



**HAL**  
open science

# Rigidité infinitésimale de cônes-variétés Einstein à courbure négative.

Grégoire Montcouquiol

► **To cite this version:**

Grégoire Montcouquiol. Rigidité infinitésimale de cônes-variétés Einstein à courbure négative.. 2005.  
hal-00004415

**HAL Id: hal-00004415**

**<https://hal.science/hal-00004415>**

Preprint submitted on 10 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Rigidité infinitésimale de cônes-variétés Einstein à courbure négative

Grégoire Montcouquiol

Laboratoire E.Picard (UMR 5580), Université Paul Sabatier, Toulouse

10 mars 2005

## Abstract

Starting with a compact hyperbolic cone-manifold of dimension  $n \geq 3$ , we study the deformations of the metric with the aim of getting Einstein cone-manifolds. If the singular locus is a closed codimension 2 submanifold and all cone angles are smaller than  $2\pi$ , we show that there is no non-trivial infinitesimal Einstein deformations preserving the cone angles.

## Résumé

Partant d'une cône-variété hyperbolique compacte de dimension  $n \geq 3$ , on étudie les déformations de la métrique dans le but d'obtenir des cônes-variétés Einstein. Dans le cas où le lieu singulier est une sous-variété fermée de codimension 2 et que tous les angles coniques sont plus petits que  $2\pi$ , on montre qu'il n'existe pas de déformations Einstein infinitésimales non triviales préservant les angles coniques.

## 1 Introduction

Dans leur célèbre article [8], Hodgson et Kerckhoff montrent que pour une large classe de cônes-variétés hyperboliques de dimension 3, l'espace des structures coniques hyperboliques au voisinage d'une cône-variété donnée est paramétré par les angles coniques. Leur résultat principal est le théorème de rigidité infinitésimale suivant : si  $M$  est une cône-variété hyperbolique de dimension 3 de volume fini, dont le lieu singulier forme un entrelacs et dont tous les angles coniques sont inférieurs à  $2\pi$ , alors il est impossible de la déformer sans modifier ses angles. Ce résultat, complété par des travaux plus récents (cf notamment [11], [17] et [9]), a été le point de départ de nombreux développements dans l'étude de la géométrie des variétés hyperboliques de dimension 3, tels que la géométrisation des petites orbifolds ou l'étude des groupes kleinien ([4], [5]).

Le principe de la démonstration du théorème de rigidité infinitésimale de Hodgson et Kerckhoff est de réussir à appliquer la méthode de Calabi-Weil aux cônes-variétés : on montre que la représentation d'holonomie n'admet pas de déformations non triviales de la forme voulue. Cela nécessite d'établir des formules d'intégration par parties ainsi qu'un résultat du type théorème de Hodge. Ce genre de difficultés est inhérent à l'étude des cônes-variétés ; nous les reverrons plus en détail.

Dans le cas des variétés fermées, Koiso [10] a donné un analogue de la méthode de Calabi-Weil, qui n'utilise plus la représentation d'holonomie mais étudie directement les déformations de la métrique (cf aussi [2], §12.H). Cette deuxième méthode présente l'avantage d'être plus facilement généralisable et de s'appliquer, en dimension supérieure, à une classe de variétés plus vaste, à savoir les variétés Einstein (vérifiant de bonnes conditions de courbure).

Le but de ce papier est d'adapter la méthode de Koiso pour démontrer qu'en dimension supérieure ou égale à trois, et sous des hypothèses voisines de celles du théorème de Hodgson et Kerckhoff, on ne peut pas déformer une cône-variété hyperbolique en des cônes-variétés Einstein sans en modifier les angles coniques. En particulier, on redémontre dans le cas de la dimension trois le théorème de rigidité infinitésimale ci-dessus.

## 1.1 Présentation des résultats

Le résultat que l'on se propose de démontrer ici est le suivant :

**Théorème (7.1).** *Soit  $M$  une cône-variété hyperbolique compacte, dont le lieu singulier forme une sous-variété fermée de codimension 2, et dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à  $2\pi$ . Alors toute déformation Einstein infinitésimale ne modifiant pas les angles coniques est triviale.*

Les restrictions imposées à la géométrie des cônes-variétés sont essentiellement les mêmes que dans l'article de Hodgson et Kerckhoff [8]. On aurait pu remplacer l'hypothèse " $M$  compacte" par l'hypothèse " $M$  de volume finie", mais les choses sont quand même plus simples dans le cas compact. La condition sur la géométrie du lieu singulier est plus cruciale : c'est elle qui permet d'avoir un bon modèle local et qui permet ainsi de faire les calculs. De manière générale, le lieu singulier d'une cône-variété peut être beaucoup plus compliqué. Enfin, la condition sur les angles coniques est une hypothèse technique qui paraît de prime abord assez mystérieuse. En fait, on verra dans la section 6 que les angles coniques régissent en partie la croissance au voisinage du lieu singulier des solutions d'un laplacien ; plus les angles sont petits, plus on contrôle ces solutions.

La définition précise des cônes-variétés envisagées se trouve dans la section 2. Ce qu'il faut remarquer est que les déformations infinitésimales d'une telle structure peuvent toujours se mettre sous une forme standard (i.e. appartenant à une certaine famille – de dimension infinie – de déformations) au voisinage du lieu singulier. En particulier, une déformation ne modifiant pas les angles a la propriété d'être  $L^2$ , à dérivée covariante  $L^2$ . C'est entre autres pour cette raison que nous travaillerons principalement dans le cadre  $L^2$ .

La section suivante rappelle la définition des métriques et déformations infinitésimales Einstein ; on y expose aussi le problème des déformations triviales. Pour s'en débarrasser on cherche à imposer la condition de jauge de Bianchi, ce qui revient à pouvoir résoudre une équation de normalisation. On trouve ensuite dans la section 4 quelques résultats de la théorie des opérateurs non bornés d'un espace de Hilbert qui nous seront utiles pour résoudre cette équation.

L'outil principal dans la démonstration de la rigidité infinitésimale est connu sous le nom de *technique de Bochner*. En partant d'une équation du type  $Pu = 0$  où  $P$  est un opérateur différentiel du deuxième ordre de type Laplacien, on exprime  $P$  comme somme d'un opérateur auto-adjoint positif  $Q^*Q$  de degré 2 et d'un opérateur  $R$  de degré 0 faisant intervenir la courbure. Une telle décomposition

$$P = Q^*Q + R$$

s'appelle une *formule de Weitzenböck* ; on en rencontrera à plusieurs reprises dans ce texte. Ensuite, dans le cas où l'on travaille sur une variété fermée, une intégration par parties donne

$$0 = \langle Pu, u \rangle = \|Qu\|^2 + \langle Ru, u \rangle.$$

Si l'opérateur  $R$  est tel que  $\langle Ru, u \rangle \geq c\|u\|^2$  avec  $c > 0$ , on trouve alors  $u = 0$ . Le lecteur intéressé par le sujet pourra se référer à [2], §1.I.

Pour pouvoir adapter cette technique aux cônes-variétés il faut pouvoir faire les intégrations par parties, et il est naturel pour cela de travailler ici aussi avec des objets appartenant à des espaces  $L^2$ . On donne dans la section 5 deux résultats dans ce sens, ainsi que leur interprétation en termes d'opérateurs non bornés.

La partie suivante (section 6) est le cœur de ce texte. Elle consiste en une étude détaillée de l'équation de normalisation et de l'opérateur correspondant

$$L = \nabla^*\nabla + (n-1)Id = \Delta + 2(n-1)Id$$

agissant sur les 1-formes. Le but est de trouver des bons domaines sur lesquels  $L$  est auto-adjoint et donc inversible. Pour ce faire, et après avoir préalablement exhibé une décomposition adaptée en séries de Fourier généralisées (§6.3), on étudiera le comportement des solutions de l'équation homogène au voisinage de la singularité. On montrera que ce comportement est étroitement lié aux angles coniques ; par exemple, la norme ponctuelle d'une solution donnée au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier d'angle conique  $\alpha$  est en  $r^k$  avec  $k \in \{\pm 1 \pm 2p\pi\alpha^{-1}, \pm 2p\pi\alpha^{-1}/p \in \mathbb{Z}\}$ . Les restrictions imposées sur les angles coniques permettent de contrôler suffisamment les solutions de l'équation homogène, et finalement les solutions de l'équation de normalisation tout court. On aboutit au théorème suivant :

**Théorème (6.5).** *Soit  $M$  une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à  $2\pi$ . Soit  $\phi$  une forme lisse appartenant à  $L^2(T^*M)$ . Alors il existe une unique forme  $\alpha \in C^\infty(T^*M)$  solution de l'équation  $Lu = \phi$  telle que  $\alpha$ ,  $\nabla\alpha$ ,  $d\delta\alpha$ , et  $\nabla d\alpha$  soient dans  $L^2$ .*

Une fois ce résultat établi, il est relativement facile de faire fonctionner la méthode de Koiso pour démontrer le théorème 7.1 ; c'est l'objet de la section 7. Partant d'une déformation infinitésimale Einstein  $h_0$  préservant les angles (donc à dérivée covariante  $L^2$ ) d'une cône-variété hyperbolique, dont tous les angles coniques sont inférieurs à  $2\pi$ , la démonstration de sa trivialité se fait en deux temps. On a d'abord besoin de se débarrasser des déformations triviales, on utilise donc le résultat mentionné ci-dessus pour résoudre l'équation de normalisation. On applique ensuite une technique de Bochner à la déformation normalisée  $h = h_0 - \delta^*\alpha$ . En utilisant la formule de Weitzenböck idoine et le premier résultat d'intégration par parties, on obtient

$$\delta^\nabla d^\nabla h + (n - 2)h = 0.$$

Une deuxième intégration par parties, un peu plus compliquée, permet de conclure que  $h_0 = \delta^*\alpha$ , et donc que l'on a bien rigidité infinitésimale relativement aux angles coniques au sein des cônes-variétés Einstein.

## 2 Les cônes-variétés et leurs déformations

Nous allons maintenant préciser le cadre dans lequel on se place. La notion de cône-variété, plus générale que celle d'orbifold, a été introduite par Thurston [14] pour l'étude des déformations des variétés hyperboliques à cusps en dimension 3. Le cas le plus fréquemment rencontré est celui des cônes-variétés à courbure constante. Celles-ci sont relativement simples à définir, soit géométriquement comme un recollement de simplexes géodésiques, soit en explicitant la métrique en coordonnées ; c'est cette dernière approche qui sera utilisée ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [15] pour une définition par récurrence des cônes-variétés modelées sur une géométrie.

La géométrie du lieu singulier d'une cône-variété arbitraire peut être très compliquée. Dans le cadre de notre étude nous nous limiterons au cas où il forme une sous-variété de codimension deux, ce qui permet de parler d'angle conique le long de chaque composante connexe du lieu singulier et d'avoir des bons modèles locaux pour mener à bien les calculs.

Enfin, comme notre but est de s'intéresser à des variétés Einstein, on s'autorise une classe assez large de métriques à singularités : on demande juste que la métrique conique ressemble asymptotiquement au produit de la métrique du lieu singulier avec la métrique d'un cône (de dimension deux).

Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n \geq 3$ , et  $\Sigma = \coprod_{i=1}^p \Sigma_i$  une sous-variété fermée plongée de codimension 2, dont les  $\Sigma_i$  sont les composantes connexes. Dans la suite de ce texte on emploiera souvent la notation  $M$  pour désigner improprement  $M \setminus \Sigma$ .

**Définition 2.1.** Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  des réels positifs. La variété  $M$  est munie d'une structure de cône-variété, de lieu singulier  $\Sigma = \coprod_{i=1}^p \Sigma_i$  et d'angles coniques les  $\alpha_i$ , si :

- $M \setminus \Sigma$  est munie d'une métrique riemannienne  $g$ , non complète ;
- pour tout  $i$ ,  $\Sigma_i$  est munie d'une métrique riemannienne  $g_i$  ;
- pour tout  $i$ , tout point  $x$  de  $\Sigma_i$  a un voisinage  $V$  dans  $M$  difféomorphe à  $D^2 \times U$ , avec  $U = V \cap \Sigma_i$  un voisinage de  $x$  dans  $\Sigma_i$ , dans lequel  $g$  s'exprime en coordonnées cylindriques locales sous la forme

$$g = dr^2 + \left(\frac{\alpha_i}{2\pi}\right)^2 r^2 d\theta^2 + g_i + q,$$

où  $q$  est un 2-tenseur symétrique vérifiant  $g(q, q) = O(r^2)$  et  $g(\nabla q, \nabla q) = O(r)$ .

Dans la suite on exprimera souvent la métrique  $g$  sous la forme légèrement différente

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + g_i + q,$$

où la coordonnée d'angle  $\theta$  est définie non plus modulo  $2\pi$  mais modulo l'angle conique  $\alpha_i$ .

Une cône-variété hyperbolique est alors une cône-variété telle que les métriques  $g$  et  $g_i$  soient hyperboliques. On a dans ce cas, en reprenant les notations de la définition,

$$q = \left(\frac{\alpha_i}{2\pi}\right)^2 (\sinh(r)^2 - r^2) d\theta^2 + (\cosh(r)^2 - 1) g_i.$$

Pour démontrer la rigidité, nous aurons besoin que tous les angles coniques soient inférieurs à  $2\pi$ , mais cette condition n'apparaît qu'à partir de la fin de la partie 6.

Le caractère singulier des cônes-variétés pose certains problèmes pour adapter la méthode de Koiso et faire fonctionner une technique de Bochner. Il faut toujours vérifier si les choses marchent de la même manière que dans le cas compact.

La première difficulté va venir des intégrations par parties. Premièrement, pour garantir que les expressions manipulées ont un sens, nous serons obligés de travailler avec des objets  $L^2$ . Deuxièmement, il va falloir démontrer qu'on peut effectivement appliquer des formules de type Stokes : ce sera l'objet de la partie 5. Au final nous serons en mesure d'effectuer des intégrations par parties pour les opérateurs  $d$  et  $\delta$ , et  $\nabla$  et  $\nabla^*$ . Mais un tel résultat n'existe pas (à notre connaissance) pour les opérateurs  $d^\nabla$  et  $\delta^\nabla$  ; nous devons donc contourner cette difficulté quand nous en aurons besoin (section 7).

La plus grande difficulté va venir de l'équation de normalisation, étudiée dans la section 6. Bien qu'en présence d'un sympathique opérateur elliptique, on ne peut pas appliquer la théorie classique sur une cône-variété, dont la métrique est singulière. L'équation admettra encore des solutions, mais celles-ci ne seront plus uniques, et on aura quoi qu'il arrive une perte de régularité. Cependant, en imposant que les angles coniques soient inférieurs à  $2\pi$  nous aurons suffisamment de contrôle sur la norme de certaines combinaisons linéaires des dérivées des solutions pour faire fonctionner une technique de Bochner.

Soit  $(M, g)$  une cône-variété au sens ci-dessus, de lieu singulier  $\Sigma$ . Soit maintenant  $g_t$  une famille de métriques singulières, dérivable, telle que  $g_0 = g$  et que pour tout  $t$ ,  $(M, g_t)$  soit une cône-variété de lieu singulier  $\Sigma$ .

Si  $x$  est un point de  $\Sigma$ , pour tout  $t$  il existe par définition un voisinage de  $x$  dans  $M$  dans lequel on a l'expression ci-dessus pour la métrique en coordonnées cylindriques. Quitte à les restreindre, ces voisinages sont tous difféomorphes, et on peut donc faire agir une famille  $\phi_t$  de difféomorphismes de telles façons que les coordonnées cylindriques locales pour l'expression de  $\phi_t^* g_t$  soient les mêmes pour tout  $t$ .

Dit d'une autre manière, il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $M$ , diffeomorphe à  $D^2 \times U$  où  $U = V \cap \Sigma$  est un voisinage de  $x$  dans  $\Sigma$ , dans lequel on peut trouver des coordonnées cylindriques telles que pour tout  $t$ , on ait :

$$\phi_t^* g_t = dr^2 + \left(\frac{\alpha_t}{2\pi}\right)^2 r^2 d\theta^2 + h_t + q_t.$$

Dans cette expression,  $h_t$  désigne une métrique sur  $U$  et  $q_t$  est un 2-tenseur symétrique qui vérifie les conditions de la définition 2.1.

