



HAL
open science

Quelques remarques sur la notion de modification affine

Adrien Dubouloz

► **To cite this version:**

| Adrien Dubouloz. Quelques remarques sur la notion de modification affine. 2005. hal-00004381

HAL Id: hal-00004381

<https://hal.science/hal-00004381>

Preprint submitted on 8 Mar 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES REMARQUES SUR LA NOTION DE MODIFICATION AFFINE

A. DUBOULOZ

RÉSUMÉ. La notion de modification affine introduite par Kaliman et Zaidenberg [3] permet d'investiguer de manière précise la structure des morphismes birationnels entre variétés affines. Dans cette note, on construit un contrepartie globale de cette notion. On en déduit une description analogue de la structure des morphismes affines birationnels entre variétés quasi-projectives.

ABSTRACT. We construct a global counterpart to the notion of affine modification due to Kaliman and Zaidenberg [3]. This leads to an explicit description of the structure of birational affine morphisms between arbitrary quasi-projective varieties.

INTRODUCTION

Il est bien connu que tout morphisme projectif birationnel $\pi : Y \rightarrow X$ entre variétés quasi-projectives sur un corps k s'identifie à l'éclatement d'un sous-schéma fermé de X . Il est naturel de chercher une description analogue de la structure des morphismes birationnels $\pi : Y \rightarrow X$ entre variétés affines, et plus généralement des morphismes affines birationnels entre variétés quelconques. On peut remarquer tout de suite que si $\pi : Y \rightarrow X$ est un morphisme affine birationnel, alors il existe une immersion ouverte $i : Y \hookrightarrow \bar{Y}$ de Y dans un X -schéma projectif $\bar{\pi} : \bar{Y} \rightarrow X$ birationnel à X . On peut ainsi identifier Y à un ouvert d'un schéma obtenu à partir de X en faisant éclater un certain sous-schéma fermé Z de X . Si l'on suit cette approche, il reste ensuite à caractériser précisément la structure du bord $\bar{Y} \setminus Y$.

Lorsque X est une variété affine, Kaliman et Zaidenberg [3] construisent explicitement un X -schéma projectif $\bar{\pi} : \bar{Y} \rightarrow X$ pour lequel Y s'identifie au complémentaire de la *transformé propre* (cf. (1.7) ci-dessous) d'un diviseur principal $D = \text{div}(f)$ sur X dont le support contient le sous-schéma fermé Z que l'on fait éclater. Cela conduit à la notion de *modification affine*, qui englobe certaines constructions antérieures introduites entre autres par Zariski [4] et Davis [1].

Notre but ici est de généraliser le procédé de Kaliman et Zaidenberg afin de décrire la structure des morphismes affines birationnels $\pi : Y \rightarrow X$ entre variétés quasi-projectives. Idéalement, on cherche à construire un sous-schéma fermé Z de X , contenu dans un diviseur de Cartier effectif D , tel que Y s'identifie au complémentaire dans l'éclatement $\bar{\pi} : \bar{Y} \rightarrow X$ de Z de la transformée propre D^{pr} de D , en un sens à préciser. Une approche naïve du problème consisterait simplement à appliquer le procédé précédent sur un recouvrement affine convenable de X en espérant que les données locales correspondantes se recollent agréablement. Cela n'est a priori pas le cas, une des obstructions provenant par exemple du fait que le diviseur principal $D = \text{div}(f)$ qui apparaît dans la construction de Kaliman et Zaidenberg n'est pas défini de manière canonique. Notre méthode consiste par conséquent à définir directement une contrepartie "globale" du procédé de Kaliman et Zaidenberg. Cela conduit à la caractérisation suivante :

Théorème 0.1. *Soit X une variété projective sur un corps k . Pour toute variété Y et tout morphisme affine birationnel $\pi : Y \rightarrow X$, il existe un sous-schéma fermé $Z \subset X$, d'idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ et un diviseur de Cartier effectif $D \in \text{Div}^+(X)$ contenant Z , tel que Y soit isomorphe au X -schéma*

$$\sigma_{\mathcal{I}, D} : \tilde{X}_{\mathcal{I}, D} = \text{Spec} \left(\left(\bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X(D))^n t^n \right) / (1-t) \right) \longrightarrow X,$$

Mathematics Subject Classification (2000) : 14E05, 14Rxx.

