ contient \mathcal{S} et

$$\sigma_{f^n}(f^{-k}(c_0)) = \sigma_f(f^{-k}(c_0)) \times \dots \times \sigma_f(c_0) \times \dots \times \sigma_f(f^{n-k-1}(c_0))$$

est égal au produit des sauts de Df sur \mathcal{S} . Par conséquent, si ce produit n'est pas 1, le nombre de discontinuités de Df^n est au moins $n - 1 - N$ et tend vers l'infini avec n .

(iii) \Rightarrow (iv) est le théorème 2.

(iv) \Rightarrow (v) est le troisième point du corollaire 2.

(v) \Rightarrow (i) car un Boshernitzan est toujours C^1 par morceaux conjugué à une rotation.

(v) \Rightarrow (vi) résulte du fait que le centralisateur dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ d'un homéomorphisme de nombre de rotation irrationnel est un cercle topologique : l'unique cercle topologique qui contient f , qui ne peut être que le cercle contenu dans $PL^+(S^1)$ du (v).

(vi) \Rightarrow (vii) est évident.

(vii) \Rightarrow (v) d'après le lemme de Minakawa (voir le paragraphe 7).

Preuve du corollaire 4.

Soit $f \in PL^+(S_r)$ possédant la propriété D alors il existe \bar{H} un homéomorphisme affine par morceaux tel que $f = \bar{H} \circ B_{\pi(f)}^\rho \circ \bar{H}^{-1}$.

On a vu dans le paragraphe 4 que le Boshernitzan B_π^ρ possède comme racine n -ième $B_{\frac{\rho}{n}, \pi}$ et donc $f = \left(H \circ B_{\frac{\rho(f)}{n}}^\pi \circ H \right)^n$. Puisque \bar{H} est affine par morceaux, on conclut que $f = F^n$ avec $F \in PL^+(S_r)$.

6.4 (ii) \Leftrightarrow (iii) du corollaire 3', lorsque le nombre de rotation est rationnel.

La “propriété D” implique que le nombre de points de coupure des itérés de f est borné par une constante qui ne dépend de l'ordre d'itération.

En effet, si le produit des sauts de Df le long de chaque orbite de points de coupure vaut 1, il existe une partition de l'ensemble des points de coupure de f en ensembles $\mathcal{C}_1 = \{c_1^1, \dots, c_{s_1}^1\}, \dots, \mathcal{C}_p = \{c_1^p, \dots, c_{s_p}^p\}$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$:

- \mathcal{C}_i est contenu dans une orbite, on écrit $c_i = c_1^i$ et $c_{s_i}^i = f^{-N_i}(c_i)$,
- l'orbite positive de c_i et l'orbite négative de $c_{s_i}^i$ ne contiennent pas de point de coupure de f (en particulier les orbites contenant deux \mathcal{C}_i distincts sont disjointes),
- le produit des sauts en les points de \mathcal{C}_i vaut 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, les discontinuités de Df^n sont des $f^{-k}(c_i)$ avec $k = 0, \dots, n + N_i - 1$ et $i = 1, \dots, p$. Les sauts de f^n en ces points sont :

$$\sigma_{f^n}(f^{-k}(c_i)) = \sigma_f(f^{-k}(c_i)) \times \dots \times \sigma_f(c_i) \times \dots \times \sigma_f(f^{n-k-1}(c_i)).$$

Si $k \geq N_i$ et $n - k - 1 \geq 0$ alors le segment d'orbite $\{f^{-k}(c_i), \dots, f^{n-k-1}(c_i)\}$ contient \mathcal{C}_i et ce saut vaut 1. Ainsi, pour que $f^{-k}(c_i)$ soit une discontinuité de Df^n il faut que $0 \leq k < N_i$ ou $n - 1 < k \leq n + N_i - 1$. Par conséquent, le nombre de discontinuités de Df^n qui proviennent de l'orbite de c_i est au plus $2N_i$. On en déduit une borne de $2(N_1 + \dots + N_p)$ pour le nombre de discontinuités de Df^n . En remplaçant f par f^{-1} , on obtient l'analogie pour $n \in \mathbb{Z}$.

La réciproque est fautive.— Considérons l'homéomorphisme affine par morceaux représenté sur la figure suivante.

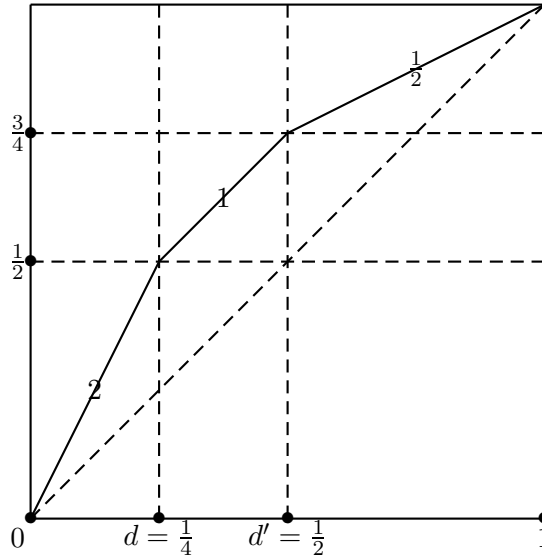


Figure 5

Les discontinuités de Df^{n+1} sont parmi les points $0, f^{-k}(d)$ et d' avec $k = 0, \dots, n$.

Les sauts en les points $f^{-k}(d)$ sont $\sigma_{f^{n+1}}(f^{-k}(d)) = \sigma_f(f^{-k}(d)) \dots \sigma_f(f^{n-k}(d)) = \sigma_f(d)\sigma_f(f(d)) = 1$ dès que $n - k \geq 1$.

En conclusion, f^{n+1} a pour discontinuité $0, f^{-n}(d), d'$ (au plus).

Un calcul analogue pour les itérés négatifs montre que le nombre de points de coupure d'un itéré quelconque de f est au plus 3. Mais f n'a pas la propriété D. Sinon f serait d'ordre fini d'après le corollaire 3', or f a des points fixes mais n'est pas l'identité.

7 Automorphismes des groupes de Thompson généralisés.

Preuve de la proposition 3.– D’après le résultat de Mc Cleary et Rubin ([McCR1996], [R1996]) tout automorphisme de G est réalisé par une conjugaison h dans $\text{Homeo}(S_r)$. Quitte à composer h avec l’involution standard, on peut supposer que h préserve l’orientation.

Par hypothèse, Γ contient deux Boshernitzan commutant et dont les nombres de rotation sont des irrationnels rationnellement indépendants. Leurs conjugués par h sont aussi deux homéomorphismes affines par morceaux commutant et dont les nombres de rotations sont des irrationnels rationnellement indépendants.

Lemme 7.1 de Minikawa ([Mi1997]).– *Si f et g sont deux homéomorphismes affines par morceaux commutant et dont nombres de rotations sont des irrationnels rationnellement indépendants alors f et g ont la propriété D et $\pi(f) = \pi(g)$.*

Preuve du lemme 7.1.– Montrons que f a la propriété D.

Soit a un point de coupure de f , nous devons montrer que le produit des sauts de Df le long de la f -orbite de a est trivial.

Puisque le nombre de points de coupure de f est fini et que les points $g^k(a)$ ont des f -orbites différentes, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que la f -orbite de $g^k(a)$ ne contient pas de point de coupure de f .

Ainsi, le produit des sauts de Df le long de la f -orbite de $g^k(a)$ est trivial et comme f et g commutent on a $f^n(g^k(a)) = g^k(f^n(a))$ et $f = g^k \circ f \circ g^{-k}$.

$$\text{Ainsi, } 1 = \sigma_f((f^n(g^k(a)))) = \sigma_{g^k \circ f \circ g^{-k}}(g^k(f^n(a))) = \frac{\sigma_{g^k}(f^{n+1}(a))\sigma_f(f^n(a))}{\sigma_{g^k}(f^n(a))}.$$

Le produit infini, lorsque $n \in \mathbb{N}$, est télescopique et égale le produit des sauts de Df le long de la f -orbite de a .

D’autre part, puisque f et g ont la propriété D ils sont conjugués à des Boshernitzan (de nombres de rotation irrationnels) commutant donc qui appartiennent à un même cercle $h_w \circ SO(2) \circ h_w^{-1}$ avec $w = \pi(f) = \pi(g)$. \triangleleft

Soient f et g les Boshernitzan commutants de Γ , le lemme de Minakawa implique que $h^{-1} \circ f \circ h$ a la propriété D. Le théorème 2 donne alors la forme explicite h . Une vérification de l’action de h sur les rotations contenues dans G permet de conclure de la non exoticté de h . En effet, plus précisément f s’écrit

$$f = \mathcal{H}_r \circ B_\rho^\pi \circ \mathcal{H}_r^{-1}.$$

Soit $F = h^{-1} \circ f \circ h$, par Minakawa F a la propriété D. De plus, on a $\pi(F) \neq 1$ car sinon le théorème 2A impliquerait que $\rho(F) = \rho(f) = \rho \in \mathbb{Q}$.