Finalement, quitte à modifier la famille  $g_t$  par des diffeomorphismes, ce qui revient à modifier la déformation infinitésimale par une déformation géométriquement triviale, on peut montrer que  $h = \frac{dg_t}{dt}|_{t=0}$  est au voisinage du lieu singulier combinaison linéaire des quatre types de déformations suivants, modifiant :

- l'angle,
- la métrique du lieu singulier,
- le reste,
- et enfin, la façon de "recoller" la variable d'angle quand on passe d'un système de coordonnées à un autre.

Il est important de noter que toutes ces déformations infinitésimales sont  $L^2$ , mais que seules les trois dernières ont leur dérivée covariante dans  $L^2$ . Ainsi, c'est au niveau du caractère  $L^2$  ou non de la dérivée covariante de la déformation que l'on voit si celle-ci préserve ou non les angles coniques.

### 3 Les métriques Einstein, leurs déformations et l'équation de normalisation

Par définition, une *métrique Einstein* est une métrique riemannienne  $g$  vérifiant l'équation

$$ric(g) = cg,$$

où le terme de gauche est le tenseur de courbure de Ricci et où  $c$  est une constante. Notons que si on remplace  $g$  par  $\lambda g$ , avec  $\lambda$  une constante strictement positive, alors la nouvelle métrique vérifie l'équation ci-dessus en remplaçant  $c$  par  $\lambda^{-1}c$ ; donc en fait c'est principalement le signe et non la valeur exacte de la constante  $c$  qui compte. On peut ainsi distinguer trois grandes classes de métriques Einstein suivant que  $c$  est négatif, positif ou nul.

Les métriques à courbure sectionnelle constante sont toujours Einstein ; en dimension 3 ce sont les seules. Par contre dès la dimension 4 il y a beaucoup plus de métriques Einstein que de métriques à courbure sectionnelle constante ; on peut donc considérer la condition Einstein comme un affaiblissement ou une généralisation de la condition courbure sectionnelle constante.

Puisque l'on s'intéresse principalement aux cônes-variétés hyperboliques, on ne considèrera que des métriques Einstein vérifiant  $E(g) = 0$ , avec

$$E(g) = ric(g) + (n - 1)g.$$

La constante  $(n - 1)$  est choisie de telle sorte que les métriques hyperboliques vérifient cette équation.

Soit  $g_t$  une famille lisse de métriques Einstein (c'est-à-dire vérifiant  $E(g_t) = 0$ ) sur une variété donnée  $M$ , avec  $g_0 = g$ . Le 2-tenseur symétrique  $h = \frac{d}{dt}g_t|_{t=0}$  vérifie alors l'équation d'Einstein linéarisée

$$E'_g(h) = 0.$$

Le calcul de  $E'_g$  est classique, cf par exemple [2] §1.K :

$$E'_g(h) = \nabla_g^* \nabla_g h - 2\mathring{R}_g h - \delta_g^*(2\delta_g h + d\text{tr}_g h).$$

Les opérateurs utilisés ici nécessitent un peu d'explication. La notation  $\nabla_g$ , ou  $\nabla$  pour simplifier, désigne la dérivée covariante ou connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne  $g$ . Elle admet un adjoint formel noté  $\nabla_g^*$  : si  $(e_i)_{i=1\dots n}$  est une base orthonormée, on a

$$\nabla_g^* \alpha(X_1, \dots, X_p) = - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \alpha)(e_i, X_1, \dots, X_p).$$

Pour les tenseurs symétriques, on définit  $\delta_g^* : \mathcal{S}^p M \rightarrow \mathcal{S}^{p+1} M$  comme étant la composée de la dérivée covariante et de la symétrisation. En particulier, si  $\alpha \in \Omega^1 M = \mathcal{S}^1 M$ , alors

$$\begin{aligned} \delta_g^* \alpha(x, y) &= \frac{1}{2}((\nabla_x \alpha)(y) + (\nabla_y \alpha)(x)) \\ &= \frac{1}{2}(g(\nabla_x \alpha^\sharp, y) + g(\nabla_y \alpha^\sharp, x)) \\ &= \frac{1}{2}L_{\alpha^\sharp} g(x, y), \end{aligned}$$

où  $L_{\alpha^\sharp}$  désigne la dérivée de Lie le long du champ de vecteur  $\alpha^\sharp$  dual (pour la métrique  $g$ ) à la forme  $\alpha$ . L'adjoint formel de l'opérateur  $\delta_g^*$  se note  $\delta_g$  ; c'est juste la restriction de  $\nabla_g^*$  à  $\mathcal{S}^{p+1} M$ .

Ensuite,  $\mathring{R}_g$  désigne l'action du tenseur de courbure  $R_g$  sur les 2-tenseurs symétriques : si  $h$  est une section de  $\mathcal{S}^2 M$ , on pose

$$\mathring{R}_g h(x, y) = \sum_{i=1}^n h(R_g(x, e_i)y, e_i),$$

où  $(e_i)$  est une base orthonormale pour  $TM$  ; c'est encore un 2-tenseur symétrique. Si  $g$  est hyperbolique, on a alors

$$\mathring{R}_g h = h - (\text{tr}_g h)g.$$

Enfin, la notation  $\text{tr}_g$  désigne juste la trace par rapport à  $g$  : si  $h$  est un 2-tenseur,

$$\text{tr}_g h = \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i).$$

Dans la suite et pour alléger les notations, on omettra le plus fréquemment l'indice  $g$ .

Par définition, une *déformation Einstein infinitésimale* de la variété Einstein  $(M, g)$  est un 2-tenseur symétrique  $h$  vérifiant l'équation  $E'_g(h) = 0$ .

Maintenant, si  $g$  est Einstein et si  $\phi$  est un difféomorphisme de  $M$ , alors la métrique tirée en arrière  $\phi^*g$  est aussi Einstein. Par conséquent, si  $\phi_t$  est une famille lisse de difféomorphismes telle que  $\phi_0$  soit l'identité, alors la déformation infinitésimale associée  $\frac{d}{dt}\phi_t^*g|_{t=0}$  est naturellement Einstein. Une telle déformation est qualifiée de *triviale*. Soit  $X$  le champ de vecteurs sur  $M$  défini par  $X(x) = \frac{d}{dt}(\phi_t(x))|_{t=0}$ , et soit  $\alpha = X^\flat$  la 1-forme duale, c'est-à-dire vérifiant  $\alpha(Y) = g(X, Y)$  pour tout vecteur  $Y$ . On a les relations

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*g)|_{t=0} = L_X g = 2\delta_g^* \alpha;$$

l'espace des déformations infinitésimales triviales est donc égal à  $\text{Im } \delta_g^*$ .

La façon habituelle de se débarrasser des déformations triviales est d'imposer une condition de jauge, c'est-à-dire de ne considérer que des déformations infinitésimales vérifiant une certaine équation. On en trouve plusieurs dans la littérature, on utilisera ici la jauge de Bianchi (cf [3] §I.1.C, [1] §2.3, à comparer à [2] §12.C). On veut donc que nos déformations infinitésimales  $h$  vérifient

$$\beta_g(h) = 0,$$

où  $\beta_g : \mathcal{S}^2 M \rightarrow \Omega^1 M$  est l'opérateur de Bianchi (associé à la métrique  $g$ ) défini par

$$\beta_g(h) = \delta_g h + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}_g h.$$

Ainsi, étant donnée une déformation infinitésimale  $h_0$ , on veut pouvoir la modifier par une déformation triviale, de façon essentiellement unique, de telle sorte que le résultat vérifie la condition de jauge. Dit plus précisément, on veut trouver une 1-forme  $\alpha$  telle que la déformation normalisée  $h = h_0 - \delta^* \alpha$  satisfasse  $\beta(h) = 0$ ; de façon équivalente, on cherche à résoudre l'équation de normalisation (on omet les indices)

$$\beta \circ \delta^* \alpha = \beta(h_0).$$

L'étude de cette équation et de l'opérateur  $\beta \circ \delta^*$  est l'objet de la section 6. On se placera entre autre dans le cadre de la théorie des opérateurs non bornés entre espace de Hilbert, dont les résultats principaux sont cités dans la section suivante.

## 4 Quelques rappels sur les opérateurs non bornés

Nous allons annoncer un certain nombre de définitions et propriétés concernant les opérateurs non bornés; le lecteur intéressé pourra consulter [12], chapitre 8, ou [13], chapitre 13.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert. Un *opérateur non borné* est une application linéaire

$$A : D(A) \rightarrow F$$

où  $D(A)$  (le domaine de  $A$ ) est un sous-espace vectoriel de  $E$ . En particulier, toute application linéaire (continue ou non) de  $E$  dans  $F$  est un opérateur non borné.

Soit  $A$  et  $B$  deux opérateurs non bornés. On dit que  $B$  est un *prolongement* de  $A$ , noté  $A \subset B$ , si  $D(A) \subset D(B)$  et  $B|_{D(A)} = A$ .

Un opérateur non borné  $A$  est *fermé* si son graphe  $G(A) = \{(u, A(u)) | u \in D(A)\}$  est fermé dans  $E \times F$ , ce qui revient à dire que pour toute suite  $(u_n)$  de  $D(A)$  telle que  $u_n \rightarrow u \in E$  et  $A(u_n) \rightarrow v \in F$ , on a  $u \in D(A)$  et  $v = A(u)$ .

Si  $A$  est à domaine dense dans  $E$ , on peut définir son *adjoint*  $A^* : D(A^*) \subset F \rightarrow E$  de la façon suivante :

$$v \in D(A^*) \iff \exists w \in E \text{ tel que } \forall u \in D(A), \langle u, w \rangle_E = \langle A(u), v \rangle_F.$$

Comme  $D(A)$  est dense dans  $E$ , l'élément  $w$  (si il existe) est unique; on pose  $w = A^*(v)$ . Remarquons que l'adjoint d'un opérateur est toujours fermé. On a aussi la propriété évidente (si les opérateurs considérés sont à domaine dense)  $A \subset B \implies B^* \subset A^*$ .

Pour définir  $A^{**}$ , il faut vérifier que  $A^*$  est à domaine dense, ce qui n'est pas toujours le cas. Mais on a la propriété suivante (cf [12] §117) :

**Proposition 4.1.** *Soit  $A$  un opérateur non borné de  $E$  dans  $F$ , à domaine dense. Alors  $A^*$  est à domaine dense si et seulement si  $A$  admet un prolongement fermé. Dans ce cas,  $A^{**}$  est le plus petit prolongement fermé de  $A$ , i.e. si on a  $A \subset B$  avec  $B$  fermé, alors  $A^{**} \subset B$ .*



On remarque aussi que le graphe de  $A^{**}$  n'est autre que l'adhérence dans  $E \times F$  du graphe de  $A$ . D'autre part, si  $A$  est fermé, on a  $A^{**} = A$ . En particulier, dès que cela a un sens, on a toujours  $A^{***} = A^*$  (notons au passage que l'on a bien  $(A^*)^{**} = (A^{**})^*$ ).

Si  $A$  est injectif, on peut définir son inverse  $A^{-1}$  : son domaine n'est autre que l'image de  $A$ .

Pour pouvoir définir la composition de deux opérateurs non bornés  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  et  $B : D(B) \subset F \rightarrow G$ , on pose, par définition,

$$D(B \circ A) = \{x \in D(A) \mid A(x) \in D(B)\}.$$

De même, la somme se définit naturellement sur le domaine

$$D(A + A') = D(A) \cap D(A').$$

Il se peut évidemment que ces domaines soient réduits à l'élément nul. Cependant, on a le théorème relativement surprenant suivant ([12], §118, ou [13], théorème 13.13) :

**Théorème 4.2.** *Si l'opérateur non borné  $A : E \rightarrow F$  est fermé et de domaine dense, alors les opérateurs*

$$B = (A^* \circ A + Id)^{-1}, \quad C = A \circ (A^* \circ A + Id)^{-1}$$

*sont des applications linéaires continues de  $E$  dans  $E$  et de  $E$  dans  $F$  ; de plus  $\|B\| \leq 1$ ,  $\|C\| \leq 1$ , et  $B$  est auto-adjointe positive.*

Maintenant, soit  $M$  une variété riemannienne, et soit  $E$  et  $F$  deux fibrés vectoriels sur  $M$ , munis de métriques riemanniennes  $(\cdot, \cdot)_E$  et  $(\cdot, \cdot)_F$ . On note  $C_0^\infty(E)$  (resp.  $C^\infty(E)$ , resp.  $L^2(E)$ ) l'espace des sections de  $E$  qui sont  $C^\infty$  à support compact (resp.  $C^\infty$ , resp.  $L^2$ ) ; de même pour  $F$ . La métrique sur  $E$  et la forme volume sur  $M$  font de  $L^2(E)$  un espace de Hilbert (pour le produit scalaire  $\langle f, g \rangle_E = \int_M (f, g)_E d\text{vol}_M$ ) dont  $C_0^\infty(E)$  est un sous-espace dense ; de même pour  $F$ .

Soit  $A$  un opérateur différentiel agissant sur les sections de  $E$ . On le considère comme un opérateur non borné de domaine les sections  $C^\infty$  à support compact, i.e.

$$A : C_0^\infty(E) \rightarrow C_0^\infty(F) \subset L^2(F),$$

et on suppose que  $A$  admet un *adjoint formel*  $A^t : C_0^\infty(F) \rightarrow C_0^\infty(E)$ , i.e. tel que

$$\langle Au, v \rangle_F = \langle u, A^t v \rangle_E \quad \forall u \in C_0^\infty(E) \text{ et } \forall v \in C_0^\infty(F).$$

On a clairement  $A^t \subset A^*$  donc  $A^*$  est à domaine dense.

On pose alors  $A_{min} = A^{**}$ , c'est, on l'a vu, le plus petit prolongement fermé de  $A$ . Le graphe de  $A^{**}$  est l'adhérence du graphe de  $A$ , donc (et on peut prendre ça comme définition)

$$u \in D(A_{min}) \iff \exists (u_n) \in C_0^\infty(E) \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ et que la suite } (Au_n) \text{ converge dans } L^2,$$

$A_{min}u$  est alors la valeur de cette limite.

On pose aussi  $A_{max} = (A^t)^*$  ; comme  $A^t \subset A^*$ , on a  $A^{**} \subset A_{max}$  et donc  $A \subset A_{max}$ . De plus  $A^t \subset (A^t)^{**} = (A_{max})^*$ , et, vu la propriété de minimalité de  $^{**}$ , on en déduit que  $A_{max}$  est le plus grand prolongement de  $A$  dont l'adjoint prolonge aussi  $A^t$ . Plus précisément,

$$u \in D(A_{max}) \iff \exists v \in L^2(F) \text{ tel que } \forall \phi \in C_0^\infty(F), \langle u, A^t \phi \rangle_E = \langle v, \phi \rangle_F,$$

ce qui signifie exactement que  $v = Au$  "au sens des distributions". En utilisant des techniques standards d'analyse (convolution), on montre qu'on peut approcher  $u \in D(A_{max})$  par des sections lisses, i.e. (et on peut prendre ça comme définition)

$$u \in D(A_{max}) \iff \exists (u_n) \in C^\infty(E) \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ et que la suite } (Au_n) \text{ converge dans } L^2$$

( $A_{max}u$  est alors la valeur de cette limite).

## 5 Deux résultats d'intégration par parties sur les cônes-variétés

Pour faire fonctionner la technique de Bochner nous avons besoin de procéder à des intégrations par parties. Les deux résultats suivants ainsi que leur interprétation en termes d'opérateurs non bornés sont à notre disposition. Le premier théorème d'intégration par parties sur une cône-variété est le suivant, dû à Cheeger [6] :

**Théorème 5.1.** *Soient  $\alpha \in \Omega^p M$  et  $\beta \in \Omega^{p+1} M$  deux formes  $C^\infty$  sur  $M$  telles que  $\alpha$ ,  $d\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\delta\beta$  soient dans  $L^2$ . Alors*

$$\langle \alpha, \delta\beta \rangle = \langle d\alpha, \beta \rangle.$$

En fait il faut adapter un tout petit peu la démonstration, ou combiner deux résultats de l'article cité (cf aussi [8], appendice).

