



HAL
open science

Classification of Galois objects of $U_q(\mathfrak{g})$ up to homotopy equivalence

Thomas Aubriot

► **To cite this version:**

Thomas Aubriot. Classification of Galois objects of $U_q(\mathfrak{g})$ up to homotopy equivalence. 2005. hal-00004479v1

HAL Id: hal-00004479

<https://hal.science/hal-00004479v1>

Preprint submitted on 15 Mar 2005 (v1), last revised 12 Oct 2006 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CLASSIFICATION DES OBJETS GALOISIENS DE $U_q(\mathfrak{g})$ HOMOTOPIE PRS

THOMAS AUBRIOT

RÉSUMÉ. For any Drinfeld-Jimbo quantum enveloping algebra $U_q(\mathfrak{g})$ and for any family $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i < j \leq t} \in k^*$ of invertible elements of the base field, we explicitly construct a Galois object A_λ of $U_q(\mathfrak{g})$ by generators and relations and we prove that any Galois object of $U_q(\mathfrak{g})$ is homotopic to a unique object of type A_λ .

INTRODUCTION

Le concept d'extension Hopf-galoisienne qui a été beaucoup étudié ces dernières années est une généralisation naturelle du concept classique d'extension galoisienne de corps commutatifs. C'est aussi l'analogue algébrique de la notion de fibré principal dans le cadre de la géométrie non commutative.

Bien qu'une littérature abondante ait été consacrée aux extensions Hopf-galoisiennes (voir par exemple [M], [S] et les références données dans ces deux articles), on a peu de résultats sur leur classification à isomorphisme près. Pour contourner la difficulté — qui semble grande — de classer les extensions Hopf-galoisiennes à isomorphisme près, Kassel [K] a introduit une relation d'équivalence moins fine que l'isomorphisme sur les extensions Hopf-galoisiennes, relation qu'il a appelée homotopie. Dans [KS] Kassel et Schneider en ont fait une étude systématique. Ils donnent notamment une application à la classification des extensions Hopf-galoisiennes lorsque l'algèbre de Hopf est l'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$ associée par Drinfeld et Jimbo à une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} . L'une des conséquences des résultats de [KS] porte sur l'ensemble $\mathcal{H}_k(U_q(\mathfrak{g}))$ des classes d'homotopie des extensions $U_q(\mathfrak{g})$ -galoisiennes du corps de base k (ces objets sont également appelés objets galoisiens de $U_q(\mathfrak{g})$) : Kassel et Schneider démontrent que $\mathcal{H}_k(U_q(\mathfrak{g}))$ est en bijection avec le groupe de cohomologie $H^2(G, k^*)$, où G est le groupe des éléments "group-like" de $U_q(\mathfrak{g})$ opérant trivialement sur le groupe k^* des éléments inversibles de k . Le groupe G est un groupe abélien libre dont le rang t est égal à celui de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Il est bien connu que tout élément de $H^2(G, k^*)$ peut être représenté par une famille λ de $t(t-1)/2$ éléments non nuls du corps de base.

Le but de cet article est de construire explicitement par générateurs et relations un objet galoisien A_λ de $U_q(\mathfrak{g})$ pour toute famille λ de ce type et de montrer que tout objet galoisien de $U_q(\mathfrak{g})$ est homotope à un unique objet galoisien de la forme A_λ .

Date: 9.03.2005.

Au paragraphe 1, nous rappelons la définition des concepts d'extension Hopf-galoisienne et d'objet galoisien. Nous redonnons également la présentation standard de l'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$.

Les objets galoisiens A_λ sont construits au paragraphe 2. Nous y énonçons aussi le théorème principal de l'article.

Le paragraphe 3 est entièrement consacré à la démonstration du théorème.

1. RAPPELS

1.1. Extensions galoisiennes et objets galoisiens. Soit k un corps commutatif. Tous les objets de cet article appartiennent à la catégorie tensorielle des k -espaces vectoriels. Si H est une algèbre de Hopf et A est une algèbre H -comodule à droite dont la coaction est le morphisme d'algèbres $\delta : A \rightarrow A \otimes H$, nous définissons la sous-algèbre B des éléments H -covariants de A par

$$(1) \quad B = \{a \in A \mid \delta(a) = a \otimes 1\}.$$

L'application linéaire $\beta : A \otimes_B A \rightarrow A \otimes H$ définie par

$$(2) \quad \beta(a \otimes a') = (a \otimes 1)\delta(a'),$$

pour $a, a' \in A$, est appelée *l'application canonique* associée à A .

Une algèbre H -comodule à droite A est une *extension H -galoisienne* de B si B est la sous-algèbre des éléments H -covariants de A , si l'application canonique $\beta : A \otimes_B A \rightarrow A \otimes H$ associée à A est un isomorphisme et si A est fidèlement plat en tant que B -module à droite ou à gauche.

Un *objet galoisien* d'une algèbre de Hopf H est une extension H -galoisienne du corps de base k .

Deux extensions H -galoisiennes A et A' de B sont dites *isomorphes* s'il existe un morphisme $f : A \rightarrow A'$ d'algèbres H -comodules qui soit un isomorphisme et qui soit l'identité sur B .

Nous notons $\text{Gal}_B(H)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions H -galoisiennes de B . L'ensemble $\text{Gal}_B(H)$ peut être considéré comme un foncteur contravariant en H . En effet, soit $i : K \rightarrow H$ un morphisme d'algèbres de Hopf. Rappelons [EM] que, tant donné une algèbre de Hopf H , un comodule A à droite de coaction δ_A et un comodule K à gauche de coaction δ_K , le produit cotensoriel $A \square_H K$ est défini comme le noyau de l'application

$$(3) \quad \delta_A \otimes \text{Id}_K - \text{Id}_A \otimes \delta_K : A \otimes K \rightarrow A \otimes H \otimes K,$$

(ou encore l'égaleur des coactions de A et K). Si A est une extension H -galoisienne de B , alors

$$(4) \quad i^*(A) = A \square_H K$$

est une extension K -galoisienne de B d'après [S, Prop 3.11 (3)].