En particulier, F n’est pas une rotation et comme $\rho(F) \notin \mathbb{Q}$, il existe $\alpha_0 \in A$ un point de coupure de F dont l’orbite positive ne contient pas de point de coupure de F . Quitte à composer h par $R_{\alpha_0}^{-1}$, on peut supposer que $\alpha_0 = 0$ (en effet, l’homéomorphisme $\tilde{h} := h \circ R_{\alpha_0}^{-1}$ normalise Γ et $\tilde{h} \in T_{r, \text{Inv}(A), A}$ si et seulement si $h \in T_{r, \text{Inv}(A), A}$ et $\tilde{h}^{-1} \circ F \circ \tilde{h} = R_{\alpha_0} \circ F \circ R_{\alpha_0}^{-1}$ admet 0 comme point de coupure dont l’orbite positive ne contient pas de point de coupure).

Par le théorème 2B,

$$F = H^{-1} \circ R_{H(c_F)} \circ \mathcal{H}_r \circ B_\rho^{\pi(F)} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H,$$

avec $c_F \in A$, $H \in T_{r, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}}$ avec points de coupure dans A , sauts dans Λ et $0 = H(0)$ est point de coupure de H (en effet, $\sigma_H(0) = \sigma_{F^{N+1}}(0) \neq 1$ car 0 est un point de coupure de F dont l’orbite positive ne contient pas de point de coupure de F).

Maintenant, par propriétés des Boshernitzan, on a :

$$h_{\pi(f)}^{-1} \circ B_\rho^\pi \circ h_{\pi(f)} = R_\rho = h_{\pi(f)}^{-1} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ f \circ \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(f)}$$

$$f = \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(f)} R_\rho \circ h_{\pi(f)}^{-1} \mathcal{H}_r^{-1}$$

$$E_\rho^{\pi(F)} = h_{\pi(F)} \circ R_\rho \circ h_{\pi(F)}^{-1}.$$

Ainsi,

$$h^{-1} \circ f \circ h = F = H^{-1} \circ R_{H(c_F)} \circ \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(F)} \circ R_\rho \circ h_{\pi(F)}^{-1} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H.$$

En remplaçant f par son expression en R_ρ , on obtient :

$$\begin{aligned} & h^{-1} \circ \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(f)} \circ R_\rho \circ h_{\pi(f)}^{-1} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ h = \\ & = H^{-1} \circ R_{H(c_F)} \circ \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(F)} \circ R_\rho \circ h_{\pi(F)}^{-1} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H. \end{aligned}$$

Par unique ergodicité de R_ρ , on en déduit qu'il existe une rotation R_b de S^1 (centralisateur de R_ρ) telle que :

$$\boxed{h = \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(f)} \circ R_b \circ h_{\pi(F)}^{-1} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H.}$$

Etape 1 : La conjugaison h est affine par morceaux.

Testons l'action de h sur les rotations non triviales R_a , avec $a \in A$: étudions les homéomorphismes $F_a := h^{-1} \circ R_a \circ h$.

$$F_a = H^{-1} \circ R_{H(c_F)} \circ \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(F)} \circ R_b^{-1} \circ h_{\pi(f)}^{-1} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_a \circ \mathcal{H}_r \circ h_{\pi(f)} \circ R_b \circ h_{\pi(F)}^{-1} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H.$$

Cet homéomorphisme est affine par morceaux si et seulement si l'homéomorphisme

$$h_{\pi(F)} \circ R_b^{-1} \circ h_{\pi(f)}^{-1} \circ R_{\frac{a}{r}} \circ h_{\pi(f)} \circ R_b \circ h_{\pi(F)}^{-1}$$

l'est ; car $\mathcal{H}_r^{-1} \circ R_a \circ \mathcal{H}_r = R_{\frac{a}{r}}$ et $H^{-1} \circ R_{H(c_F)} \circ \mathcal{H}_r$ et son inverse sont affines par morceaux.

Lemme 7.2.— Soient $(\sigma, \pi) \in (R^{+*})^2$ et $a', b \in [0, 1]$, l'homéomorphisme noté $\phi_{a'}(x) = h_\sigma \circ R_b^{-1} \circ h_\pi^{-1} \circ R_a' \circ h_\pi \circ R_b \circ h_\sigma^{-1}$ est affine par morceaux si et seulement si $a' = 0$ ou $\pi = 1$ ou $\sigma = \pi$.

—Preuve du lemme 7.2.

Ici, les calculs sont effectués sur $[0, 1]$, les homéomorphismes f de S^1 sont identifiés aux bijections \tilde{f} (mod 1) de $[0, 1]$.

On écrit $h_\pi(x) = \frac{\pi^x - 1}{\pi - 1} = \frac{1}{\pi - 1}(e^{x \log \pi} - 1)$ et $h_\pi^{-1}(x) = \frac{1}{\log \pi} \log(x(\pi - 1) + 1)$.

On calcule

$$h_\pi \circ R_b \circ h_\sigma^{-1}(x) = \frac{1}{\pi - 1} \left(\pi^{b(x)} (x(\sigma - 1) + 1)^{\frac{p}{s}} - 1 \right),$$

où $p = \log \pi$, $s = \log \sigma$ et $b(x) \in \{b, b - 1\}$.

Finalement,

$$\phi_{a'}(x) = \frac{1}{\sigma - 1} \left(\sigma^{-b_1(x)} \left(a'(\pi - 1) + \pi^{b_2(x)}(x(\sigma - 1) + 1)^{\frac{p}{s}} \right)^{\frac{s}{p}} - 1 \right)$$

où $b_1(x), b_2(x) \in \{b, b - 1\}$.

$\phi_{a'}(x)$ est affine si et seulement si $a'(\pi - 1) = 0$ ou si $\frac{p}{s} = 1$, on a le lemme 7.2.–

Comme R_a n'est pas triviale, ce lemme implique que $h_{\pi(F)} \circ R_b^{-1} \circ h_{\pi(f)}^{-1} \circ R_{\frac{a}{r}} \circ h_{\pi(f)} \circ R_b \circ h_{\pi(F)}^{-1}$ est affine par morceaux si seulement si $\pi(f) = 1$ ce qui est impossible par hypothèse (f est rationnel et pas son nombre de rotation) ou si $\pi(f) = \pi(F)$. Donc f et F sont conjugués dans $PL^+(S_r)$, en fait f est le modèle de F , en remplaçant dans l'expression de h et en écrivant $B_b^{\pi(f)} = h_{\pi(f)} \circ R_b \circ h_{\pi(f)}^{-1}$, on trouve :

$$h = \mathcal{H}_r \circ B_b^{\pi(f)} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H.$$

Ceci montre que h est affine par morceaux et donc que Γ n'a pas d'automorphisme exotique.

Etape 2 : $b \in \mathbb{Q}$ et $h \in T_{r, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}}$.

Notons $\pi(f) = \pi(F) = \pi$.

Lemme 7.3 $\pi^b \in \mathbb{Q}$.

—Preuve du lemme 7.3.

Soit $a \in A \setminus \{0\}$, l'homéomorphisme $h^{-1} \circ R_a \circ h \in T_{r, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}}$, il s'écrit :

$$H^{-1} \circ R_{H(c_F)} \circ \mathcal{H}_r \circ (B_b^\pi)^{-1} \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_a \circ \mathcal{H}_r \circ B_b^\pi \circ \mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H.$$

Or $H^{-1} \circ R_{H(c_F)} \circ \mathcal{H}_r$ et son inverse $\mathcal{H}_r^{-1} \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H$ sont dans $T_{r, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}}$ par le théorème 2 et $\mathcal{H}_r^{-1} \circ R_a \circ \mathcal{H}_r = R_{\frac{a}{r}}$

Ainsi, $h^{-1} \circ R_a \circ h \in T_{r, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}}$ si et seulement si

$$J_b = (B_b^\pi)^{-1} \circ R_{\frac{a}{r}} \circ B_b^\pi \in T_{r, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}}.$$

Notons a_b le point de coupure de B_b^π dont l'image est 0. Comme $a' = \frac{a}{r} \neq 0$ alors a_b est un point de coupure de J_b .