Par passage à la limite, il est clair que l'on a encore

$$\langle \alpha, \delta_{max}\beta \rangle = \langle d_{max}\alpha, \beta \rangle$$

quel que soit  $\alpha \in D(d_{max})$  et  $\beta \in D(\delta_{max})$ . On en déduit immédiatement (cf aussi [7]) que :

**Corollaire 5.2.** *Les opérateurs  $d_{max}$  et  $\delta_{max}$  sont adjoints l'un de l'autre ; on a  $d_{max} = d_{min}$  et  $\delta_{max} = \delta_{min}$ .*

*Démonstration.* En effet, l'égalité  $\langle \alpha, \delta_{max}\beta \rangle = \langle d_{max}\alpha, \beta \rangle$  quel que soit  $\alpha \in D(d_{max})$  et  $\beta \in D(\delta_{max})$  implique que  $\delta_{max} \subset d_{max}^*$ . Or  $d_{max}^* = \delta_{min} \subset \delta_{max}$ . Donc  $\delta_{max} = \delta_{min} = d_{max}^*$ . Le même argument montre que  $d_{max} = d_{min} = \delta_{max}^*$ .  $\square$

Le deuxième résultat concerne les tenseurs et non plus les formes différentielles :

**Théorème 5.3.** *Soient  $u \in C^\infty(T^{(r,s)} M)$ ,  $v \in C^\infty(T^{(r+1,s)} M)$  tels que  $u$ ,  $\nabla u$ ,  $v$ ,  $\nabla^* v$  soient dans  $L^2$ . Alors*

$$\langle u, \nabla^* v \rangle = \langle \nabla u, v \rangle.$$

*Démonstration.* On va démontrer ce résultat en utilisant une méthode similaire à celle de Cheeger [6]. Pour simplifier, nous supposons que la métrique au voisinage de  $\Sigma$  est exactement, en coordonnées locales, de la forme  $g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + g_{\Sigma_t}$ , où  $\theta$  est définie modulo l'angle conique  $\alpha$ . Le cas général se traite exactement de la même façon, les expressions sont juste un peu plus compliquées.

Soit  $a$  un réel positif suffisamment petit pour que le  $a$ -voisinage fermé de  $\Sigma$  dans  $M$  soit tubulaire. Pour  $t \leq a$ , on pose  $U_t$  le  $t$ -voisinage de  $\Sigma$  dans  $M$ ,  $\Sigma_t = \partial U_t$ , et  $M_t = M \setminus U_t$ . Le vecteur  $\frac{\partial}{\partial r} = e_r$  est une normale unitaire en tout point de  $\Sigma_t$ . Avec ces notations, une intégration par parties ( c'est-à-dire la formule de Stokes ) nous donne :

$$\int_{M_t} (g(u, \nabla^* v) - g(\nabla u, v)) = \int_{\Sigma_t} g_{\Sigma_t}(u, i_{e_r} v)$$

où  $i_{e_r} v = v(e_r, \cdot)$ . Le terme de gauche converge vers  $\langle u, \nabla^* v \rangle - \langle \nabla u, v \rangle$  quand  $t$  tend vers 0. Notons  $I_t$  le terme de droite de l'égalité, qui correspond au terme de bord. On a alors les inégalités suivantes (la notation  $|\cdot|$  désigne la valeur absolue aussi bien que la norme ponctuelle pour la métrique  $g$ ) :

$$\begin{aligned} |I_t| &\leq \int_{\Sigma_t} |u| |i_{e_r} v| \\ &\leq \left( \int_{\Sigma_t} |u|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Sigma_t} |i_{e_r} v|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

On va montrer que le fait que  $\nabla u$  soit  $L^2$  permet d'avoir une bonne majoration de  $\int_{\Sigma_t} |u|^2$ . Et comme  $i_{e_r} v$  est  $L^2$  (car  $v$  l'est aussi),  $\int_{\Sigma_t} |i_{e_r} v|^2$  ne peut pas croître trop vite quand  $t$  tend vers 0. Ce deux résultats nous permettront d'affirmer que  $I_{t_n}$  tend vers 0 pour une suite  $t_n$  tendant vers 0.

En tout point où  $|u| \neq 0$ , la fonction  $|u|$  est dérivable, et  $d|u|(x) = g(\nabla_x u, \frac{u}{|u|})$ . On pose

$$\frac{\partial |u|}{\partial r} = g(\nabla_{e_r} u, \frac{u}{|u|})$$

si  $|u| \neq 0$ , et  $\frac{\partial |u|}{\partial r} = 0$  sinon. Il s'agit de la dérivée partielle distributionnelle de  $|u|$ , au sens où l'on a, si les coordonnées autres que  $r$  restent fixées,

$$|u(t)| - |u(a)| = \int_a^t \frac{\partial |u|}{\partial r}(r) dr.$$

Or  $|\frac{\partial |u|}{\partial r}| \leq |\nabla_{e_r} u| \leq |\nabla u|$ , et donc, si  $t \leq a$ ,

$$|u(t)| \leq |u(a)| + \int_t^a |\nabla u| dr$$

et

$$|u(t)|^2 \leq 2|u(a)|^2 + 2(\int_t^a |\nabla u| dr)^2.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient

$$\begin{aligned} \left( \int_t^a |\nabla u| dr \right)^2 &\leq \int_t^a \frac{dr}{r} \int_t^a r |\nabla u|^2 dr \\ &\leq |\ln(\frac{t}{a})| \int_t^a r |\nabla u|^2 dr \end{aligned}$$

En intégrant sur  $\Sigma_t$  on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} |u|^2 &\leq \int_{\Sigma_t} 2|u(a)|^2 + \int_{\Sigma_t} \left( 2 \ln(\frac{t}{a}) \int_t^a r |\nabla u|^2 dr \right) \\ &\leq 2 \int_{\Sigma_t} |u(a)|^2 + 2 |\ln(\frac{t}{a})| \int_{\Sigma_t} \int_t^a r |\nabla u|^2 dr \\ &\leq 2 \int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha} |u(a)|^2 t d\theta dvol_{\Sigma} + 2 |\ln(\frac{t}{a})| \int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha} \left( \int_t^a r |\nabla u|^2 dr \right) t d\theta dvol_{\Sigma} \\ &\leq 2 \frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t |\ln(\frac{t}{a})| \int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_t^a |\nabla u|^2 r dr d\theta dvol_{\Sigma} \\ &\leq 2 \frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t |\ln(\frac{t}{a})| \int_{U_a} |\nabla u|^2 \\ &= O(t |\ln(t)|) \end{aligned}$$

Il reste à contrôler le terme  $\int_{\Sigma_t} |i_{e_r} v|^2 \leq \int_{\Sigma_t} |v|^2$ . Comme  $v$  est  $L^2$ ,

$$\int_0^a \left( \int_{\Sigma_t} |v|^2 \right) dt = \int_{U_a} |v|^2 < +\infty,$$

et donc la fonction  $t \mapsto \int_{\Sigma_t} |v|^2$  est intégrable sur  $]0, a]$ . Or la fonction  $(t \ln(t))^{-1}$  n'est pas intégrable en 0. On en déduit donc qu'il existe une suite  $t_n$  tendant vers 0 pour laquelle

$$\int_{\Sigma_{t_n}} |v|^2 = o((t_n \ln(t_n))^{-1}).$$

En combinant avec la majoration obtenue pour  $\int_{\Sigma_t} |u|^2$ , on en déduit immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{t_n} = 0.$$

Or  $I_t \rightarrow \langle u, \nabla^* v \rangle - \langle \nabla u, v \rangle$  quand  $t \rightarrow 0$ ; on a donc bien  $\langle u, \nabla^* v \rangle = \langle \nabla u, v \rangle$ .  $\square$

**Corollaire 5.4.** *On considère  $\nabla$  comme un opérateur non borné  $\nabla : C_0^\infty(T^{(r,s)}M) \rightarrow C_0^\infty(T^{(r+1,s)}M)$ . Alors  $\forall u \in D(\nabla_{max}), \forall v \in D(\nabla^*)$ , on a l'égalité*

$$\langle \nabla_{max} u, v \rangle = \langle u, \nabla^* v \rangle.$$

*Ceci implique en particulier que  $\nabla_{min} = \nabla_{max}$  et que  $\nabla_{min}^t = \nabla_{max}^t = \nabla^*$ .*

*Démonstration.* La première égalité se démontre directement en prenant des suites régularisantes pour  $u$  et pour  $v$  : en effet on a vu dans la section précédente que si  $u \in D(\nabla_{max})$  (resp.  $v \in D(\nabla^*)$ ), il existe une suite  $u_n \in C^\infty(T^{(r,s)}M)$  (resp.  $v_n \in C^\infty(T^{(r+1,s)}M)$ ) telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla u_n = \nabla_{max} u$  dans  $L^2$  (resp.  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla^* v_n = \nabla^* v$ ). Alors

$$\langle u, \nabla^* v \rangle = \lim \langle u_n, \nabla^* v_n \rangle = \lim \langle \nabla u_n, v_n \rangle = \langle \nabla_{max} u, v \rangle.$$

La suite se démontre comme le corollaire 5.2.  $\square$

Dans la suite les notations  $\nabla$  et  $\nabla^*$  désigneront donc (sauf exception) les opérateurs  $\nabla_{max}(= \nabla_{min})$  et  $\nabla_{max}^t(= \nabla_{min}^t = \nabla^*)$ .

On emploiera fréquemment le corollaire suivant, simple reformulation du précédent :

**Corollaire 5.5.** *Soit  $u$  appartenant à  $D(\nabla)$ , c'est-à-dire tel que  $u$  et  $\nabla u$  sont  $L^2$ . Alors il existe une suite  $(u_n)$ ,  $C^\infty$  à support compact, telle que  $u_n \rightarrow u$  et  $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  dans  $L^2$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

*Démonstration.* C'est juste la définition de  $u \in D(\nabla_{min})$ .  $\square$

*Remarque :* dans les théorèmes ci-dessus, la condition  $L^2$  paraît naturelle, ne serait-ce que pour s'assurer de l'existence des termes du type  $\langle \nabla u, v \rangle$ . Cependant il est intéressant de noter que la démonstration donnée du théorème 5.3 ne fonctionne pas avec des hypothèses du type  $u, \nabla u \in L^p$  et  $v, \nabla^* v \in L^q$ , avec  $p$  et  $q$  des exposants conjugués. La condition  $L^2$  est donc plus importante qu'il n'y paraît.

## 6 Etude de l'équation de normalisation

Dans toute cette section, nous supposons que la métrique conique  $g$  est *hyperbolique*.

Comme on l'a vu dans la section 3, pour se débarrasser des déformations triviales on cherche à imposer la condition de jauge de Bianchi. Montrer qu'une déformation infinitésimale peut se mettre sous une forme normalisée vérifiant la condition de jauge revient à résoudre l'équation de normalisation :

$$\beta \circ \delta^* \alpha = \beta h_0.$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus lisible. Pour cela, on utilise le fait que

$$\nabla \alpha = \delta^* \alpha + \frac{1}{2} d\alpha$$

(il s'agit juste de la décomposition du 2-tenseur  $\nabla\alpha$  en partie symétrique et anti-symétrique), que  $\delta$  est toujours la restriction de  $\nabla^*$  au sous-fibré correspondant, et donc que

$$\delta\alpha = \nabla^*\alpha = -\text{tr}\nabla\alpha = -\text{tr}\delta^*\alpha,$$

la trace de  $d\alpha$  étant nulle puisque  $d\alpha$  est anti-symétrique. On obtient alors

$$\begin{aligned} 2\beta(\delta^*\alpha) &= 2\delta\delta^*\alpha + d\text{tr}\delta^*\alpha \\ &= 2\nabla^*(\nabla\alpha - \frac{1}{2}d\alpha) - d\delta\alpha \\ &= 2\nabla^*\nabla\alpha - \delta d\alpha - d\delta\alpha \\ &= 2\nabla^*\nabla\alpha - \Delta\alpha. \end{aligned}$$

Ici  $\Delta = d\delta + \delta d$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les 1-formes. Or  $\Delta$  et  $\nabla^*\nabla$  (parfois nommé *laplacien de connexion*) sont reliés par la classique formule de Weitzenböck

$$\Delta\alpha = \nabla^*\nabla\alpha + \text{ric}(\alpha),$$

cf [2] §1.155. En utilisant cette formule et le fait que la métrique  $g$  est hyperbolique, on trouve

$$\begin{aligned} 2\beta(\delta^*\alpha) &= \Delta\alpha + 2(n-1)\alpha \\ &= \nabla^*\nabla\alpha + (n-1)\alpha. \end{aligned}$$

On est donc amené à étudier l'opérateur  $L : \alpha \mapsto \nabla^*\nabla\alpha + (n-1)\alpha$ .

## 6.1 Premières propriétés

La première chose à remarquer sur  $L$  est qu'il est *elliptique*. En particulier, si  $\phi$  est  $C^\infty$  et que  $L\alpha = \phi$  au sens des distributions, alors  $\alpha$  est  $C^\infty$ . Malheureusement, le caractère singulier d'une cône-variété nous empêche d'utiliser directement les inégalités de type Schauder ou Gårding. Par exemple, on peut montrer qu'il existe des 1-formes  $\alpha$  appartenant à  $L^2$  telles que  $L\alpha = 0$  au sens des distributions avec  $\nabla\alpha$  qui n'est pas dans  $L^2$ .

Il est clair que  $L$ , vu comme un opérateur non borné  $C_0^\infty(T^*M) \rightarrow C_0^\infty(T^*M)$ , est formellement symétrique : avec les notations de la section 4,  $L^t = L$ . Malheureusement, il est possible de montrer que dès que la dimension de notre cône-variété est supérieure à 2, l'opérateur  $L$  n'est pas essentiellement auto-adjoint, i.e.  $L_{min} \neq L_{max}$  (ou si l'on préfère,  $L^{**} \neq L^*$ ). On va donc étudier des extensions auto-adjointes  $\bar{L}$  de  $L$ , avec  $L_{min} \subset \bar{L} \subset L_{max}$ .

Le théorème 4.2 nous donne une première telle extension : toujours avec les conventions de la section 4, l'opérateur  $\nabla^* \circ \nabla + (n-1)Id$  est auto-adjoint et inversible. Son domaine est par définition

$$D = \{\alpha \in D(\nabla) \mid \nabla\alpha \in D(\nabla^*)\} = \{\alpha \in L^2 \mid \nabla\alpha, \nabla^*\nabla\alpha \in L^2\}$$

(dans la deuxième définition, il faut considérer  $\nabla$  et  $\nabla^*\nabla$  au sens des distributions).

On va maintenant introduire une deuxième extension auto-adjointe. On doit à Gaffney [7] le résultat général suivant : les opérateurs  $d_{min}\delta_{max} + \delta_{max}d_{min}$  et  $d_{max}\delta_{min} + \delta_{min}d_{max}$  (encore avec les conventions de la section 4) sont toujours auto-adjoints. Or d'après le corollaire 5.2, on a  $d_{min} = d_{max}$  et  $\delta_{min} = \delta_{max}$  ; les deux opérateurs ci-dessus sont donc les mêmes sur une cône-variété. On en déduit que l'opérateur  $d_{max}\delta_{max} + \delta_{max}d_{max} + 2(n-1)Id$ , défini sur le domaine

$$\begin{aligned} D' &= \{\alpha \in D(d_{max}) \cap D(\delta_{max}) \mid d_{max}\alpha \in D(\delta_{max}) \text{ et } \delta_{max}\alpha \in D(d_{max})\} \\ &= \{\alpha \in L^2 \mid d\alpha, \delta\alpha, dd\alpha, \delta d\alpha \in L^2\}, \end{aligned}$$

est positif auto-adjoint et donc inversible (encore une fois dans la deuxième définition, il faut considérer les opérateurs au sens des distributions). Nous montrerons plus loin que ces deux domaines  $D$  et  $D'$  sont en fait confondus quand tous les angles coniques sont inférieurs à  $2\pi$ .

## 6.2 Expression du laplacien de connexion en coordonnées cylindriques

On va maintenant sauter à pieds joints dans les calculs. Soit  $a$  un réel positif suffisamment petit pour que le  $a$ -voisinage fermé de  $\Sigma$  dans  $M$  soit un voisinage tubulaire. Si  $r$  est plus petit que  $a$ , on note  $U_r$  le  $r$ -voisinage de  $\Sigma$  dans  $M$  et  $\Sigma_r$  le bord de  $U_r$ .

