



HAL
open science

Classification of Galois objects of $Uq(g)$ up to homotopy equivalence

Thomas Aubriot

► **To cite this version:**

Thomas Aubriot. Classification of Galois objects of $Uq(g)$ up to homotopy equivalence. Communication in Algebra, 2007, 35 (12), pp.3919–3936. 10.1080/00927870701509446 . hal-00004479v3

HAL Id: hal-00004479

<https://hal.science/hal-00004479v3>

Submitted on 12 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CLASSIFICATION DES OBJETS GALOISIENS DE $U_q(\mathfrak{g})$ HOMOTOPIE PRS

PAR THOMAS AUBRIOT

RÉSUMÉ. — Pour toute algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$ de Drinfeld-Jimbo et toute famille $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i < j \leq t} \in k^*$ d'éléments inversibles du corps de base, nous construisons explicitement par générateurs et relations un objet galoisien A_λ de $U_q(\mathfrak{g})$ et nous montrons que tout objet galoisien de $U_q(\mathfrak{g})$ est homotope à un unique objet de la forme A_λ .

ABSTRACT (*Classification of Galois objects of $U_q(\mathfrak{g})$ up to homotopy equivalence*)

For any Drinfeld-Jimbo quantum enveloping algebra $U_q(\mathfrak{g})$ and for any family $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i < j \leq t} \in k^*$ of invertible elements of the base field, we explicitly construct a Galois object A_λ of $U_q(\mathfrak{g})$ by generators and relations and we prove that any Galois object of $U_q(\mathfrak{g})$ is homotopic to a unique object of type A_λ .

Introduction

Le concept d'extension Hopf-galoisienne qui a été beaucoup étudié ces dernières années est une généralisation naturelle du concept classique d'extension galoisienne de corps commutatifs. C'est aussi l'analogue algébrique de la notion de fibré principal dans le cadre de la géométrie non commutative.

Bien qu'une littérature abondante ait été consacrée aux extensions Hopf-galoisiennes (voir par exemple [M], [S] et les références données dans ces deux

10.10.2006

THOMAS AUBRIOT, Institut de Recherche Mathématique Avancée, C.N.R.S. - Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France, Fax : +33 (0)3 90 24 03 28
E-mail : aubriot@math.u-strasbg.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 16W30, 17B37, 55R10, 58B34, 81R50, 81R60.

Mots clefs. — Extension galoisienne, Algèbre de Hopf, Groupe quantique de Drinfeld-Jimbo, Homotopie, Géométrie non commutative, Fibré principal.

articles), on a peu de résultats sur leur classification à isomorphisme près. Pour contourner la difficulté — qui semble grande — de classer les extensions Hopf-galoisiennes à isomorphisme près, Kassel [K] a introduit sur les extensions Hopf-galoisiennes une relation d'équivalence moins fine que l'isomorphie, relation qu'il a appelée homotopie. Dans [KS] Kassel et Schneider en ont fait une étude systématique. Ils donnent notamment une application à la classification des extensions Hopf-galoisiennes lorsque l'algèbre de Hopf est l'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$ associée par Drinfeld et Jimbo à une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} . L'une des conséquences des résultats de [KS] porte sur l'ensemble $\mathcal{H}_k(U_q(\mathfrak{g}))$ des classes d'homotopie des extensions $U_q(\mathfrak{g})$ -galoisiennes du corps de base k (ces objets sont également appelés objets galoisiens de $U_q(\mathfrak{g})$) : Kassel et Schneider démontrent que $\mathcal{H}_k(U_q(\mathfrak{g}))$ est en bijection avec le groupe de cohomologie $H^2(G, k^*)$, où G est le groupe des éléments "group-like" de $U_q(\mathfrak{g})$ opérant trivialement sur le groupe k^* des éléments inversibles de k . Le groupe G est un groupe abélien libre dont le rang t est égal à celui de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Il est bien connu que tout élément de $H^2(G, k^*)$ peut être représenté par une famille λ de $t(t-1)/2$ éléments non nuls du corps de base.

Le but de cet article est de construire explicitement par générateurs et relations un objet galoisien A_λ de $U_q(\mathfrak{g})$ pour toute famille λ de ce type et de montrer que tout objet galoisien de $U_q(\mathfrak{g})$ est homotope à un unique objet galoisien de la forme A_λ .

Au paragraphe 1, nous rappelons la définition des concepts d'extension Hopf-galoisienne et d'objet galoisien. Nous redonnons également la présentation standard de l'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$.

Les objets galoisiens A_λ sont construits au paragraphe 2. Nous y énonçons aussi le théorème principal de l'article.

Le paragraphe 3 est entièrement consacré à la démonstration du théorème.

1. Rappels

1.1. Extensions galoisiennes et objets galoisiens. — Soit k un corps commutatif. Tous les objets de cet article appartiennent à la catégorie tensorielle des k -espaces vectoriels et nous ne considérons que des algèbres de Hopf admettant une antipode bijective. Si H est une algèbre de Hopf et A est une algèbre H -comodule à droite dont la coaction est le morphisme d'algèbres $\delta : A \rightarrow A \otimes H$, nous définissons la sous-algèbre B des éléments H -covariants de A par

$$(1) \quad B = \{a \in A \mid \delta(a) = a \otimes 1\}.$$

L'application linéaire $\beta : A \otimes_B A \rightarrow A \otimes H$ définie par

$$(2) \quad \beta(a \otimes a') = (a \otimes 1)\delta(a'),$$

pour $a, a' \in A$, est appelée *l'application canonique* associée à A . Une algèbre H -comodule à droite A est une *extension H -galoisienne* de B si B est la sous-algèbre des éléments H -covariants de A , si l'application canonique $\beta : A \otimes_B A \rightarrow A \otimes H$ associée à A est un isomorphisme et si A est fidèlement plat en tant que B -module à droite ou à gauche.

Un *objet galoisien* d'une algèbre de Hopf H est une extension H -galoisienne du corps de base k .

Deux extensions H -galoisiennes A et A' de B sont dites *isomorphes* s'il existe un morphisme $f : A \rightarrow A'$ d'algèbres H -comodules qui soit un isomorphisme et qui soit l'identité sur B .

Nous notons $\text{Gal}_B(H)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions H -galoisiennes de B . L'ensemble $\text{Gal}_B(H)$ peut être considéré comme un foncteur contravariant en H . En effet, soit $i : K \rightarrow H$ un morphisme d'algèbres de Hopf. Rappelons [EM] que, tant donn une algèbre de Hopf H , un comodule A droite de coaction δ_A et un comodule K gauche de coaction δ_K , le produit cotensoriel $A \square_H K$ est défini comme le noyau de l'application

$$(3) \quad \text{Id}_A \otimes \delta_K - \delta_A \otimes \text{Id}_K : A \otimes K \rightarrow A \otimes H \otimes K,$$

(ou encore l'algélisateur des coactions de A et K). Si A est une extension H -galoisienne de B droite, alors

$$(4) \quad i^*(A) = A \square_H K$$

est une extension K -galoisienne de B droite d'après [S, Prop 3.11 (3)].