En effet, le saut de J_b au point a_b est

$$\sigma_{J_b}(a_b) = \sigma_{(B_b^\pi)^{-1}}(a') \sigma_{B_b^\pi}(a_b) \neq 1.$$

car $\sigma_{B_b^\pi}(a_b) = \pi^{-1}$ et puisque $a' \neq 0$, le saut $\sigma_{(B_b^\pi)^{-1}}(a') \neq \pi$.

Par conséquent, $a_b \in \mathbb{Q}$. Par définition de $B = B_b^\pi$, on a

$$a_b = \frac{1 - \lambda_2^B}{\lambda_1^B - \lambda_2^B} = \frac{1 - \pi^{b-1}}{\pi^b - \pi^{b-1}} = \frac{1}{\pi - 1} (\pi^1 \pi^{-b} - 1).$$

Ainsi pour que $a_b \in \mathbb{Q}$, il est nécessaire que $\pi^b \in \mathbb{Q}$. —

Maintenant, comme $\pi \in \mathbb{Q}$, pour que $\pi^b \in \mathbb{Q}$ il est nécessaire que $b \in \mathbb{Q}$. Finalement, nous avons montré que $R_b \in T_{r, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}}$, par le théorème 2, tous les autres homéomorphismes intervenant dans l'écriture de h sont aussi dans $T_{r, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}}$ et donc $h \in T_{r, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}}$.

Montrons que $h \in T_{r,Inv(A),A}$.

• Supposons, en plus, que π n'est pas puissance (triviale) d'un rationnel. Dans ce cas, $\pi^b \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $b \in \mathbb{Z}$ et donc R_b est triviale. On en déduit alors que

$$\boxed{h = R_{H(c_F)}^{-1} \circ H.}$$

• En général, $\pi = \pi'^s$, avec $\pi' \in \mathbb{Q}$ n'est pas puissance d'un rationnel et $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Par hypothèse, $\pi \in \Lambda$ et donc $\pi' \in Inv(A)$.

D'après ce qui précède $\pi^b = \pi'^{bs} \in \mathbb{Q}$ donc $r = bs \in \mathbb{Z}$ et $\pi^b = \pi'^r \in Inv(A)$.

Par conséquent, le Boshernitzan B_b^π a ses pentes π^b et π^{b-1} dans $Inv(A)$. Il en est de même pour le Boshernitzan de S_r noté $\mathcal{B}_b^\pi := \mathcal{H}_r \circ B_b^\pi \circ \mathcal{H}_r^{-1}$ et pour son inverse.

On peut alors écrire :

$$\boxed{h = \mathcal{B}_b^\pi \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H.}$$

Notons α_b le point de coupure du Boshernitzan $(\mathcal{B}_b^\pi)^{-1}$ de S_r tel que $\mathcal{B}_b^\pi(0) = \alpha_b$.

Montrons que $\alpha_b \in A$ et $\mathcal{B}_b^\pi \in T_{r,Inv(A),A}$.

Le groupe Γ contient $h \circ R_{c_F}^{-1} \circ h^{-1} = \mathcal{B}_b^\pi \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H \circ R_{c_F}^{-1} \circ H^{-1} \circ R_{H(c_F)} \circ (\mathcal{B}_b^\pi)^{-1}$ et cet homéomorphisme a pour point de coupure α_b ou bien $h \circ R_{c_F} \circ h^{-1}(0) = \alpha_b$.

En effet, le saut :

$$\sigma_{h \circ R_{c_F}^{-1} \circ h^{-1}}(\alpha_b) = \sigma_{\mathcal{B}_b^\pi}(-H(c_F)) \times \sigma_H(0) \times \sigma_{H^{-1}}(H(c_F)) \times \sigma_{(\mathcal{B}_b^\pi)^{-1}}(\alpha_b).$$

On a noté $-H(c_F)$ le point $R_{H(c_F)}^{-1}(0)$.

Or $\sigma_{(\mathcal{B}_b^\pi)^{-1}}(\alpha_b) = \frac{1}{\pi}$ et $\sigma_{H^{-1}}(H(c_F)) = (\sigma_H(c_F))^{-1} = \pi$. Ainsi,

$$\sigma_{h \circ R_{c_F}^{-1} \circ h^{-1}}(\alpha_b) = \sigma_{\mathcal{B}_b^\pi}(-H(c_F)) \times \sigma_H(0).$$

Si $-H(c_F)$ n'est pas un point de coupure de \mathcal{B}_b^π , ce saut vaut $\sigma_H(0) \neq 1$ et α_b est un point de coupure de $h \circ R_{c_F}^{-1} \circ h^{-1}$.

Si $-H(c_F)$ est un point de coupure de \mathcal{B}_b^π c'est à dire si $-H(c_F) \in \{0, \mathcal{B}_b^{\pi-1}(0)\}$ et comme $c_F \neq 0$, ceci revient à $-H(c_F) = \mathcal{B}_b^{\pi-1}(0)$. En remplaçant dans $h \circ R_{c_F} \circ h^{-1}(0)$, on trouve :

$$h \circ R_{c_F} \circ h^{-1}(0) = \mathcal{B}_b^\pi \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H \circ R_{c_F} \circ H^{-1} \circ R_{H(c_F)}(-H(c_F)) = \mathcal{B}_b^\pi(0) = \alpha_b.$$

Dans les deux cas, on conclut que le point $\alpha_b \in A$. Par conséquent, $(\mathcal{B}_b^\pi)^{-1}$ a ses pentes dans $Inv(A)$ et son point de coupure initial α_b dans A , ceci suffit pour affirmer qu'il appartient ainsi que son inverse \mathcal{B}_b^π au groupe $T_{r,Inv(A),A}$. De plus, puisque leurs sauts appartiennent à Λ , ils normalisent Γ .

Maintenant, puisque h normalise Γ , l'homéomorphisme $R_{H(c_F)}^{-1} \circ H$ normalise Γ et pour montrer que $h \in T_{r,Inv(A),A}$ il suffit de montrer que $R_{H(c_F)}^{-1} \circ H \in T_{r,Inv(A),A}$.

Dans tous les cas, on est ramené à montrer que l'homéomorphisme :

$$\boxed{\tilde{h} = R_{H(c_F)}^{-1} \circ H \in T_{r,Inv(A),A}.}$$

L'homéomorphisme $F_{-c_F} = \tilde{h} \circ R_{c_F}^{-1} \circ \tilde{h}^{-1} \in \Gamma$, puisque $c_F \in A$ d'après le théorème 2. Par conséquent, $F_{-c_F}(0) \in A$.

$$F_{-c_F}(0) = R_{H(c_F)}^{-1} \circ H \circ R_{c_F}^{-1} \circ H^{-1} \circ R_{H(c_F)}(0) = -H(c_F) \in A.$$

Ainsi, $H(c_F) \in A$ et $R_{H(c_F)} \in \Gamma$, on en déduit que H normalise Γ (puisque h normalise Γ) et il ne nous reste plus qu'à montrer que $H \in T_{r,Inv(A),A}$.

Soit $a \in \Lambda$ appartenant au premier intervalle de continuité de DH et DH^{-1} . Un tel choix est possible car Γ contient un Boshernitzan de nombre de rotation irrationnel, donc Λ contient au moins $\lambda \neq 1$: Λ est infini et contient 0 dans son adhérence.

L'homéomorphisme $G_a = H^{-1} \circ R_a \circ H \in \Gamma$.

L'homéomorphisme $F_a = H \circ R_a \circ H^{-1} \in \Gamma$.

Calculons les images de 0 par ces deux homéomorphismes :

$$H^{-1} \circ R_a \circ H(0) = H^{-1}(a) = \frac{1}{\lambda_1^H} a \quad \text{et}$$

$$H \circ R_a \circ H^{-1}(0) = H(a) = \lambda_1^H a.$$

Comme ces deux homéomorphismes sont dans Γ , les images de 0 sont dans A . Ainsi, on a $\frac{1}{\lambda_1^H} a \in A$ et $\lambda_1^H a \in A$. Puisque $a \in \Lambda$ ceci est équivalent à $\frac{1}{\lambda_1^H}$ et λ_1^H sont dans A . Autrement dit, $\lambda_1^H \in Inv(A)$. Le théorème 2 indique que les points de coupure de H sont dans A , ses sauts dans Λ . Ainsi $H \in T_{r,Inv(A),A}$ et par suite $h \in T_{r,Inv(A),A}$. De plus, puisque $h = \mathcal{B}_b^\pi \circ R_{H(c_F)}^{-1} \circ H$ et que les sauts de H et \mathcal{B}_b^π sont dans Λ , les sauts de h sont dans Λ .

