



HAL
open science

On the interaction between a current and a vector potential

Germain Rousseaux

► **To cite this version:**

Germain Rousseaux. On the interaction between a current and a vector potential. 2005. hal-00004437v1

HAL Id: hal-00004437

<https://hal.science/hal-00004437v1>

Preprint submitted on 13 Mar 2005 (v1), last revised 26 Jun 2006 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

De l'interaction d'un courant avec un potentiel vecteur.

Germain ROUSSEaux.

INLN – CNRS UMR 6638. 1361 routes des Lucioles 06560 Valbonne, France.

Résumé. Nous présentons une revue des travaux décrivant l'origine du couple magnétique comme produit vectoriel du moment magnétique et de l'induction magnétique. Nous montrons que cette expression correspond à un cas particulier d'une expression plus générale faisant intervenir le produit vectoriel de la densité de courant et du potentiel vecteur.

Abstract. We present a review of the works describing the origin of the magnetic torque as the vectorial product of the magnetic moment and the magnetic induction. We show that this expression corresponds to a particular case of a more general expression making intervene the vectorial product of the current density and the vector potential.

1. Introduction

Le couple magnétique qu'exerce une induction magnétique sur une spire parcourue par un courant s'évalue habituellement en prenant le produit vectoriel du moment magnétique équivalent de la spire avec l'induction magnétique d'un aimant [1, 2]. Nous allons montrer que cette formule n'est qu'un cas particulier d'une expression beaucoup plus générale faisant intervenir le courant dans la spire et le potentiel vecteur de l'aimant.

2. La description théorique du couple magnétique

A- La formulation Ampérienne d'après Neumann

L'interprétation classique [1, 2] fait appel à la force de Laplace ($\mathbf{F} = \iiint_D \mathbf{j} \times \mathbf{B} d\tau$) avec pour un circuit $\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. L'induction magnétique s'évalue avec la formule de Biot & Savart :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{D'} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau'$$

ce qui aboutit à une force d'interaction entre deux circuit :

$$\mathbf{F}_{ab} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \mathbf{r}_{ab} \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r_{ab}^3} = -\nabla_a P_{ab}$$

Cette force est égale au gradient d'un « potentiel d'interaction » introduit par F.E. Neumann [3]. Ce dernier est le produit du courant dans le circuit b par le flux de l'induction magnétique issue du circuit a dans le circuit b :

$$P_{ab} = I_a I_b \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r} = \Phi_{ab} I_b$$

où l'on a introduit l'inductance mutuelle qui est fonction de la perméabilité magnétique et de la géométrie des deux circuits :

$$M_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r} = M_{ba}$$

Ainsi, la force d'interaction entre les deux circuits peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{F}_{ab} = -\nabla_a P_{ab} = \nabla_b P_{ab} = \nabla_b (M_{ab} I_a I_b) = \nabla_b (\Phi_{ab} I_b) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \mathbf{r}_{ab} \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{r_{ab}^3}$$

avec :

$$r_{ab}^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2 \text{ et } \nabla_a r_{ab} = -\nabla_b r_{ab}$$

Or, on a par un raisonnement dimensionnel : *énergie* \approx *force* \times *longueur* \approx *couple* \times *angle* .

On en déduit l'existence d'un couple magnétique d'interaction qui est fonction du flux magnétique :

$$C_{ab} = \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{ab}) = \frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi_{ab} I_b) \text{ avec } \Phi_{ab} = B_a S_b \cos \theta$$

tel que : $C_{ab} = -I_b B_a S_b \sin \theta$.

B- La formulation Lagrangienne d'après Maxwell

Maxwell a fait remarquer que le potentiel d'interaction de Neumann pouvait s'écrire en fonction du potentiel vecteur au lieu de l'induction magnétique [4, 5, 6]:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{D'} \frac{\mathbf{j}}{r} d\tau' \text{ ou pour un circuit } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I d\mathbf{l}'}{r} \text{ avec } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Le potentiel de Neumann est donc aussi le produit du courant dans le circuit b par la circulation du potentiel vecteur issu du circuit a dans le circuit b : $\Phi_{ab} = \oint_b \mathbf{A}_a \cdot d\mathbf{l}_b = M_{ab} I_a$.