Key words : Affine modifications.

et tel que $\pi : Y \rightarrow X$ corresponde avec $\sigma_{\mathcal{I},D}$ via cet isomorphisme. Le morphisme $\sigma_{\mathcal{I},D}$ ainsi défini sera appelé la modification affine de X de centre (\mathcal{I}, D) .

0.2. Expliquons en quoi l'énoncé ci-dessus constitue une réponse au problème initial. Tout d'abord, puisque par hypothèse Z est contenu dans D , son idéal \mathcal{I} contient l'idéal $\mathcal{O}_X(-D)$ de D . Par conséquent, $\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X(D)$ contient \mathcal{O}_X , donc en particulier la section constante 1, ce qui justifie la définition de $\tilde{X}_{\mathcal{I},D}$. D'autre part, via l'immersion ouverte canonique

$$j : \tilde{X}_{\mathcal{I},D} \hookrightarrow \mathbf{Proj}_X \left(\bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X(D))^n t^n \right) \simeq \mathbf{Proj}_X \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n t^n \right),$$

$\tilde{X}_{\mathcal{I},D}$ s'identifie au complémentaire dans l'éclatement $\bar{\pi} : \bar{Y} \rightarrow X$ de Z du sous-schéma fermé

$$D^{pr} = \mathbf{Proj}_X \left(\left(\bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X(D))^n t^n \right) / t \right)$$

de \bar{Y} . Cela montre que $\tilde{X}_{\mathcal{I},D}$ est bien birationnel à X , tout en définissant au passage ce qu'est la transformée propre du diviseur D .

Exemple 0.3. Soit X une variété quasi-projective complexe, $p_1 : X \times \mathbb{C} \rightarrow X$ le fibré en droites trivial sur X , $X_0 \subset X \times \mathbb{C}$ la section nulle de ce fibré, et soit $\tilde{D} \in \text{Div}^+(X)$ un diviseur de Cartier effectif non nul. Soit $Z = p_1^* \tilde{D} \cap X_0$ le sous-schéma fermé de $X \times \mathbb{C}$ défini par l'idéal $\mathcal{I}_Z = \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}(-X_0) + \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}(-p_1^* \tilde{D})$, et soit $\sigma_{\mathcal{I}_Z, p_1^* \tilde{D}} : L \rightarrow X \times \mathbb{C}$ la modification affine de $X \times \mathbb{C}$ de centre (\mathcal{I}_Z, D) . Par construction,

$$L \simeq \mathbf{Spec}_{X \times \mathbb{C}} \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}} \left(n \left(p_1^* \tilde{D} - X_0 \right) \right) \right)$$

s'identifie, en tant que X -schéma, au fibré en droites $p_1 \circ \sigma_{\mathcal{I}_Z, D} : L \rightarrow X$ espace total du faisceau inversible $\mathcal{O}_X(-\tilde{D})$ sur X . Via cet isomorphisme, $\sigma_{\mathcal{I}_Z, p_1^* \tilde{D}}$ correspond alors avec le X -morphisme induit par la section canonique de $\mathcal{O}_X(\tilde{D})$ de diviseur \tilde{D} .

Cette note se compose de deux parties. La première passe rapidement en revue la notion de modification affine selon [3]. La seconde est consacrée à la contrepartie "globale" de cette notion.

1. MODIFICATIONS AFFINES SELON KALIMAN ET ZAIDENBERG

Dans ce paragraphe, nous rappelons la notion de modification affine d'un schéma affine sous une forme légèrement différente de celle introduite par Kaliman et Zaidenberg [3].

Définition 1.1. On appelle *modification affine* d'un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$, tout X -schéma affine de type fini $\pi : Y \rightarrow X$ spectre d'une sous- A -algèbre de type fini de l'anneau total des fractions K_A de A .

Remarque 1.2. Lorsque X est intègre, K_A s'identifie au corps des fractions $\text{Frac}(A)$ de A . Dans ce cas, toute sous- A -algèbre de type fini $B \subset \text{Frac}(A)$ définit un schéma affine $Y = \text{Spec}(B)$. Puisque A et B ont le même corps de fractions, l'inclusion $A \hookrightarrow B$ induit un morphisme birationnel $\pi : Y \rightarrow X$.