Par définition, si  $x$  est un point de  $\Sigma$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $U_a$  et un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\Sigma$ , tels que  $U = V \cap \Sigma$  et  $V \simeq U \times D^2$ , et dans les coordonnées cylindriques locales adaptées à la décomposition  $V \simeq U \times D^2$ , la métrique est de la forme

$$g = dr^2 + \sinh(r)^2 d\theta^2 + \cosh(r)^2 g_\Sigma,$$

où  $\theta$  est défini non pas modulo  $2\pi$  mais modulo l'angle conique  $\alpha$ . On utilisera les notations suivantes :  $e^r = dr$ ,  $e^\theta = \sinh(r)d\theta$ ,  $e_r = (e^r)^\sharp = \frac{\partial}{\partial r}$ , et  $e_\theta = (e^\theta)^\sharp = \frac{1}{\sinh(r)} \frac{\partial}{\partial \theta}$ .

Soit  $u$  une section de  $T^*M$ . Au voisinage de  $\Sigma$  on peut faire une décomposition orthogonale et on écrit

$$u = fe^r + ge^\theta + \omega,$$

avec  $f, g$ , deux fonctions de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ , on sera souvent amené dans la suite à complexifier les fibrés sur lesquels on travaille), et  $\omega$  une 1-forme. On remarque que bien que les coordonnées ne soient que locales, les formes  $e^r$  et  $e^\theta$  sont bien définies sur tout  $U_a$ , ainsi que la décomposition orthogonale précédente.

Au vu de la forme de notre voisinage tubulaire, sur tout ouvert  $V$  de  $U_a$  du type ci-dessus et suffisamment petit, on peut définir localement des champs de vecteur  $e_1, \dots, e_{n-2}$  de telle sorte que  $(e_r, e_\theta, e_1, \dots, e_{n-2})$  forme un repère mobile orthonormé (local), vérifiant

$$\nabla_{e_r} e_k = \nabla_{e_\theta} e_k = 0$$

pour tout  $k$  dans  $1 \dots n-2$ . On définit de même des 1-formes locales  $e^1, \dots, e^{n-2}$  telles que  $(e^r, e^\theta, e^1, \dots, e^{n-2})$  soit le repère mobile dual du précédent.

Avant de commencer les calculs, introduisons encore quelques notations. On note  $N$  le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de  $U_a$ , dont la fibre au-dessus de  $x \in U_a$  est le sous-espace vectoriel de  $T_x^*M$  orthogonal à  $e^\theta$  et  $e^r$ , et  $N^*$  le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de  $U_a$ , dont la fibre au-dessus de  $x \in U_a$  est le sous-espace vectoriel de  $T_x M$  orthogonal à  $e_\theta$  et  $e_r$ . La 1-forme  $\omega$  introduite plus haut est naturellement une section de  $N$ . Les sections  $(e_1, \dots, e_{n-2})$  forment localement une base de  $N^*$ , de même pour  $(e^1, \dots, e^{n-2})$  et  $N$ . Si  $s$  est section de  $N^*$ , et  $t$  une section de  $N$  ou de  $N^*$ , on note  $(\nabla_\Sigma)(s, t)$  la projection orthogonale sur  $N$  ou sur  $N^*$  de  $\nabla_s t$ .

Si  $f$  est une fonction de  $U_a$ , on pose

$$d_\Sigma f = \sum_{k=1}^{n-2} (e_k \cdot f) e^k,$$

et

$$\Delta_\Sigma f = \cosh^2 r \sum_{k=1}^{n-2} (\nabla_\Sigma)(e_k, e_k) \cdot f - e_k \cdot e_k \cdot f$$

(c'est à un facteur près l'opposé de la trace de la hessienne de  $f$  restreinte à  $N^*$ ). Ces deux opérateurs sont indépendants du choix des  $e_k$ . En fait, avec les notations ci-dessus, dans  $V$  on a une identification, à  $r$  et  $\theta$  fixé, de  $U \times \{r, \theta\}$  à  $U \subset \Sigma$ , et  $N^*$  et  $N$  restreints à  $U \times \{r, \theta\}$  s'identifient de la même façon à  $TU$  et  $T^*U$ . Les opérateurs ci-dessus correspondent via ces identifications à la différentielle et au laplacien de  $U \subset \Sigma$ .

Il en est de même pour  $\nabla_\Sigma$ , et pour les deux opérateurs suivants. Si  $\omega$  est une section de  $N$ , on pose

$$\begin{aligned}\delta_\Sigma(\omega) &= -\cosh^2 r \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_\Sigma(e_k, \omega)(e_k) \\ &= \cosh^2 r \sum_{k=1}^{n-2} \omega(\nabla_\Sigma(e_k, e_k)) - e_k \cdot \omega(e_k),\end{aligned}$$

et

$$(\nabla^* \nabla)_\Sigma \omega = \cosh^2 r \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_\Sigma(\nabla_\Sigma(e_k, e_k), \omega) - \nabla_\Sigma(e_k, \nabla_\Sigma(e_k, \omega)),$$

qui correspondent à la codifférentielle et au laplacien de connexion pour les 1-formes de  $\Sigma$ .

On est maintenant armé pour le calcul explicite de  $\nabla^* \nabla u$ . En utilisant notre repère mobile, on a

$$\nabla^* \nabla u = -\nabla_{e_r} \nabla_{e_r} u - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} u + \nabla_{\nabla_{e_r} e_r} u + \nabla_{\nabla_{e_\theta} e_\theta} u + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_{e_k} e_k} u - \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} u.$$

Comme la métrique conique est hyperbolique, on a les expressions suivantes :

$$\nabla_{e_r} e_r = 0, \quad \nabla_{e_\theta} e_\theta = -\frac{1}{\tanh(r)} e_r, \quad \text{et} \quad \nabla_{e_k} e_k = \nabla_\Sigma(e_k, e_k) - \tanh(r) e_r.$$

On trouve alors que

$$\nabla^* \nabla u = -\nabla_{e_r} \nabla_{e_r} u - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} u - \left( \frac{1}{\tanh(r)} + (n-2) \tanh(r) \right) \nabla_{e_r} u + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_\Sigma(e_k, e_k)} u - \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} u.$$

En remplaçant  $u$  par  $f e^r + g e^\theta + \omega$ , un calcul explicite nous donne l'expression suivante pour les composantes de  $\nabla^* \nabla u$ ; selon  $e^r$  :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{\sinh(r)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \left( \frac{1}{\tanh(r)} + (n-2) \tanh(r) \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{1}{\tanh(r)^2} + (n-2) \tanh(r)^2 \right) f \\ + \frac{2}{\sinh(r) \tanh(r)} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{\cosh(r)^2} \Delta_\Sigma f + \frac{2 \tanh(r)}{\cosh(r)^2} \delta_\Sigma \omega,\end{aligned}$$

selon  $e^\theta$  :

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{\sinh(r)^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} - \left( \frac{1}{\tanh(r)} + (n-2) \tanh(r) \right) \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{g}{\tanh(r)^2} - \frac{2}{\sinh(r) \tanh(r)} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\cosh(r)^2} \Delta_\Sigma g,$$

et selon la composante incluse dans  $N$  :

$$\begin{aligned}-\nabla_{e_r} \nabla_{e_r} \omega - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \omega - \left( \frac{1}{\tanh(r)} + (n-2) \tanh(r) \right) \nabla_{e_r} \omega + \tanh(r)^2 \omega \\ + \frac{1}{\cosh(r)^2} (\nabla^* \nabla)_\Sigma \omega - 2 \tanh(r) d_\Sigma f\end{aligned}$$

Pour pouvoir manipuler cette expression, nous allons effectuer dans la section suivante une sorte de décomposition en séries de Fourier généralisées.

### 6.3 Décomposition en série de Fourier généralisée

On sait qu'au voisinage du lieu singulier, la métrique  $g$  se met localement sous la forme

$$g = dr^2 + \sinh(r)^2 d\theta^2 + \cosh(r)^2 g_\Sigma.$$

Si la coordonnée  $\theta$  était définie (toujours modulo l'angle conique  $\alpha$ ) sur tout un voisinage du lieu singulier, on pourrait faire des décompositions en séries de Fourier, du type

$$f(r, \theta, z) = \sum f_n(r, z) \exp(2i\pi n\theta/\alpha).$$

Mais en général la coordonnée d'angle  $\theta$  n'est définie que localement, ce qui empêche d'écrire de telles décompositions. On va donc procéder à une autre sorte de décomposition ; on obtiendra finalement des écritures du type

$$f(r, \theta, z) = \sum f_n(r) \psi_n(\theta, z)$$

où les  $(\psi_n)$  forment une base hilbertienne bien choisie du bord d'un voisinage tubulaire du lieu singulier.

#### 6.3.1 Une base hilbertienne adaptée

Pour faciliter les calculs, nous serons amenés à complexifier les fibrés usuels. Comme précédemment, on choisit un réel positif  $a$  suffisamment petit pour que le  $a$ -voisinage fermé de  $\Sigma$  dans  $M$  soit un voisinage tubulaire. Si  $r$  est inférieur ou égal à  $a$ , on note  $U_r$  le  $r$ -voisinage de  $\Sigma$  dans  $M$  et  $\Sigma_r$  le bord de  $U_r$ .

On va particulièrement s'intéresser à la sous-variété  $\Sigma_a$ . Tout point  $x$  de  $\Sigma_a$  admet un voisinage  $\mathcal{V}$  de la forme  $U \times S^1$ , où  $U$  est un ouvert de  $\Sigma$ . Dans ce voisinage, la métrique de  $\Sigma_a$ , induite par celle de  $M$ , s'exprime comme une métrique produit ; plus précisément on a, dans les coordonnées adaptées,

$$g_a = \sinh(a)^2 d\theta^2 + \cosh(a)^2 g_\Sigma.$$

Dans cette sous-section, et seulement dans celle-ci, les notations  $\nabla$ ,  $\nabla^*$ ,  $\Delta$ , etc. désigneront les opérateurs correspondants pour la métrique  $g_a$ .

Pour pouvoir faire les décompositions voulues, on veut trouver une "bonne" base hilbertienne sur  $\Sigma_a$ , pour les fonctions comme pour les 1-formes, ou plus précisément pour les sections du sous-fibré  $N$  défini précédemment. On se propose donc de démontrer le résultat suivant :

**Proposition 6.1.** *Il existe une base hilbertienne  $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  du complexifié de  $L^2(\Sigma_a)$ , telle que pour tout indice  $j$ , il existe un réel  $\lambda_j$  et un entier relatif  $p_j$ , vérifiant*

$$\lambda_j \geq \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2},$$

pour lesquels

$$\begin{cases} \Delta \psi_j = \lambda_j \psi_j \\ e_\theta \cdot \psi_j = \frac{ip_j \beta}{\sinh(a)} \psi_j. \end{cases}$$

Soit  $J$  l'ensemble des  $j$  pour lesquels  $\lambda_j > \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2}$ . Il existe une base hilbertienne  $(\phi_j)_{j \in J} \cup (\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  du complexifié de  $L^2(N)$ , telle que :

– pour tout indice  $j$  appartenant à  $J$ ,  $\phi_j = \left( \lambda_j - \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right)^{-1/2} d_\Sigma \psi_j$ , et donc

$$\begin{cases} \nabla^* \nabla \phi_j = \left( \lambda_j + \frac{n-3}{\cosh(a)^2} \right) \phi_j \\ \nabla_{e_\theta} \phi_j = \frac{ip_j \beta}{\sinh(a)} \phi_j \\ \delta_\Sigma \phi_j = \cosh(a)^2 \left( \lambda_j - \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right)^{1/2} \psi_j; \end{cases}$$



– pour tout indice  $j \in \mathbb{N}$ , il existe un réel  $\mu_j$  et un entier relatif  $p'_j$ , pour lesquels

$$\begin{cases} \nabla^* \nabla \varphi_j = \mu_j \varphi_j \\ \nabla_{e_\theta} \varphi_j = \frac{ip'_j \beta}{\sinh(a)} \varphi_j, \end{cases}$$

et on a de plus  $\delta_\Sigma \varphi_j = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $(e_1, \dots, e_{n-2})$  un repère mobile orthonormé de  $U \simeq U \times \{\theta\}$ , pour la métrique  $\cosh(a)^2 g_\Sigma$ . C'est la restriction à  $\Sigma_a$  du repère mobile local défini dans la section précédente. Alors  $(e_\theta, e_1, \dots, e_{n-2})$  est un repère mobile orthonormé de  $\mathcal{V}$ , vérifiant

$$\nabla_{e_\theta} e_k = \nabla_{e_k} e_\theta = 0$$

pour  $k = 1 \dots n - 2$  (rappelons qu'ici et dans la suite de la preuve, on réemploie pour simplifier la notation  $\nabla$  pour la connexion de Levi-Civita pour la métrique  $g_a$  de  $\Sigma_a$ , à ne pas confondre avec la connexion de Levi-Civita de la métrique  $g$ ).

Intéressons-nous maintenant au laplacien  $\Delta$  sur  $(\Sigma_a, g_a)$ . La sous-variété  $\Sigma_a$  étant compacte, on peut utiliser le théorème de décomposition spectrale des opérateurs elliptiques auto-adjoints pour montrer qu'il existe une base hilbertienne de  $L^2(\Sigma_a)$ , formée de fonctions propres du laplacien. De plus chaque sous-espace propre est de dimension finie, et chaque fonction propre est  $C^\infty$ .

Si  $f$  est une fonction sur  $\Sigma_a$ , en utilisant le repère mobile ci-dessus, on obtient

$$\Delta f = -e_\theta \cdot e_\theta \cdot f + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{e_k} e_k \cdot f - e_k \cdot e_k \cdot f.$$

On peut vérifier sur cette expression que  $e_\theta \cdot \Delta f = \Delta(e_\theta \cdot f)$ , donc que  $\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta f) = \Delta(\frac{\partial}{\partial \theta} f)$ , c'est-à-dire que  $\Delta$  et  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  commutent (rappelons que le champ de vecteur  $e_\theta$  est bien défini dans tout  $U_a$ , ainsi donc que  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ ). De plus une intégration par parties évidente donne, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions  $C^1$  sur  $\Sigma_a$ ,

$$\int_{\Sigma_a} \frac{\partial f}{\partial \theta} g = - \int_{\Sigma_a} f \frac{\partial g}{\partial \theta}.$$

Soit donc  $\lambda$  une valeur propre du laplacien et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé. On a vu que  $E_\lambda$  était de dimension finie et composé de fonctions  $C^\infty$ . Comme  $\Delta$  et  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  commutent, la restriction de ce dernier à  $E_\lambda$  est un endomorphisme de  $E_\lambda$ ; et d'après ce qui précède cet endomorphisme est anti-symétrique pour le produit scalaire  $L^2$ . Comme  $E_\lambda$  est de dimension finie, on peut donc (en passant dans les complexes) trouver une base orthonormée  $(\psi_j)$  de  $E_\lambda$ , formée de fonctions propres de  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$\begin{cases} \Delta \psi_j = \lambda \psi_j \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_j = i \mu_j \psi_j. \end{cases}$$

Cette dernière équation implique que, dans les coordonnées  $(z, \theta)$  adaptées à  $\mathcal{V} \simeq U \times S^1$ ,

$$\psi_j(z, \theta) = \exp(i \mu_j \theta) \phi_j(z),$$

où  $\phi_j$  est une fonction ne dépendant pas de la variable  $\theta$ . Comme  $\theta$  est définie modulo l'angle conique  $\alpha$ , on en déduit que  $\mu_j \in \frac{2\pi}{\alpha} \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire qu'il existe un entier  $p_j$  tel que

$$\psi_j(z, \theta) = \exp\left(\frac{2i\pi p_j}{\alpha} \theta\right) \phi_j(z),$$

et donc en particulier

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \psi_j = \frac{2i\pi p_j}{\alpha} \psi_j.$$