De la forme du potentiel d'interaction, Maxwell a introduit l'expression suivante pour l'énergie magnétique du système entier qui est analogue à une énergie cinétique mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} \iiint_D \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d\tau = \frac{1}{2} L_{aa} I_a^2 + M_{ab} I_a I_b + \frac{1}{2} L_{bb} I_b^2 = L_m = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} p_k \dot{q}_k$$

avec les vitesses généralisées $\dot{q}_k = I_k$ que Maxwell identifie aux intensités et les impulsions généralisées (quantités de mouvement « électrocinétique ») $p_k = \frac{dL_m}{dq_k} = \sum_{l=1}^n L_{kl} \dot{q}_l$ que Maxwell

associe aux circulations des potentiels vecteurs (le potentiel vecteur est donc une densité linéaire d'impulsion électromagnétique généralisée). Selon Maxwell [4, 5, 6], L_{kk} s'appelle un moment d'inertie c.a.d. une auto-inductance et L_{kl} un produit d'inertie c.a.d. une inductance mutuelle. Ces moments sont fonction de la perméabilité du vide et l'on retrouve bien l'analogie entre une densité de masse et une inductance comme discutée par Rousseaux & Guyon [7] à propos de l'analogie entre la propagation d'une onde lumineuse et d'une onde sonore. Maxwell distingue les variables électriques q_k des variables de position x_k (une longueur ou un angle) dont dépendent les moments d'inertie $L_{kk} = f(x_k)$ et les produits d'inertie $L_{kl} = g(x_k, x_l)$.

À partir du Lagrangien électrocinétique L_m , on en déduit par application des équations d'Euler-Lagrange (le prime signifie que la force est fournie par l'extérieur au système) soit :

$$X_i' = \frac{d}{dt} \frac{dL_{ab}}{d\dot{x}_i} - \frac{dL_{ab}}{dx_i} = -\frac{dL_{ab}}{dx_i} = -X_i \text{ c.a.d. } \mathbf{F}_{ab} = -\nabla L_{ab} = -\nabla P_{ab}$$

la force électromagnétique (lorsque la coordonnée généralisée est une variable position) car le Lagrangien d'interaction ne dépend pas de la vitesse ; soit la force électromotrice [3, 4, 5]:

$$Y' = \frac{dp}{dt} - \frac{dL}{dy} = \frac{dp}{dt} = -Y$$

si la coordonnée généralisée est une variable électrique : $Y = e = -\frac{dp}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$

car le Lagrangien ne dépend pas explicitement des charges $y = q_k = \int \dot{q}_k dt = \int I_k dt$.

Rares sont les auteurs à avoir utilisé la formulation Lagrangienne de l'Electrodynamique de Maxwell [8, 9, 10, 11, 12]. Selon Henri Poincaré : « Nous touchons ici, à ce que je crois, à la vraie pensée de Maxwell » [8]. Il semble que Louis De Broglie ait redécouvert indépendamment cette formulation sans faire référence à Maxwell [10, 11].

C- La formulation Tensorielle d'après Henriot, Costa de Beauregard et Reulos

Émile Henriot puis René Reulos ont introduit un tenseur d'interaction potentiel-courant dans le but de décrire le couple de radiation observé expérimentalement par Richard Beth en opérant sur de la lumière polarisée circulairement [13, 14].

1. Le tenseur d'interaction champ-polarisation

Nous rappelons dans cette partie la démonstration très élégante et minimaliste de Reulos [14]. L'interaction entre un dipôle électrique et un champ électrique se traduit par l'apparition non seulement d'une énergie mais aussi d'un couple d'interaction :

$$\frac{dE_p}{d\tau} = -\mathbf{P}\mathbf{E} \text{ et } \frac{d\mathbf{C}_p}{d\tau} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$$