1.3. Une sous- A -algèbre de type fini de $B \subset K_A$ est engendrée par un sous- A -module de type fini J de K_A , encore appelé *idéal fractionnaire*. L'ensemble $F = \{f \in A, fJ \subset A\}$ des *dénominateurs* de J est un idéal de A . Le choix d'un élément $f \in F \cap K_A^*$ permet alors d'identifier J au sous- A -module $f^{-1} \tilde{J} \subset A_f$, où $\tilde{J} = fJ \subset A$. En posant $I = (f, \tilde{J}) \subset A$, on obtient finalement des isomorphismes de A -algèbres

$$B \simeq A[J] \simeq A[I/f] \subset A_f \subset K_A,$$

où $A[I/f] = \{a^k/f^k \mid a^k \in I^k, k \geq 1\}$ s'identifie canoniquement au quotient $A[(f^{-1}I)t]/(1-t)$ de la A -algèbre de Rees

$$A[(f^{-1}I)t] = \bigoplus_{n \geq 0} (f^{-1}I)^n t^n$$

du sous- A -module $f^{-1}I = (1, J)$ de K_A par l'idéal principal $(1-t)$.

Remarque 1.4. La A -algèbre $A[I/f]$ s'identifie aussi canoniquement au quotient $A[It]/(1-ft)$ de la A -algèbre de Rees $A[It]$ par l'idéal principal $(1-ft)$. On retrouve ainsi la définition d'une modification affine selon [3].

1.5. L'idéal fractionnaire J , le dénominateur commun f , ainsi que l'idéal I de A permettant d'obtenir l'identification précédente ne sont évidemment pas uniques. Nous adopterons néanmoins la terminologie suivante, issue de [3].

Définition 1.6. Étant donné un idéal I de A et un élément régulier $f \in I$, le X -schéma

$$\sigma_{I/f} : X_{I,f} = \text{Spec}(A[I/f]) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$$

est appelé *modification affine de X de centre (I, f)* .

1.7. Puisque $A[I/f] \simeq A[It]/(1-ft)$, l'immersion canonique $j : X_{I/f} \hookrightarrow \tilde{X} = \text{Proj}_A(A[It])$ réalise $X_{I,f}$ comme l'ouvert principal \tilde{X}_f de \tilde{X} où f ne s'annule pas. En conséquence, le morphisme $\sigma : X_{I/f} \rightarrow X$ se factorise, via l'immersion j , par l'éclatement $\text{Bl}_I : \tilde{X} \rightarrow X$ de X de centre I . Suivant [3], nous dirons que le sous-schéma fermé $D_f^{pr} \simeq \text{Proj}_A(A[It]/ft)$, complémentaire dans \tilde{X} de $j(X_{I,f}) \simeq \tilde{X}_f$ est la *transformée propre* de D . L'exemple suivant montre que la transformée propre D_f^{pr} est en général distincte de la *transformée stricte* D'_f de $D = \text{div}(f)$, définie comme l'adhérence dans \tilde{X} de l'image inverse de $D \setminus V(I)$ par l'éclatement $\text{Bl}_I : \tilde{X} \rightarrow X$.

Exemple 1.8. Soient k un corps, $A = k[x, y]$, $I = (x, y)$ et $f = x^2 \in I$. La transformée propre du diviseur $\text{div}(f)$ dans $\text{Proj}_A A[xt, yt] \simeq \text{Proj}_A A[u, v]/(xv - yu)$ est donnée par l'équation $\{xu = 0\}$. Elle est donc constituée de la réunion de la transformée stricte de la droite $V(f) = \{x = 0\}$ et du diviseur exceptionnel $\{x = y = 0\}$ de l'éclatement $\text{Bl}_I : \text{Proj}_A A[xt, yt] \rightarrow \text{Spec}(A)$.