Si, on a (iii) –les éléments de A inversibles dans A sont les éléments de Λ – alors $\lambda_1^H \in \Lambda$. Ceci suffit pour affirmer que toutes les pentes de H sont dans Λ puisque, d'après le théorème 2, tous les sauts de H sont dans Λ . Aussi les points de coupure de H sont dans A , par conséquent $H \in \Gamma$ et par suite $h \in \Gamma$ donc induit un automorphisme intérieur.

Preuve de Théorème 3.

A. Nous allons appliquer la proposition 3 au groupe $T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$.

Il est facile de voir que $T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$ agit 0-3-transitivement sur \mathbb{Q} . Reste à vérifier (ii).

Tout Boshernitzan dont les pentes sont rationnelles est dans $T_{\mathbb{Q}}$ et la donnée de deux réels positifs $\lambda_2 < 1 < \lambda_1$ suffit pour définir un Boshernitzan de S_r de pentes (λ_1, λ_2) de point de coupure final 0.

Ainsi, $T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$ contient les Boshernitzan de pentes $(2, \frac{2}{5})$ et $(3, \frac{3}{5})$ de point de coupure final 0. Ils ont pour invariant $\pi = 5$, donc commutent et leurs nombres de rotations sont donnés par $\frac{\log \lambda_1}{\log \pi}$, c'est à dire $\frac{\log 2}{\log 5}$ et $\frac{\log 3}{\log 5}$ irrationnels et rationnellement indépendants.

On peut appliquer la proposition 3 au groupe $T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$, on en déduit qu'il n'a pas d'automorphisme exotique et ses automorphismes sont intérieurs puisque réalisés comme conjugaisons par des homéomorphismes rationnels.

B et B'. Nous allons appliquer la proposition 3 à un groupe $T_{r,(n_i)}$ isomorphe à Γ . Pour cela on montre les deux propositions suivantes.

Proposition 4.– Soient $p \geq 3$ un entier, (n_1, \dots, n_p) un p -uplet d'entiers distincts et indépendants et $d = \text{pgcd}(n_i - 1)$. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que le groupe $T_{m_0 d, (n_i)}$ contient deux Boshernitzan de même point de coupure final 0, dont les nombres de rotations sont des irrationnels rationnellement indépendants et d'invariant $\pi = n_j$.

Proposition 5.– Soient $p \geq 1$ un entier, (n_1, \dots, n_p) un p -uplet d'entiers distincts et indépendants et $d = \text{pgcd}(n_i - 1)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le groupe $T_{md, (n_i)}$ agit o - k -transitivement sur $\Delta := \frac{\{(n_1 \dots n_p)^s, N \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}\}}{(md)\mathbb{Z}}$.

Nous montrerons ces propositions par la suite, pour l'instant nous montrons comment elles impliquent le théorème 3.B et B'.

On applique la proposition 4 avec $j = 1$, on en déduit qu'il existe m_0 tel que le groupe $T_{m_0 d, (n_i)}$ vérifie l'hypothèse (ii) de la proposition 3. D'après la proposition 5, il en vérifie aussi l'hypothèse (i).

Par conséquent, $T_{m_0 d, (n_i)}$ n'a pas d'automorphisme exotique et ses automorphismes affines par morceaux sont rationnels. Par isomorphisme de Bieri-Strebel (qui préserve le caractère affine par morceaux et la rationalité), on déduit que $T_{d, (n_i)}$ n'a donc pas d'automorphisme exotique et ses automorphismes affines par morceaux sont rationnels, on a le B.

D'autre part, dès que les n_i sont premiers, ce groupe vérifie l'hypothèse (iii); c'est d'ailleurs le seul cas où $\text{Inv}(A) = \Lambda$. Il n'a donc pas d'automorphisme extérieur autre que l'involution standard. Par isomorphisme de Bieri-Strebel, on déduit que $T_{d, (n_i)}$ n'a donc pas d'automorphisme extérieur autre que l'involution standard. On a le B'.

Preuve de la Proposition 4.

Considérons n_1, n_2, \dots, n_p des entiers indépendants en nombre $p \geq 3$ et $d = \text{pgcd}(n_i - 1)$. Ecrivons $n_i - 1 = k_i d$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Choisissons, $i = 1$ et posons $r = k_1 d = n_1 - 1$. On considère les deux Boshernitzan de S_r définis (comme en 5.1) par leur point de coupure final 0 et leurs pentes :

- $B_{1,2}$: $\lambda_1 = n_1 \lambda_2 > 1$ et $\lambda_2 < 1$, ainsi $\pi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_1$, où $\lambda_2 \in \ll n_1, n_2 > \cap]\frac{1}{n_1}, 1[$ afin que $\lambda_2 < 1 < \lambda_1$ et de sorte que λ_1 ne soit pas une puissance de n_1 . Un tel choix est toujours possible par densité dans \mathbb{R} du sous-groupe additif engendré par $\log n_1$ et $\log n_2$ et

- $B_{1,3}$: $\lambda'_1 = n_1 \lambda'_2 > 1$, $\lambda'_2 < 1$, ainsi $\pi = n_1$, où $\lambda'_2 \in \ll n_1, n_3 > \cap]\frac{1}{n_1}, 1[$. afin que $\lambda'_2 < 1 < \lambda'_1$ et de sorte que λ'_1 ne soit pas une puissance de n_1 . Un tel choix est toujours possible par densité dans \mathbb{R} du sous-groupe additif engendré par $\log n_1$ et $\log n_3$.

Les calculs effectués en 5.1, montre que ces Boshernitzan :

- appartiennent au groupe $T_{r, \langle n_1, n_2, n_3 \rangle, \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1, n_2, n_3}]} \subset T_{r, (n_i)}$. Leurs points de coupure (autre que 0) s'écrivent :

$$a_{1,2} = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2} \text{ et } a_{1,2} = \frac{\lambda'_2 - 1}{\lambda'_2}.$$

- ont des nombres de rotation irrationnels et rationnellement indépendants– en effet, $\rho(B_{1,2}) = p \frac{\log n_2}{\log n_1}$ et $\rho(B_{1,3}) = p' \frac{\log n_3}{\log n_1}$ (modulo 1).

- commutent, puisqu'ont le même point de coupure et le même invariant $\pi = n_1$.

On fait de même pour les autres valeurs de $j \in \{1, \dots, p\}$ et on a la proposition 4.

Preuve de la Proposition 5.

Soit $r = md$ et k un entier strictement positif.

Soient $a'_1 < \dots < a'_k$ et $b'_1 < \dots < b'_k$ deux p -uplets de points de Δ . les points $a_j = a'_j - a_1$ et $b_j = b'_j - b_1$ appartiennent à Δ et vérifient $0 = a_1 < \dots < a_k = r$ et $0 = b_1 < \dots < b_k = r$.

Pour tout couple c, c' de points de Δ , on a $c - c' = \frac{P}{(n_1 \dots n_p)^s} d \in (I - \Lambda)A$, car $d \in (I - \Lambda)A$, d'après la proposition 0.

Par conséquent, d'après la proposition de Bieri-Strebel rappelée dans le paragraphe 2, pour tout $i = 1, \dots, p - 1$, il existe un homéomorphisme affine par morceaux $H_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow [b_i, b_{i+1}]$ avec pentes dans Λ et points de coupure dans A .

Finalement, l'homéomorphisme H défini sur $[0, r]$ par $H|_{[a_i, a_{i+1}]} = H_i$ et composé par les rotations $R_{-a'_1}$ à droite et $R_{b'_1}$ à gauche est l'homéomorphisme cherché.

Preuve du théorème 3C. Nous allons appliquer la proposition 3 au groupe $T_{r, \Lambda, \mathbb{Q}}$. Vérifions ses hypothèses.

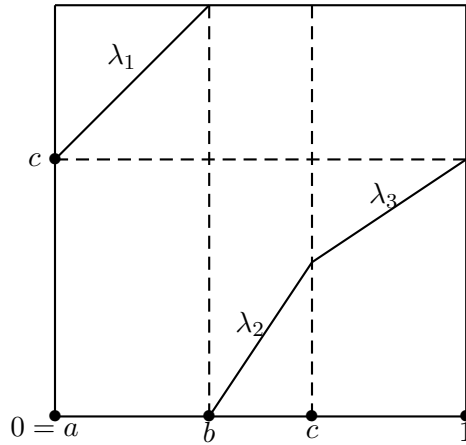
Ce groupe agit o - k -transitivement sur \mathbb{Q} car $(I - \Lambda)A = (I - \Lambda)\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ et on peut reprendre l'argumentaire développé dans la preuve de la proposition 5.