Kassel et Schneider [KS] (voir aussi [K]) ont défini une relation d'équivalence, notée \sim et appelée *homotopie*, sur l'ensemble $\text{Gal}_B(H)$ (nous renvoyons à [KS] pour la définition). Nous notons $\mathcal{H}_B(H)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'extensions H -galoisiennes de B . L'application

$$(5) \quad i^* : \text{Gal}_B(H) \rightarrow \text{Gal}_B(K)$$

induite par un morphisme d'algèbres de Hopf $i : K \rightarrow H$ et définie plus haut, passe aux classes d'homotopie et définit une application

$$(6) \quad i^* : \mathcal{H}_B(H) \rightarrow \mathcal{H}_B(K).$$

1.2. Cocycles et extensions clives. Suivant ([M, Chapitre 7]), nous dirons qu'une application linéaire $\sigma : H \otimes H \rightarrow k$ est un *cocycle normalis* pour l'algèbre de Hopf H si σ vrifie les relations

$$(7) \quad \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma(x_{(2)}y_{(2)}, z) = \sigma(y_{(1)}, z_{(1)})\sigma(x, y_{(2)}z_{(2)})$$

et

$$(8) \quad \sigma(1, x) = \sigma(x, 1) = \varepsilon(x),$$

pour $x, y, z \in H$.

Nous avons utilis ici la notation de Sweedler $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ pour la comultiplication Δ de H , notation que nous utiliserons dans la suite de l'article.

Rappelons ([M, Chapitre 7]) que si H est une algèbre de Hopf, $\sigma : H \otimes H \rightarrow k$ un cocycle inversible normalis et B une algèbre, alors le *produit crois* $B \sharp_{\sigma} H$ est l'espace vectoriel $B \otimes H$ muni du produit

$$(9) \quad (a \sharp h)(b \sharp k) = \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})ab \sharp h_{(2)}k_{(2)},$$

pour tout a, b dans B et h, k dans H .

De plus, cette algèbre peut être munie d'une structure d'algèbre H -comodule droite induite par la comultiplication de H , ce qui fait de $B \sharp_{\sigma} H$ une extension H -galoisienne de B . Les extensions H -galoisiennes de cette forme sont appelées *extensions clives* (*cleft* en anglais). Lorsque $k = B$, le produit crois $k \sharp H$ s'identifie H muni du produit

$$(10) \quad x \cdot_{\sigma} y = \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)},$$

pour x, y deux lments de H . Nous notons H_{σ} l'espace vectoriel H muni de ce produit.

1.3. Les algèbres enveloppantes quantiques de Drinfeld-Jimbo. Nous supposons dsormais que k est un corps de caractéristique différente de 2 ou 3. Fixons la matrice de Cartan $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq t}$ d'une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} , des entiers $(d_i)_{1 \leq i \leq t} \in \{1, 2, 3\}$ tels que $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ pour tout $1 \leq i, j \leq t$ ainsi qu'un lment inversible $q \in k^*$ tel que $q^{2d_i} \neq 1$ pour tout $i = 1, \dots, t$.

L'algèbre de Drinfeld-Jimbo (voir [J, Chapitre 4]) est l'algèbre associative unitaire engendrée par les gnérateurs E_i, F_i, K_i et K_i^{-1} pour $1 \leq i \leq t$ et les relations

$$(11) \quad K_i K_j = K_j K_i, \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1,$$

$$(12) \quad K_i E_j = q^{d_i a_{ij}} E_j K_i,$$

$$(13) \quad K_i F_j = q^{d_i a_{ij}} F_j K_i,$$

$$(14) \quad E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

$$(15) \quad \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} E_i^{1-a_{ij}} E_j E_i^r = 0,$$

$$(16) \quad \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} F_i^{1-a_{ij}} F_j F_i^r = 0,$$

pour $1 \leq i, j \leq t$.

Il est bien connu ([J, Chapitre 4]) que $U_q(\mathfrak{g})$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf avec la comultiplication Δ définie sur les générateurs par

$$(17) \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i,$$

$$(18) \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,$$

$$(19) \quad \Delta(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1},$$

la co-unit ε définie par

$$(20) \quad \varepsilon(E_i) = 0, \quad \varepsilon(F_i) = 0, \quad \varepsilon(K_i^{\pm 1}) = 1.$$

et l'antipode S définie par

$$(21) \quad S(E_i) = -K_i^{-1} E_i, \quad S(F_i) = -F_i K_i, \quad S(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\mp 1},$$

pour tout $1 \leq i \leq t$.

Notons G le sous-groupe multiplicatif de $U_q(\mathfrak{g})$ engendré par K_1, K_2, \dots, K_t . C'est un sous-groupe abélien libre de rang t .

2. LE RESULTAT

Nous considérons une famille $(\lambda_{ij})_{1 \leq i < j \leq t}$ d'éléments inversibles de k . Par commodité, nous posons $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$ et $\lambda_{ii} = 1$ pour tout $1 \leq j \leq i \leq t$. Si λ et λ' sont deux telles familles, nous notons λ^{-1} la famille des inverses $(\lambda_{ij}^{-1})_{1 \leq i, j \leq t}$ de λ ainsi que $\lambda \lambda'$ la famille des produits $(\lambda_{ij} \lambda'_{ij})_{1 \leq i, j \leq t}$ des éléments de λ et λ' .

Nous définissons l'algèbre A_λ comme l'algèbre associative unitaire engendrée par des générateurs X_i, Y_i, Z_i, Z_i^{-1} pour $1 \leq i \leq t$ et les relations

$$(22) \quad Z_i Z_j = \lambda_{ij}^2 Z_j Z_i, \quad Z_i Z_i^{-1} = Z_i^{-1} Z_i = 1,$$

$$(23) \quad Z_i X_j = q^{d_i a_{ij}} \lambda_{ij}^2 X_j Z_i,$$

$$(24) \quad Z_i Y_j = q^{d_i a_{ij}} Y_j Z_i,$$

$$(25) \quad X_i Y_j - Y_j X_i = \delta_{i,j} \frac{Z_i^{-1} - Z_i}{q^{-d_i} - q^{d_i}},$$

$$(26) \quad \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij} - 1 + r} X_i^{1-a_{ij}} X_j X_i^r = 0,$$

$$(27) \quad \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} Y_i^{1-a_{ij}} Y_j Y_i^r = 0,$$

pour $1 \leq i, j \leq t$.