Reulos a fait remarquer que l'on pouvait condenser ces deux équations en utilisant un tenseur dit d'interaction champ-polarisation qui s'exprime comme le produit d'un tenseur antisymétrique construit avec le champ électrique et d'un tenseur antisymétrique construit avec la polarisation électrique [14] :

$$d \begin{vmatrix} E_p^1 & C_p^3 & -C_p^2 & C_p^1 \\ -C_p^3 & E_p^2 & C_p^1 & C_p^2 \\ C_p^2 & -C_p^1 & E_p^3 & C_p^3 \\ -C_p^1 & -C_p^2 & -C_p^3 & E_p^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{E}_p^3 & -\mathbf{E}_p^2 & \mathbf{E}_p^1 \\ -\mathbf{E}_p^3 & 0 & \mathbf{E}_p^1 & \mathbf{E}_p^2 \\ \mathbf{E}_p^2 & -\mathbf{E}_p^1 & 0 & \mathbf{E}_p^3 \\ -\mathbf{E}_p^1 & -\mathbf{E}_p^2 & -\mathbf{E}_p^3 & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{P}_p^3 & -\mathbf{P}_p^2 & \mathbf{P}_p^1 \\ -\mathbf{P}_p^3 & 0 & \mathbf{P}_p^1 & \mathbf{P}_p^2 \\ \mathbf{P}_p^2 & -\mathbf{P}_p^1 & 0 & \mathbf{P}_p^3 \\ -\mathbf{P}_p^1 & -\mathbf{P}_p^2 & -\mathbf{P}_p^3 & 0 \end{vmatrix} d\tau$$

L'interaction entre un moment magnétique et un champ magnétique est analogue :

$$\frac{dE_a}{d\tau} = -\mathbf{M}\mathbf{B} \text{ et } \frac{d\mathbf{C}_a}{d\tau} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$$

et l'on peut utiliser la notation tensorielle de Reulos :

$$d \begin{vmatrix} E_a^1 & C_a^3 & -C_a^2 & C_a^1 \\ -C_a^3 & E_a^2 & C_a^1 & C_a^2 \\ C_a^2 & -C_a^1 & E_a^3 & C_a^3 \\ -C_a^1 & -C_a^2 & -C_a^3 & E_a^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{B}_a^3 & -\mathbf{B}_a^2 & \mathbf{B}_a^1 \\ -\mathbf{B}_a^3 & 0 & \mathbf{B}_a^1 & \mathbf{B}_a^2 \\ \mathbf{B}_a^2 & -\mathbf{B}_a^1 & 0 & \mathbf{B}_a^3 \\ -\mathbf{B}_a^1 & -\mathbf{B}_a^2 & -\mathbf{B}_a^3 & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{M}_a^3 & -\mathbf{M}_a^2 & \mathbf{M}_a^1 \\ -\mathbf{M}_a^3 & 0 & \mathbf{M}_a^1 & \mathbf{M}_a^2 \\ \mathbf{M}_a^2 & -\mathbf{M}_a^1 & 0 & \mathbf{M}_a^3 \\ -\mathbf{M}_a^1 & -\mathbf{M}_a^2 & -\mathbf{M}_a^3 & 0 \end{vmatrix} d\tau$$

2. Le tenseur d'interaction potentiel-courant

René Reulos a basé son raisonnement sur le constat que le quadri-potentiel et le quadri-courant interagissent de manière analogue sur le plan énergétique [14]:

$$\frac{dE_{charge}}{d\tau} = \rho V = -j_4 A_4 \text{ et } \frac{dE_{courant}}{d\tau} = -\mathbf{j}\mathbf{A} = -\sum_{k=1}^3 j_k A_k$$

soit pour l'énergie totale :

$$dE = (\rho V - j_1 A^1 - j_2 A^2 - j_3 A^3) d\tau = -j_\mu A^\mu d\tau = dC_4$$