Soient $\pi, \lambda, \lambda' \in \Lambda$ indépendants. Les deux Boshernitzan B_1 et B_2 définis, comme dans la proposition 4, en changeant n_1 par π et n_2 et n_3 par λ et λ' vérifient (ii). Ainsi, par la proposition 3, on a la conclusion voulue.

8 Annexe. Exemples d'homéomorphismes avec la propriété D, calcul de nombre de rotation.

8.1 Famille 1.

Considérons la famille, indexée par les trois pentes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (non toutes du même côté de 1), d'homéomorphismes affines par morceaux représentés sur la figure ci-dessous.



Les trois points de coupures a, b et c sont sur une même orbite : $f(b) = a$ et $f(a) = c$. Calculons b, c en fonction des pentes.

$$\begin{cases} \lambda_1 b & = 1 - c \\ \lambda_2(c - b) + \lambda_3(1 - c) & = c \end{cases}$$

En résulte

$$b(-\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1) = 1 - \lambda_2 \text{ et } c = 1 - \lambda_1 b$$

Calculons les invariants de f :

$$N = 2 \text{ et } \pi(f) = \prod_{k=0,1} \sigma_{f^3}(f^{-k}(c)) = \sigma_{f^3}(c)\sigma_{f^3}(a) = \sigma_f(c)\sigma_f(a)\sigma_f(c) =$$

$$\pi(f) = \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2^2}$$

Lorsque $\pi(f) \neq 1$, le nombre de rotation de f est donné par la formule $\int \log Df d\mu = 0$ qui s'écrit ici :

$$\log \lambda_1(1 - \rho) + \log \lambda_2(2\rho - 1) + \log \lambda_3(1 - \rho) = 0$$

car les points $h(a) = 0, h(b) = R_\rho^{-1}(0)$ et $h(c) = R_\rho(0)$ sont dans cet ordre sur S^1 comme a, b et c .

En résulte $\rho(2 \log \lambda_2 - \log \lambda_1 - \log \lambda_3) = \log \lambda_2 - \log \lambda_1 - \log \lambda_3$.

Le coefficient en ρ est $\log \pi(f) \neq 0$, d'où

$$\rho = \frac{\log \lambda_2 - \log \lambda_1 - \log \lambda_3}{2 \log \lambda_2 - \log \lambda_1 - \log \lambda_3} \text{ si } \pi(f) \neq 1$$

Lorsque $\pi(f) = 1$, le nombre de rotation de f doit être calculé à partir de la conjugaison H à la rotation donnée dans la preuve du théorème 2.

La conjugaison H est caractérisée par :

- $H(0) = 0$
- ses points de coupures sont $f^{-1}(c) = a = 0$ et c ,
- ses sauts en ces points sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_H(a) = \sigma_H(f^{-1}(c)) = \sigma_{f^3}(f^{-1}(c)) = \sigma_f(c)\sigma_f(a) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ \sigma_H(c) = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \end{array} \right.$$

La preuve du théorème 2 indique que f est conjugué par H à la rotation d'angle $\rho = H \circ f(0) = H(c) = \lambda_1^H \cdot c$.

Or λ_1^H est donné par la formule $\lambda_1^H c + \lambda_1^H \sigma_H(c)(1-c) = 1$.

Finalement $\lambda_1^H = \frac{1}{c + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}(1-c)}$ et donc

$$\rho = \frac{c}{c + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}(1-c)} \text{ si } \pi(f) = 1$$

Sous-familles m -adiques.

Nous cherchons dans cette famille des homéomorphismes m -adiques (les Boshernitzan de S^1 ne sont jamais m -adiques).

Posons $\lambda_1 = m^{s_1}$, $\lambda_2 = m^{s_2}$ et $\lambda_3 = m^{s_3}$, il s'agit de faire en sorte que le point de coupure b soit un point m -adique.

Ceci revenant à montrer qu'une $-\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_1(-\lambda_2 + \lambda_3 + 1)$ soit une puissance de m .

Posons $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = 2^{-s}$ et $\lambda_2 = 2$.
On obtient $(-\lambda_2 + \lambda_3 + 1) = 0$, $b = \frac{1}{2}$ est dyadique, $\pi(f) \neq 1$
et $\rho = \frac{s+1}{s+2}$.

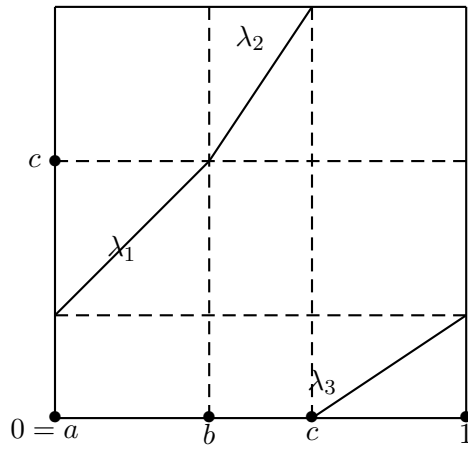
Cet exemple est celui de [GS1984] attribué à un auteur inconnu qui permet de montrer que tout rationnel est réalisé comme nombre de rotation d'un homéomorphisme dyadique. Notons que l'égalité $(-\lambda_2 + \lambda_3 + 1) = 0$ n'est jamais réalisée pour des puissances de $m > 2$.

Posons $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1\lambda_3 = 1$.
 c peut être choisi arbitrairement (donc m -adique) et $b = \frac{1-c}{\lambda_1}$,
on a alors $\pi(f) = 1$ et $\rho = \frac{c}{c+m^s(1-c)}$ lorsque $\lambda_3 = m^s$.

Ce cas est le seul cas avec $\pi(f) = 1$. En effet, lorsque $\pi(f) = 1$ et $\lambda_2 \neq 1$, on a $b = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ et $c = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ ont des signes opposés.

8.2 Famille 2.

Considérons la famille, indexée par les trois pentes λ_1 , λ_2 , et λ_3 (non toutes du même côté de 1), d'homéomorphismes affines par morceaux représentés sur la figure ci-dessous.



Les trois points de coupures a, b et c sont sur une même orbite : $f(b) = c, f(c) = a = 0$. Exprimons les en fonction des pentes.

$$\begin{cases} \lambda_1 b + \lambda_3(1 - c) = c \\ \lambda_2(c - b) = 1 - c \end{cases}$$

En résulte

$$c(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_2) = \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3.$$

Calculons les invariants de f :

$$N = 2 \text{ et } \pi(f) = \prod_{k=0,1} \sigma_{f^3}(f^{-k}(a)) = \sigma_{f^3}(a) \sigma_{f^3}(c) = \sigma_f(a) \sigma_f(c) \sigma_f(a) =$$

$$\pi(f) = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3 \lambda_2}$$

Lorsque $\pi(f) \neq 1$, le nombre de rotation de f est donné par la formule $\int \log Df d\mu = 0$ qui s'écrit ici :

$$\log \lambda_1(1 - 2\rho) + \log \lambda_2(\rho) + \log \lambda_3(\rho) = 0$$

car les points $h(a) = 0, h(b) = R_\rho^{-2}(0) = 1 - 2\rho, h(c) = R_\rho^{-1}(0) = 1 - \rho$ sont dans cet ordre sur S^1 .

En résulte $\rho(-2 \log \lambda_1 + \log \lambda_2 + \log \lambda_3) = -\log \lambda_1$.

Le coefficient en ρ est $\log \pi(f) \neq 0$, d'où

$$\rho = \frac{\log \lambda_1}{2 \log \lambda_1 - \log \lambda_2 - \log \lambda_3} \text{ si } \pi(f) \neq 1$$

Lorsque $\pi(f) = 1$, le nombre de rotation de f doit être calculé à partir de la conjugaison H à la rotation donnée dans la preuve du théorème 2.

La conjugaison H est caractérisée par :

$$H(0) = 0$$

ses points de coupures sont $a = 0$ et $f^{-1}(a) = c$,

ses sauts en ces points sont :

$$\begin{cases} \sigma_H(f^{-1}(a)) = \sigma_{f^3}(f^{-1}(a)) = \sigma_f(a) \sigma_f(c) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ \sigma_H(a) = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \end{cases}$$

La preuve du théorème 2 indique que f est conjugué par H à la rotation d'angle $\rho = H \circ f(0) = H(\lambda_3(1-c)) = \lambda_1^H \lambda_3(1-c)$. Or λ_1^H est donné par la formule $\lambda_1^H c + \lambda_1^H \sigma_H(c)(1-c) = 1$. Finalement $\lambda_1^H = \frac{1}{c + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}(1-c)}$ et donc

$$\rho = \frac{\lambda_3(1-c)}{c + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}(1-c)} \text{ si } \pi(f) = 1$$

Sous-familles m -adiques.