Si la famille λ est identiquement gale 1, l'algèbre A_λ s'identifie à l'algèbre de Drinfeld-Jimbo $U_q(\mathfrak{g})$. Il suffit pour cela de poser $E_i = X_i, F_i = Y_i$ et $K_i^{\pm 1} = Z_i^{\pm 1}$ pour tout $1 \leq i \leq t$ et de comparer les relations (22) - (27) et (11) - (16).

Posons

$$(28) \quad \delta(X_i) = X_i \otimes 1 + Z_i \otimes E_i,$$

$$(29) \quad \delta(Y_i) = Y_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,$$

$$(30) \quad \delta(Z_i^{\pm 1}) = Z_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1},$$

pour tout $1 \leq i \leq t$.

Nous nonons maintenant notre rsultat principal.

Théorème. 1) Les formules (28), (29) et (30) munissent A_λ d'une structure d'objet galoisien cliv sur $U_q(\mathfrak{g})$.

2) Tout objet galoisien sur $U_q(\mathfrak{g})$ est homotope à un objet galoisien de la forme A_λ .

3) Deux objets $U_q(\mathfrak{g})$ -galoisiens A_λ et $A_{\lambda'}$ sont homotopes si et seulement si les familles λ et λ' les définissant sont gales.

La suite de l'article est consacré à la démonstration du théorème.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

3.1. Cocycles sur $U_q(\mathfrak{g})$ provenant d'une famille λ . Pour toute famille $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq t}$, nous définissons un cocycle de $U_q(\mathfrak{g})$ comme suit. Notons $\sigma_\lambda : k[G] \otimes k[G] \rightarrow k$ l'application linéaire définie par

$$(31) \quad \sigma_\lambda(K_i^\varepsilon \otimes K_j^{\varepsilon'}) = \lambda_{ij}^{\varepsilon\varepsilon'},$$

pour $1 \leq i, j \leq t$ et $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 0, 1\}$, et par

$$(32) \quad \sigma_\lambda(g_1 g_2, h) = \sigma_\lambda(g_1, h) \sigma_\lambda(g_2, h),$$

et

$$(33) \quad \sigma_\lambda(h, g_1 g_2) = \sigma_\lambda(h, g_1) \sigma_\lambda(h, g_2),$$

pour $g_1, g_2, h \in G$.

Soit $\pi : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow k[G]$ le morphisme d'algèbres de Hopf défini par

$$(34) \quad \pi(E_i) = \pi(F_i) = 0, \quad \pi(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1},$$

pour $i = 1, \dots, t$. Posons $\widetilde{\sigma}_\lambda = \sigma_\lambda \circ (\pi \otimes \pi) : U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow k$.

Lemme 1. *Les applications σ_λ et $\widetilde{\sigma}_\lambda$ sont des cocycles normalisés sur $k[G]$ et $U_q(\mathfrak{g})$, respectivement, inversibles pour la convolution, d'inverses respectifs $\sigma_{\lambda^{-1}}$ et $\widetilde{\sigma}_{\lambda^{-1}}$.*

Démonstration. L'application σ_λ est un bi-caractère et par suite un cocycle, normalisé en vertu de (31). De plus cette définition comme bi-caractère ((32) et (33)) assure que la donnée de σ_λ sur les générateurs $(K_i^\pm)_{1 \leq i \leq t}$ de G , suffit à déterminer σ_λ sur $k[G] \otimes k[G]$. On vérifie alors immédiatement que $\sigma_{\lambda^{-1}}$ est l'inverse de σ_λ pour la convolution par un rapide calcul pour ces générateurs. Nous pouvons aussi vérifier que $\sigma_{\sigma_\lambda} \star \sigma_{\lambda'} = \sigma_{\lambda\lambda'}$ si λ et λ' sont deux familles d'inversibles de k et \star désigne le produit de convolution :

$$(35) \quad \begin{aligned} (\sigma_\lambda \star \sigma_{\lambda'})(K_i^{\varepsilon_i} \otimes K_j^{\varepsilon_j}) &= \lambda_{ij}^{\varepsilon_i \varepsilon_j} (\lambda'_{ij})^{\varepsilon_i \varepsilon_j} \\ &= (\lambda_{ij} \lambda'_{ij})^{\varepsilon_i \varepsilon_j} \\ &= \sigma_{\lambda\lambda'}(K_i^{\varepsilon_i} \otimes K_j^{\varepsilon_j}). \end{aligned}$$

De plus, nous avons $\sigma_1 = \nu \circ \varepsilon$ et, par suite, $\sigma_{\lambda^{-1}}$ est l'inverse de σ_λ pour la convolution.

Comme σ_λ est un cocycle normalisé et que π est un morphisme d'algèbres de Hopf, $\widetilde{\sigma}_\lambda = \sigma_\lambda \circ \pi \otimes \pi$ est un cocycle normalisé. Pour voir que $\widetilde{\sigma}_{\lambda^{-1}}$ est l'inverse de $\widetilde{\sigma}_\lambda$, nous pouvons faire un calcul direct sur les générateurs comme ci-dessus, ou remarquer que nous avons la relation $\widetilde{\sigma}_\lambda \star \widetilde{\sigma}_{\lambda'} = \widetilde{\sigma}_{\lambda\lambda'}$, si λ et λ' sont deux familles d'inversibles de k et \star désigne le produit de convolution :

$$(36) \quad \begin{aligned} (\widetilde{\sigma}_\lambda \star \widetilde{\sigma}_{\lambda'})(x, y) &= \widetilde{\sigma}_\lambda(x_{(1)}, y_{(1)}) \widetilde{\sigma}_{\lambda'}(x_{(2)}, y_{(2)}) \\ &= \sigma_\lambda(\pi(x_{(1)}), \pi(y_{(1)})) \sigma_{\lambda'}(\pi(x_{(2)}), \pi(y_{(2)})) \\ &= \sigma_\lambda(\pi(x)_{(1)}, \pi(y)_{(1)}) \sigma_{\lambda'}(\pi(x)_{(2)}, \pi(y)_{(2)}) \\ &= \sigma_{\lambda\lambda'}(\pi(x), \pi(y)) \\ &= \widetilde{\sigma}_{\lambda\lambda'}(x, y), \end{aligned}$$

pour $x, y \in U_q(\mathfrak{g})$. Comme $\widetilde{\sigma}_1$ est encore gal la composée de la co-unité et de l'unité, nous voyons que $\widetilde{\sigma}_{\lambda^{-1}}$ est l'inverse de $\widetilde{\sigma}_\lambda$. \square