Kassel et Schneider [KS] (voir aussi [K]) ont défini une relation d'équivalence, notée \sim et appelée *homotopie*, sur l'ensemble $\text{Gal}_B(H)$ (nous renvoyons à [KS] pour la définition). Nous notons $\mathcal{H}_B(H)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'extensions H -galoisiennes de B . L'application

$$(5) \quad i^* : \text{Gal}_B(H) \rightarrow \text{Gal}_B(K)$$

induite par un morphisme d'algèbres de Hopf $i : K \rightarrow H$ et définie plus haut, passe aux classes d'homotopie et définit une application

$$(6) \quad i^* : \mathcal{H}_B(H) \rightarrow \mathcal{H}_B(K).$$

1.2. Cocycles et extensions clives. — Suivant ([M, Chapitre 7]), nous dirons qu'une application bilinéaire $\sigma : H \times H \rightarrow k$ est un *cocycle normalis inversible* pour l'algèbre de Hopf H si σ est inversible pour la convolution et vérifie les relations

$$(7) \quad \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma(x_{(2)}y_{(2)}, z) = \sigma(y_{(1)}, z_{(1)})\sigma(x, y_{(2)}z_{(2)})$$

et

$$(8) \quad \sigma(1, x) = \sigma(x, 1) = \varepsilon(x),$$

pour $x, y, z \in H$ (ε est la conit de H).

Nous avons utilisé ici la notation de Sweedler $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ pour la comultiplication Δ de H , notation que nous utiliserons dans la suite de l'article pour les différentes comultiplications et coactions.

Rappelons ([M, Chapitre 7]) que si H est une algèbre de Hopf, $\sigma : H \times H \rightarrow k$ un cocycle inversible normalis et B une algèbre, alors le *produit crois* $B \sharp_\sigma H$ est l'espace vectoriel $B \otimes H$ muni du produit associatif et unifié

$$(9) \quad (a \sharp h)(b \sharp k) = \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})ab \sharp h_{(2)}k_{(2)},$$

pour tout $a, b \in B$ et $h, k \in H$. De plus, cette algèbre peut être munie d'une structure d'algèbre H -comodule droite induite par la comultiplication de H , ce qui fait de $B \sharp_\sigma H$ une extension H -galoisienne de B . Les extensions H -galoisiennes de cette forme sont appelées *extensions clives* (*cleft* en anglais). Lorsque $k = B$, le produit crois $k \sharp_\sigma H$ s'identifie à H muni du produit

$$(10) \quad x \cdot_\sigma y = \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)},$$

pour $x, y \in H$. Nous notons ${}_\sigma H$ l'espace vectoriel H muni de ce produit associatif dont l'unité est celle de H .

Si H est une algbre de Hopf et ρ est un cocycle normalis inversible, nous pouvons aussi dfinir l'algbre de Hopf H^ρ comme la cogbre H munie du produit associatif modifi

$$(11) \quad x \cdot_\rho y = \rho(x_{(1)}, y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)}\rho^{-1}(x_{(3)}, y_{(3)}),$$

pour $x, y \in H$. Nous dfinissons aussi pour toute H -comodule algbre droite A la H^ρ -comodule algbre tordue droite A_ρ qui est le H^ρ -comodule (ou H -comodule) A muni du produit

$$(12) \quad a \cdot_\rho b = a_{(1)}b_{(1)}\rho^{-1}(a_{(2)}, b_{(2)}),$$

pour $a, b \in A$. Alors il existe une bijection entre les extensions H -galoisiennes de B droite et les extensions H^ρ -galoisiennes de B droite $j : \text{Gal}_B(H) \rightarrow \text{Gal}_B(H^\rho)$ donne par

$$(13) \quad j(A) = A_\rho.$$

Montgomery et Schneider [MS, Thorme 5.3] ont montr que, si ${}_\sigma H$ est une extension clive de H , alors son image $j({}_\sigma H) = ({}_\sigma H)_\rho$ dans $\text{Gal}_k(H^\rho)$ est une extension clive de H^ρ qui s'identifie ${}_{\sigma*\rho^{-1}}(H^\rho)$.

Au paragraphe 3, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 1. — *Soit H' une sous-algbre de Hopf d'une algbre de Hopf H et $\sigma' : H' \otimes H' \rightarrow k$ un cocycle de H' , s'tendant en un cocycle $\sigma : H \otimes H \rightarrow k$ de H . Nous avons alors un isomorphisme d'algbres*

$$(14) \quad {}_\sigma H \square_H H' \cong {}_{\sigma'} H'.$$

Démonstration. — Considrons les bijections linaires (voir [EM, Prop 2.1])

$$(15) \quad H' \xrightarrow{\mu} H \square_H H' \xrightarrow{\nu} H'$$

donnes par $\mu = (i \otimes \text{Id}) \circ \Delta_{H'}$ et $\nu = \varepsilon \otimes \text{Id}$. Les structures d'espaces vectoriels et de comodules de ${}_\sigma H$ et ${}_{\sigma'} H'$ tant par d'finition les mêmes que celles de H et H' respectivement, ces bijections valent aussi pour ${}_\sigma H$ et ${}_{\sigma'} H'$:

$$(16) \quad {}_{\sigma'} H' \xrightarrow{\mu} {}_\sigma H \square_H H' \xrightarrow{\nu} {}_{\sigma'} H'.$$

Montrons maintenant que l'isomorphisme μ est aussi un morphisme d'algbres de ${}_{\sigma'} H'$ sur ${}_\sigma H \square_H H$. Notons $g \cdot_{\sigma'} h$ le produit dans ${}_{\sigma'} H'$ de deux lments g et h de H' ; nous gardons la notation gh pour leur produit dans H' et les notations g, h pour les lments $g, h \in H'$ vu dans H . Nous notons aussi $g \cdot_\sigma h$ le produit dans ${}_\sigma H$ de deux lments g, h . Nous obtenons

$$(17) \quad \begin{aligned} \mu(g \cdot_{\sigma'} h) &= \sigma'(h_{(1)}, g_{(1)})\mu(g_{(2)}h_{(2)}) \\ &= \sigma'(h_{(1)}, g_{(1)})(g_{(2)}h_{(2)} \otimes g_{(3)}h_{(3)}) \\ &= (\sigma(h_{(1)}, g_{(1)})g_{(2)}h_{(2)}) \otimes g_{(3)}h_{(3)} \\ &= g_{(1)} \cdot_\sigma h_{(1)} \otimes g_{(2)}h_{(2)} \end{aligned}$$

pour tout $g, h \in G$, ce qui assure que

$$(18) \quad \mu : {}_{\sigma'} H' \rightarrow {}_\sigma H \square_H H'$$

est un isomorphisme d'algbres. □

1.3. Les algèbres enveloppantes quantiques de Drinfeld-Jimbo. —

Nous supposons dsormais que k est un corps de caractéristique différente de 2 ou 3. Fixons la matrice de Cartan $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq t}$ d'une algbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} , des entiers $(d_i)_{1 \leq i \leq t} \in \{1, 2, 3\}$ tels que $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ pour tout $1 \leq i, j \leq t$ ainsi qu'un lment inversible $q \in k$ tel que $q^{2d_i} \neq 1$ pour tout $i = 1, \dots, t$.