Nous cherchons dans cette famille des homéomorphismes m -adiques.

Posons $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 2^{-s}$.
On obtient $(\lambda_1 - \lambda_3 - 1) = 0$, $c = \frac{2^{s+1}}{2^{s+1}-1}$ est dyadique,
 $\pi(f) \neq 1$ et $\rho = \frac{1}{s+2}$.

Posons $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \lambda_3 = 1$.
 c peut être choisi arbitrairement (donc m -adique), on a alors
 $\pi(f) = 1$ et $\rho = \frac{c}{1+c(1-m^s)}$ lorsque $\lambda_2 = m^s$.

On peut se demander quels rationnels peuvent être réalisés comme nombre de rotation dans ces familles.

Lorsque $m = 2$, tout rationnel peut être réalisé comme nombre de rotation d'un homéomorphisme dyadique. En effet, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, il existe un homéomorphisme dyadique tel que $\rho(f) = \frac{1}{s+2}$, et $\frac{1}{2}$ est réalisé par la rotation d'angle $\frac{1}{2}$. Il ne suffit plus que de considérer les puissance de ces homéomorphismes.

Lorsque $m = 3$, la famille construite dans le dernier encadré, fournit, lorsqu'on prend $c = \frac{N}{3^p}$, avec N non multiple de 3 des homéomorphismes de nombre de rotation $\rho(f) = \frac{N}{m^p + (1-m^s)N}$. Montrons que **tout nombre impair $2k + 1$ qui n'est pas un multiple de 3 peut être réalisé par la formule $m^p + (1-m)N$ pour p et N convenables.**

Soit $q = 2k + 1$ un entier impair non multiple de 3 fixé, considérons l'entier $p > 0$ tel que $3^{p-1} \leq 2k + 1 \leq 3^p$.

Ainsi $3^p - (2k + 1)$ est un nombre pair $2N < 3^p$.

Pour ce choix de p et N , $3^p + (1-3)N = q$.

Maintenant, l'homéomorphisme de la famille 2 avec $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ et $\frac{c=N}{3^p}$ a pour nombre de rotation $\rho(f) = \frac{N}{q}$

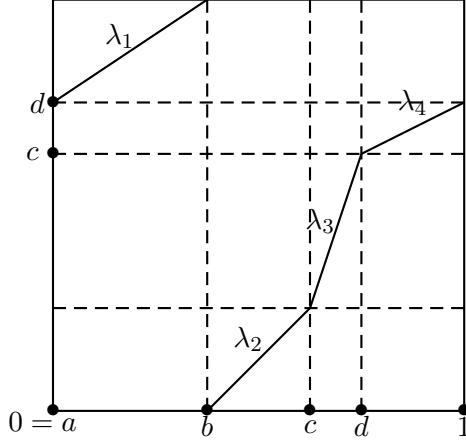
Puisque $3^p = 2N + q$, un diviseur commun de N et q est une puissance de 3 ce qui est impossible, puisque q n'est pas un multiple de 3.

Ainsi (quitte à prendre des puissances des exemples précédents), **tout rationnel dont le dénominateur est impair et non multiple de 3 est réalisé comme nombre de rotation d'un homéomorphisme tri-adique.**

Les rotations d'angles tri-adiques permettent de réaliser les rationnels dont les dénominateurs sont des puissances de 3 (les tri-adiques).

8.3 Famille 3.

Considérons la famille, indexée par les quatre pentes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 (non toutes du même côté de 1), d'homéomorphismes affines par morceaux représentés sur la figure ci-dessous.



Les quatre points de coupures a, b, c et d sont sur une même orbite : $f(b) = 0 = a$, $f(a) = d$ et $f(d) = c$. Exprimons les en fonction des pentes.

$$\begin{cases} \lambda_1 b & = 1 - d \\ \lambda_2(c - b) + \lambda_3(d - c) & = c \\ \lambda_4(1 - d) & = d - c \end{cases}$$

En résulte

$$b(-\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_4 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1 + \lambda_4\lambda_1) = 1 - \lambda_2.$$

Calculons les invariants de f . On a $N = 3$ et

$$\pi(f) = \prod_{k=0,1,2} \sigma_{f^k}(f^{-k}(c)) = \sigma_{f^4}(c)\sigma_{f^4}(d)\sigma_{f^4}(a) = \sigma_f(c)\sigma_f(d)\sigma_f(c)\sigma_f(a)\sigma_f(d)\sigma_f(c) =$$

$$\sigma_f(c)^3\sigma_f(d)^2\sigma_f(a) = \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^3\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\right)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_4}\right).$$

$$\pi(f) = \frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_1}{\lambda_2^3}$$

Lorsque $\pi(f) \neq 1$, le nombre de rotation de f est donné par la formule $\int \log Df d\mu = 0$ qui s'écrit ici :

$$\log \lambda_1(1 - \rho) + \log \lambda_2(3\rho - 2) + \log \lambda_3(1 - \rho) + \log \lambda_4(1 - \rho) = 0$$

car les points $h(a) = 0$, $h(b) = R_\rho^{-1}(0) = 1 - \rho$, $h(c) = R_\rho^2(0) = 2\rho - 1$ et $h(d) = R_\rho(0) = \rho$ puisque sont dans cet ordre sur S^1 .

En résulte $\rho(-\log \lambda_1 + 3\log \lambda_2 - \log \lambda_3 - \log \lambda_4) = -\log \lambda_1 + 2\log \lambda_2 - \log \lambda_3 - \log \lambda_4$.

Le coefficient en ρ est $\log \pi(f) \neq 0$, d'où

$$\rho = \frac{\log \lambda_1 - 2\log \lambda_2 + \log \lambda_3 + \log \lambda_4}{\log \lambda_1 - 3\log \lambda_2 + \log \lambda_3 + \log \lambda_4} \text{ si } \pi(f) \neq 1$$

Lorsque $\pi(f) = 1$, le nombre de rotation de f doit être calculé à partir de la conjugaison H à la rotation donnée dans la preuve du théorème 2.

La conjugaison H est caractérisée par :

$$H(0) = 0$$

ses points de coupures sont c , $f^{-1}(c) = d$ et $f^{-2}(c) = a = 0$,

ses sauts en ces points sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_H(c) = \sigma_{f^4}(c) = \sigma_f(c) = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \\ \sigma_H(d) = \sigma_H(f^{-1}(c)) = \sigma_{f^4}(f^{-1}(c)) = \sigma_f(d)\sigma_f(c) = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \\ \sigma_H(a) = \sigma_H(f^{-2}(c)) = \sigma_{f^4}(f^{-2}(c)) = \sigma_f(a)\sigma_f(d)\sigma_f(c) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{array} \right.$$

Le nombre de rotation de f est donné par $\rho(f) = H(f(0)) = \lambda_3^H(d-1) + 1 = 1 - \lambda_3^H \lambda_1 b = 1 - \lambda_1^H \lambda_2 b$, car $\lambda_3^H = \lambda_1^H \sigma_H(c) \sigma_H(d) = \lambda_1^H \frac{\lambda_3 \lambda_4}{\lambda_2^2}$.

D'autre part, si $\lambda_2 \neq 1$ alors $b = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_1 \lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_2^2} > 0$ et $c = 1 - \lambda_1 b - \lambda_1 \lambda_4 b$.

Puisque c doit vérifier $c > b$, on a :

$b + \lambda_1 b + \lambda_1 \lambda_4 b < 1$ et donc en remplaçant b par sa valeur : $\frac{1 + \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_1 \lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_2^2} < 1$ ce qui est impossible puisque $\lambda_2 + \lambda_2^2 > 0$.

Par conséquent, $\pi(f) = 1$ ne peut se produire que si $\lambda_2 = 1$ et donc $\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 = 1$.

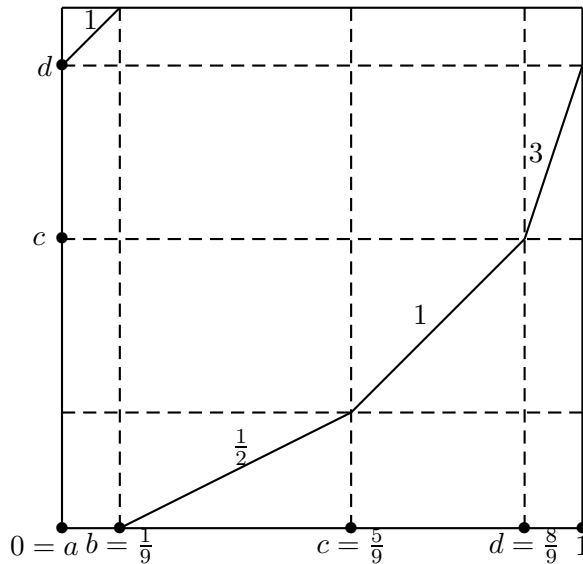
Dans ce cas, $b > 0$ peut-être choisi quelconque de sorte que $c = 1 - \lambda_1 b - \lambda_1 \lambda_4 b > b$ et $1 > d = 1 - \lambda_1 b > c$.