1.9. Il existe cependant des cas où la transformée propre et la transformée stricte de D coïncident, comme le montre la proposition suivante (cf. aussi [1]) :

Proposition 1.10. *Si l'idéal $I \subset A$ est engendré par une suite régulière $a_0 = f, a_1, \dots, a_r$, alors la transformée propre de $D = \text{div}(f)$ coïncide avec sa transformée stricte.*

Démonstration. Puisque la suite a_0, \dots, a_r est régulière, l'algèbre de Rees $A[It]$ s'identifie, via l'homomorphisme $X_i \mapsto a_i t, i = 0, \dots, r$, à la A -algèbre B , quotient de $A[X_0, \dots, X_r]$ par l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_r \\ X_0 & \cdots & X_r \end{pmatrix}.$$

Ainsi la transformée propre D_f^{pr} et la transformée stricte D'_f coïncident puisqu'elles sont toutes deux données par l'équation $\{X_0 = 0\}$ dans $\text{Proj}_A B$. \square

2. MODIFICATIONS AFFINES GÉNÉRALES

D'après ce qui précède, tout morphisme birationnel $\sigma : Y \rightarrow X$ entre variétés affines s'identifie à une modification affine de X de centre (I, f) convenable. Dans ce paragraphe, nous cherchons à construire une contrepartie "globale" de ce résultat, à savoir une description de la structure des morphismes affines birationnels entre schémas quelconques en termes analogues aux précédents.

2.1. Morphismes affines birationnels. Rappelons tout d'abord qu'étant donné un schéma X fixé, on dit qu'un X -schéma $\pi : Y \rightarrow X$ est affine sur X s'il existe un recouvrement (X_α) de X par des ouverts affines, tel que pour tout α , $\pi^{-1}(X_\alpha)$ soit un ouvert affine de Y .

2.1. Dans ce contexte "global", la correspondance bi-univoque entre les schémas affines de type fini X sur un corps k et les k -algèbres de type fini $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, se transpose en une correspondance entre les X -schémas affines de type fini $\pi : Y \rightarrow X$ et les \mathcal{O}_X -algèbres quasi-cohérentes de type fini $\mathcal{B} = \pi_* \mathcal{O}_Y$. Rappelons que le faisceau des germes de fonctions méromorphes \mathcal{K}_X d'un schéma X donné est défini comme le faisceau associé au pré-faisceau défini par $\mathcal{K}_X(U) = K_A$ pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ de X . La notion de sous- A -algèbre de type fini de l'anneau total des fractions K_A d'un anneau A admet alors la contrepartie suivante.

Définition 2.2. Soit X un schéma. On appelle \mathcal{O}_X -algèbre fractionnaire toute \mathcal{O}_X -algèbre isomorphe à une sous- \mathcal{O}_X -algèbre quasi-cohérente de type fini du faisceau des germes de fonctions méromorphes \mathcal{K}_X de X .

2.3. Une \mathcal{O}_X -algèbre fractionnaire $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}_X$ définit un X -schéma affine de type fini $\sigma : Y = \text{Spec}(\mathcal{B}) \rightarrow X$. Par construction, l'homomorphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{B}$ est injectif et induit un isomorphisme $\mathcal{K}_X \xrightarrow{\sim} \sigma_* \mathcal{K}_Y$. Réciproquement, si $\sigma : Y \rightarrow X$ un morphisme affine de type fini tel que l'homomorphisme $\sigma^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \sigma_* \mathcal{O}_Y$ induise un isomorphisme $\tilde{\sigma} : \mathcal{K}_X \xrightarrow{\sim} \sigma_* \mathcal{K}_Y$ alors $\sigma^\#$ est injectif puisque les homomorphismes canoniques $i_X : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{K}_X$ et $\sigma_*(i_Y) : \sigma_* \mathcal{O}_Y \rightarrow \sigma_* \mathcal{K}_Y$ le sont. Ainsi, puisque Y est de type fini sur X , $\mathcal{B} = \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma_* \mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{K}_X$ est une \mathcal{O}_X -algèbre fractionnaire isomorphe à $\sigma_* \mathcal{O}_Y$. On obtient donc la caractérisation suivante :

Proposition 2.4. *Il y a une correspondance biunivoque entre les \mathcal{O}_X -algèbres fractionnaires et les morphismes affines de type fini $\pi : Y \rightarrow X$ induisant un isomorphisme entre les faisceaux des germes de fonctions méromorphes sur X et Y respectivement.*

Lorsque X est un schéma intègre, toute \mathcal{O}_X -algèbre fractionnaire \mathcal{B} est intègre, et le morphisme structural $\pi : Y = \text{Spec}(\mathcal{B}) \rightarrow X$ correspondant est birationnel.