Reulos a donc construit des tenseurs potentiels et courants dont le produit (au sens des matrices) est par définition le tenseur d'interaction potentiel-courant :

$$d \begin{vmatrix} E & C_3 & -C_2 & C_1 \\ -C_3 & E & C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_1 & E & C_3 \\ -C_1 & -C_2 & -C_3 & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iV & A_3 & -A_2 & A_1 \\ -A_3 & iV & A_1 & A_2 \\ A_2 & -A_1 & iV & A_3 \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 & iV \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} i\rho & j_3 & -j_2 & j_1 \\ -j_3 & i\rho & j_1 & j_2 \\ j_2 & -j_1 & i\rho & j_3 \\ -j_1 & -j_2 & -j_3 & i\rho \end{vmatrix} d\tau$$

et dont les composantes spatiales définissent une densité volumique de couple magnétique :

$$\begin{cases} dC_1 = (j_2 A_3 - j_3 A_2) d\tau \\ dC_2 = (j_3 A_1 - j_1 A_3) d\tau \text{ soit } d\mathbf{C} = \mathbf{j} \times \mathbf{A} d\tau \\ dC_3 = (j_1 A_2 - j_2 A_1) d\tau \end{cases}$$

En fait, les expériences de Beth avec des diélectriques s'expliquent avec le couple $d\mathbf{C}_p = \mathbf{P} \times \mathbf{E} d\tau$. Reulos a néanmoins souligné le rôle du vecteur $d\mathbf{C} = \mathbf{j} \times \mathbf{A} d\tau$ pour expliquer l'origine d'un couple apparaissant sur un « polariseur/analyseur hertzien » constitué de tiges métalliques verticales soutenues par un cadre soumis à une onde électromagnétique [14]. Par ailleurs, en exprimant la densité de couple sur un élément de longueur et en introduisant l'expression intégrale du potentiel vecteur en fonction du courant, Reulos a montré que le vecteur couple intégral exercé par un circuit a sur un autre circuit b pouvait s'écrire sous la forme suivante [15, 16] :

$$\mathbf{C}_{ab} = -I_b \oint_b \mathbf{A}_a \times d\mathbf{l}_b = -I_a I_b \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a \times d\mathbf{l}_b}{r}$$

En partant de l'expression infinitésimale de l'énergie magnétique $W = I\Phi$, Olivier Costa de Beauregard a fait remarqué qu'elle pouvait s'arranger ($dW = I\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{l}$) afin de faire apparaître ce qu'il a appelé la « tension d'Ampère » $\mathbf{T} = I\mathbf{A}$ qui est à l'origine d'un couple infinitésimal $d\mathbf{C} = d\mathbf{l} \times \mathbf{T} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{A}$ qui n'est autre que l'expression donnée par Reulos [17]. En fait, c'est H. von Helmholtz qui a introduit ce concept comme le souligne O. Darrigol [4] : un élément linéaire « ouvert » de courant subit deux forces $-I\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$ et $I\mathbf{A}(\mathbf{r}_2)$ entre son point de départ \mathbf{r}_1 et son point d'arrivée \mathbf{r}_2 . Comme le rappelle Costa de Beauregard, la « tension d'Helmholtz » a été mise en évidence expérimentalement par Saumont en plongeant les deux extrémités d'un fil métallique dans un bain de mercure parcouru par un courant [17].

3. Le tenseur des contraintes électromagnétiques de Reulos et Costa de Beauregard

O. Costa de Beauregard a par ailleurs introduit le tenseur « élastique » $N^{kl} = A^k J^l - \frac{1}{2} A^i J_i \delta^{kl}$ qui constitue une alternative à l'utilisation du tenseur de Minkowski (fonction des champs) pour exprimer la force de Lorentz $K_i = F_{ik} J^k = -\partial_k (F_{il} F^{il} - 1/2 F_{rs} F^{rs} \delta_i^k)$ (où F_{ik} est le tenseur de Faraday) de manière quadridimensionnelle en termes des potentiels [18]. La partie spatiale du tenseur $v^{kl} = N^{lk} - N^{kl}$ est égale à la densité volumique de couple magnétique $d\mathbf{C} = \mathbf{j} \times \mathbf{A} d\tau$. R. Reulos proposa à la suite de Costa de Beauregard une méthode variationnelle pour expliquer l'origine de ce tenseur d'énergie [16, 19].

D-La formulation Thermodynamique d'après Laue et De Haas

Max Von Laue a été l'étudiant de thèse de Max Planck qui était un spécialiste de thermodynamique. Or, Planck fut le premier à traiter l'extension de la relativité à la thermodynamique. Il n'est donc pas étonnant que son élève se soit servi de la thermodynamique pour aborder le problème de la formulation d'un tenseur contrainte-énergie électromagnétique afin d'en déduire l'expression du couple magnétique [20, 21].

