



HAL
open science

Une remarque sur l'anneau du groupe de classes d'idéaux d'un corps cyclotomique

Francesco Amoroso

► **To cite this version:**

Francesco Amoroso. Une remarque sur l'anneau du groupe de classes d'idéaux d'un corps cyclotomique. 2005. hal-00004211v1

HAL Id: hal-00004211

<https://hal.science/hal-00004211v1>

Preprint submitted on 10 Feb 2005 (v1), last revised 18 Oct 2009 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une remarque sur l'annulateur du groupe de classes d'idéaux d'un corps cyclotomique

FRANCESCO AMOROSO

*Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139
Université de Caen, Campus II, BP 5186
14032 Caen Cédex, France*

§1. Introduction.

Soit m un entier, $m \not\equiv 2 \pmod{4}$ et ζ_m une racine m -ième primitive de l'unité. Notons $K_m = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ et $\Gamma_m = \text{Gal}(K_m/\mathbb{Q}) = \{\sigma_a \text{ t.q. } a = 1, \dots, m-1, \text{ pgcd}(a, m) = 1\}$ où $\sigma_a(\zeta_m) = \zeta_m^a$ ($a \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(a, m) = 1$). Notons également $J = \sigma_{-1}$ et \mathcal{Cl}_m^- la partie moins du groupe des classes d'idéaux de K_m .

Soit

$$\psi = \sum_{\substack{1 \leq a \leq m-1 \\ \text{pgcd}(a, m) = 1}} \psi_a \sigma_a \in \mathbb{Z}[\Gamma_m];$$

on pose : $\|\psi\|_1 = \sum_a |\psi_a|$.

Nous montrons le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $\psi \in \mathbb{Z}[\Gamma_m]$. Supposons $(1 - J)\psi \neq 0$ et $\psi \in \text{Ann}(\mathcal{Cl}_m^-)$. Alors*

$$\|\psi\|_1 \geq \frac{1}{2} \|\psi(1 - J)\|_1 \geq \frac{\log 5}{12L} \times \frac{\phi(m)}{\log m},$$

où $L > 0$ est une constante absolue et où $\phi(*)$ est la fonction d'Euler.

Notons

$$\mathbb{Z}[\Gamma_m]^- = \{\psi \in \mathbb{Z}[\Gamma_m] \text{ t.q. } (1 + J)\psi = 0\} = (1 - J)\mathbb{Z}[\Gamma_m]$$

et soit I_m l'idéal de Stickelberger et $I_m^- = I_m \cap \mathbb{Z}[\Gamma_m]^-$. Alors (cf. [W], theorem 6.10 :

$$I_m^- \subseteq \text{Ann}(\mathcal{Cl}_m^-)^-$$

et, par un théorème de Sinnott (voir [Si] ou la remarque de [W] après le théorème 6.19) :

$$[\mathbb{Z}[\Gamma_m]^- : I_m^-] = 2^{a(m)} h_m^-,$$

où $\text{Ann}(\mathcal{C}l_m^-) = \text{Ann}(\mathcal{C}l_m^-) \cap \mathbb{Z}[\Gamma_m]^-$ et où $a(m) = 0$ si m est une puissance d'un nombre premier et $a(m) = 2^{k-2} - 1$ si m possède $k \geq 2$ facteurs premiers distincts. Donc

$$\log [\mathbb{Z}[\Gamma_m]^- : \text{Ann}(\mathcal{C}l_m^-)] \leq \log [\mathbb{Z}[\Gamma_m]^- : I_m^-] = a(m) \log 2 + \log h_m^-$$

Nous déduirons du théorème 1 la minoration suivante pour l'indice de l'annulateur :

Théorème 2.

$$\log [\mathbb{Z}[\Gamma_m]^- : \text{Ann}(\mathcal{C}l_m^-)] \geq \frac{C\phi(m) \log \log m}{\log m},$$

où $C > 0$ est une constante absolue.