3.2. L'algèbre comodule A_λ comme produit croisé de $U_q(\mathfrak{g})$. Pour une famille $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq t}$ fixe, nous allons définir un morphisme d'algèbres

$$(37) \quad \varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda},$$

où A_λ est l'algèbre définie au paragraphe 2 et $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$ est obtenue à partir de l'algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ du paragraphe 1.3 en utilisant le cocycle normalisé $\widetilde{\sigma}_\lambda$ défini au paragraphe 3.1. Posons, pour $1 \leq i \leq t$,

$$(38) \quad \varphi_\lambda(X_i) = E_i, \quad \varphi_\lambda(Y_i) = F_i, \quad \varphi_\lambda(Z_i^\pm) = K_i^\pm.$$

Lemme 2. *Les formules (38) définissent un morphisme $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$ d'algèbres $U_q(\mathfrak{g})$ -comodules droite.*

Démonstration. a) Vrifions d'abord que A_λ est un morphisme d'algbres. Il suffit d'tablr que l'image des relations (22) – (27) est nulle dans $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$.

Considrons la relation (22) de commutation entre les Z_i :

$$\begin{aligned}
(39) \quad \varphi_\lambda(Z_i Z_j) &= \varphi_\lambda(Z_i) \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda \varphi_\lambda(Z_j) \\
&= K_i \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda K_j \\
&= \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, K_j) K_i K_j \\
&= \lambda_{ij} K_i K_j \\
&= \lambda_{ij} K_j K_i \\
&= \lambda_{ij}^2 \widetilde{\sigma}_\lambda(K_j, K_i) K_j K_i \\
&= \lambda_{ij}^2 K_j \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda K_i \\
&= \lambda_{ij}^2 \varphi_\lambda(Z_j) \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda \varphi_\lambda(Z_i) \\
&= \varphi_\lambda(\lambda_{ij}^2 Z_j Z_i).
\end{aligned}$$

De la même faon on dmontre que

$$(40) \quad \varphi_\lambda(Z_i Z_i^{-1}) = \varphi_\lambda(Z_i^{-1} Z_i) = 1.$$

Considrons la relation (23) de commutation entre Z_i et X_j :

$$\begin{aligned}
(41) \quad \varphi_\lambda(Z_i X_j) &= \varphi_\lambda(Z_i) \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda \varphi_\lambda(X_j) \\
&= K_i \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda E_j \\
&= \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, E_j) K_i 1 + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, K_j) K_i E_j \\
&= 0 + \lambda_{ij} K_i E_j \\
&= \lambda_{ij} q^{d_i a_{ij}} E_j K_i \\
&= \lambda_{ij} q^{d_i a_{ij}} (0 + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_j, K_i)^{-1} \widetilde{\sigma}_\lambda(K_j, K_i) E_j K_i) \\
&= \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} (\widetilde{\sigma}_\lambda(E_j, K_i) 1 K_i + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_j, K_i) E_j K_i) \\
&= \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} E_j \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda K_i \\
&= \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} \varphi_\lambda(X_j) \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda \varphi_\lambda(Z_i) \\
&= \varphi_\lambda(\lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} X_j Z_i).
\end{aligned}$$

La relation (24) se dmontre de faon similaire.

Considrons la relation (25) de commutation entre X_i et Y_j :

$$\begin{aligned}
(42) \quad \varphi_\lambda(X_i Y_j - Y_j X_i) &= \varphi_\lambda(X_i) \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda \varphi_\lambda(Y_j) - \varphi_\lambda(Y_j) \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda \varphi_\lambda(X_i) \\
&= E_i \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda F_j - F_j \cdot \widetilde{\sigma}_\lambda E_i \\
&= \left(\widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, F_j) 1 K_j^{-1} + \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, 1) 1 F_j + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, F_j) E_i K_j^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, 1) E_i F_j \right) - \left(\widetilde{\sigma}_\lambda(F_j, E_i) K_j^{-1} 1 + \widetilde{\sigma}_\lambda(1, E_i) F_j 1 \right. \\
&\quad \left. + \widetilde{\sigma}_\lambda(F_j, K_i) K_j^{-1} E_i + \widetilde{\sigma}_\lambda(1, K_i) F_j E_i \right) \\
&= 0 + E_i F_j - F_j E_i \\
&= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}} \\
&= \varphi_\lambda \left(\delta_{ij} \frac{Z_i - Z_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}} \right).
\end{aligned}$$

Considrons la relation de Serre quantique (26) pour le gnrateur X_i . Notons que

$$(43) \quad \begin{aligned} E_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_j &= \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, E_j)1 + \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, K_j)1E_j \\ &\quad + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, E_j)E_i1 + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, K_j)E_iE_j \\ &= \lambda_{ij}E_iE_j. \end{aligned}$$

et, en utilisant (32), (33) et (43), on obtient

$$(44) \quad \begin{aligned} E_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_j \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_j &= \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, (E_j^2)_{(1)})1(E_j^2)_{(2)} + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, (E_j^2)_{(1)})E_i(E_j^2)_{(2)} \\ &= \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, E_j^2)1 + \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, E_jK_j + K_jE_j)E_j + \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, K_j^2)E_j^2 \\ &\quad + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, E_j^2)E_i + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, E_jK_j + K_jE_j)E_iE_j \\ &\quad + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, K_j^2)E_iE_j^2 \\ &= \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, E_j)^2 + \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, E_j)\widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, K_j) \\ &\quad + \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, K_j)\widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, E_j)E_j + \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, K_j)^2E_j^2 \\ &\quad + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, E_j)^2E_i + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, E_j)\widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, K_j) \\ &\quad + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, K_j)\widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, E_j)E_iE_j + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, K_j)^2E_iE_j^2 \\ &= \lambda_{ij}^2E_iE_j^2. \end{aligned}$$