On obtient alors, $\rho(f) = 1 - \lambda_1^H \lambda_2 b$, où λ_1^H est donnée par la formule : $\lambda_1^H c + (d - c) \sigma_H(c) + (1 - d) \sigma_H(c) \sigma_H(d) = 1$. En remplaçant c et d par leurs expressions en b on obtient :

$$\rho(f) = 1 - \frac{b}{b(2 - \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_4) + 1}.$$

Un exemple concret.

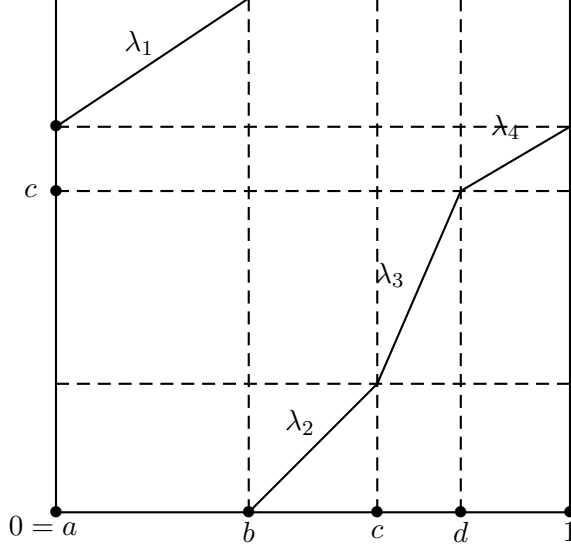
On considère l'homéomorphisme affine par morceaux représenté sur la figure ci-dessous.



On trouve $\pi(f) = 24$ et $\rho(f) = \frac{2 \log 2 + \log 3}{3 \log 2 + \log 3}$. De plus, on voit que f appartient au groupe de Thompson $T_{1, <2,3>, \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]}$ et contrairement aux exemples donnés dans le paragraphe 5, $\pi(f)$ n'est pas une puissance de n_1 ou n_2 .

8.4 Famille 4.

Considérons la famille, indexée par les quatre pentes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 (non toutes du même côté de 1), d'homéomorphismes affines par morceaux représentés sur la figure ci-dessous. Dans cette famille les discontinuités ne sont pas toutes sur une seule orbite.



Les quatre points de coupures a, b, c et d vérifient $f(b) = 0 = a$ et $f(d) = c$ et les sauts de f en ces points : $\sigma_f(a)\sigma_f(b) = \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 1$ et $\sigma_f(c)\sigma_f(d) = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 1$.

Ainsi, $\lambda_2 = \lambda_4$.

Calculons les invariants de f :

$$N = 1 \text{ et } \pi(f) = \prod_{k=0} \sigma_{f^2}(f^{-k}(a))\sigma_{f^2}(f^{-k}(c)) = \sigma_{f^2}(a)\sigma_{f^2}(c) = \sigma_f(a)\sigma_f(c) =$$

$$\frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2 \lambda_2} = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2^2}.$$

$$\pi(f) = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2^2}$$

Même lorsque $\pi(f) \neq 1$, le nombre de rotation de f n'est plus donné par la formule $\int \log Df d\mu = 0$, il faut calculer H , la conjugaison à la rotation ou au Boshernitzan donnée dans la preuve du théorème 2.

La conjugaison H est caractérisée par :

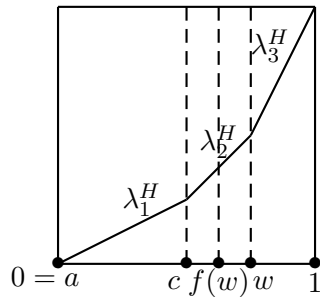
$$H(0) = 0,$$

ses points de coupures sont $a = 0$ et c ,

ses sauts en ces points sont :

$$\begin{cases} \sigma_H(a) = \sigma_{f^2}(a) = \sigma_f(a) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ \sigma_H(c) = \sigma_{f^2}(c) = \sigma_f(c) = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \end{cases}$$

Si $\pi(f) \neq 1$, la conjugaison H doit avoir une discontinuité supplémentaire $w \in]d, 1[$ avec saut $\sigma_H(w) = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_3}$.



L'homéomorphisme H .

Le nombre de rotation de f est alors donné par $\rho(f) = \frac{\lambda_+}{\pi(f)}$, où $\lambda_+ = D_+(H \circ f \circ H^{-1})(H(w)) = \frac{D_+H(f(w))}{D_+H(w)} D_+f(w) = \sigma_H(w)^{-1} \lambda_4 = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2}$ car on a toujours $c < f(w) < w$.

Finalement, $\rho(f) = \frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_1 - 2 \log \lambda_2 + \log \lambda_3}$.

Si $\pi(f) = 1$, alors les points de coupure de f vérifient le système :

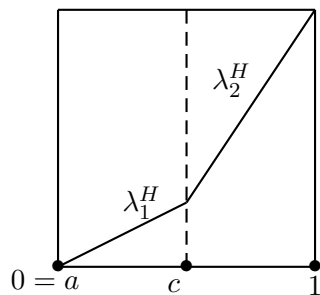
$$\begin{cases} \lambda_1 b + \lambda_2(1 - d) & = 1 - c \\ \lambda_2(c - b) + \lambda_3(d - c) & = c \end{cases}$$

qui est équivalent à l'équation :

$$c(1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) = \lambda_3(1 - \lambda_2).$$

Maintenant si $\lambda_2 \neq 1$, on trouve $c = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2}$ qui est strictement négatif ou strictement supérieur à 1, ce qui est impossible puisque $c \in [0, 1]$. Ainsi, on doit avoir $\lambda_2 = 1 = \lambda_1 \lambda_3$. Les points b et c peuvent être choisis arbitrairement dans $[0, 1]$ à condition que $0 < b < c < d = \lambda_1 b + c < 1$.

Le nombre de rotation de f est donné par $\rho(f) = H \circ f(0) = \lambda_2^H(f(0) - 1) + 1 = 1 - \lambda_2^H \lambda_1 b$.

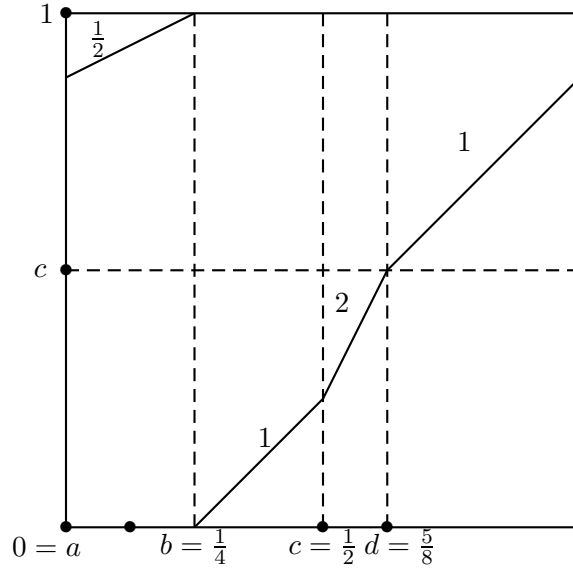


L'homéomorphisme H .

La pente λ_2^H est donnée par $\lambda_2^H(1 - c) + \frac{\lambda_2^H}{\sigma_H(c)}c = 1$, d'où $\lambda_2^H(1 - c + \frac{c}{\lambda_3}) = 1$ et finalement $\rho(f) = 1 - \frac{\lambda_1}{1 - c + \frac{c}{\lambda_3}} = 1 - \frac{1}{\lambda_3(1 - c) + c}$.

Exemples concrets.

1)- On considère l'homéomorphisme affine par morceaux représenté sur la figure ci-dessous.