En effet, le premier principe de la thermodynamique s'exprime sous la forme suivante à nombre de particules constant et à volume constant : $d\varepsilon_0 = T_0 ds$. Un changement de référentiel modifie la densité d'énergie au repos en additionnant une densité d'énergie cinétique $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = \varepsilon_0 + \frac{g^2}{2\rho}$ où l'on a défini la densité d'impulsion : $\mathbf{g} = \rho\mathbf{v}$. On en

déduit l'expression du premier principe dans le référentiel en mouvement : $d\varepsilon = Tds + \mathbf{v}\cdot d\mathbf{g}$ avec $T = T_0$. On peut donc définir un potentiel thermodynamique généralisé qui est extrémal à l'équilibre : $f = \varepsilon - \mathbf{v}\cdot\mathbf{g}$ tel que $df = Tds - \mathbf{g}\cdot d\mathbf{v}$. Le produit $\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}$ apparaît ainsi comme la contribution à l'énergie d'origine cinétique. On sait par ailleurs que la quantité de mouvement d'une particule chargée en présence d'un potentiel vecteur s'écrit : $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$. On peut donc définir une densité d'impulsion « électro-tonique » $\mathbf{G} = \rho_e\mathbf{A}$ qui est le produit de la densité de charge électrique par le potentiel vecteur. Maintenant, le produit de la vitesse des charges par la densité d'impulsion « électro-tonique » est une énergie : $T_{em} = \mathbf{v}_e\cdot\mathbf{G} = \rho_e\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{A} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}$ [20, 21]. La généralisation quadridimensionnelle est immédiate : $T_{Laue}^{\mu\nu} = V^\mu G^\nu = j^\mu A^\nu = T_{ja}^{\mu\nu}$. On cherche donc à construire un tenseur impulsion-couple à partir du tenseur contrainte-énergie $T_{ja}^{\mu\nu} = j^\mu A^\nu$ attribué à Gustav Mie (1912-1913) par De Haas [21]. Rappelons qu'en hydrodynamique, on peut construire le tenseur de rotation à partir du

tenseur des vitesses de composante indicelle $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ par anti-symétrisation : $\Omega_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$.

On suppose donc que le tenseur impulsion-couple a la forme anti-symétrique suivante : $N_{ja}^{\mu\nu} = j^\mu A^\nu - j^\nu A^\mu$ dont les composantes spatiales correspondent à la densité volumique de couple magnétique : $\mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{A}$ [21]. Paul De Haas a récemment réexaminé le problème de la conservation de l'énergie en relativité en suivant la démarche de Von Laue et en explorant l'équation de conservation $\partial_\mu(j^\mu A^\nu) = 0$ qui, selon lui, résout plusieurs paradoxes récurrents de l'électrodynamique [21].

3. Liens entre les différentes formulations

Si nous poussons le raisonnement de Maxwell, un couple est une force généralisée qui s'obtient à partir de l'équation d'Euler-Lagrange exprimée en fonction d'un angle et appliquée au Lagrangien d'interaction [6] :

$$C_{ab} = \frac{\partial}{\partial\theta}(L_{ab}) = \frac{\partial}{\partial\theta}(\Phi_{ab}I_b)$$

avec $\Phi_{ab} = B_a S_b \cos\theta$, on retrouve le couple issu de la formulation Ampérienne :

$$C_{ab} = -I_b B_a S_b \sin\theta = -I_b \oint_b \mathbf{A}_a \cdot d\mathbf{l}_b \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \oint_b I_b d\mathbf{l}_b \times \mathbf{A}_a = \iiint_b \mathbf{j}_b \times \mathbf{A}_a d\tau$$

qui fait apparaître après quelques réarrangements, la densité de couple magnétique suivante :

$$\frac{dC_{ab}}{d\tau} = \mathbf{j}_b \times \mathbf{A}_a$$

En outre, nous allons illustrer le calcul d'un couple magnétique en étudiant l'électrodynamomètre de Pellat d'après les notes du cours d'Electromagnétisme de Paul Langevin à l'Ecole Normale de Sèvres (Archives du Fond Langevin de l'ESPCI à Paris) [22].