Remarquons que (cf. [W], theorem 4.20) :

$$\log h_m^- \sim \frac{1}{4}\phi(m) \log m,$$

pour $m \rightarrow +\infty$ et donc, au moins pour une puissance q d'un nombre premier,

$$1 \leq \frac{\log [\mathbb{Z}[\Gamma_q]^- : I_q^-]}{\log [\mathbb{Z}[\Gamma_q]^- : \text{Ann}(\mathcal{C}l_q^-)]} \ll \frac{(\log q)^2}{\log \log q}.$$

Remerciements. Je tiens à remercier B. Anglès pour les passionnantes discussions qui ont motivé ce travail et pour m'avoir bien voulu me faire part de ses commentaires sur une version initiale de cet article.

§2. Preuves.

Démonstration du théorème 1.

On généralise la preuve de la minoration de l'exposant du groupe de classe de K_m esquissé dans l'introduction de [Am-Dv2].

Soit

$$\psi = \sum_{\substack{1 \leq a \leq m-1 \\ \text{pgcd}(a,m)=1}} \psi_a \sigma_a \in \mathbb{Z}[G]$$

qui satisfait les hypothèses du théorème. Le théorème de Linnik montre qu'il existe un nombre premier $l \equiv 1 \pmod{m}$ et tel que

$$l \leq m^L$$

pour une certaine constante $L > 0$. Le premier l est totalement décomposé dans $\mathbb{Z}[\zeta_m]$; soit P un premier au dessus de l . Alors : $P^\psi = (\gamma)I$ pour un certain $\gamma \in K_m^*$ et pour un idéal I extension d'un idéal de $\mathbb{Z}[\zeta_m + \zeta_m^{-1}]$. Notons $\alpha = \gamma^{1-J}$ et remarquons que α n'est pas une racine de l'unité (car $P^{\psi(1-J)} \neq \mathbb{Z}[\zeta_m]$).

Le théorème principal de [Am-Dv1] (op. cit., p. 2) montre que

$$h(\alpha) \geq \frac{\log 5}{12} . \quad (1)$$

Notons $P_a = \sigma_a P$ ($a = 1, \dots, m-1$, $\text{pgcd}(a, m) = 1$). On a donc :

$$(\gamma)I = \prod_{\substack{1 \leq a \leq m-1 \\ \text{gcd}(a, m)=1}} P_a^{\psi_a}$$

et

$$(\alpha) = \prod_{\substack{1 \leq a \leq m-1 \\ \text{gcd}(a, m)=1}} P_a^{\psi_a - \psi_{m-a}}$$

Notons v_a la place finie de K_m correspondant à P_a ; on a alors

$$|\alpha|_{v_a}^{n_{v_a}} = l^{\psi_{m-a} - \psi_a} .$$

Par ailleurs, si v est une place de K_m et $v \neq v_a$, alors $|\alpha|_v = 1$. Donc :

$$\begin{aligned} \phi(m)h(\alpha) &= \sum_{\substack{1 \leq a \leq m-1 \\ \text{gcd}(a, m)=1}} \log \max\{|\alpha|_{v_a}^{n_{v_a}}, 1\} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq a \leq m-1 \\ \text{gcd}(a, m)=1}} \max(\psi_{m-a} - \psi_a, 0) \log l \\ &= \frac{\log l}{2} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m-1 \\ \text{gcd}(a, m)=1}} |\psi_a - \psi_{m-a}| \\ &\leq \frac{L \log m}{2} \|(1-J)\psi\|_1 . \end{aligned} \quad (2)$$

La conclusion désirée découle des formules (1) et (2) en remarquant que

$$(1-J)\psi = \sum_{\substack{1 \leq a \leq m-1 \\ \text{pgcd}(a, m)=1}} (\psi_a - \psi_{m-a})\sigma_a .$$

□

Pour $n, N \in \mathbb{N}$ notons

$$\Lambda(N, n) = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{N}^N \text{ t.q. } x_1 + \dots + x_N \leq n\}.$$

La démonstration du théorème 2 nécessite du lemme élémentaire suivant :

Lemme. Soient n_k, N_k deux suites strictement croissantes et telles que $n_k = o(N_k)$ pour $k \rightarrow +\infty$. Alors,

$$\log \text{Card}(\Lambda([N_k], [n_k])) \sim n_k \log(N_k/n_k)$$

pour $k \rightarrow +\infty$.