Si on exprime à nouveau le laplacien à l'aide du repère mobile, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta \psi_j &= \lambda \psi_j \\ &= -e_\theta \cdot e_\theta \cdot \psi_j + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{e_k} e_k \cdot \psi_j - e_k \cdot e_k \cdot \psi_j \\ &= -\frac{1}{\sinh(a)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi_j + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{e_k} e_k \cdot \psi_j - e_k \cdot e_k \cdot \psi_j \\ &= \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \psi_j + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{e_k} e_k \cdot \psi_j - e_k \cdot e_k \cdot \psi_j \end{aligned}$$

avec la notation  $\beta = \frac{2\pi}{\alpha}$ . Désignons, comme dans la section précédente, par  $\Delta_\Sigma$  l'opérateur

$$f \mapsto \cosh(a)^2 \sum_{k=1}^{n-2} (\nabla_{e_k} e_k \cdot f - e_k \cdot e_k \cdot f);$$

si  $f$  est une fonction définie sur  $U \times \{\theta\}$ , alors  $\Delta_\Sigma f$  est le laplacien de  $f$  pour la métrique obtenue en identifiant  $U \times \{\theta\}$  à  $U \subset \Sigma$ . On a alors

$$\Delta_\Sigma(\psi_j) = \cosh(a)^2 \left( \lambda - \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right) \psi_j.$$

Passons maintenant aux 1-formes sur  $\Sigma_a$ . Rappelons qu'ici les notations  $\nabla$  et  $\nabla^*$  désignent la connexion de Levi-Civita et son adjoint pour la métrique  $g_a$  de  $\Sigma_a$ . Le laplacien de connexion  $\nabla^* \nabla$  s'exprime alors à l'aide du repère mobile de la façon suivante :

$$\nabla^* \nabla \eta = -\nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \eta + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_{e_k} e_k} \eta - \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} \eta.$$

Si on décompose  $\eta$  orthogonalement,  $\eta = f e^\theta + \omega$ , alors

$$\nabla^* \nabla \eta = (\Delta f) e^\theta + \nabla^* \nabla \omega,$$

et cette décomposition est à nouveau orthogonale. Dit autrement, si  $\omega$  est une 1-forme sur  $\Sigma_a$ , en tout point perpendiculaire à  $e^\theta$ , alors  $\nabla^* \nabla \omega$  est aussi en tout point perpendiculaire à  $e^\theta$ . On va donc considérer le sous-fibré vectoriel  $N \subset T^* \Sigma_a$ , dont la fibre au-dessus de  $x \in \Sigma_a$  est le sous-espace vectoriel de  $T_x^* \Sigma_a$  orthogonal à  $e^\theta$ ; c'est la restriction à  $\Sigma_a$  du fibré  $N$  défini à la section précédente. L'opérateur  $\nabla^* \nabla$  se restreint ainsi à un opérateur non borné de  $L^2(N)$  dans lui-même.

Si  $\omega$  est une section de  $N$ , alors  $\nabla_{e_\theta} \omega$  est encore une section de  $N$ . Comme pour les fonctions, on vérifie sur l'expression ci-dessus que  $\nabla_{e_\theta} (\nabla^* \nabla \omega) = \nabla^* \nabla (\nabla_{e_\theta} \omega)$ , c'est-à-dire que  $\nabla^* \nabla$  et  $\nabla_{e_\theta}$  commutent. L'opérateur  $\nabla_{e_\theta}$  est à nouveau anti-symétrique pour le produit scalaire  $L^2$  : en effet, pour  $\phi, \phi'$  deux sections de  $N$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_a} e_\theta \cdot g_a(\phi, \phi') &= 0 \\ &= \int_{\Sigma_a} g_a(\nabla_{e_\theta} \phi, \phi') + \int_{\Sigma_a} g_a(\phi, \nabla_{e_\theta} \phi') \end{aligned}$$

En utilisant ces deux propriétés et le théorème de décomposition spectrale des opérateurs elliptiques auto-adjoints, on montre, comme dans le cas des fonctions, qu'il existe une base hilbertienne  $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(N)$ , telle que pour tout  $j$ , on ait :

$$\begin{cases} \nabla^* \nabla \phi_j = \lambda_j \phi_j \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \phi_j = i\mu_j \phi_j. \end{cases}$$

Pour  $k = 1 \dots n - 2$ , on note comme précédemment  $e^k$  la forme duale de  $e_k$ . Les sections locales  $e^1, \dots, e^{n-2}$  forment alors une base de  $N$  sur  $\mathcal{V}$ . En décomposant dans cette base

$$\phi_j = \sum_{k=1}^{n-2} a_k(z, \theta) e^k,$$

la dernière équation ci-dessus donne

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_k(z, \theta)) e^k = i\mu_j \sum_{k=1}^{n-2} a_k(z, \theta) e^k,$$

qui s'intègre en

$$a_k(z, \theta) = b_k(z) \exp(i\mu_j \theta)$$

pour  $k = 1 \dots n - 2$ . La coordonnée  $\theta$  étant définie modulo l'angle conique  $\alpha$ , on en déduit encore une fois que  $\mu_j \in \frac{2\pi}{\alpha} \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire qu'il existe un entier  $p_j$  tel que  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \phi_j = ip_j \beta \phi_j$  (avec toujours  $\beta = \frac{2\pi}{\alpha}$ ).

Rappelons maintenant quelques notations. Si  $f$  est une fonction sur  $\Sigma_a$ , on a

$$d_{\Sigma} f = \sum_{k=1}^{n-2} (e_k \cdot f) e^k,$$

c'est une section de  $N$ . Il s'agit en chaque point  $(x, \theta) \in U \times S^1 \simeq \mathcal{V} \subset \Sigma_a$  de la différentielle de la restriction de  $f$  à  $U \times \{\theta\}$ . Ensuite, si  $\omega$  est une section de  $N$ , on a

$$\begin{aligned} \delta_{\Sigma}(\omega) &= -\cosh(a)^2 \sum_{k=1}^{n-2} (\nabla_{e_k} u)(e_k) \\ &= \cosh(a)^2 \sum_{k=1}^{n-2} u(\nabla_{e_k} e_k) - e_k \cdot u(e_k), \end{aligned}$$

et

$$(\nabla^* \nabla)_{\Sigma} \omega = \cosh(a)^2 \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_{e_k} e_k} \omega - \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} \omega.$$

Si l'on se restreint à  $U \times \{\theta\}$ , il s'agit de la codifférentielle et du laplacien de connexion sur les 1-formes, pour la métrique obtenue en identifiant  $U \times \{\theta\}$  à  $U \subset \Sigma$ .

Soit  $f$  une fonction sur  $\Sigma_a$ . Avec ces notations, on a :

$$\nabla^* \nabla (d_{\Sigma} f) = -\nabla_{e_{\theta}} \nabla_{e_{\theta}} (d_{\Sigma} f) + \frac{1}{\cosh(a)^2} (\nabla^* \nabla)_{\Sigma} (d_{\Sigma} f).$$

Or

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} (d_\Sigma f) &= \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \sum_{k=1}^{n-2} (e_k \cdot f) e^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} (e_\theta \cdot e_\theta \cdot (e_k \cdot f)) e^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} e_k \cdot (e_\theta \cdot e_\theta \cdot f) e^k \\
&= d_\Sigma (e_\theta \cdot e_\theta \cdot f).
\end{aligned}$$

De plus, la métrique de  $U \subset \Sigma$  est hyperbolique, et on peut donc utiliser la formule de Weitzenböck suivante, valable pour les 1-formes :

$$(\nabla^* \nabla)_\Sigma = \Delta_\Sigma + (n-3)Id = d_\Sigma \delta_\Sigma + \delta_\Sigma d_\Sigma + (n-3)Id.$$

C'est la même formule qu'au début de cette section, cf [2] §1.155. On en déduit que

$$(\nabla^* \nabla)_\Sigma \circ d_\Sigma = (\Delta_\Sigma + (n-3)Id) \circ d_\Sigma = d_\Sigma \circ (\Delta_\Sigma + (n-3)Id).$$

Par suite,

$$(\nabla^* \nabla)_\Sigma (d_\Sigma f) = d_\Sigma (\Delta_\Sigma (f)) + (n-3)d_\Sigma (f),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\nabla^* \nabla (d_\Sigma f) &= -d_\Sigma (e_\theta \cdot e_\theta \cdot f) + \frac{1}{\cosh(a)^2} (d_\Sigma (\Delta_\Sigma (f)) + (n-3)d_\Sigma (f)) \\
&= d_\Sigma (\Delta f) + \frac{n-3}{\cosh(a)^2} d_\Sigma f.
\end{aligned}$$

On obtient finalement, si  $\psi_j$  est une des fonctions définies plus haut (c'est-à-dire telle que  $\Delta \psi_j = \lambda \psi_j$  et  $\frac{\partial}{\partial \theta} \psi_j = ip_j \beta \psi_j$ ) :

$$\begin{aligned}
\nabla^* \nabla (d_\Sigma \psi_j) &= d_\Sigma (\lambda \psi_j) + \frac{n-3}{\cosh(a)^2} d_\Sigma \psi_j \\
&= \left( \lambda + \frac{n-3}{\cosh(a)^2} \right) d_\Sigma \psi_j.
\end{aligned}$$

Par conséquent  $d_\Sigma \psi_j$  est un vecteur propre de  $\nabla^* \nabla$ . De plus  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} (d_\Sigma \psi_j) = d_\Sigma (\frac{\partial}{\partial \theta} \psi_j) = ip_j \beta d_\Sigma \psi_j$ .

De la même manière, si  $\omega$  est une section de  $N$ , alors

$$\Delta (\delta_\Sigma \omega) = -e_\theta \cdot e_\theta \cdot (\delta_\Sigma \omega) + \frac{1}{\cosh(a)^2} \Delta_\Sigma (\delta_\Sigma \omega).$$

La même formule de Weitzenböck nous donne

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma \circ \delta_\Sigma &= \delta_\Sigma \circ \Delta_\Sigma \\
&= \delta_\Sigma \circ ((\nabla^* \nabla)_\Sigma - (n-3)Id) \\
&= \delta_\Sigma \circ (\nabla^* \nabla)_\Sigma - (n-3)\delta_\Sigma,
\end{aligned}$$

et on a aussi  $e_\theta \cdot e_\theta \cdot (\delta_\Sigma \omega) = \delta_\Sigma (\nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \omega)$ , soit finalement

$$\begin{aligned}
\Delta (\delta_\Sigma \omega) &= -\delta_\Sigma (\nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \omega) + \frac{1}{\cosh(a)^2} (\delta_\Sigma ((\nabla^* \nabla)_\Sigma \omega) - (n-3)\delta_\Sigma \omega) \\
&= \delta_\Sigma (\nabla^* \nabla \omega) - \frac{n-3}{\cosh(a)^2} (\delta_\Sigma \omega).
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on constate que si  $\phi_j$  est une des sections définies plus haut, c'est-à-dire telle que  $\nabla^* \nabla \phi_j = \lambda_j \phi_j$  et  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \phi_j = ip_j \beta \phi_j$ , alors

$$\Delta_{\Sigma}(\delta_{\Sigma} \phi_j) = \left( \lambda_j - \frac{n-3}{\cosh(a)^2} \right) \delta_{\Sigma} \phi_j$$

et que

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\delta_{\Sigma} \phi_j) = ip_j \beta \delta_{\Sigma} \phi_j.$$

Pour clarifier tout ceci, on introduit les notations suivantes. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , on pose :

$$\begin{aligned} E_{\lambda} &= \{f \in L^2(\Sigma_a) \mid \Delta f = \lambda f\}, \\ F_{\lambda} &= \{\omega \in L^2(N) \mid \nabla^* \nabla \omega = \lambda \omega\}, \\ E_{\lambda,p} &= \{f \in E_{\lambda} \mid \frac{\partial}{\partial \theta} f = ip \beta f\}, \\ \text{et } F_{\lambda,p} &= \{\omega \in F_{\lambda} \mid \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \omega = ip \beta \omega\}. \end{aligned}$$

Chacun de ces sous-espaces vectoriels est de dimension finie, composé de fonctions ou sections  $C^{\infty}$ . Les  $E_{\lambda,p}$  sont deux à deux orthogonaux, ainsi que les  $F_{\lambda,p}$ , les  $E_{\lambda}$  et les  $F_{\lambda}$ . On a  $E_{\lambda} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_{\lambda,p}$  et  $F_{\lambda} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F_{\lambda,p}$ , et à chaque fois la somme est en fait finie car  $E_{\lambda}$  et  $F_{\lambda}$  sont de dimension finie. On note  $S$ , resp.  $S'$ , le spectre du laplacien sur les fonctions, resp. sur les 1-formes, i.e. l'ensemble des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $E_{\lambda}$ , resp.  $F_{\lambda}$ , est non réduit à 0. Ce sont des ensembles discrets, minorés, avec  $+\infty$  comme seul point d'accumulation. Alors  $\bigoplus_{\lambda \in S} E_{\lambda} (= \bigoplus_{\lambda \in S} \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_{\lambda,p})$  est dense dans  $L^2(\Sigma_a)$ , idem pour  $\bigoplus_{\lambda \in S'} F_{\lambda}$  dans  $L^2(N)$ .

D'après ce qui précède,  $d_{\Sigma}$  envoie  $E_{\lambda,p}$  dans  $F_{\lambda+(n-3)/\cosh(a)^2,p}$ , et  $\delta_{\Sigma}$  envoie  $F_{\lambda+(n-3)/\cosh(a)^2,p}$  dans  $E_{\lambda,p}$ . De plus, si  $\psi, \psi'$  appartiennent à  $E_{\lambda,p}$ , alors, comme l'adjoint de  $d_{\Sigma}$  est  $\cosh(a)^{-2} \delta_{\Sigma}$ , en intégrant par parties on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_a} g_a(d_{\Sigma} \psi, d_{\Sigma} \psi') &= \int_{\Sigma_a} \frac{1}{\cosh(a)^2} \psi (\delta_{\Sigma} d_{\Sigma} \psi') \\ &= \int_{\Sigma_a} \frac{1}{\cosh(a)^2} \psi \Delta_{\Sigma} \psi' \\ &= \int_{\Sigma_a} \frac{1}{\cosh(a)^2} \psi \cosh(a)^2 \left( \lambda - \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right) \psi' \\ &= \left( \lambda - \frac{p^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right) \int_{\Sigma_a} \psi \psi'. \end{aligned}$$

En prenant  $\psi = \psi'$  on trouve que, si  $E_{\lambda,p} \neq \{0\}$ , alors nécessairement

$$\lambda \geq \frac{p^2 \beta^2}{\sinh(a)^2}.$$

On en déduit aussi que, pour le produit scalaire  $L^2$ ,  $d_{\Sigma}$  est une homothétie de  $E_{\lambda,p}$  sur son image, de rapport  $\left( \lambda - \frac{p^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right)^{1/2}$ .

De plus, du fait que l'adjoint de  $d_{\Sigma}$  est  $\cosh(a)^{-2} \delta_{\Sigma}$ , si un élément  $\phi$  de  $F_{\lambda,p}$  est dans l'orthogonal de l'image de  $E_{\lambda-(n-3)/\cosh(a)^2,p}$  par  $d_{\Sigma}$  (ce qui est en particulier le cas si  $E_{\lambda-(n-3)/\cosh(a)^2,p} = \{0\}$ ), alors nécessairement  $\delta_{\Sigma} \phi = 0$ .

On a maintenant tout ce qu'il faut pour obtenir les bases hilbertiennes désirées. On choisit pour chaque  $E_{\lambda,p}$  une base orthonormale, leur réunion  $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  forme une base hilbertienne de  $L^2(\Sigma_a)$ .