Corollaire 2.5. *Si X est un schéma intègre, alors il y a une correspondance biunivoque entre les \mathcal{O}_X -algèbres fractionnaires et les morphismes affines birationnels de type fini $\pi : Y \rightarrow X$.*

Exemple 2.6. Soient X un schéma intègre, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal de type fini, $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n$, et soit $\sigma : \tilde{X} = \text{Proj}(\mathcal{S}) \rightarrow X$ l'éclatement de X de centre \mathcal{I} . Pour toute section globale $f \in \Gamma(X, \mathcal{I})$, $\mathcal{B} = \mathcal{S}/(1-f)\mathcal{S}$ est alors une \mathcal{O}_X -algèbre fractionnaire. Le X -schéma affine correspondant est canoniquement isomorphe à l'ouvert principal \tilde{X}_f de \tilde{X} où f ne s'annule pas, i.e. l'unique ouvert de \tilde{X} tel que pour tout ouvert affine $U \subset X$, $\tilde{X}_f \cap \sigma^{-1}(U) = D_+(f|_U)$ dans $\sigma^{-1}(U) \simeq \text{Proj}(\Gamma(U, \mathcal{S}))$.

2.2. Modification affine d'un schéma le long d'un diviseur. Par définition, une \mathcal{O}_X -algèbre fractionnaire $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}_X$ est engendrée par idéal fractionnaire $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}_X$ de \mathcal{K}_X . Cependant, sans hypothèses supplémentaires sur X , le faisceau d'idéaux \mathcal{F} des dénominateurs de \mathcal{J} , i.e. le faisceau défini localement par $\{f \in \mathcal{O}_X \mid f \cdot \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X\}$, n'admet plus nécessairement de section globale.

2.7. Supposons cependant qu'il existe un \mathcal{O}_X -module inversible \mathcal{L} et un homomorphisme régulier non nul $f : \mathcal{L}^{-1} \rightarrow \mathcal{F}$. Puisque f est en particulier injectif, la composition

$$\mathcal{J} \otimes \mathcal{L}^{-1} \xrightarrow{\text{Id} \otimes f} \mathcal{J} \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J} \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X$$

permet alors d'identifier \mathcal{J} à un idéal fractionnaire de la forme $\tilde{\mathcal{J}} \otimes \mathcal{L} = \tilde{\mathcal{J}} \cdot \mathcal{L} \subset \mathcal{K}_X$ pour un certain idéal quasi-cohérent de type fini $\tilde{\mathcal{J}} \subset \mathcal{O}_X$. D'autre part, puisque $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X$, l'homomorphisme $f : \mathcal{L}^{-1} \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ correspond par dualité à une section régulière globale s de \mathcal{L} . En posant $D = \text{div}(s)$, on a donc une identification $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D)$, d'où finalement l'identification $\mathcal{J} \simeq \tilde{\mathcal{J}} \otimes \mathcal{O}_X(D)$.

2.8. Puisque D un diviseur de Cartier effectif, $\mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X(-D)$ est un idéal inversible de \mathcal{O}_X . Ainsi $\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{J}} + \mathcal{O}_X(-D)$ est un idéal quasi-cohérent de type fini de \mathcal{O}_X , et l'on a des isomorphismes de \mathcal{O}_X -algèbres

$$\mathcal{B} \simeq \mathcal{O}_X[\mathcal{J}] \simeq \mathcal{O}_X[\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X(D)].$$

On conclut alors comme dans le cas affine que \mathcal{B} s'identifie à la \mathcal{O}_X -algèbre fractionnaire $\mathcal{O}_X[\mathcal{I}/D]$, quotient de la \mathcal{O}_X -algèbre de Rees

$$\mathcal{O}_X[(\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X(D))t] = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X(D))^n t^n \subset \mathcal{K}_X[t]$$

de l'idéal fractionnaire $\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X(D)$ par l'idéal principal engendré par $(1-t)$. Cela conduit à la définition suivante.