L'algbre de Drinfeld-Jimbo $U_q(\mathfrak{g})$ (voir [J, Chapitre 4]) est l'algbre associative unitaire engendre par les gnrateurs E_i, F_i, K_i et K_i^{-1} pour $1 \leq i \leq t$ et les relations

$$(19) \quad K_i K_j = K_j K_i, \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1,$$

$$(20) \quad K_i E_j = q^{d_i a_{ij}} E_j K_i,$$

$$(21) \quad K_i F_j = q^{-d_i a_{ij}} F_j K_i,$$

$$(22) \quad E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

$$(23) \quad \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} E_i^{1-a_{ij}-r} E_j E_i^r = 0,$$

$$(24) \quad \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} F_i^{1-a_{ij}-r} F_j F_i^r = 0,$$

pour $1 \leq i, j \leq t$.

Il est bien connu ([J, Chapitre 4]) que $U_q(\mathfrak{g})$ peut être munie d'une structure d'algbre de Hopf avec la comultiplication Δ dfinie sur les gnrateurs par

$$(25) \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i,$$

$$(26) \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,$$

$$(27) \quad \Delta(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1},$$

la coïnit ε dfinie par

$$(28) \quad \varepsilon(E_i) = 0, \quad \varepsilon(F_i) = 0, \quad \varepsilon(K_i^{\pm 1}) = 1,$$

et l'antipode S dfinie par

$$(29) \quad S(E_i) = -K_i^{-1} E_i, \quad S(F_i) = -F_i K_i, \quad S(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\mp 1},$$

pour tout $1 \leq i \leq t$.

Notons G le sous-groupe multiplicatif de $U_q(\mathfrak{g})$ engendr par K_1, K_2, \dots, K_t . C'est un sous-groupe ablien libre de rang t . Notons encore $U_q(\mathfrak{g})^+$ la sous-algbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendre par les gnrateurs K_i, K_i^{-1} et E_i , pour $1 \leq i \leq t$, et les relations (19), (20) et (23) et $U_q(\mathfrak{g})^-$ celle engendre par les gnrateurs K_i, K_i^{-1} et F_i , pour $1 \leq i \leq t$, et les relations (19), (21) et (24). L'algbre de Hopf $U_q(\mathfrak{g})$ est filtre avec les gnrateurs $K_i^{\pm 1}$ en degr 0 et les gnrateurs E_i, F_i en degr 1. L'algbre de Hopf gradue $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})$ associe cette filtration est engendre, comme

algèbre, par E_i, F_i, K_i et K_i^{-1} , pour $1 \leq i \leq t$, soumis aux relations (19) - (21), (23), (24) ainsi qu' la relation de commutation

$$(30) \quad E_i F_j - F_j E_i = 0,$$

pour $1 \leq i, j \leq t$. Notons aussi $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^+$ la sous-algèbre de $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les gnrateurs K_i, K_i^{-1} et E_i , pour $1 \leq i \leq t$, et les relations (19), (20) et (23) et $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^-$ celle engendrée par les gnrateurs K_i, K_i^{-1} et F_i , pour $1 \leq i \leq t$, et les relations (19), (21) et (24) et remarquons que nous pouvons identifier $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^+ \cong U_q(\mathfrak{g})^+$ ainsi que $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^- \cong U_q(\mathfrak{g})^-$.

Kassel et Schneider [KS, Section 4] ont montré qu'il existe un unique cocycle normalisé $\rho : \text{Gr } U_q(\mathfrak{g}) \times \text{Gr } U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow k$ qui vérifie

$$(31) \quad \rho(K_i, K_j) = 1,$$

$$(32) \quad \rho(E_i, F_j) = -\frac{\delta_{ij}}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

pour $1 \leq i, j \leq t$ et

$$(33) \quad \rho(x, y) = 0,$$

pour tous les autres couples de gnrateurs x, y (en particulier ce cocycle n'est pas symétrique et $\rho(F_j, E_i) = 0$). De plus si x, y, z appartiennent à la même sous-algèbre $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^+$ ou $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^-$, on a

$$(34) \quad \rho(x, yz) = \rho(x_{(1)}, y)\rho(x_{(2)}, z),$$

$$(35) \quad \rho(xy, z) = \rho(x, z_{(2)})\rho(y, z_{(1)}).$$

La relation (34) est encore vraie si $x \in \text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^-$ et $y, z \in \text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^+$ et la relation (35) est vraie si $x, y \in \text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^-$ et $z \in \text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^+$. En particulier, ces relations impliquent

$$(36) \quad \rho(x, 1) = \rho(1, x) = \varepsilon(x),$$

pour tout $x \in \text{Gr } U_q(\mathfrak{g})$. Kassel et Schneider [KS, Section 4] ont établi qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf $U_q(\mathfrak{g}) \cong \text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^\rho$ qui est l'identité sur les gnrateurs.

2. Le résultat

Nous considérons une famille $(\lambda_{ij})_{1 \leq i < j \leq t}$ d'éléments inversibles de k . Par commodité, nous posons $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$ et $\lambda_{ii} = 1$ pour tout $1 \leq j \leq i \leq t$.

Nous définissons l'algèbre A_λ comme l'algèbre associative unitaire engendrée par des gnrateurs X_i, Y_i, Z_i, Z_i^{-1} pour $1 \leq i \leq t$ et les relations

$$(37) \quad Z_i Z_j = \lambda_{ij}^2 Z_j Z_i, \quad Z_i Z_i^{-1} = Z_i^{-1} Z_i = 1,$$

$$(38) \quad Z_i X_j = \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} X_j Z_i,$$

$$(39) \quad Z_i Y_j = q^{-d_i a_{ij}} Y_j Z_i,$$

$$(40) \quad X_i Y_j - Y_j X_i = \delta_{ij} \frac{Z_i}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

$$(41) \quad \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \left[\begin{matrix} 1-a_{ij} \\ r \end{matrix} \right]_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} X_i^{1-a_{ij}-r} X_j X_i^r = 0,$$

$$(42) \quad \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \left[\begin{matrix} 1-a_{ij} \\ r \end{matrix} \right]_{q^{d_i}} Y_i^{1-a_{ij}-r} Y_j Y_i^r = 0,$$

pour $1 \leq i, j \leq t$.

Posons

$$(43) \quad \delta(X_i) = X_i \otimes 1 + Z_i \otimes E_i,$$

$$(44) \quad \delta(Y_i) = Y_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,$$

$$(45) \quad \delta(Z_i^{\pm 1}) = Z_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1},$$

pour tout $1 \leq i \leq t$.