On trouve $\rho(f) = \frac{5}{6}$, on vérifie cette valeur en calculant l'orbite de b :

$$\left\{ b, f(b) = 0, f^2(b) = \frac{7}{8}, f^3(b) = \frac{3}{4}, f^4(b) = \frac{5}{8} = d, f^5(b) = \frac{1}{2} = c, f^6(b) = \frac{1}{4} = b \right\}$$

2)- On obtient un exemple d'ordre 17 en posant $a = 0, b = \frac{1}{3}, c = \frac{5}{9}, d = \frac{2}{3}$ et $\lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \lambda_4 = 1, \lambda_3 = 3$. On peut écrire f :

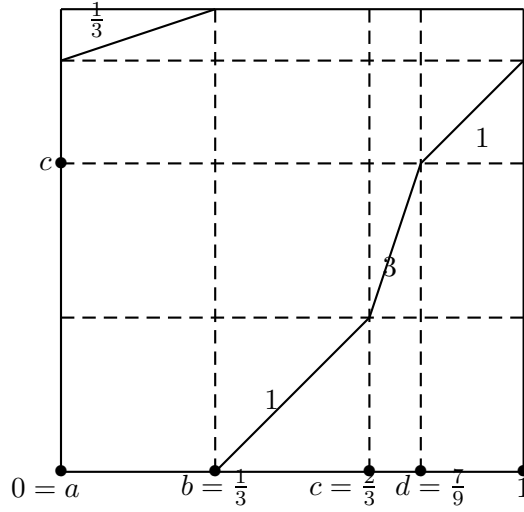
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{8}{9} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ f(x) = x - \frac{1}{3} & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{5}{9}] \\ f(x) = 3x - \frac{13}{9} & \text{si } x \in [\frac{5}{9}, \frac{2}{3}] \\ f(x) = x - \frac{1}{9} & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

On calcule $\rho(f) = \frac{14}{17}$ et l'orbite de b est :

$$\left\{ \begin{aligned} b, f(b) = 0, f^2(b) = \frac{8}{9}, f^3(b) = \frac{7}{9}, f^4(b) = \frac{6}{9} = d, f^5(b) = \frac{5}{9} = c, f^6(b) = \frac{2}{9}, f^7(b) = \frac{26}{27}, \\ f^8(b) = \frac{23}{27}, f^9(b) = \frac{20}{27}, f^{10}(b) = \frac{17}{27}, f^{11}(b) = \frac{4}{9}, f^{12}(b) = \frac{1}{9}, f^{13}(b) = \frac{25}{27}, f^{14}(b) = \frac{22}{27}, \\ f^{15}(b) = \frac{19}{27}, f^{16}(b) = \frac{16}{27}, f^{17}(b) = \frac{1}{3} = b \end{aligned} \right\}$$

On peut observer que sur ces deux derniers exemples les discontinuités sont sur une même orbite.

3)- Un exemple avec calcul de l'homéomorphisme H et vérification du fait que lorsque $f \in T_{r,\Lambda,A}$ l'homéomorphisme H n'appartient pas forcément à ce groupe.

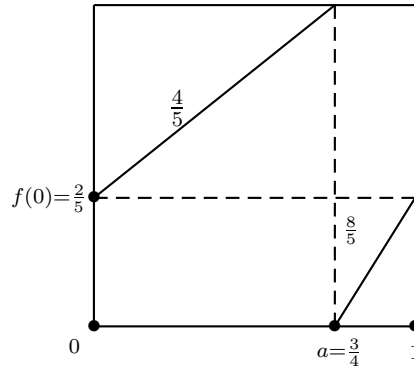
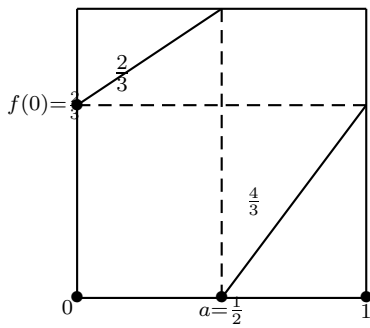


L'homéomorphisme H a pour :

- points de coupure 0 et $c = \frac{2}{3}$,
- sauts $\sigma_H(0) = \frac{1}{3}$ et $\sigma_H(c) = 3$,
- pentes $\lambda_1^H = \frac{2}{5}$ et $\lambda_2^H = \frac{6}{5}$ (car $1 = \frac{2}{3}\lambda_1^H + \frac{1}{3}\lambda_2^H = \lambda_1^H(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}3)$),
- images de points de coupure $H(c) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

L'homéomorphisme $f \in T_{1,3}$ mais pas H , de plus H ne préserve pas A .

8.5 Boshernitzan commutants



Le Boshernitzan de gauche appartient au groupe de Thompson généralisé $T_{1,(2,3)} \subset T_{1,(2,3,5)}$ et son nombre de rotation est

$$\rho(f) = \frac{\log \lambda_1}{\log \pi} = 1 - \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Le Boshernitzan de droite appartient au groupe de Thompson généralisé $T_{1,(2,5)} \subset T_{1,(2,3,5)}$ et son nombre de rotation est $\rho(f) = \frac{\log \lambda_1}{\log \pi} = 2 - \frac{\log 5}{\log 2}$.

Ces deux Boshernitzan commutent car ils ont même point de coupure final 0 et même invariant π ; leurs nombres de rotation sont des irrationnels rationnellement indépendants. le groupe $T_{1,(2,3,5)}$ vérifie (ii) de la proposition 3. Les entiers 2, 3 et 5 sont premiers et $d = 1$, par conséquent le groupe $T_{1,(2,3,5)}$ n'a pas d'automorphisme extérieur autre que l'involution standard.

9 Références.

- [BS1985] R. Bieri and R. Strebel, groups of PL homeomorphisms of the real line, preprint, Math. Sem. der Univ. Frankfurt, Frankfurt am Main, 1985.
- [Bo1993] M. Boshernitzan, *Dense orbits of rationals*, Proc. AMS, **117**, n° 4, (1993), 1201-1203.
- [Bro1987] K. S. Brown, *Finiteness properties of groups*, J. Pure Appl. Algebra 44 (1987), 45–75.
- [Bri1996] M. G. Brin, *The chameleon groups of Richard J. Thompson : Automorphisms and dynamics*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 84 (1996), 5–33.
- [BG1998] M. G. Brin, F. Guzmán, *Automorphisms of generalized Thompson groups*. J. Algebra 203 (1998), no. 1, 285–348.
- [CLR1995] Z. Coelho, A. Lopez, L. F. da Rocha, *Absolutely continuous invariant measures for class of affine interval interval exchange maps*, Proc. AMS, **123**, n° 11, (1995), 533-542.
- [De1932] A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl., **11**, (1932), 333-375.
- [GhSe1987] É. Ghys, V. Sergiescu, *Sur un groupe remarquable de difféomorphisme du cercle*, Comm. Math. Helv., **62**(1987), 185-239.
- [Gh2000] É. Ghys, *Groups acting on the circle*, L'Ens. Math., **62**, (2000), 215-256.
- [He1979] M. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., **49**, (1979), 5-234.
- [Hi1974] G. Higman, *Finitely presented infinite simple groups*. Notes on Pure Mathematics, No. 8 (1974). Department of Pure Mathematics, Department of Mathematics, I.A.S. Australian National University, Canberra, 1974. vii+82 pp
- [Li2003] I. Liousse, *Nombre de rotation et mesures invariantes des homéomorphisms affines par morceaux du cercle*, Actes de congrés SMT 2002.
- [Li2004] I. Liousse, *PL homeomorphisms that are piecewise C^1 conjugate to irrational rotations*, Bulletin. Brazilian Mathematical Society, New Series 35 (2), 269-280.
- [Li2005] I. Liousse, *Nombre de rotation, mesures invariantes et ratio set des homéomorphisms affines par morceaux du cercle*, Annales de l'institut Fourier, à paraître (2005).
- [LM2002] I. Liousse, H. Marzougui, *Echanges d'intervalles affines conjugués à des linéaires*, Erg. Th. and Dyn. Syst., **22**, (2002), 535-554.
- [McCR1996] S. H. McCleary and M. Rubin, *Locally moving groups and the reconstruction problem for chains and circles*, preprint, Bowling Green State University, Bowling Green, Ohio, 1996 aussi dans :
- [R1996] *Locally moving groups and reconstruction problems*. (English. English summary) Ordered groups and infinite permutation groups, 121–157, Math. Appl., 354, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [Mi1995] H. Minakawa, *Exotic circles of $PL_+(S^1)$* . Hokkaido Math. J. 24 (1995), no. 3, 567–573.
- [Mi1997] H. Minakawa, *Classification of exotic circles of $PL_+(S^1)$* . Hokkaido Math. J. 26 (1997), no. 3, 685–697.
- [Po] H. Poincaré, *Oeuvres complètes*, t.1, 137-158.
- [St1992] M. Stein, *Groups of piecewiselinear homeomorphisms*, Trans. A.M.S. **332**, (1992), 477-514.

Laboratoire Paul PAINLEVÉ, U.M.R 8524 au CNRS
U.F.R. de Mathématiques, Université Lille I
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France