De la mme manire, on a

$$(45) \quad E_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_j = \lambda_{ij}^2E_i^2E_j.$$

Par rcurrence sur les entiers a et b , on montre facilement que le produit de a fois le gnrateur E_i et de b fois le gnrateur E_j vaut

$$(46) \quad \underbrace{E_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \cdots \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_i}_a \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \underbrace{E_j \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \cdots \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_j}_b = E_i^a \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_j^b = \lambda_{ij}^{ab}E_i^aE_j^b$$

dans $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$. Remarquons en particulier que la puissance d'un lment E_i est la mme pour le produit classique de $U_q(\mathfrak{g})$ ou pour celui de $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$, ce qui justifie la notation E_i^a . Alors, en utilisant (46) on a

$$(47) \quad \begin{aligned} &\varphi_\lambda \left(\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}-1+r} X_i^{1-a_{ij}} X_j X_i^r \right) \\ &= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}-1+r} \varphi_\lambda(X_i)^{1-a_{ij}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \varphi_\lambda(X_j) \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \varphi_\lambda(X_i)^r \\ &= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}-1+r} E_i^{1-a_{ij}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_j \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_i^r \\ &= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}-1+r} \lambda_{ij}^{1-a_{ij}} (E_i^{1-a_{ij}} E_j) \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_i^r \\ &= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}-1+r} \lambda_{ij}^{1-a_{ij}} \lambda_{ji}^r E_i^{1-a_{ij}} E_j E_i^r \\ &= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} E_i^{1-a_{ij}} E_j E_i^r \\ &= 0. \end{aligned}$$

De manire similaire, nous avons

$$\begin{aligned}
 (48) \quad F_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_j &= \widetilde{\sigma}_\lambda(F_i, F_j) K_i^{-1} K_j^{-1} + \widetilde{\sigma}_\lambda(F_i, 1) K_i^{-1} F_j \\
 &\quad + \widetilde{\sigma}_\lambda(1, F_j) F_i K_j^{-1} + \widetilde{\sigma}_\lambda(1, 1) F_i F_j \\
 &= F_i F_j
 \end{aligned}$$

et en vertu de (32) et (33), le produit de deux lments F_i et F_j est le mme dans $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$ et dans $U_q(\mathfrak{g})$. La relation de Serre quantique (27) dans A_λ pour le gnrateur Y_i est alors une consquence immdiate de la relation (16) pour le gnrateur F_i dans $U_q(\mathfrak{g})$.

b) Pour montrer que φ_λ est aussi un morphisme de comodules, il suffit, puisque la comultiplication de $U_q(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algbres, de vrifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A_\lambda & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \\
 \downarrow \delta & & \downarrow \Delta \\
 (49) \quad A_\lambda \otimes U_q(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi_\lambda \otimes \text{Id}} & U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \otimes U_q(\mathfrak{g})
 \end{array}$$

commute pour une famille de gnrateurs de l'algre A_λ .

Pour les gnrateurs $Z_i^{\pm 1}$, on a

$$\begin{aligned}
 (50) \quad \Delta \circ \varphi_\lambda(Z_i^{\pm 1}) &= \Delta(K_i^{\pm 1}) \\
 &= K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1} \\
 &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id})(Z_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}) \\
 &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id}) \circ \delta(Z_i^{\pm 1});
 \end{aligned}$$

pour les gnrateurs X_i , on a

$$\begin{aligned}
 (51) \quad \Delta \circ \varphi_\lambda(X_i) &= \Delta(E_i) \\
 &= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i \\
 &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id})(X_i \otimes 1 + Z_i \otimes E_i) \\
 &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id}) \circ \delta(X_i);
 \end{aligned}$$

pour les gnrateurs Y_i , on a

$$\begin{aligned}
 (52) \quad \Delta \circ \varphi_\lambda(Y_i) &= \Delta(F_i) \\
 &= F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i \\
 &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id})(Y_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i) \\
 &= (\varphi_\lambda \otimes \text{Id}) \circ \delta(Y_i),
 \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq t$. □

Lemme 3. *Le morphisme $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$ est un isomorphisme.*

Dmonstration. Avec [J, Chapitre 4] introduisons l'algre de Hopf U engendre par les gnrateurs E_i, F_i et $K_i^{\pm 1}$ soumis aux relations (11) - (14) de commutation de $U_q(\mathfrak{g})$. Cette algre peut tre munie d'une structure d'algre de Hopf avec la comultiplication, la coinit et l'antipode dfinies par les mmes relations (17) - (21) que pour $U_q(\mathfrak{g})$. L'algre $U_q(\mathfrak{g})$ est alors le quotient de l'algre U par l'idal I engendr par les relations de Serre quantiques (15) et (16); notons P la projection de U sur $U_q(\mathfrak{g})$. La famille

$$(53) \quad E_{\underline{i}}^{\alpha_i} F_{\underline{j}}^{\beta_j} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} = E_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots E_{i_n}^{\alpha_{i_n}} F_{j_1}^{\beta_{j_1}} \dots F_{j_p}^{\beta_{j_p}} K_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \dots K_{l_t}^{\gamma_{l_t}},$$

où $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_t$ parcourent $\{1, \dots, t\}$, $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_p}$ parcourent \mathbb{N} et $\gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_t}$ parcourent \mathbb{Z} , est une base de U (voir [J]). L'algèbre de Hopf $k[G]$ est aussi la sous-algèbre engendrée par les éléments "group-like" de U et l'application $p : U \rightarrow k[G]$ définie pour tout $i = 1, \dots, t$ par

$$(54) \quad p(E_i) = p(F_i) = 0, \quad p(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1}$$

est surjective. Nous pouvons considérer le cocycle inversible $\check{\sigma}_\lambda = \sigma_\lambda \circ (p \otimes p)$ et noter $U_{\check{\sigma}_\lambda}$ l'algèbre obtenue de U à partir du cocycle $\check{\sigma}_\lambda$ en suivant le procédé décrit au paragraphe 1.2. Remarquons que $\widetilde{\sigma}_\lambda = P \circ \check{\sigma}_\lambda$. Aussi pour simplifier nous garderons la notation $\widetilde{\sigma}_\lambda$ pour le cocycle $\check{\sigma}_\lambda$.