Ensuite, sur chaque  $F_{\lambda,p}$ , on a déjà une famille orthonormale (finie), à savoir l'image par  $(\lambda - \frac{p^2\beta^2}{\sinh(a)^2})^{-1/2} d_\Sigma$  de la base orthonormale de  $E_{\lambda-(n-3)/\cosh(a)^2,p}$  (cela évidemment dans le cas où l'on a  $\lambda > \frac{p^2\beta^2}{\sinh(a)^2}$  et  $E_{\lambda-(n-3)/\cosh(a)^2,p} \neq \{0\}$ ). La réunion de ces familles orthonormales nous donne les  $(\phi_j)_{j \in J}$  de la proposition. Enfin, on complète sur chaque  $F_{\lambda,p}$  cette famille en une base orthonormée ; la réunion des éléments ainsi rajoutés constitue les  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de la proposition.  $\square$

Notons que les éléments de ces bases hilbertiennes vérifient aussi

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \psi_j = \cosh(a)^2 \left( \lambda_j - \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right) \psi_j \\ (\nabla^* \nabla)_\Sigma \phi_j = \cosh(a)^2 \left( \lambda_j + \frac{n-3}{\cosh(a)^2} - \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right) \phi_j \\ (\nabla^* \nabla)_\Sigma \varphi_j = \cosh(a)^2 \left( \mu_j - \frac{p_j'^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right) \varphi_j. \end{cases}$$

Pour simplifier ces expressions, qui sont celles qui vont nous servir, on pose, pour tout indice  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda'_j = \cosh(a)^2 \left( \lambda_j - \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right),$$

ainsi que

$$\mu'_j = \cosh(a)^2 \left( \mu_j - \frac{p_j'^2 \beta^2}{\sinh(a)^2} \right).$$

On a alors

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \psi_j = \lambda'_j \psi_j \\ (\nabla^* \nabla)_\Sigma \phi_j = (\lambda'_j + n - 3) \phi_j \\ (\nabla^* \nabla)_\Sigma \varphi_j = \mu'_j \varphi_j. \end{cases}$$

On peut aussi exprimer plus simplement les relations suivantes :

$$\begin{cases} d_\Sigma \psi_j = \frac{(\lambda'_j)^{1/2}}{\cosh(a)} \phi_j \\ \delta_\Sigma \phi_j = \cosh(a) (\lambda'_j)^{1/2} \psi_j. \end{cases}$$

### 6.3.2 Expression du laplacien dans cette décomposition

Maintenant, on va utiliser les résultats précédents pour procéder à la décomposition de  $u = fe^r + ge^\theta + \omega$  sur tout  $U_a$ .

Pour passer de  $\Sigma_a$  à  $\Sigma_r$ , on utilise le transport parallèle et le flot le long des géodésiques, intégrales du champ de vecteur  $e_r$ . Cela revient à étendre à tout  $U_a$  les fonctions  $\psi_j$  et les formes  $\phi_j, \varphi_j$ , en demandant seulement que  $e_r \cdot \psi_j = 0$ , et que  $\nabla_{e_r} \phi_j = \nabla_{e_r} \varphi_j = 0$ . On note encore  $\psi_j, \phi_j$  et  $\varphi_j$  ces extensions.

Pour un  $r$  fixé, on note  $f_r$  la restriction de  $f$  à  $\Sigma_r$ . On peut de même étendre  $f_r$  en une fonction  $\tilde{f}_r$  définie sur tout  $U_a$  en utilisant le flot du champ de vecteur  $e_r$ , c'est-à-dire en demandant seulement que  $e_r \cdot \tilde{f}_r$  soit identiquement nul (et évidemment que  $\tilde{f}_r = f_r$  sur  $\Sigma_r$ ). En particulier, on peut regarder la restriction à  $\Sigma_a$  de  $\tilde{f}_r$ , notée  $\tilde{f}_r|_{\Sigma_a}$ . On peut maintenant utiliser les résultats de la proposition 6.1 pour décomposer  $\tilde{f}_r|_{\Sigma_a}$  sous la forme d'une série :  $\tilde{f}_r|_{\Sigma_a} = \sum f_r^j \psi_j$ . Finalement, en réutilisant le flot

pour se ramener à  $\Sigma_r$ , on obtient la décomposition suivante, valable sur  $\Sigma_r : f_r = \sum f_r^j \psi_j$ . En faisant cette manipulation pour tout  $r$ , et en posant  $f_j(r) = f_r^j$ , on obtient

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(r) \psi_j.$$

On effectue évidemment une décomposition similaire pour la fonction  $g$ . Pour la section  $\omega$ , le même procédé fonctionne, en remplaçant le flot par le transport parallèle, et on obtient une décomposition

$$\omega = \sum_{j \in J} \omega_j(r) \phi_j + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varpi_j(r) \varphi_j.$$

On peut vérifier facilement que si  $u$  est  $C^\infty$  alors les coefficients  $f_j$ ,  $g_j$ ,  $\omega_j$  et  $\varpi_j$  le sont aussi (en effet,  $f_j(r) = \int_{\Sigma_a} \overline{\psi_j} \tilde{f}_r$  et on peut dériver sous l'intégrale ; il en est de même pour les autres coefficients).

On a finalement obtenu l'expression suivante pour  $u$  :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(r) \psi_j e^r + \sum_{j \in \mathbb{N}} g_j(r) \psi_j e^\theta \\ &+ \sum_{j \in J} \omega_j(r) \phi_j + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varpi_j(r) \varphi_j. \end{aligned}$$

Il est plus judicieux de regrouper les termes de cette décomposition de la façon suivante, faisant apparaître des "blocs élémentaires" de même fréquence :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j \in J} \left( f_j(r) \psi_j e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta + \omega_j(r) \phi_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} \left( f_j(r) \psi_j e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \varpi_j(r) \varphi_j. \end{aligned}$$

En partant de cette expression pour  $u$ , on va effectuer cette décomposition pour  $\nabla^* \nabla u$ . On note toujours  $\beta$  pour  $\frac{2\pi}{\alpha}$ . Il faut d'abord voir comment se comporte les fonctions et formes étendues. En procédant à de simples changement d'échelle, on arrive à :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \psi_j = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_j = ip_j \beta \psi_j \\ \Delta_\Sigma \psi_j = \lambda'_j \psi_j \\ d_\Sigma \psi_j = \frac{(\lambda'_j)^{1/2}}{\cosh(r)} \phi_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \phi_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \phi_j = ip_j \beta \phi_j \\ (\nabla^* \nabla)_\Sigma \phi_j = (\lambda'_j + n - 3) \phi_j \\ \delta_\Sigma \phi_j = \cosh(r) (\lambda'_j)^{1/2} \psi_j, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \varphi_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \varphi_j = ip'_j \beta \varphi_j \\ (\nabla^* \nabla)_\Sigma \varphi_j = \mu'_j \varphi_j \\ \delta_\Sigma \varphi_j = 0 \end{cases}.$$

On obtient alors, pour la composante de  $\nabla^* \nabla u$  en  $\psi_j e^r$ , si  $j \in J$  :

$$-f_j'' - \left( \frac{1}{\tanh(r)} + (n-2) \tanh(r) \right) f_j' + \left( \frac{1}{\tanh(r)^2} + (n-2) \tanh(r)^2 + \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(r)^2} + \frac{\lambda_j'}{\cosh(r)^2} \right) f_j \\ + \frac{2ip_j \beta}{\sinh(r) \tanh(r)} g_j + \frac{2 \tanh(r) (\lambda_j')^{1/2}}{\cosh(r)} \omega_j,$$

si  $j \notin J$  :

$$-f_j'' - \left( \frac{1}{\tanh(r)} + (n-2) \tanh(r) \right) f_j' + \left( \frac{1}{\tanh(r)^2} + (n-2) \tanh(r)^2 + \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(r)^2} + \frac{\lambda_j'}{\cosh(r)^2} \right) f_j \\ + \frac{2ip_j \beta}{\sinh(r) \tanh(r)} g_j,$$

pour la composante en  $\psi_j e^\theta$  :

$$-g_j'' - \left( \frac{1}{\tanh(r)} + (n-2) \tanh(r) \right) g_j' + \left( \frac{1}{\tanh(r)^2} + \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(r)^2} + \frac{\lambda_j'}{\cosh(r)^2} \right) g_j - \frac{2ip_j \beta}{\sinh(r) \tanh(r)} f_j,$$

pour la composante en  $\phi_j$  :

$$-\omega_j'' - \left( \frac{1}{\tanh(r)} + (n-2) \tanh(r) \right) \omega_j' + \left( \tanh(r)^2 + \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh^2(r)} + \frac{\lambda_j' + n - 3}{\cosh(r)^2} \right) \omega_j - \frac{2 \tanh(r) (\lambda_j')^{1/2}}{\cosh(r)} f_j,$$

et pour la composante en  $\varphi_j$  :

$$-\varpi_j'' - \left( \frac{1}{\tanh(r)} + (n-2) \tanh(r) \right) \varpi_j' + \left( \tanh(r)^2 + \frac{p_j^2 \beta^2}{\sinh(r)^2} + \frac{\mu_j'}{\cosh(r)^2} \right) \varpi_j.$$

## 6.4 Comportement des solutions au voisinage de la singularité

On va maintenant chercher à résoudre l'équation  $Lu = 0$  au voisinage de  $\Sigma$ . La décomposition ci-dessus permet de passer d'une équation aux dérivées partielles à une infinité d'équations différentielles ordinaires. Résoudre l'équation  $Lu = 0$  revient donc à résoudre une équation différentielle linéaire pour chaque coefficient de la décomposition.

L'équation qu'on obtient ici présente une singularité "régulière" en  $r = 0$ . On sait (cf [16]) que les solutions d'une telle équation sont des combinaisons linéaires de fonctions de la forme  $r^k f(r)$  avec  $f$  une fonction analytique, où les exposants  $k$  s'obtiennent comme racines de l'équation indiciale (en cas de racines multiples ou séparées par des entiers, il faut éventuellement rajouter des termes en  $\ln r$  dans l'expression des solutions).

On pose donc, pour un entier  $j$  donné,

$$\begin{cases} f_j(r) &= r^k (f_0 + f_1 r + f_2 r^2 + \dots), \\ g_j(r) &= r^k (g_0 + g_1 r + g_2 r^2 + \dots), \\ \omega_j(r) &= r^k (\omega_0 + \omega_1 r + \omega_2 r^2 + \dots), \\ \varpi_j(r) &= r^k (\varpi_0 + \varpi_1 r + \varpi_2 r^2 + \dots). \end{cases}$$



On obtient alors les systèmes d'équations indicielles suivants (on omet de noter les indices) : si  $j \in J$ ,

$$\begin{cases} (-k^2 + 1 + p^2\beta^2)f_0 + 2ip\beta g_0 = 0 \\ -2ip\beta f_0 + (-k^2 + 1 + p^2\beta^2)g_0 = 0 \\ (-k^2 + p^2\beta^2)\omega_0 = 0, \end{cases}$$

si  $j \notin J$ ,

$$\begin{cases} (-k^2 + 1 + p^2\beta^2)f_0 + 2ip\beta g_0 = 0 \\ -2ip\beta f_0 + (-k^2 + 1 + p^2\beta^2)g_0 = 0, \end{cases}$$

et enfin

$$(-k^2 + p'^2\beta^2)\varpi_0 = 0.$$

Commençons par étudier le premier système, le plus compliqué. Les valeurs de l'exposant  $k$  pour lesquelles il admet des solutions non triviales (racines indicielles) sont  $\pm p\beta \pm 1$  et  $\pm p\beta$ . Plus précisément, pour  $k = \pm(p\beta + 1)$ , les coefficients dominants  $(f_0, g_0, \omega_0)$  sont engendrés par  $(1, -i, 0)$ , pour  $k = \pm(p\beta - 1)$ , par  $(1, i, 0)$ , et pour  $k = \pm p\beta$ , par  $(0, 0, 1)$ . On remarque que l'on a toujours des racines séparées par des entiers, ce qui rajoute des termes logarithmiques, mais nous n'aurons pas à en tenir compte car seul l'exposant dominant va nous intéresser.

Le cas des racines doubles est un peu plus compliqué. Elles apparaissent si  $p = 0$ ,  $p\beta = \pm 1$ , ou  $p\beta = \pm \frac{1}{2}$ . En fait si  $p\beta = \frac{1}{2}$ , les solutions correspondant à  $k = p\beta$  et à  $k = 1 - p\beta$  sont linéairement indépendantes, on n'a donc pas besoin de termes logarithmiques ; même chose pour  $p\beta = -\frac{1}{2}$ .

Pour  $p\beta = 1$ , les solutions pour  $k = p\beta - 1$  et  $k = -(p\beta - 1)$  sont les mêmes. On a donc besoin d'un terme logarithmique. Même chose si  $p\beta = -1$ .

Enfin, pour  $p = 0$ , il y a trois dégénérescence. Cependant pour  $k = 1$  ou  $k = -1$ , on n'a pas de perte de dimension et donc pas besoin de termes logarithmiques. Par contre, pour  $k = 0$ , le terme en logarithme est nécessaire.

On remarque que les deux premiers cas de racines doubles ne se rencontrent que pour des valeurs particulières de l'angle conique. Par contre le dernier cas se rencontre quel que soit l'angle. C'est l'existence de ces solutions logarithmiques, qui sont dans  $L^2$  mais dont la dérivée covariante ne l'est pas, qui fait que l'opérateur  $L$  n'est jamais essentiellement auto-adjoint dans notre cadre.

Les deux systèmes restant sont plus simples à étudier et ne présentent rien de nouveau par rapport à ce qui précède. La proposition suivante regroupe tous ces résultats :

**Proposition 6.2.** *Soit  $u$  une solution de l'équation  $Lu = 0$  sur un voisinage d'une composante connexe de  $\Sigma$ , d'angle conique  $\alpha$ . Alors chacun des termes apparaissant dans la décomposition*

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j \in J} \left( f_j(r)\psi_j e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta + \omega_j(r)\phi_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} \left( f_j(r)\psi_j e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \varpi_j(r)\varphi_j. \end{aligned}$$

*est solution de l'équation.*

*Soit  $j$  un indice appartenant à  $J$ . L'ensemble des solutions du type*

$$f_j(r)\psi_j e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta + \omega_j(r)\phi_j$$

forme un espace vectoriel (de dimension 6). Si  $p_j\beta \notin \{-1, 0, 1\}$ , alors on dispose d'une base constituée de solutions élémentaires pour lesquelles  $v(r) = (f_j(r), g_j(r), \omega_j(r))$  est de la forme  $r^k(v_0 + v_1r + \dots)$ , avec  $k \in \{\pm p_j\beta \pm 1, \pm p_j\beta\}$ . Pour  $k = \pm(p_j\beta + 1)$ , on peut prendre  $v_0 = (1, -i, 0)$ , pour  $k = \pm(p_j\beta - 1)$ ,  $(1, i, 0)$ , et pour  $k = \pm p_j\beta$ ,  $(0, 0, 1)$ . Si  $p_j\beta = -1$ , resp. 1, resp. 0, les deux solutions élémentaires ci-dessus correspondant à  $k = 0$  sont identiques, il faut donc rajouter une solution de la forme  $\ln(r)(v_0 + v_1r + \dots)$  avec  $v_0 = (1, -i, 0)$ , resp.  $(1, i, 0)$ , resp.  $(0, 0, 1)$ .

Maintenant si l'indice  $j$  n'appartient pas à  $J$ , l'ensemble des solutions du type

$$f_j(r)\psi_j e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta$$

forme un espace vectoriel (de dimension 4). Si  $p_j\beta \notin \{-1, 1\}$ , alors on dispose d'une base constituée de solutions élémentaires pour lesquelles  $v'(r) = (f_j(r), g_j(r))$  est de la forme  $r^k(v'_0 + v'_1r + \dots)$ , avec  $k = \pm p_j\beta \pm 1$ . Pour  $k = \pm(p_j\beta + 1)$ , on peut prendre  $v'_0 = (1, -i)$ , et pour  $k = \pm(p_j\beta - 1)$ ,  $v'_0 = (1, i)$ . Si  $p_j\beta = -1$ , resp. 1, les deux solutions élémentaires ci-dessus correspondant à  $k = 0$  sont identiques, il faut donc rajouter une solution de la forme  $\ln(r)(v'_0 + v'_1r + \dots)$  avec  $v'_0 = (1, -i)$ , resp.  $(1, i)$ .

Enfin, pour tout indice  $j$ , l'ensemble des solutions du type  $\varpi_j(r)\varphi_j$  forme un espace vectoriel (de dimension 2). Si  $p'_j \neq 0$ , alors on dispose d'une base constituée de deux solutions élémentaires pour lesquelles  $\varpi_j(r) = r^k(1 + \varpi_1r + \dots)$ , avec  $k = \pm p_j\beta$ . Si  $p'_j = 0$  les deux solutions élémentaires ci-dessus sont identiques, il faut donc rajouter une solution pour laquelle  $\varpi_j(r) = \ln(r)(1 + \varpi_1r + \dots)$ .