Définition 2.9. Étant donné un triplet (X, \mathcal{I}, D) constitué d'un schéma X , d'un diviseur effectif $D \in \text{Div}^+(X)$ et d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ contenant l'idéal $\mathcal{O}_X(-D)$, le X -schéma affine

$$\sigma_{\mathcal{I}, D} : X_{\mathcal{I}, D} = \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_X[\mathcal{I}/D]) \rightarrow X$$

défini ci-dessus est appelé la *modification affine de X de centre (\mathcal{I}, D)* .

2.10. Pour des données locales $\{(X_i, f_i)_{i \in I}\}$ du diviseur de Cartier D , $\mathcal{O}_X(D)|_{X_i}$ est isomorphe au sous- \mathcal{O}_{X_i} -module de \mathcal{K}_{X_i} engendré par f_i^{-1} . La \mathcal{O}_{X_i} -algèbre $\mathcal{O}_X[\mathcal{I}/D]|_{X_i}$ est alors isomorphe au quotient de la \mathcal{O}_{X_i} -algèbre de Rees de l'idéal $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}|_{X_i}$ de \mathcal{O}_{X_i} par l'idéal principal engendré par $(1 - f_i t)$. Le schéma $X_{\mathcal{I}, D}|_{X_i}$ correspondant s'identifie, via l'immersion ouverte canonique

$$j_i : X_{\mathcal{I}, D}|_{X_i} \simeq \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_{X_i}[\mathcal{I}_i t] / (1 - f_i t)) \hookrightarrow \tilde{X}_i = \mathbf{Proj}(\mathcal{O}_{X_i}[\mathcal{I}_i t]),$$

à l'ouvert principal $(\tilde{X}_i)_{f_i}$ de \tilde{X}_i . Lorsque les X_i sont affines, on retrouve évidemment la notion du paragraphe précédent.

Exemple 2.11. (Complémentaire d'un diviseur). Pour tout diviseur effectif $D \in \text{Div}^+(X)$ non nul, la modification $\sigma_{1, D} : X_{1, D} \rightarrow X$ de centre $(\mathcal{I} = 1 \cdot \mathcal{O}_X, D)$ s'identifie à l'immersion ouverte du sous-schéma X_{s_D} de $\mathbf{Proj}(\mathbf{S}(\mathcal{O}_X(D))) \simeq X$ où la section canonique de $\mathcal{O}_X(D)$ de diviseur D ne s'annule pas, c'est à dire au complémentaire du support de D dans X .

On obtient finalement la contrepartie globale suivante de la notion de modification affine selon [3].

Théorème 2.12. *Soit X une variété quasi-projective sur un corps k . Alors tout morphisme affine birationnel de type fini $\pi : Y \rightarrow X$ est une modification affine de X de centre (\mathcal{I}, D) convenable.*

Démonstration. Puisque X est intègre, \mathcal{K}_X n'est autre que le faisceau constant \mathcal{R}_X des fonctions rationnelles sur X . Soit donc $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}_X$ un idéal fractionnaire générateur de $\pi_* \mathcal{O}_Y$, et soit \mathcal{F} l'idéal des dénominateurs communs de \mathcal{J} . Puisque X est quasiprojectif, il existe un \mathcal{O}_X -module inversible ample \mathcal{L} . Ainsi, pour un certain $n \geq 0$, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ admet un section globale non nulle. On en déduit un homomorphisme injectif $f : \mathcal{L}^{-n} \rightarrow \mathcal{F}$ à partir duquel on peut appliquer la construction décrite précédemment. \square

RÉFÉRENCES

1. E.D. Davis, *Ideals of the principal class, R-sequences and a certain monoidal transformation*, Pacific J. Math. **20** (1967), 197–205.
2. A. Grothendieck and J. Dieudonné, *EGA II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publ. Math. IHES, vol. 8, 1961.
3. S. Kaliman and M. Zaidenberg, *Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group*, Transformation Groups **4** (1999), 53–95.
4. O. Zariski, *Foundations of a general theory of birational correspondences*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 497–542.

A. DUBOULOZ
 INSTITUT FOURIER,
 UMR5582 (UJF-CNRS)
 BP 74, 38402 ST MARTIN D'HERES CEDEX,
 FRANCE
E-mail address: adrien.dubouloz@ujf-grenoble.fr