Cherchons maintenant une base de ce même espace vectoriel adaptée au produit $\cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$. Remarquons que de la même manière que pour les relations (43) et (48), le produit d'un élément E_i avec un élément F_j vaut dans $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$

$$(55) \quad \begin{aligned} E_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_j &= \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, F_j) K_j^{-1} + \widetilde{\sigma}_\lambda(E_i, 1) F_j \\ &\quad + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, F_j) E_i K_j^{-1} + \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i, 1) E_i F_j \\ &= E_i F_j, \end{aligned}$$

celui d'un élément F_i avec un élément K_j vaut

$$(56) \quad \begin{aligned} F_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_j &= \widetilde{\sigma}_\lambda(F_i, K_j) K_i^{-1} K_j + \widetilde{\sigma}_\lambda(1, K_j) F_i K_j \\ &= F_i K_j \end{aligned}$$

et celui de deux éléments K_i et K_j vaut

$$(57) \quad \begin{aligned} K_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_j &= \widetilde{\sigma}_\lambda(K_i K_j) K_i K_j \\ &= \lambda_{ij} K_i K_j, \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Si les indices $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_t$ parcourent $\{1, \dots, t\}$, $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_p}$ parcourent \mathbb{N} et $\gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_t}$ parcourent \mathbb{Z} , notons J la suite d'indices $i_1, \dots, i_n, l_1, l_2, \dots, l_t$ et J_k la suite définie à partir de la précédente en ne gardant que les indices à partir de l'indice k (par exemple $J_{i_3} = i_3, \dots, i_n, l_1, \dots, l_t$ et $J_{l_5} = l_5, \dots, l_t$). Alors, de manière similaire (43) - (46), nous utilisons les relations (43), (48) et (55) - (57), exprimant les produits dans $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$ des générateurs E_i, F_j et K_l sur la base $E_{\underline{i}}^{\alpha_i} F_{\underline{j}}^{\beta_j} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$, de manière répétée grâce aux relations (32) et (33) de définition de $\widetilde{\sigma}_\lambda$, pour exprimer les éléments $E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ sur la base $E_{\underline{i}}^{\alpha_i} F_{\underline{j}}^{\beta_j} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$:

$$(58) \quad \begin{aligned} E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} &= E_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \dots \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_{i_n}^{\alpha_{i_n}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{j_1}^{\beta_{j_1}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \dots \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{j_p}^{\beta_{j_p}} \\ &\quad \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \dots \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{l_t}^{\gamma_{l_t}} \\ &= \left(\left(\prod_{i_1 \leq i < i' \leq i_n} \lambda_{ii'}^{\alpha_i \alpha_{i'}} \right) E_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots E_{i_n}^{\alpha_{i_n}} \right) \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \left(F_{j_1}^{\beta_{j_1}} \dots F_{j_p}^{\beta_{j_p}} \right) \\ &\quad \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \left(\left(\prod_{l_1 \leq l < l' \leq l_t} \lambda_{ll'}^{\gamma_l \gamma_{l'}} \right) K_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \dots K_{l_t}^{\gamma_{l_t}} \right) \\ &= \prod_{k \in J} \prod_{k' \in J_k} \lambda_{kk'}^{\kappa_k \kappa_{k'}} E_{\underline{i}}^{\alpha_i} F_{\underline{j}}^{\beta_j} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}, \end{aligned}$$

où κ_k désigne α_k si k est un indice relatif E (soit de la forme i_m) et désigne γ_k si k est un indice relatif K (soit de la forme l_m). La famille $E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$

forme une base de U et de $U_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$ puisque les scalaires $\prod_{k \in J} \prod_{k' \in J_k} \lambda_{kk'}^{\kappa_k \kappa_{k'}}$ sont tous non nuls.

Notons $X_{\underline{i}}^{\alpha_i} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ le produit $X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots X_{i_n}^{\alpha_{i_n}} Y_{j_1}^{\beta_{j_1}} \cdots Y_{j_p}^{\beta_{j_p}} Z_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \cdots Z_{l_t}^{\gamma_{l_t}}$ si $\underline{i}, \underline{\alpha_i}, \underline{j}, \underline{\beta_j}, \underline{l}, \underline{\gamma_l}$ sont les multi-indices correspondant $i_1, \dots, i_n, \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}, j_1, \dots, j_p, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_p}, l_1, \dots, l_t, \gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_t}$ et dfinissons l'application linéaire $\psi : U_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \rightarrow A_\lambda$ par sa donne sur la base $E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$:

$$(59) \quad \psi(E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}) = X_{\underline{i}}^{\alpha_i} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}.$$

Dmontrons que ψ est un morphisme d'algbres. Notons $\lambda_{\underline{i}'\underline{i}} = \prod_{i_k \in \underline{i}, i'_k \in \underline{i}'} \lambda_{i_k i'_k}$ le produit des $\lambda_{i_k i'_k}$ lorsque i_k dcrit le multi-indice \underline{i} et i'_k dcrit le multi-indice \underline{i}' . Trouvons l'criture dans la base $E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ du produit de deux lments de cette base. Les calculs (39) - (42) assurent aussi que

$$(60) \quad K_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_j = \lambda_{ij}^2 K_j \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_i,$$

$$(61) \quad K_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_j = \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} E_j \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_i,$$

$$(62) \quad K_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_j = q^{d_i a_{ij}} F_j \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_i$$

et

$$(63) \quad E_i \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_j - F_j \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_i = \delta_{i,j} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. En utilisant ces relations de commutation (60) - (63) de manire rptée, nous obtenons

$$(64) \quad \begin{aligned} & E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \\ &= \lambda_{\underline{i}'\underline{i}}^2 q^{d_i a_{i'j'}} E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \\ &= \lambda_{\underline{i}'\underline{i}}^2 q^{d_i a_{i'j'}} \left(E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right. \\ & \quad \left. + E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \delta_{i',j} \frac{K_{\underline{j}} - K_{\underline{j}}^{-1}}{q^{d_j} - q^{-d_j}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) \\ &= \lambda_{\underline{i}'\underline{i}}^2 q^{d_i a_{i'j'}} \left(E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right. \\ & \quad \left. + E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \delta_{i',j} \frac{K_{\underline{j}} - K_{\underline{j}}^{-1}}{q^{d_j} - q^{-d_j}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right). \end{aligned}$$