Soit un solénoïde horizontal fixe de section quelconque et caractérisé par n_s spires par unité de longueur. Plaçons une bobine constituée de spires de section S_b à l'intérieur du solénoïde. Le solénoïde est parcouru par un courant I_s et la bobine par un courant I_b . Le calcul de la force et du couple exercés par le solénoïde sur la bobine nécessite l'évaluation de

l'inductance mutuelle M_{sb} . Or, l'action mécanique se réduit à un couple car la variation de l'inductance mutuelle pour un déplacement de translation est nulle puisque l'on suppose le solénoïde infiniment long. Par raison de symétrie, l'axe du couple est normal au plan de la surface des spires. On a :

$$M_{sb} = \frac{\Phi_{sb}}{I_s} = \frac{1}{I_s} \oint \mathbf{A}_s \cdot d\mathbf{l} = \frac{B_s S_b \cos \theta}{I_s} = \mu_0 n_s S_b \cos \theta$$

Le couple par rapport à l'axe vertical des actions subies par la bobine s'écrit :

$$C_{sb} = I_s I_b \frac{\partial M_{sb}}{\partial \theta} = -I_s I_b \mu_0 n_s S_b \sin \theta = m_b B_s \sin(-\theta)$$

La bobine intérieure est équivalente à un aimant de moment $m_b = SI_b$ qui est soumis à une induction magnétique $B_s = \mu_0 n_s I_s$. Elle est donc soumise au couple : $\mathbf{C}_{sb} = \mathbf{m}_b \times \mathbf{B}_s$. Si la bobine est placée à l'extérieur du solénoïde, aucun couple n'est présent car le produit du courant par le flux est constant.

Conclusions

Nous avons donc fait le lien entre la formulation ampérienne et la formulation tensorielle. L'expression d'un couple magnétique en fonction de l'association [densité de courant + potentiel vecteur] est donc plus générale que celle utilisant l'association [moment magnétique + induction magnétique] car n'importe quelle distribution de courant ne peut se résumer à un moment magnétique dans le cas le plus général. Cependant, la force de Laplace qui est fonction de l'induction magnétique peut tout autant expliquer l'origine du couple comme le produit de cette force et d'une longueur dans le cas d'un champ magnétique non uniforme. Si ce dernier est uniforme, la force de Laplace sur l'ensemble du circuit est nulle, mais le circuit baigne toujours dans une zone avec champ et l'on peut donc faire appel au produit vectoriel entre le champ et le moment magnétique équivalent pour expliquer l'origine du couple dans le cadre de la formulation de Heaviside-Hertz. Ainsi, l'électrodynamomètre de Pellat ne permet pas de distinguer entre la formulation de Riemann-Lorenz en termes des potentiels et celle de Heaviside-Hertz en termes des champs de l'Electromagnétisme Classique [23]. Par contre la mise en évidence par R. Saumont de la tension d'Helmholtz fait pencher la balance du côté de la formulation avec les potentiels qui, seule, prévoit l'effet.

La possibilité de décrire des situations où l'on ne peut pas faire intervenir de moment magnétique équivalent est très intéressante. Par exemple, l'effet dynamo en magnétohydrodynamique fait l'objet de plusieurs tentatives théoriques pour expliquer la génération spontanée du mouvement dans le noyau liquide conducteur de la Terre en couplage avec le champ magnétique terrestre. Habituellement, l'analyse théorique de l'effet ne fait intervenir qu'un bilan sur les forces à l'exception notable du modèle mécanique analogue de Rikitake où l'on modélise le circuit par son moment magnétique équivalent et où l'on raisonne sur le bilan des couples [24]. Peut-être que le couple issu de l'interaction densité de courant-potentiel vecteur pourrait contribuer à l'effet dynamo...

Références bibliographiques

- [1] G. Bruhat, Electricité, 8^{ème} édition révisée par G. Goudet, Masson, 1963.
- [2] P. Lorrain, D.R. Corson & F. Lorrain, Les Phénomènes Electromagnétiques, Dunod, 2002.
- [3] F.E. Neumann, Recherches sur la théorie mathématique de l'induction, Traduction de M.A. Bravais, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Tome XIII, p. 113-178, Avril 1848. <http://gallica.bnf.fr/>
- [4] O. Darrigol, Electrodynamics from Ampère to Einstein, 2000, Oxford University Press.