Nous nonons maintenant notre rsultat principal.

THÉORÈME. — 1) Les formules (43), (44) et (45) munissent A_λ d'une structure d'objet galoisien cliv sur $U_q(\mathfrak{g})$.

2) Tout objet galoisien sur $U_q(\mathfrak{g})$ est homotope un objet galoisien de la forme A_λ .

3) Deux objets $U_q(\mathfrak{g})$ -galoisiens A_λ et $A_{\lambda'}$ sont homotopes si et seulement si les familles λ et λ' les dfinissant sont gales.

La suite de l'article est consacre la dmonstration du thorme.

3. Dmonstration du thorme

3.1. Cocycles sur $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})$ provenant d'une famille λ . — Pour toute famille $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i < j \leq t}$ d'inversibles de k , nous notons encore $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$ et $\lambda_{ii} = 1$ pour tout $1 \leq j \leq i \leq t$ et nous dfinissons un cocycle de $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})$ comme suit. Notons $\sigma_\lambda : k[G] \times k[G] \rightarrow k$ l'application bilinaire dtermine par

$$(46) \quad \sigma_\lambda(K_i, K_j) = \lambda_{ij},$$

pour $1 \leq i, j \leq t$, et par

$$(47) \quad \sigma_\lambda(g_1 g_2, h) = \sigma_\lambda(g_1, h) \sigma_\lambda(g_2, h),$$

et

$$(48) \quad \sigma_\lambda(h, g_1 g_2) = \sigma_\lambda(h, g_1) \sigma_\lambda(h, g_2),$$

pour $g_1, g_2, h \in G$. On a donc $\sigma_\lambda(1, g) = \sigma_\lambda(g, 1) = 1$ pour tout $g \in G$.

Soit $\pi : \text{Gr } U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow k[G]$ le morphisme d'algbres de Hopf dfini par

$$(49) \quad \pi(E_i) = \pi(F_i) = 0, \quad \pi(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1},$$

pour $i = 1, \dots, t$. Posons $\widetilde{\sigma}_\lambda = \sigma_\lambda \circ (\pi \times \pi) : \text{Gr } U_q(\mathfrak{g}) \times \text{Gr } U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow k$. On a le lemme immdiat suivant.

LEMME 2. — Les applications σ_λ et $\widetilde{\sigma}_\lambda$ sont des cocycles normaliss pour les algbres de Hopf $k[G]$ et $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})$, respectivement, inversibles pour la convolution, d'inverses respectifs $\sigma_{\lambda^{-1}}$ et $\widetilde{\sigma}_{\lambda^{-1}}$.

3.2. L'algbre comodule A_λ comme $U_q(\mathfrak{g})$ -extension clive. — Considérons une famille $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq t}$ d'éléments inversibles de k et les cocycles (pour l'algbre de Hopf $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})$) $\widetilde{\sigma}_\lambda$, défini au paragraphe 1.3, et ρ^{-1} inverse (pour la convolution) du cocycle ρ , défini par Kassel et Schneider et rappel au paragraphe 1.3. La convolution de ces deux cocycles définit un cocycle $\sigma_\rho = \widetilde{\sigma}_\lambda * \rho^{-1}$ pour l'algbre de Hopf $\text{Gr } U_q(\mathfrak{g})^\rho \cong U_q(\mathfrak{g})$ (voir [MS, Thorne 5.3]).

LEMME 3. — Le cocycle inversible $\sigma_\rho = \widetilde{\sigma}_\lambda * \rho^{-1} : U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow k$ vérifie les relations

$$(50) \quad \sigma_\rho(1, x) = \varepsilon(x) = \sigma_\rho(x, 1),$$

et si x, y, z appartiennent la même sous-algbre $U_q(\mathfrak{g})^+$ ou $U_q(\mathfrak{g})^-$ ou si les termes dans le premier membre de σ_ρ appartiennent $U_q(\mathfrak{g})^-$ et ceux du second membre appartiennent $U_q(\mathfrak{g})^+$, nous avons

$$(51) \quad \sigma_\rho(x, yz) = \sigma_\rho(x_{(1)}, y)\sigma_\rho(x_{(2)}, z),$$

$$(52) \quad \sigma_\rho(xy, z) = \sigma_\rho(x, z_{(2)})\sigma_\rho(y, z_{(1)}).$$

De plus, nous avons

$$(53) \quad \sigma_\rho(K_i, K_j) = \lambda_{ij},$$

$$(54) \quad \sigma_\rho(E_i, F_j) = \frac{\delta_{ij}}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Pour les autres couples (x, y) de générateurs nous avons

$$(55) \quad \sigma_\rho(x, y) = 0.$$

Démonstration. — La relation de normalisation (50) est vérifiée immédiatement partir des conditions de normalisation pour $\widetilde{\sigma}_\lambda$ et ρ . Les relations (51) et (52) se déduisent de la définition de σ_λ comme bi-caractère et des relations (34) et (35). Ces relations ne sont donc vérifiées que pour des éléments de la même sous-algbre $U_q(\mathfrak{g})^+$ ou $U_q(\mathfrak{g})^-$ ou si le premier terme appartient $U_q(\mathfrak{g})^-$ et le second $U_q(\mathfrak{g})^+$ comme pour les relations (34) et (35) de ρ .

La relation (53) est une conséquence des relations (27), (31) et (46). La relation (54) s'obtient partir des relations (25), (26), (32), (33) et (49) comme suit :

$$(56) \quad \begin{aligned} \sigma_\rho(E_i, F_j) &= \sigma_\lambda(E_i, F_j)\rho^{-1}(1, K_j^{-1}) + \sigma_\lambda(E_i, 1)\rho^{-1}(1, F_j) \\ &\quad + \sigma_\lambda(K_i, F_j)\rho^{-1}(E_i, K_j^{-1}) + \sigma_\lambda(K_i, 1)\rho^{-1}(E_i, F_j) \\ &= \frac{\delta_{ij}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Pour les autres couples de générateurs le calcul se fait de façon similaire et chaque terme de la somme apparaissant est nul, ce qui implique la relation (55). \square

Posons, pour $1 \leq i \leq t$,

$$(57) \quad \varphi_\lambda(X_i) = E_i, \quad \varphi_\lambda(Y_i) = F_i, \quad \varphi_\lambda(Z_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1}.$$

LEMME 4. — Les formules (57) définissent un morphisme d'algèbres $U_q(\mathfrak{g})$ -comodules droite $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow {}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — a) Vrifions d'abord que φ_λ est un morphisme d'algèbres. Il suffit d'établir que l'image des relations (37) – (42) est nulle dans ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$.