De maniere similaire, les relations (22) - (25) assurent que l'écriture dans A_λ du produit de deux lments de la forme $X_{\underline{i}}^{\alpha_i} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ vaut

$$\begin{aligned}
& \left(X_{\underline{i}}^{\alpha_i} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \right) \left(X_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) \\
(65) \quad &= \lambda_{\underline{l}'}^2 q^{d_{i'} a_{i'}} \left(X_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} X_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right. \\
& \quad \left. + X_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} \delta_{i',j} \frac{Z_{\underline{j}} - Z_{\underline{j}}^{-1}}{q^{d_j - q^{-d_j}}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right).
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
& \psi \left(E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) \\
&= \psi \left(\lambda_{\underline{l}'}^2 q^{d_{i'} a_{i'}} \left(X_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} X_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + X_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} \delta_{i',j} \frac{Z_{\underline{j}} - Z_{\underline{j}}^{-1}}{q^{d_j - q^{-d_j}}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) \right) \\
(66) \quad &= \lambda_{\underline{l}'}^2 q^{d_{i'} a_{i'}} \left(X_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} X_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right. \\
& \quad \left. + X_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} \delta_{i',j} \frac{Z_{\underline{j}} - Z_{\underline{j}}^{-1}}{q^{d_j - q^{-d_j}}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right) \\
&= X_{\underline{i}}^{\alpha_i} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} X_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \\
&= \psi \left(E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \right) \psi \left(E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\tilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}} \right),
\end{aligned}$$

ce qui tablit que ψ est un morphisme d'algbres. Par suite, comme les gnrateurs de l'algre A_λ appartiennent l'image de ψ , celle-ci est surjective. Pour montrer que ψ se factorise travers $U_q(\mathfrak{g})_{\tilde{\sigma}_\lambda}$, il suffit de montrer que le noyau de P est inclus dans le noyau de ψ . Soit u appartenant au noyau de P ; alors u appartient l'idal engendr par les relations de Serre quantiques (15) et (16). Donc u est une combinaison linéaire d'lments de la forme

$$(67) \quad E_{\underline{i}}^{\alpha_i} F_{\underline{j}}^{\beta_j} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} E_s^{1-a_{st}} E_t E_s^r \right) E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

et de la forme

$$(68) \quad E_{\underline{i}}^{\alpha_i} F_{\underline{j}}^{\beta_j} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} F_s^{1-a_{st}} F_t F_s^r \right) E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}},$$

avec $\underline{i}, \underline{\alpha}_i; \underline{j}, \underline{\beta}_j, \underline{l}, \underline{\gamma}_l$ des multi-indices de la forme prcdente et $s, t = 1, \dots, t$. Par conséquent, sur la base $E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$, l'lement u est une combinaison linéaire d'lements de la forme

$$(69) \quad E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} E_s^{1-a_{st}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_t \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_s^r \right) \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

et de la forme

$$(70) \quad E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} F_s^{1-a_{st}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_t \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_s^r \right) \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

Donc $\psi(u)$ est une combinaison linéaire d'lements de la forme

$$(71) \quad \psi(E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} E_s^{1-a_{st}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_t \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_s^r \right) \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}) \\ = \psi(E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}) \psi \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} E_s^{1-a_{st}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_t \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_s^r \right) \\ \psi(E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}) \\ = X_{\underline{i}}^{\alpha_i} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} X_s^{1-a_{st}} X_t X_s^r \right) X_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

et, de faon similaire, d'lements de la forme

$$(72) \quad \psi(E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} F_s^{1-a_{st}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_t \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_s^r \right) \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} E_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}) \\ = X_{\underline{i}}^{\alpha_i} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} Y_s^{1-a_{st}} Y_t Y_s^r \right) X_{\underline{i}'}^{\alpha_{i'}} Y_{\underline{j}'}^{\beta_{j'}} Z_{\underline{l}'}^{\gamma_{l'}}$$

Les deux derniers membres de (71) et de (72) sont nuls en vertu de (26) et (27). Il en rsulte que $\psi(u)$ est nul et que le morphisme ψ se factorise en un morphisme $\Psi : U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \rightarrow A_\lambda$.

Le morphisme Ψ est surjectif puisque ψ l'est. De plus nous avons la relation

$$\begin{aligned}
(\varphi_\lambda \circ \Psi)(E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}) &= \varphi_\lambda(X_{\underline{i}}^{\alpha_i} Y_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}) \\
(73) \qquad \qquad \qquad &= \varphi_\lambda(X_{\underline{i}})^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \varphi_\lambda(Y_{\underline{j}})^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \varphi_\lambda(Z_{\underline{l}})^{\gamma_l} \\
&= E_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} F_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} K_{\underline{l}}^{\gamma_l},
\end{aligned}$$

pour tout multi-indices $\underline{i}, \alpha_i; \underline{j}, \beta_j, \underline{j}, \gamma_l$. Donc $\varphi_\lambda \circ \Psi$ est gale l'identit de $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$. En consequence, Ψ est injective. Comme Ψ est surjective, elle est bijective d'inverse φ_λ . \square

3.3. Objets galoisiens de $U_q(\mathfrak{g})$ et de $k[G]$. Notons i le plongement naturel de $k[G]$ dans $U_q(\mathfrak{g})$; il nous permet en particulier de dfinir une structure d'algbre $U_q(\mathfrak{g})$ -comodule gauche sur $k[G]$ par

$$(74) \qquad k[G] \xrightarrow{\Delta_{k[G]}} k[G] \otimes k[G] \xrightarrow{i \otimes \text{Id}} U_q(\mathfrak{g}) \otimes k[G].$$