- [5] J. Clerk Maxwell, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field (1865), W.D. Niven, ed., The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, 2 vols., New York, 1890. <http://gallica.bnf.fr/>
- [6] J. Clerk Maxwell, A treatise on electricity and magnetism (1873), Volume II, Chapitres III à VIII, Dover Publications, 1954. <http://gallica.bnf.fr/>
- [7] G. Rousseaux & E. Guyon, A propos d'une analogie entre la mécanique des fluides et l'électromagnétisme, Bulletin de l'Union des Physiciens, 841 (2), p. 107-136, février 2002. <http://www.udppc.asso.fr/bup/841/0841D107.pdf>
- [8] H. Poincaré, Electricité et Optique, La lumière et les théories électrodynamiques, Ed. G. Carré et C. Naud, 1901. <http://gallica.bnf.fr/>
- [9] W.F.G. Swann, Relativity and Electrodynamics, Reviews of Modern Physics, Vol. 2, Num. 3, p. 243-346, 1930.
- [10] L. De Broglie, Diverses questions de mécanique et de thermodynamique classiques et relativistes, Cours à l'Institut Henri Poincaré (1948), Chapitre IX, Springer, 1995.
- [11] L. De Broglie, Energie Libre et Fonction de Lagrange. Application à l'Electrodynamique et à l'Interaction entre Courants et Aimants Permanents, Portugaliae Physica, Vol. 3, Fasc. 1, p. 1-20, 1949.
- [12] D.A. Wells, Lagrangian Dynamics, Chapter 15, Schaum's Outlines, Mc Graw Hill, 1967.
- [13] E. Henriot, Les Couples de Radiation et les Moments Electromagnétiques, Mémorial des Sciences Physiques, Fascicule XXX, Gauthier-Villars, 1936.
- [14] R. Reulos, Recherches sur la théorie des corpuscules, Annales de l'Institut Fourier, Tome 5, p. 455-568, 1954. http://archive.numdam.org/article/AIF_1954__5__455_0.pdf
- [15] R. Reulos, Interactions électromagnétiques et couples de radiation, Helvetica Physica Acta, vol. 27, p. 491-493, 1954.
- [16] R. Reulos, L'effet potentiel vecteur (Interaction Courant Potentiel et les Couples de Radiation), Compte rendu des séances de la S.P.H.N. de Genève, NS, vol. 2, fasc. 1, p. 87-96, 1967.
- [17] O. Costa de Beauregard, Statics of filaments and magnetostatics of currents : Ampère tension and the vector potential, Physics Letters A, 183, p. 41-42, 1993.
- [18] O. Costa de Beauregard, Définition et interprétation d'un nouveau tenseur élastique et d'une nouvelle densité de couple en électromagnétisme des milieux polarisés, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 217, p. 662-664, 1943.
- [19] R. Reulos, Sur un nouveau tenseur d'énergie, Compte rendu des séances de la S.P.H.N. de Genève, Séance du 4 mars, p. 47-60, 1971.
- [20] M. Von Laue, Zur Dynamik der Relativitätstheorie, Annalen der Physik, Vol. 35, p. 524-542, 1911. <http://gallica.bnf.fr/>
- [21] E.P.J. de Haas, A renewed theory of electrodynamics in the framework of Dirac-ether, PIRT Conference, London, September 2004. <http://home.tiscali.nl/physics/deHaasPapers/PIRTpaper/deHaasPIRT.html>
- [22] P. Langevin, Notes du Cours d'Electromagnétisme à l'Ecole Normale de Sèvres, Archives du Fond Langevin de l'ESPCI à Paris.
- [23] G. Rousseaux, R. Kofman & O. Minazzoli, Sur un Effet Physique Attribuable Uniquement au Potentiel Vecteur en Electromagnétisme Classique : Partie I, II et III, soumis, 2004.
- [24] R. Moreau, Magnetohydrodynamics, Kluwer Academic Publisher, 1990.