Considérons la relation (37) de commutation entre les Z_i . On a

$$\begin{aligned}
 \varphi_\lambda(Z_i Z_j) &= \varphi_\lambda(Z_i) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Z_j) \\
 &= K_i \cdot_{\sigma_\rho} K_j \\
 &= \sigma_\rho(K_i, K_j) K_i K_j \\
 &= \lambda_{ij} K_i K_j \\
 (58) \quad &= \lambda_{ij} K_j K_i \\
 &= \lambda_{ij}^2 \sigma_\rho(K_j, K_i) K_j K_i \\
 &= \lambda_{ij}^2 K_j \cdot_{\sigma_\rho} K_i \\
 &= \lambda_{ij}^2 \varphi_\lambda(Z_j) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Z_i) \\
 &= \varphi_\lambda(\lambda_{ij}^2 Z_j Z_i),
 \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. De la même façon on démontre

$$(59) \quad \varphi_\lambda(Z_i Z_i^{-1}) = \varphi_\lambda(Z_i^{-1} Z_i) = 1,$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$.

Considérons la relation (38) de commutation entre Z_i et X_j . On a

$$\begin{aligned}
 \varphi_\lambda(Z_i X_j) &= \varphi_\lambda(Z_i) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_j) \\
 &= K_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j \\
 &= \sigma_\rho(K_i, E_j) K_i 1 + \sigma_\rho(K_i, K_j) K_i E_j \\
 &= 0 + \lambda_{ij} K_i E_j \\
 (60) \quad &= \lambda_{ij} q^{d_i a_{ij}} E_j K_i \\
 &= \lambda_{ij} q^{d_i a_{ij}} (0 + \lambda_{ij} \sigma_\rho(K_j, K_i) E_j K_i) \\
 &= \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} E_j \cdot_{\sigma_\rho} K_i \\
 &= \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} \varphi_\lambda(X_j) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Z_i) \\
 &= \varphi_\lambda(\lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} X_j Z_i),
 \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$.

La relation (39) se démontre de façon similaire. Pour (40) on a

$$\begin{aligned}
 (61) \quad \varphi_\lambda(X_i Y_j - Y_j X_i) &= \varphi_\lambda(X_i) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Y_j) - \varphi_\lambda(Y_j) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_i) \\
 &= E_i \cdot_{\sigma_\rho} F_j - F_j \cdot_{\sigma_\rho} E_i \\
 &= (\sigma_\rho(E_i, F_j) 1 K_j^{-1} + \sigma_\rho(E_i, 1) 1 F_j + \sigma_\rho(K_i, F_j) E_i K_j^{-1} \\
 &\quad + \sigma_\rho(K_i, 1) E_i F_j) - (\sigma_\rho(F_j, E_i) K_j^{-1} 1 + \sigma_\rho(1, E_i) F_j 1 \\
 &\quad + \sigma_\rho(F_j, K_i) K_j^{-1} E_i + \sigma_\rho(1, K_i) F_j E_i) \\
 &= \frac{\delta_{ij}}{q^{d_i} - q^{-d_i}} K_j^{-1} + E_i F_j - F_j E_i \\
 &= \frac{K_i}{q^{d_i} - q^{-d_i}} \\
 &= \varphi_\lambda \left(\delta_{ij} \frac{Z_i}{q^{d_i} - q^{-d_i}} \right),
 \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$.

Considérons la relation de Serre quantique (41) pour le gnrateur X_i . Notons que

$$(62) \quad \begin{aligned} E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j &= \sigma_\rho(E_i, E_j)1 + \sigma_\rho(E_i, K_j)1E_j \\ &\quad + \sigma_\rho(K_i, E_j)E_i1 + \sigma_\rho(K_i, K_j)E_iE_j \\ &= \lambda_{ij}E_iE_j, \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Nous ne considérons que des lments de $U_q(\mathfrak{g})^+$, nous pouvons donc utiliser les relations (51), (52) et (55) pour calculer les valeurs du cocycle σ_ρ , valeurs qui sont nulles ds que le gnrateur E_i apparait, et obtenir

$$(63) \quad \begin{aligned} &E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j \cdot_{\sigma_\rho} E_j \\ &= \sigma_\rho((E_i)_{(1)}, (E_j)_{(1)})\sigma_\rho((E_i)_{(2)}(E_j)_{(2)}, (E_j)_{(1)}(E_i)_{(3)}(E_j)_{(3)}(E_j)_{(2)}) \\ &= 0 + \sigma_\rho(K_i, K_j)\sigma_\rho(K_iK_j, K_j)E_iE_jE_j \\ &= \lambda_{ij}^2E_iE_j^2, \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. De faon similaire, nous avons

$$(64) \quad E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j = \lambda_{ij}^2E_i^2E_j$$

et

$$(65) \quad E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j \cdot_{\sigma_\rho} E_i = E_iE_jE_i,$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Par rcurrence sur les entiers a, b et c , on montre facilement que le produit de a fois le gnrateur E_i , b fois le gnrateur E_j et c fois le gnrateur E_i vaut

$$(66) \quad \underbrace{E_i \cdot_{\sigma_\rho} \cdots \cdot_{\sigma_\rho} E_i}_{a} \cdot_{\sigma_\rho} \underbrace{E_j \cdot_{\sigma_\rho} \cdots \cdot_{\sigma_\rho} E_j}_{b} \cdot_{\sigma_\rho} \underbrace{E_i \cdot_{\sigma_\rho} \cdots \cdot_{\sigma_\rho} E_i}_{c} = E_i^a \cdot_{\sigma_\rho} E_j^b \cdot_{\sigma_\rho} E_i^c \\ = \lambda_{ij}^{b(a-c)} E_i^a E_j^b E_i^c$$

dans $\sigma_\rho U_q(\mathfrak{g})$ pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Remarquons en particulier que la puissance d'un lment E_i est la même pour le produit classique de $U_q(\mathfrak{g})$ ou pour celui de $\sigma_\rho U_q(\mathfrak{g})$, ce qui justifie la notation E_i^a .

Alors, en utilisant (66), on obtient

$$(67) \quad \begin{aligned} &\varphi_\lambda \left(\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} X_i^{1-a_{ij}-r} X_j X_i^r \right) \\ &= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} \varphi_\lambda(X_i)^{1-a_{ij}-r} \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_j) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_i)^r \\ &= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} E_i^{1-a_{ij}-r} \cdot_{\sigma_\rho} E_j \cdot_{\sigma_\rho} E_i^r \\ &= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} \lambda_{ij}^{1-a_{ij}-r-r} E_i^{1-a_{ij}-r} E_j E_i^r \\ &= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} E_i^{1-a_{ij}-r} E_j E_i^r \\ &= 0. \end{aligned}$$

De manire similaire, pour les gnrateurs F_i dans $U_q(\mathfrak{g})^-$, nous avons

$$(68) \quad \begin{aligned} F_i \cdot_{\sigma_\rho} F_j &= \sigma_\rho(F_i, F_j)K_i^{-1}K_j^{-1} + \sigma_\rho(F_i, 1)K_i^{-1}F_j \\ &\quad + \sigma_\rho(1, F_j)F_iK_j^{-1} + \sigma_\rho(1, 1)F_iF_j \\ &= F_iF_j \end{aligned}$$

et par rcurrence

$$(69) \quad F_i^a \cdot_{\sigma_\rho} F_j^b \cdot_{\sigma_\rho} F_i^c = F_i^a F_j^b F_i^c$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$ et $a, b, c \in \mathbb{N}$. Le produit des lments F_i est donc le même dans ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$ et dans $U_q(\mathfrak{g})$. La relation de Serre quantique (42) dans A_λ pour le gnrateur Y_i est alors une consquence immdiate de la relation (24) pour le gnrateur F_i dans $U_q(\mathfrak{g})$.

b) Pour montrer que φ_λ est aussi un morphisme de comodules, il suffit, puisque la comultiplication de $U_q(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algbres, de vrifier que le diagramme

$$(70) \quad \begin{array}{ccc} A_\lambda & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & {}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g}) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \Delta \\ A_\lambda \otimes U_q(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi_\lambda \otimes \text{Id}} & {}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g}) \end{array}$$

commute pour une famille de gnrateurs de l'algre A_λ .