Comme nous l'avons expliqu au paragraphe 1.1, ce plongement $i : k[G] \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$ induit une application

$$(75) \qquad i^* : \text{Gal}_k(U_q(\mathfrak{g})) \rightarrow \text{Gal}_k(k[G]).$$

Lemme 4. *L'image de $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$ par l'application i^* est $k[G]_{\sigma_\lambda}$.*

Démonstration. Par dffinition, nous avons

$$(76) \qquad i^*(U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}) = U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \square_{U_q(\mathfrak{g})} k[G].$$

Considrons les bijections linaires (voir [EM, Prop 2.1])

$$(77) \qquad k[G] \xrightarrow{\mu} U_q(\mathfrak{g}) \square_{U_q(\mathfrak{g})} k[G] \xrightarrow{\nu} k[G]$$

donnes par $\mu = (i \otimes \text{Id}) \circ \Delta$ et $\nu = \varepsilon \otimes \text{Id}$. Les structures d'espaces vectoriels et de comodules de $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$ et $k[G]_{\sigma_\lambda}$ tant par dffinition les mêmes que celles de $U_q(\mathfrak{g})$ et $k[G]$ respectivement, ces bijections valent aussi pour $k[G]_{\sigma_\lambda}$ et $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda}$:

$$(78) \qquad k[G]_{\sigma_\lambda} \xrightarrow{\mu} U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \square_{U_q(\mathfrak{g})} k[G] \xrightarrow{\nu} k[G]_{\sigma_\lambda}.$$

Montrons maintenant que l'isomorphisme μ est aussi un morphisme d'algbres de $k[G]_{\sigma_\lambda}$ sur $U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \square_{U_q(\mathfrak{g})} k[G]$. Notons $g_1 \cdot_{\sigma_\lambda} g_2$ le produit dans $k[G]_{\sigma_\lambda}$ de deux lments g_1 et g_2 de G et gardons la notation $g_1 g_2$ pour leur produit dans G . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mu(g_1 \cdot_{\sigma_\lambda} g_2) &= \sigma_\lambda(g_1 g_2) \mu(g_1 g_2) \\
(79) \qquad \qquad &= \sigma_\lambda(g_1 g_2) (g_1 g_2 \otimes g_1 g_2) \\
&= (\widetilde{\sigma}_\lambda(g_1, g_2) g_1 g_2) \otimes g_1 g_2 \\
&= g_1 \cdot_{\widetilde{\sigma}_\lambda} g_2 \otimes g_1 g_2
\end{aligned}$$

pour tout $g_1, g_2 \in G$, ce qui assure que

$$(80) \qquad \mu : k[G]_{\sigma_\lambda} \rightarrow U_q(\mathfrak{g})_{\widetilde{\sigma}_\lambda} \square_{U_q(\mathfrak{g})} k[G]$$

est un isomorphisme d'algbres. \square

3.4. Dmonstration du thorme. Le point (1) est une consquence des lemmes 2 et 3.

Dmontrons le point (2). Soit A un objet galoisien de $U_q(\mathfrak{g})$. Considrons son image $i^*(A)$ dans $\text{Gal}_k(k[G])$. D'aprs [KS, Prop. 3.2],

$$(81) \quad \text{Gal}(k[G]) \cong H^2(G, k^*).$$

Il est bien connu que ce dernier groupe est isomorphe à $\text{Hom}(\Lambda^2, k^*)$ (voir par exemple [B, Thorme V.6.4 (iii)]). Par consquent, il existe une famille λ telle que $i^*(A) \cong k[G]_{\sigma_\lambda}$. On a donc $i^*(A) \cong i^*(A_\lambda)$ par les lemmes 2, 3 et 4. Or Kassel et Schneider [KS, Thorme 4.5] ont montr que l'application $i^* : \mathcal{H}_k(U_q(\mathfrak{g})_{\sigma_\lambda}) \rightarrow \mathcal{H}_k(k[G])$ est une bijection sur les classes d'homotopie d'extensions galoisiennes. Par consquent, A et A_λ sont homotopes.

Dmontrons le point (3). Supposons que A_λ et $A_{\lambda'}$ dfinissent le même lment de $\mathcal{H}(U_q(\mathfrak{g})_{\sigma_\lambda})$. Alors $i^*(A_\lambda) = i^*(A_{\lambda'})$ dans $\mathcal{H}_k(k[G])$. D'aprs [KS, Prop 3.2], on a $\mathcal{H}_k(k[G]) \cong \text{Gal}_k(k[G])$. Il rsulte de ceci et des bijections (81) que $\lambda = \lambda'$.

RÉFÉRENCES

- [B] K. S. Brown, Cohomology of groups, Graduate Texts in Mathematics, volume 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [D] Y. Doi, Braided bialgebras and quadratic bialgebras. Comm. Algebra 21 (1993), no. 5, 1731–1749
- [EM] S. Eilenberg, J.-C. Moore. Homology and fibrations. I. Coalgebras, cotensor product and its derived functors. Comment. Math. Helv. 40 (1966) 199–236.
- [J] J.-C. Jantzen, Lectures on Quantum Groups, Graduate Studies in Mathematics, Volume 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1995).
- [K] C. Kassel, Quantum principal bundles up to homotopy equivalence, The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial, Oslo, 2002, O. A. Laudal, R. Piene (eds.), Springer-Verlag (2004), 737–748.
- [KS] C. Kassel, H.-J. Schneider, Homotopy theory of Hopf Galois extensions, preprint arXiv : math.QA/0402034, paraître dans Annales Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005).
- [M] S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 82. American Mathematical Society, Providence, RI, (1993).
- [S] H.-J. Schneider, Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras. Hopf algebras. Israel J. Math. 72 (1990), no. 1-2, 167–195.

Institut de Recherche Mathmatique Avance
 C.N.R.S. - Universit Louis Pasteur
 7 rue Ren Descartes
 67084 Strasbourg Cedex, France
 E-mail : aubriot@math.u-strasbg.fr
 Fax : +33 (0)3 90 24 03 28