## 6.5 Résolution de l'équation

Dans cette sous-section ainsi que dans toute la suite de ce papier, **tous les angles coniques seront supposés strictement inférieurs à  $2\pi$** . En particulier, si  $p$  est un entier, alors soit  $p\beta = 0$ , soit  $|p\beta| > 1$ .

On va étudier maintenant quels sont les exposants dominants possibles pour une solution de l'équation  $Lu = 0$  au voisinage du lieu singulier, en fonction des différentes conditions imposées à  $u$ .

Notons tout d'abord que, vu la forme de la métrique, une forme  $u$ , telle qu'au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier sa norme (ponctuelle) vérifie  $|u| \sim r^k$ , est dans  $L^2$  si et seulement si  $k > -1$ . Par conséquent, si  $u \in L^2$  vérifie  $Lu = 0$  au voisinage du lieu singulier, les exposants  $k$  apparaissant dans le développement de  $u$  donné à la proposition 6.2 sont tous strictement supérieurs à  $-1$ . Or on a vu que  $k$  est de la forme  $\pm p\beta \pm 1$  ou  $\pm p\beta$ , où  $p$  est un entier que l'on peut supposer positif, et  $\beta$  vaut  $2\pi$  divisé par l'angle conique de la composante connexe du lieu singulier. Par conséquent le fait que  $u$  soit dans  $L^2$  élimine les solutions avec  $k = -p\beta - 1$ , avec  $k = -p\beta$  pour  $p \neq 0$ , et avec  $k = -p\beta + 1$  pour  $p > 1$  (et aussi  $p = 1$  si  $\beta \geq 2$ , c'est-à-dire si l'angle conique est inférieur ou égal à  $\pi$ ).

Le premier résultat est le lemme suivant :

**Lemme 6.3.** *Soit  $M$  une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à  $2\pi$ . Soit  $u$  une 1-forme telle que  $Lu$  soit égal à 0 au voisinage du lieu singulier et que  $u$  et  $du$  soient dans  $L^2$ . Alors  $\nabla u$  et  $\nabla du$  sont dans  $L^2$ .*

*Démonstration.* Pour  $j \in J$ , si  $u$  est une 1-forme du type

$$f(r)\psi_j e^r + g(r)\psi_j e^\theta + \omega(r)\phi_j,$$

alors  $du$  est de la forme

$$a(r)\psi_j e^r \wedge e^\theta + b(r)e^r \wedge \phi_j + c(r)e^\theta \wedge \phi_j,$$

avec (je passe les calculs)

$$\begin{aligned} a(r) &= g' + \frac{1}{\tanh(r)}g - \frac{ip_j\beta}{\sinh(r)}f, \\ b(r) &= \omega' - \tanh(r)\omega - \frac{(\lambda'_j)^{1/2}}{\cosh(r)}f, \\ c(r) &= \frac{ip_j\beta}{\sinh(r)}\omega - \frac{(\lambda'_j)^{1/2}}{\cosh(r)}g. \end{aligned}$$

On suppose qu'en plus  $u$  est une solution élémentaire de l'équation  $Lu = 0$  au voisinage d'une composante connexe de  $\Sigma$ , avec  $(f(r), g(r), \omega(r))$  de la forme  $r^k(v_0 + v_1r + \dots)$  (cf proposition 6.2). Alors  $(a(r), b(r), c(r))$  est de la forme  $r^{k-1}(w_0 + w_1r + \dots)$ , et, si on note  $v_0 = (f_0, g_0, \omega_0)$ , alors

$$w_0 = ((k+1)g_0 - ip_j\beta f_0, k\omega_0, ip_j\beta \omega_0).$$

On constate que si  $k = \pm p_j\beta - 1$ , ou si  $k = p_j\beta$  avec  $p_j = 0$ , alors  $w_0 = 0$ , c'est-à-dire que dans ces deux cas (et seulement dans ces deux cas-là)  $u$  et  $du$  ont le même exposant dominant. Et si on est dans le cas d'un terme logarithmique dû à une racine indicielle multiple ( $p_j\beta = -1, 0$ , ou  $1$ ), avec  $(f(r), g(r), \omega(r))$  de la forme  $\ln(r)(v_0 + v_1r + \dots)$ , alors l'expression de  $du$  comprend toujours des termes non nuls en  $r^{-1}$ .

Maintenant pour  $j \notin J$ , si  $u$  est une 1-forme du type

$$f(r)\psi_j e^r + g(r)\psi_j e^\theta,$$

l'expression de  $du$  est assez simple puisqu'on trouve

$$du = \left( g' + \frac{1}{\tanh(r)}g - \frac{ip_j\beta}{\sinh(r)}f \right) \psi_j e^r \wedge e^\theta.$$

Si  $u$  est une solution élémentaire de l'équation  $Lu = 0$  au voisinage (d'une composante connexe) de  $\Sigma$ , avec  $(f(r), g(r))$  de la forme  $r^k(v'_0 + v_1r + \dots)$  (cf proposition 6.2), alors  $a(r) = g' + \frac{1}{\tanh(r)}g - \frac{ip_j\beta}{\sinh(r)}f$  est de la forme  $r^{k-1}(a_0 + a_1r + \dots)$ , et, si on note  $v'_0 = (f_0, g_0)$ , alors

$$a_0 = (k+1)g_0 - ip_j\beta f_0.$$

On constate, de la même façon que dans le cas  $j \in J$ , que si  $k = \pm p_j\beta - 1$  alors  $w_0 = 0$ , c'est-à-dire que dans ce cas (et seulement dans ce cas-là)  $u$  et  $du$  ont le même exposant dominant. Et si on est dans le cas d'un terme logarithmique dû à une racine indicielle multiple ( $p_j\beta = -1$  ou  $1$ ), avec  $(f(r), g(r))$  de la forme  $\ln(r)(v'_0 + v_1r + \dots)$ , alors l'expression de  $du$  comprend toujours des termes non nuls en  $r^{-1}$ .

Il reste à voir ce qu'il se passe quand la solution  $u$  est de la forme  $\varpi(r)\varphi_j$ . On trouve, de la même façon, que si l'exposant dominant de  $u$  vaut  $k$ , alors l'exposant dominant de  $du$  vaut  $k - 1$ , sauf pour la solution non logarithmique quand  $k = 0$ .

Récapitulons tout cela. Soit  $u$  une solution de l'équation  $Lu = 0$  au voisinage d'une composante connexe de  $\Sigma$ , d'exposant dominant  $k$ . On note  $k'$  l'exposant dominant pour  $du$ . Alors  $k' = k - 1$ , sauf pour  $k$  de la forme  $\pm p\beta - 1$  et pour  $k = 0$ . Donc si  $u$  et  $du$  sont toutes les deux dans  $L^2$ , alors les seules valeurs possibles pour  $k$  sont  $0, 1, p\beta - 1, p\beta$  et  $p\beta + 1$  (les autres valeurs pour lesquelles  $u$  était

$L^2$ , à savoir  $k = -p\beta + 1$  et la solution logarithmique pour  $k = 0$ , donnent  $k' \leq -1$ ). En particulier, on a alors  $k \geq 0$  et  $k' \geq 0$ .

Il n'est pas difficile de montrer, à l'instar de ce que l'on a fait pour  $du$ , que si une solution  $u$  de l'équation  $Lu = 0$  au voisinage d'une composante connexe de  $\Sigma$  a pour exposant dominant  $k$ , alors  $\nabla u$  a pour exposant dominant  $k - 1$ , sauf si  $k = 0$ , auquel cas  $\nabla u$  et  $u$  ont le même exposant dominant  $k = 0$ .

Il en est de même pour  $du$  et  $\nabla du$  : si on note encore  $k'$  l'exposant dominant de  $du$ , alors  $\nabla du$  a pour exposant dominant  $k' - 1$ , sauf si  $k' = 0$ , auquel cas  $\nabla du$  et  $du$  ont le même exposant dominant  $k' = 0$ .

En conclusion : si  $u$  est une solution de l'équation  $Lu = 0$  au voisinage de  $\Sigma$ , telle que  $u$  et  $du$  soient dans  $L^2$ , on a vu que les exposants dominants  $k$  et  $k'$  de  $u$  et de  $du$  sont tous les deux supérieurs ou égaux à 0. Par conséquent les exposants dominants de  $\nabla u$  et de  $\nabla du$  sont tous les deux strictements supérieurs à  $-1$ , et donc  $\nabla u$  et  $\nabla du$  sont tous les deux dans  $L^2$ .  $\square$

L'intérêt de ce lemme réside principalement dans la démonstration des deux résultats suivants, qui nous font passer de l'étude des solutions de l'équation  $Lu = 0$  au voisinage du lieu singulier à celle des solutions de l'équation  $Lu = f$  sur  $M$  entière.

**Théorème 6.4.** *Si  $M$  est une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à  $2\pi$ , alors  $D = D'$ .*

*Démonstration.* Supposons que les deux domaines  $D$  et  $D'$  soient différents ; par exemple,  $D \not\subseteq D'$ . Alors il existe  $\alpha \in D \setminus D'$ . Comme  $L|_{D'}$  est bijectif, il existe aussi  $\alpha' \in D'$  tel que  $L\alpha' = L\alpha$ . Donc  $\alpha - \alpha' \in \ker L$ , et on connaît le comportement de  $\alpha - \alpha'$  au voisinage du lieu singulier.

Par définition de  $D$  et  $D'$  (cf 6.1), on sait que  $\alpha, \alpha', \nabla\alpha$  et  $d\alpha'$  sont dans  $L^2$ , et donc aussi  $d\alpha$ . Par conséquent  $\alpha - \alpha'$  et  $d(\alpha - \alpha')$  sont dans  $L^2$ . D'après le lemme précédent ceci implique que  $\nabla(\alpha - \alpha')$  est dans  $L^2$ .

On peut alors appliquer le théorème 5.3 pour procéder à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L(\alpha - \beta), \alpha - \beta \rangle \\ &= \langle \nabla^* \nabla(\alpha - \beta) + (n - 1)(\alpha - \beta), \alpha - \beta \rangle \\ &= \|\nabla(\alpha - \beta)\|^2 + (n - 1)\|\alpha - \beta\|^2 \end{aligned}$$

et on trouve finalement  $\alpha - \beta = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse  $\alpha \in D \setminus D'$ .  $\square$

*Remarque :* Bien que nous ne le montrions pas ici, il est intéressant de noter que dès qu'un angle conique est plus grand que  $2\pi$ , les deux domaines ci-dessus ne coïncident plus. Il devient donc beaucoup plus difficile de trouver un "bon" domaine pour résoudre l'équation de normalisation, cf [9] et [5] pour des résultats dans cette direction.

Nous allons maintenant montrer un résultat complémentaire pour les solutions de l'équation de normalisation.

**Théorème 6.5.** *Soit  $M$  une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à  $2\pi$ . Soit  $\phi$  une section de  $L^2(T^*M)$ . Alors il existe une unique section  $\alpha$  de  $L^2(T^*M)$ , solution de l'équation  $L\alpha = \phi$ , telle que  $\alpha, \nabla\alpha, d\delta\alpha$ , et  $\nabla d\alpha$  (au sens des distributions) soient dans  $L^2$ .*

*Démonstration.* On sait depuis la section 6.1 que l'on peut résoudre de façon unique l'équation  $L\alpha = \phi$  avec  $\alpha \in D$ . Maintenant, le théorème 6.4 ci-dessus nous assure que l'on a aussi  $\alpha \in D'$ ; finalement  $\alpha$ ,  $\nabla\alpha$  (et donc aussi  $d\alpha$  et  $\delta\alpha$ ),  $d\delta\alpha$  et  $\delta d\alpha$  (et donc aussi  $\nabla^*\nabla\alpha$ ) sont dans  $L^2$ . Le seul point qui reste à montrer est que  $\nabla d\alpha$  est aussi  $L^2$ .

Les formes  $C^\infty$  à support compact étant dense dans  $L^2$ , on peut trouver une suite  $(\phi_n)$  de 1-formes  $C^\infty$  à support compact telle que  $\phi_n \rightarrow \phi$  dans  $L^2$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $(\alpha_n)$  la suite d'éléments de  $D$  telle que pour tout entier  $n$ ,  $L\alpha_n = \phi_n$ . On applique alors le théorème 4.2 (avec, à un facteur près,  $A = \nabla$  et  $A^* = \nabla^*$ ) : les transformations  $(\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}$  et  $\nabla(\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}$  sont continues, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi_n) = (\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi) = \alpha$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla\alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla((\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi_n)) = \nabla((\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi)) = \nabla\alpha,$$

les limites étant au sens  $L^2$ . Comme  $d\alpha_n$  est la partie antisymétrique de  $\nabla\alpha_n$ , la suite  $(d\alpha_n)$  est aussi convergente, avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} d\alpha_n = d\alpha$ . Maintenant, comme  $\phi_n$  est à support compact,  $L\alpha_n$  est identiquement nul au voisinage du lieu singulier, et  $\alpha_n$  rentre donc dans le cadre de la proposition 6.2. Comme  $\alpha_n$  appartient à  $D(=D')$ ,  $\alpha_n$  ainsi que  $d\alpha_n$  sont dans  $L^2$ , et on a vu au lemme 6.3 qu'alors  $\nabla d\alpha_n \in L^2$ . On va maintenant montrer que  $(\nabla d\alpha_n)$ , suite de sections du fibré  $T^*M \otimes \Lambda^2 M$ , est *bornée* dans  $L^2$ .

Pour cela, on considère  $\xi$ , section  $C^\infty$  à support compact de  $T^*M \otimes \Lambda^2 M$  ("section test"), et on s'intéresse au produit scalaire  $\langle \nabla d\alpha_n, \xi \rangle$ . Le but est d'arriver à montrer que

$$|\langle \nabla d\alpha_n, \xi \rangle| \leq M \|\xi\|,$$

où  $M$  ne dépend pas de  $n$ .