Pour les gnrateurs $Z_i^{\pm 1}$, on a

$$(71) \quad \begin{aligned} \Delta \circ \varphi_\lambda(Z_i^{\pm 1}) &= \Delta(K_i^{\pm 1}) \\ &= K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1} \\ &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id})(Z_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}) \\ &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id}) \circ \delta(Z_i^{\pm 1}); \end{aligned}$$

pour les gnrateurs X_i , on a

$$(72) \quad \begin{aligned} \Delta \circ \varphi_\lambda(X_i) &= \Delta(E_i) \\ &= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i \\ &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id})(X_i \otimes 1 + Z_i \otimes E_i) \\ &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id}) \circ \delta(X_i); \end{aligned}$$

pour les gnrateurs Y_i , on a

$$(73) \quad \begin{aligned} \Delta \circ \varphi_\lambda(Y_i) &= \Delta(F_i) \\ &= F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i \\ &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id})(Y_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i) \\ &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id}) \circ \delta(Y_i), \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq t$. □

LEMME 5. — *Le morphisme $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow {}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Avec [J, Chapitre 4], introduisons l'algre de Hopf U engendre par les gnrateurs E_i, F_i et $K_i^{\pm 1}$ soumis aux relations (19) - (22) de commutation de $U_q(\mathfrak{g})$. Cette algre peut être munie d'une structure d'algre de Hopf avec la comultiplication, la coünit et l'antipode dfinies par les mêmes relations (25) – (29) que pour $U_q(\mathfrak{g})$. L'algre $U_q(\mathfrak{g})$ est alors le quotient de l'algre U par l'idal I engendr par les relations de Serre quantiques (23) et (24); notons P le morphisme d'algre de Hopf de projection de U sur $U_q(\mathfrak{g})$. La famille

$$(74) \quad F_{\underline{i}}^{\alpha_{\underline{i}}} E_{\underline{j}}^{\beta_{\underline{j}}} K_{\underline{l}}^{\gamma_{\underline{l}}} = F_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots F_{i_n}^{\alpha_{i_n}} E_{j_1}^{\beta_{j_1}} \dots E_{j_p}^{\beta_{j_p}} K_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \dots K_{l_t}^{\gamma_{l_t}},$$

où $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_t$ parcourent $\{1, \dots, t\}$, $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_p}$ parcourent \mathbb{N} et $\gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_t}$ parcourent \mathbb{Z} , est une base de U (voir [J]). L'algre de Hopf $k[G]$ est aussi la sous-algre engendre par les lments "group-like" de U . Considrons le cocycle (que nous noterons encore σ_ρ) $\sigma_\rho \circ (P \otimes P) : U \otimes U \rightarrow k$ et notons ${}_{\sigma_\rho}U$ l'algre obtenue de U partir du cocycle σ_ρ en suivant le procdcrit au paragraphe 1.2 et dont le produit est donn par la relation (10).

Cherchons maintenant une base de ${}_{\sigma_\rho}U$ adapte au produit \cdot_{σ_ρ} . Remarquons que de la même manière que pour les relations (62) et (68), le produit d'un lment F_i avec un lment E_j vaut dans ${}_{\sigma_\rho}U$

$$(75) \quad \begin{aligned} F_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j &= \sigma_\rho(F_i, E_j)K_i^{-1} + \sigma_\rho(F_i, K_j)K_i^{-1}E_j \\ &\quad + \sigma_\rho(1, E_j)F_i + \sigma_\rho(1, K_j)F_iE_j \\ &= F_iE_j, \end{aligned}$$

celui d'un lment E_i avec un lment K_j vaut

$$(76) \quad \begin{aligned} E_i \cdot_{\sigma_\rho} K_j &= \sigma_\rho(E_i, K_j)K_j + \sigma_\rho(K_i, K_j)E_iK_j \\ &= \lambda_{ij}E_iK_j \end{aligned}$$

et celui de deux lments K_i et K_j vaut

$$(77) \quad \begin{aligned} K_i \cdot_{\sigma_\rho} K_j &= \sigma_\rho(K_iK_j)K_iK_j \\ &= \lambda_{ij}K_iK_j, \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Si les indices $j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_t$ parcourent $\{1, \dots, t\}$, notons J la suite d'indice $j_1, \dots, j_n, l_1, l_2, \dots, l_t$ et J_k la suite d'indice k (par exemple $J_{j_3} = j_3, \dots, j_n, l_1, \dots, l_t$ et $J_{l_5} = l_5, \dots, l_t$).

Nous devons calculer les produits dans ${}_{\sigma_\rho}U$ de produits des gnrateurs, et nous avons donc besoin des valeurs de σ_ρ sur ces produits. Précisément, nous devons calculer les valeurs du cocycle σ_ρ pour des produits des gnrateurs F_i , ce qui est possible avec les relations (51) et (52) car nous restons dans la même sous-algèbre ${}_{\sigma_\rho}U^-$ (définie de manière évidente comme pour $U_q(\mathfrak{g})^-$). De même, la valeur du cocycle σ_ρ sur les produits entre les gnrateurs E_j et K_l se calcule grâce à ces relations car ces lments appartiennent à la même sous-algèbre ${}_{\sigma_\rho}U^+$. Enfin, les produits entre les gnrateurs F_i et E_j font intervenir le cocycle σ_ρ avec comme terme de gauche des lments de ${}_{\sigma_\rho}U^-$ et comme terme de droite des lments de ${}_{\sigma_\rho}U^+$, ce qui nous permet encore d'utiliser les relations (51) et (52). Alors, de façon similaire (62) - (66), nous utilisons les relations (62), (68) et (75) - (77), exprimant les produits dans ${}_{\sigma_\rho}U$ des gnrateurs F_i, E_j et K_l sur la base $F_{\underline{i}}^{\alpha_i} E_{\underline{j}}^{\beta_j} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$, de manière répétée grâce aux relations (51) et (52) de définition de σ_ρ , pour exprimer les lments $F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ sur la base $F_{\underline{i}}^{\alpha_i} E_{\underline{j}}^{\beta_j} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$:

$$(78) \quad \begin{aligned} F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} &= F_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdot_{\sigma_\rho} \dots \cdot_{\sigma_\rho} F_{i_n}^{\alpha_{i_n}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{j_1}^{\beta_{j_1}} \cdot_{\sigma_\rho} \dots \cdot_{\sigma_\rho} E_{j_p}^{\beta_{j_p}} \\ &\quad \cdot_{\sigma_\rho} K_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \cdot_{\sigma_\rho} \dots \cdot_{\sigma_\rho} K_{l_t}^{\gamma_{l_t}} \\ &= (F_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots F_{i_n}^{\alpha_{i_n}}) \cdot_{\sigma_\rho} \left(\left(\prod_{j_1 \leq j < j' \leq j_p} \beta_{jj'}^{\beta_j \beta_{j'}} \right) E_{j_1}^{\beta_{j_1}} \dots E_{j_p}^{\beta_{j_p}} \right) \\ &\quad \cdot_{\sigma_\rho} \left(\left(\prod_{l_1 \leq l < l' \leq l_t} \lambda_{ll'}^{\gamma_l \gamma_{l'}} \right) K_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \dots K_{l_t}^{\gamma_{l_t}} \right) \\ &= \prod_{k \in J} \prod_{k' \in J_k} \lambda_{kk'}^{\kappa_k \kappa_{k'}} F_{\underline{i}}^{\alpha_i} E_{\underline{j}}^{\beta_j} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}, \end{aligned}$$

où κ_k désigne β_k si k est un indice relatif E (soit de la forme j_m) et désigne γ_k si k est un indice relatif K (soit de la forme l_m). La famille $E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ forme une base de l'espace vectoriel $U = {}_{\sigma_\rho}U$ puisque les scalaires $\prod_{k \in J} \prod_{k' \in J_k} \lambda_{kk'}^{\kappa_k \kappa_{k'}}$ sont tous non nuls.

Notons $Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ le produit $Y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots Y_{i_n}^{\alpha_{i_n}} X_{j_1}^{\beta_{j_1}} \dots X_{j_p}^{\beta_{j_p}} Z_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \dots Z_{l_t}^{\gamma_{l_t}}$ si $\underline{i}, \underline{\alpha_i}, \underline{j}, \underline{\beta_j}, \underline{l}, \underline{\gamma_l}$ sont les multi-indices correspondant $i_1, \dots, i_n, \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}, j_1, \dots, j_p,$

$\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_p}, l_1, \dots, l_t, \gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_t}$ et définissons l'application linéaire $\psi : {}_{\sigma_\rho}U \rightarrow A_\lambda$ par sa donnée sur la base $F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$:

$$(79) \quad \psi(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}}^{\gamma_l}) = Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}.$$

Démontrons que ψ est un morphisme d'algèbres. Les calculs (58) - (61) assurent aussi que

$$(80) \quad K_i \cdot {}_{\sigma_\rho}K_j = \lambda_{ij}^2 K_j \cdot {}_{\sigma_\rho}K_i,$$

$$(81) \quad K_i \cdot {}_{\sigma_\rho}E_j = \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} E_j \cdot {}_{\sigma_\rho}K_i,$$

$$(82) \quad K_i \cdot {}_{\sigma_\rho}F_j = q^{-d_i a_{ij}} F_j \cdot {}_{\sigma_\rho}K_i$$

et

$$(83) \quad E_i \cdot {}_{\sigma_\rho}F_j - F_j \cdot {}_{\sigma_\rho}E_i = \delta_{ij} \frac{K_i}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Alors pour écrire le produit de deux éléments de la base $F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ et $F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$, nous utilisons les relations de commutation (80) - (83) de manière répétée pour obtenir une écriture sur la base :

$$(84) \quad \left(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \right) \cdot {}_{\sigma_\rho} \left(F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) = \sum x_{\underline{i}'' \underline{j}'' \underline{l}''}^{\alpha_{i''} \beta_{j''} \gamma_{l''}} F_{\underline{i}''}^{\alpha_{i''}} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}''}^{\beta_{j''}} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}''}^{\gamma_{l''}},$$

avec $x_{\underline{i}'' \underline{j}'' \underline{l}''}^{\alpha_{i''} \beta_{j''} \gamma_{l''}} \in k$. Remarquons que, dans l'algèbre A_λ , nous avons les mêmes relations de commutation (37) - (40) et donc le produit de deux éléments de la forme $Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ et $Y_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} X_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$ vaut de la même manière

$$(85) \quad \left(Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \right) \left(Y_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} X_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) = \sum x_{\underline{i}'' \underline{j}'' \underline{l}''}^{\alpha_{i''} \beta_{j''} \gamma_{l''}} Y_{\underline{i}''}^{\alpha_{i''}} X_{\underline{j}''}^{\beta_{j''}} Z_{\underline{l}''}^{\gamma_{l''}}.$$

Nous avons donc

$$(86) \quad \begin{aligned} & \psi(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot {}_{\sigma_\rho}F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}) \\ &= \psi \left(\sum x_{\underline{i}'' \underline{j}'' \underline{l}''}^{\alpha_{i''} \beta_{j''} \gamma_{l''}} F_{\underline{i}''}^{\alpha_{i''}} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}''}^{\beta_{j''}} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}''}^{\gamma_{l''}} \right) \\ &= \sum x_{\underline{i}'' \underline{j}'' \underline{l}''}^{\alpha_{i''} \beta_{j''} \gamma_{l''}} Y_{\underline{i}''}^{\alpha_{i''}} X_{\underline{j}''}^{\beta_{j''}} Z_{\underline{l}''}^{\gamma_{l''}} \\ &= \left(Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \right) \left(Y_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} X_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) \\ &= \psi(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}}^{\gamma_l}) \cdot {}_{\sigma_\rho} \psi(F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot {}_{\sigma_\rho}E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot {}_{\sigma_\rho}K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}), \end{aligned}$$

ce qui établit que ψ est un morphisme d'algèbres. Par suite, comme les générateurs de l'algèbre A_λ appartiennent à l'image de ψ , celle-ci est surjective. Pour montrer que ψ se factorise à travers ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$, il suffit de montrer que le noyau de P est inclus dans le noyau de ψ . Soit u appartenant au noyau de P ; alors u appartient

l'idal engendr par les relations de Serre quantiques (23) et (24). Donc u est une combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$(87) \quad F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{pq}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{pq} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_p}} E_p^{1-a_{pq}-r} E_q E_p^r \right) F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

et de la forme

$$(88) \quad F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{pq}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{pq} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_p}} F_p^{1-a_{pq}-r} F_p F_q^r \right) F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

avec $\underline{i}, \alpha_i, \underline{j}, \beta_j, \underline{l}, \gamma_l$ des multi-indices de la forme précédente et $p, q = 1, \dots, t$. Par conséquent l'élément u est une combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$(89) \quad F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\sigma_\rho} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{pq}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{pq} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_p}} \lambda_{pq}^{a_{pq}+2r-1} E_p^{1-a_{pq}-r} \cdot_{\sigma_\rho} E_q \cdot_{\sigma_\rho} E_p^r \right) \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

et de la forme

$$(90) \quad F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\sigma_\rho} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{pq}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{pq} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_p}} F_p^{1-a_{pq}-r} \cdot_{\sigma_\rho} F_q \cdot_{\sigma_\rho} F_p^r \right) \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

Donc $\psi(u)$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$(91) \quad \psi \left(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\sigma_\rho} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{pq}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{pq} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_p}} \lambda_{pq}^{a_{pq}+2r-1} E_p^{1-a_{pq}-r} \cdot_{\sigma_\rho} E_q \cdot_{\sigma_\rho} E_p^r \right) \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) \\ = \psi \left(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \right) \psi \left(\sum_{r=0}^{1-a_{pq}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{pq} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_p}} \lambda_{pq}^{a_{pq}+2r-1} E_p^{1-a_{pq}-r} \cdot_{\sigma_\rho} E_q \cdot_{\sigma_\rho} E_p^r \right) \psi \left(F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) \\ = Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{pq}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{pq} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_p}} \lambda_{pq}^{a_{pq}+2r-1} X_p^{1-a_{pq}-r} X_q X_p^r \right) Y_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} X_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

et, de façon similaire, d'éléments de la forme

$$(92) \quad \psi \left(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\sigma_\rho} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{pq}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{pq} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_p}} F_p^{1-a_{pq}-r} \cdot_{\sigma_\rho} F_q \cdot_{\sigma_\rho} F_p^r \right) \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) \\ = Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{pq}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{pq} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_p}} Y_p^{1-a_{pq}-r} Y_q Y_p^r \right) Y_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} X_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

Les deux derniers membres de (91) et de (92) sont nuls en vertu de (41) et (42). Il en rsulte que $\psi(u)$ est nul et que le morphisme ψ se factorise en un morphisme $\Psi : \sigma_\rho U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow A_\lambda$.

Le morphisme Ψ est surjectif puisque ψ l'est. De plus nous avons la relation

$$(93) \quad \begin{aligned} (\varphi_\lambda \circ \Psi)(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}) &= \varphi_\lambda(Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}) \\ &= \varphi_\lambda(Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_{\underline{j}}^{\beta_j}) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Z_{\underline{l}}^{\gamma_l})) \\ &= F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}, \end{aligned}$$

pour tout multi-indices $\underline{i}, \underline{\alpha}_i, \underline{j}, \underline{\beta}_j, \underline{l}, \underline{\gamma}_l$. Donc l'application $\varphi_\lambda \circ \Psi$ est gale l'identit de $\sigma_\rho U_q(\mathfrak{g})$. En consequence, Ψ est injective. Comme Ψ est surjective, elle est bijective d'inverse φ_λ . \square

3.3. Dmonstration du thorme. — Le point (1) est une consequence du lemme 5.

Dmontrons le point (2). Soit A un objet galoisien de $U_q(\mathfrak{g})$. Notons i le plongement naturel de $k[G]$ dans $U_q(\mathfrak{g})$; ce morphisme d'algbres de Hopf nous permet en particulier de dfinir une structure d'algbre $U_q(\mathfrak{g})$ -comodule gauche sur $k[G]$ par

$$(94) \quad k[G] \xrightarrow{\Delta_{k[G]}} k[G] \otimes k[G] \xrightarrow{i \otimes \text{Id}} U_q(\mathfrak{g}) \otimes k[G].$$

Comme nous l'avons expliqu au paragraphe 1.1, ce plongement $i : k[G] \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$ induit une application

$$(95) \quad i^* : \text{Gal}_k(U_q(\mathfrak{g})) \rightarrow \text{Gal}_k(k[G]).$$

Considrons l'image $i^*(A)$ de A dans $\text{Gal}_k(k[G])$. D'aprs [KS, Prop. 3.2],

$$(96) \quad \text{Gal}(k[G]) \cong H^2(G, k^*).$$

Il est bien connu que ce dernier groupe est isomorphe à $\text{Hom}(\Lambda^2 \mathbb{Z}^t, k^*)$ (voir par exemple [B, Thorme V.6.4 (iii)]). Par consquent, il existe une famille λ telle que $i^*(A) \cong \sigma_\lambda k[G]$.

Le lemme 1 assure que $i^*(A) \cong \sigma_\lambda k[G]$ est isomorphe, comme algbre, $\sigma_\rho U_q(\mathfrak{g}) \square_{U_q(\mathfrak{g})} k[G]$ qui vaut $i^*(\sigma_\rho U_q(\mathfrak{g}))$, par dfnition de i^* . Les lemmes 4 et 5 assurent que $\sigma_\rho U_q(\mathfrak{g}) \cong A_\lambda$ et par suite nous avons

$$(97) \quad i^*(A) \cong i^*(A_\lambda).$$

Or Kassel et Schneider [KS, Thorme 4.5] ont montr que l'application $i^* : \mathcal{H}_k(U_q(\mathfrak{g})) \rightarrow \mathcal{H}_k(k[G])$ est une bijection sur les classes d'homotopie d'extensions galoisiennes. Par consquent, A et A_λ sont homotopes.

Dmontrons le point (3). Supposons que A_λ et $A_{\lambda'}$ dfinissent le mme lment de $\mathcal{H}(U_q(\mathfrak{g}))$. Alors $i^*(A_\lambda) = i^*(A_{\lambda'})$ dans $\mathcal{H}_k(k[G])$. D'aprs [KS, Prop 3.2], on a $\mathcal{H}_k(k[G]) \cong \text{Gal}_k(k[G])$. Il rsulte de ceci et de la bijection (96) que $\lambda = \lambda'$.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] K. S. Brown, Cohomology of groups, Graduate Texts in Mathematics, volume 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

- [EM] S. Eilenberg, J.-C. Moore, Homology and fibrations. I. Coalgebras, cotensor product and its derived functors, *Comment. Math. Helv.* **40** (1966) 199–236.
- [J] J.-C. Jantzen, *Lectures on Quantum Groups*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1995).
- [K] C. Kassel, Quantum principal bundles up to homotopy equivalence, *The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial*, Oslo, 2002, O. A. Laudal, R. Piene (eds.), Springer-Verlag (2004), 737–748.
- [KS] C. Kassel, H.-J. Schneider, Homotopy theory of Hopf Galois extensions. *Annales Inst. Fourier* (Grenoble), **55** (2005), 2521–2550.
- [M] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 82, American Mathematical Society, Providence, RI, (1993).
- [MS] S. Montgomery, H.-J. Schneider, Krull relations in Hopf Galois extensions : lifting and twisting, *J. Algebra* **288** (2005), 364–383.
- [S] H.-J. Schneider, Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras, *Israel J. Math.* **72** (1990), no. 1-2, 167–195.