La restriction de la dérivée covariante à  $\Omega^2 M$  nous donne un opérateur (non borné)  $\nabla : L^2(\Lambda^2 M) \rightarrow L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M)$ ; son adjoint est la restriction de  $\nabla^*$  à  $T^*M \otimes \Lambda^2 M$ , et les résultats de la section 5 s'appliquent. Maintenant, en utilisant la définition de l'adjoint d'un opérateur, on a l'égalité  $\ker \nabla^* = (\text{Im } \nabla)^\perp$  et donc on a aussi la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M) = \ker \nabla^* \oplus \overline{\text{Im } \nabla}.$$

On voudrait pouvoir écrire  $\xi = k + \nabla\zeta$  dans cette décomposition, mais il faut d'abord montrer que l'image de  $\nabla$  est fermée. Pour cela on utilise la formule de Weitzenböck suivante, valable pour une métrique hyperbolique, qui est un analogue de la formule pour les 1-formes que l'on a déjà utilisée à plusieurs reprises (cf [2] §1.I) :

$$\forall \omega \in \Omega^2 M, \quad \nabla^*\nabla\omega = \Delta\omega + 2(n-2)\omega.$$

En particulier, dès que  $\omega$  est  $C^\infty$  à support compact, en intégrant par parties contre  $\omega$  on obtient

$$\|\nabla\omega\|^2 = \|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 + 2(n-2)\|\omega\|^2,$$

ce qui implique

$$\|\omega\| \leq c \|\nabla\omega\|,$$

avec  $c = (2(n-2))^{-1/2}$ . Maintenant, cette inégalité est aussi vraie pour tout  $\omega \in L^2(\Lambda^2 M)$  tel que  $\nabla\omega \in L^2$ ; il suffit de prendre une suite  $\omega_n \in C_0^\infty$  telle que  $\omega_n \rightarrow \omega$  et  $\nabla\omega_n \rightarrow \nabla\omega$  au sens  $L^2$  (cf corollaire 5.5). Cette inégalité implique immédiatement que l'image de  $\nabla$  est fermé, et donc que

$$L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M) = \ker \nabla^* \oplus \text{Im } \nabla.$$

Donc on peut bien écrire  $\xi = k + \nabla\zeta$ , où  $k \in \ker \nabla^*$ , et  $\|\zeta\| \leq c\|\nabla\zeta\| \leq c\|\xi\|$ . Retournons au produit scalaire :

$$\begin{aligned}\langle \nabla d\alpha_n, \xi \rangle &= \langle \nabla d\alpha_n, \nabla\zeta + k \rangle \\ &= \langle \nabla d\alpha_n, \nabla\zeta \rangle.\end{aligned}$$

Pour pouvoir faire une intégration par parties, il faut vérifier que tous les termes impliqués sont  $L^2$ . On sait déjà que  $\zeta, \nabla\zeta, \nabla d\alpha_n$  le sont. Or d'après la formule de Weitzenböck ci-dessus,

$$\nabla^* \nabla d\alpha_n = \Delta d\alpha_n + 2(n-2)d\alpha_n = d\Delta\alpha_n + 2(n-2)d\alpha_n,$$

car  $d$  et  $\Delta = d\delta + \delta d$  commutent. D'autre part

$$\Delta\alpha_n = L\alpha_n - 2(n-1)\alpha_n = \phi_n - 2(n-1)\alpha_n.$$

Finalement,

$$\nabla^* \nabla d\alpha_n = d\phi_n - 2d\alpha_n.$$

Comme  $\phi_n$  est à support compact et que  $\alpha_n \in D$ , les formes  $d\phi_n$  et  $d\alpha_n$  sont  $L^2$ , donc  $\nabla^* \nabla d\alpha_n$  est  $L^2$ , donc on peut donc intégrer par parties (théorème 5.3) :

$$\begin{aligned}\langle \nabla d\alpha_n, \xi \rangle &= \langle \nabla d\alpha_n, \nabla\zeta \rangle \\ &= \langle \nabla^* \nabla d\alpha_n, \zeta \rangle \\ &= \langle d\phi_n - 2d\alpha_n, \zeta \rangle.\end{aligned}$$

Comme  $\nabla\zeta$  est  $L^2$ ,  $\delta\zeta = -\text{tr}_g \nabla\zeta$  est aussi  $L^2$ , on a même  $\|\delta\zeta\| \leq \sqrt{n}\|\nabla\zeta\|$ . D'autre part  $\phi_n, d\phi_n$  et  $\zeta$  sont  $L^2$ , on peut encore intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\langle \nabla d\alpha_n, \xi \rangle &= \langle d\phi_n - 2d\alpha_n, \zeta \rangle \\ &= \langle \phi_n, \delta\zeta \rangle - 2\langle d\alpha_n, \zeta \rangle.\end{aligned}$$

Pour finir on majore avec Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|\langle \nabla d\alpha_n, \xi \rangle| &\leq \|\phi_n\| \|\delta\zeta\| + 2\|d\alpha_n\| \|\zeta\| \\ &\leq (\sqrt{n}\|\phi_n\| + 2c\|d\alpha_n\|) \|\nabla\zeta\| \\ &\leq M\|\xi\|\end{aligned}$$

car les suites  $(\phi_n)$  et  $(d\alpha_n)$  sont convergentes, donc bornées, dans  $L^2$ . Cette majoration, valable pour toute section test  $\xi$ , implique directement que la suite  $(\nabla d\alpha_n)$  est bornée dans  $L^2$ .

Par conséquent, on peut extraire une sous-suite, encore notée  $(\nabla d\alpha_n)$ , qui converge faiblement vers une limite  $l \in L^2$  : c'est-à-dire que quel que soit  $\xi \in L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla d\alpha_n, \xi \rangle = \langle l, \xi \rangle.$$

Mais alors, si  $\xi$  est  $C^\infty$  à support compact,

$$\langle \nabla d\alpha_n, \xi \rangle = \langle d\alpha_n, \nabla^* \xi \rangle,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle d\alpha_n, \nabla^* \xi \rangle = \langle d\alpha, \nabla^* \xi \rangle$$

car  $(d\alpha_n)$  converge dans  $L^2$  vers  $d\alpha$ . Par conséquent, on a

$$\langle d\alpha, \nabla^* \xi \rangle = \langle l, \xi \rangle$$

pour tout  $\xi \in C_0^\infty$ , ce qui signifie exactement que

$$l = \nabla_{\max} d\alpha = \nabla d\alpha,$$

et par suite  $\nabla d\alpha$  appartient à  $L^2$ . □

Notons que si en plus  $\phi$  est  $C^\infty$ , alors par régularité elliptique la solution  $\alpha$  ci-dessus est aussi de classe  $C^\infty$ .

## 7 Rigidité infinitésimale des cône-variétés

Nous avons maintenant en main tous les outils pour montrer le théorème suivant :

**Théorème 7.1.** *Soit  $M$  une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à  $2\pi$ . Soit  $h_0$  une déformation Einstein infinitésimale (i.e. vérifiant l'équation  $E'_g(h_0) = 0$ ) telle que  $h_0$  et  $\nabla h_0$  soient dans  $L^2$ . Alors la déformation  $h_0$  est triviale, i.e. il existe une forme  $\alpha \in \Omega^1 M$  telle que  $h_0 = \delta^* \alpha$ .*

Dans toute cette section nous supposons donc que les angles coniques sont toujours inférieurs à  $2\pi$ .

*Démonstration.* La première étape de la démonstration consiste à normaliser  $h_0$ , c'est-à-dire à chercher  $\alpha$  tel que  $h = h_0 - \delta^* \alpha$  vérifie la condition de jauge  $\beta(h) = 0$ , ce qui revient à résoudre l'équation  $\beta \circ \delta^* \alpha = \beta h_0$ . Comme  $\nabla h_0$  est dans  $L^2$ ,  $\beta h_0$  l'est aussi, et d'après le théorème 6.5 cette équation admet une unique solution  $\alpha$  telle que  $\alpha$ ,  $\nabla \alpha$ ,  $d\delta \alpha$  et  $\nabla d\alpha$  soient dans  $L^2$ . On pose  $h = h_0 - \delta^* \alpha$ . Notons que l'on a perdu des informations en normalisant : en effet, rien ne garantit que la déformation normalisée  $h$  vérifie encore  $\nabla h = 0$ , puisqu'on ne connaît rien pour l'instant sur  $\nabla \delta^* \alpha$ .

La déformation  $h$  vérifie alors :

$$\begin{cases} \nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h = 0 \\ \delta h + d\text{tr } h = 0 \end{cases}$$

En prenant la trace par rapport à  $g$  de la première équation, on obtient

$$\Delta(\text{tr } h) + 2(n-1)\text{tr } h = 0,$$

ce qui incite à intégrer par parties, mais pour le faire il faut d'abord vérifier que les termes impliqués sont  $L^2$ , avant de pouvoir appliquer le théorème 5.1. Comme  $h_0$  et  $\delta^* \alpha$  sont  $L^2$ ,  $h$  est bien  $L^2$ , donc  $\text{tr } h$  aussi, et donc  $\Delta \text{tr } h$  aussi. Maintenant,

$$d\text{tr } h = d\text{tr } h_0 + d\text{tr } \delta^* \alpha = d\text{tr } h_0 - d\delta \alpha,$$

donc  $d\text{tr } h$  est  $L^2$  ( $d\text{tr } h_0$  est  $L^2$  car  $\nabla h_0$  l'est). Par suite, on trouve en intégrant contre  $\text{tr } h$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \text{tr } h, \Delta(\text{tr } h) + 2(n-1)\text{tr } h \rangle \\ &= \|d\text{tr } h\|^2 + 2(n-1)\|\text{tr } h\|^2 \end{aligned}$$

et donc  $\text{tr } h = 0$ , ce qui, avec  $\beta(h) = 0$ , implique aussi  $\delta h = 0$ . Finalement, on a

$$\begin{cases} \nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h = 0 \\ \delta h = 0 \\ \text{tr } h = 0 \end{cases}$$

La deuxième étape de la démonstration consiste à utiliser une autre formule de Weitzenböck (cf [2], §12.69). Un 2-tenseur peut toujours se voir comme une 1-forme à valeur dans le fibré cotangent  $T^*M$ .

Ce fibré étant muni de la connexion de Levi-Civita  $\nabla$ , on note  $d^\nabla$  la différentielle extérieure associée sur les formes à valeurs dans  $T^*M$ . L'opérateur adjoint est la codifférentielle notée  $\delta^\nabla$ . Notons que si  $\alpha$  est une 0-forme à valeurs dans  $T^*M$  (c'est-à-dire une 1-forme usuelle), alors  $d^\nabla\alpha = \nabla\alpha$ ; de même pour une 1-forme à valeurs dans  $T^*M$ ,  $\delta^\nabla h = \nabla^*h$ . On a alors la formule suivante, valable pour tout 2-tenseur symétrique :

$$\nabla^*\nabla h = (\delta^\nabla d^\nabla + d^\nabla \delta^\nabla)h + \mathring{R}h - h \circ \text{ric}.$$

Pour une métrique hyperbolique, cela se simplifie en

$$\nabla^*\nabla h = (\delta^\nabla d^\nabla + d^\nabla \delta^\nabla)h + nh - (\text{tr } h)g.$$

En combinant avec ce qui précède, on obtient

$$\begin{cases} \delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h = 0 \\ \delta h = 0 \\ \text{tr } h = 0 \end{cases}$$

Pour conclure, "il suffit" d'une intégration par parties contre  $h$ . Comme  $h$  est dans  $L^2$ ,  $\delta^\nabla d^\nabla h$  est aussi dans  $L^2$ ; si  $\nabla h$ , ou même seulement  $\nabla_{e_r}h$ , était  $L^2$  on pourrait conclure en utilisant une méthode analogue à celle employée dans la démonstration du théorème 5.3. Malheureusement on ne sait rien sur le caractère  $L^2$  ou non de  $\nabla\delta^*\alpha$ . On va donc devoir contourner cette difficulté pour montrer qu'on a bien  $\langle \delta^\nabla d^\nabla h, h \rangle = \|d^\nabla h\|^2$ .

Avant toutes choses, il faut montrer que  $d^\nabla h$  est bien  $L^2$ . Comme  $\nabla h_0$  est  $L^2$ ,  $d^\nabla h_0$  est  $L^2$ ; il ne reste qu'à regarder  $d^\nabla \delta^*\alpha$ . Or

$$\delta^*\alpha = \nabla\alpha - \frac{1}{2}d\alpha = d^\nabla\alpha - \frac{1}{2}d\alpha,$$

donc

$$d^\nabla \delta^*\alpha = (d^\nabla)^2\alpha - \frac{1}{2}d^\nabla d\alpha.$$

L'opérateur  $(d^\nabla)^2$  est bien connu, ce n'est rien d'autre que l'opposé de la courbure, i.e.

$$(d^\nabla)^2\alpha(x, y) = -R(x, y)\alpha = \nabla_x \nabla_y \alpha - \nabla_y \nabla_x \alpha - \nabla_{[x, y]}\alpha.$$

C'est un opérateur borné, c'est-à-dire continue, pour les normes  $L^2$ ; par conséquent  $(d^\nabla)^2\alpha$  est  $L^2$ . Il ne nous reste donc que la terme  $d^\nabla d\alpha$ ; or le théorème 6.5 nous garantit que  $\nabla d\alpha$ , et donc  $d^\nabla d\alpha$ , sont bien  $L^2$ .

Le tenseur  $d^\nabla h$  est donc bien dans  $L^2$ . Malheureusement, on n'a pas d'analogue du résultat de Cheeger (théorème 5.1) pour les formes à valeurs dans un fibré, du fait que  $d^\nabla \circ d^\nabla$  ne s'annule pas nécessairement, à la différence de  $d \circ d$ . Cependant, en écrivant

$$h = h_0 - \delta^*\alpha = h_0 + \frac{1}{2}d\alpha - d^\nabla\alpha,$$

on a

$$\langle h, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle h_0 + \frac{1}{2}d\alpha, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle - \langle d^\nabla\alpha, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle.$$

Le théorème 6.5 nous assure que  $\nabla(h_0 + \frac{1}{2}d\alpha)$  est dans  $L^2$ . Ceci nous permet de montrer, exactement de la même façon que dans la démonstration du théorème 5.3, qu'on a bien

$$\langle h_0 + \frac{1}{2}d\alpha, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle d^\nabla(h_0 + \frac{1}{2}d\alpha), d^\nabla h \rangle.$$



Pour le terme qui reste, comme  $\alpha$  et  $\nabla\alpha$  sont  $L^2$ , on peut trouver d'après le corollaire 5.5 une suite  $(\alpha_n)$ ,  $C^\infty$  à support compact, telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla\alpha_n = \nabla\alpha$ . On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle d^\nabla \alpha_n, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle d^\nabla \alpha, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle.$$

On peut faire l'intégration par parties avec  $\alpha_n$  :

$$\langle d^\nabla \alpha_n, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle (d^\nabla)^2 \alpha_n, d^\nabla h \rangle.$$

Mais comme  $(d^\nabla)^2$  est continue, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d^\nabla)^2 \alpha_n = (d^\nabla)^2 \alpha,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (d^\nabla)^2 \alpha_n, d^\nabla h \rangle = \langle (d^\nabla)^2 \alpha, d^\nabla h \rangle.$$

On en déduit que

$$\langle d^\nabla \alpha, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle (d^\nabla)^2 \alpha, d^\nabla h \rangle,$$

et avec ce qui précède on a établi l'égalité

$$\langle h, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \|d^\nabla h\|^2.$$

Par conséquent, comme  $\delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h = 0$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h, \delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h \rangle \\ &= \|d^\nabla h\|^2 + (n-2)\|h\|^2 \end{aligned}$$

et donc le tenseur  $h$  est identiquement nul. Par suite  $h_0 = \delta^*\alpha$ , la déformation est triviale.  $\square$

**Corollaire 7.2.** *Soit  $M$  une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à  $2\pi$ . Alors  $M$  est infinitésimalement rigide parmi les cônes-variétés Einstein à angles coniques fixés.*

*Démonstration.* En effet, on a vu que toute déformation infinitésimale de la structure de cône-variété préservant les angles pouvait se mettre sous la forme d'un 2-tenseur symétrique  $h_0$  appartenant à  $L^2$ , dont la dérivée covariante  $\nabla h_0$  est aussi dans  $L^2$ . On peut alors appliquer le théorème ci-dessus pour montrer que toutes les déformations Einstein de ce type sont triviales.  $\square$

## Références

- [1] M. Anderson, *Dehn filling and Einstein metrics in higher dimensions*, preprint, 2003.
- [2] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [3] O. Biquard, Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques, *Astérisque* (265), pp. vi+109, 2000.
- [4] M. Boileau, B. Leeb, and J. Porti, Uniformization of small 3-orbifolds, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 332 (1), pp. 57-62, 2001.
- [5] J. Brock and K. Bromberg, On the density of geometrically finite Kleinian groups, *Acta Math.* 192 (1), pp. 33-93, 2004.

- [6] J. Cheeger, On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, in *Geometry of the Laplace operator* (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), vol. 36 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., pp. 91-146, 1980.
- [7] M. Gaffney, The heat equation method of Milgram and Rosenbloom for open Riemannian manifolds, *Ann. of Math. (2)* 60, pp. 458-466, 1954.
- [8] C. Hodgson and S. Kerckhoff, Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery, *J. Differential Geom.* 48, pp. 1-59, 1998.
- [9] C. Hodgson and S. Kerckhoff, Harmonic deformations of hyperbolic 3-manifolds, in *Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001)*, vol. 299 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 41-73, 2003.
- [10] N. Koiso, A decomposition of the space of Riemannian metrics on a manifold, *Osaka J. Math.* 16, pp. 423-429, 1979.
- [11] S. Kojima, Deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds, *J. Differential Geom.* 49 (3), pp. 469-516, 1998.
- [12] B. Nagy and F. Riesz, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Académie des sciences de Hongrie, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [13] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGrawHill Book Co., New York-Dusseldorf-Johannesburg, 1973.
- [14] W. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, Princeton University, 1979.
- [15] W. Thurston, Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere, in *The Epstein birthday schrift*, vol. 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, Geom. Topol. Publ., Coventry, pp. 511-549 (electronic), 1998.
- [16] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Robert E.Krieger Publishing Co., Huntington, New York, 1976.
- [17] H. Weiß, *Local rigidity of 3-dimensional cone-manifolds*, PhD thesis, Eberhard-Karls Universität Tübingen, 2002.