Démonstration. En utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$\begin{aligned} \log \text{Card}(\Lambda(N_k, n_k)) &= \log \binom{N_k + n_k}{N_k} \\ &\sim (N_k + n_k) \log(N_k + n_k) - N_k \log N_k - n_k \log n_k \\ &= N_k \log \left(1 + \frac{n_k}{N_k}\right) + n_k \log \left(\frac{N_k}{n_k} + 1\right) \\ &\sim n_k \log(N_k/n_k). \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 2. On choisit dans le lemme

$$N_k = \frac{\phi(m)}{2} \quad \text{et} \quad n_k = \frac{c\phi(m)}{4 \log m},$$

où $c = \frac{\log 5}{12L}$. Le lemme montre en particulier que l'ensemble

$$\Lambda_m := \left\{ \psi = \sum_{\substack{1 \leq a \leq (m-1)/2 \\ \text{pgcd}(a, m) = 1}} \psi_a \sigma_a \in \mathbb{Z}[\Gamma_m] \text{ t.q. } \psi_a \geq 0, \|\psi\|_1 \leq [n_m] \right\}$$

est de cardinalité

$$\text{Card}(\Lambda_m) \geq \exp \left(\frac{C\phi(m) \log \log m}{\log m} \right) \quad (3)$$

pour une certaine constante $C > 0$. Remarquons aussi que

$$\text{Card}((1 - J)\Lambda_m) = \text{Card}(\Lambda_m). \quad (4)$$

Soient $\psi, \psi' \in (1 - J)\Lambda_m$ avec $\psi \neq \psi'$. Alors $(1 - J)(\psi - \psi') = 2(\psi - \psi') \neq 0$ et

$$\|\psi - \psi'\|_1 \leq 4[n_m] < \frac{c\phi(m)}{\log m}.$$

Le théorème 1 nous assure donc : $\psi - \psi' \notin \text{Ann}(\mathcal{Cl}_m^-)$, ce qui montre que :

$$[\mathbb{Z}[\Gamma_m]^- : \text{Ann}(\mathcal{Cl}_m^-)] \geq \text{Card}((1 - J)\Lambda_m). \quad (5)$$

Les relations (3), (4) et (5) donnent la conclusion recherchée. \square

Si l'on admet l'hypothèse de Riemann généralisée, le théorème 1 peut être généralisé à des extensions abéliennes imaginaires et même CM, (en utilisant dans ce dernier cas le résultat principal de [Am-Da] à la place de la minoration de la hauteur de [Am-Dv], comme dans [Am-Dv2]). Plus généralement, en utilisant des techniques additionnelles de géométrie des nombres, on peut traiter également des corps «proche» à un corps CM, par exemple les corps engendrés par un petit nombre de Salem. Tous ces résultats font l'objet de l'article en préparation [Am].

REFERENCES

- [Am] F. Amoroso – «Sur la structure galoisienne du groupe des classes de certains corps» , en preparation.
- [Am-Da] F. Amoroso and S. David – «Le problème de Lehmer en dimension supérieure» , J. reine angew. Math. **513** (1999), 145–179.
- [Am-Dv] F. Amoroso and R. Dvornicich – «A Lower Bound for the Height in Abelian Extensions» , J. Number Theory **80** (2000), no. 2, 260–272.
- [Am-Dv2] F. Amoroso and R. Dvornicich – «Lower bounds for the height and size of the ideal class group in CM fields» . Monatsh. Math. **138**, No.2, 85-94 (2003).
- [Si] W. Sinnott – On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field. (English) Ann. Math. (2) 108, 107-134 (1978).
- [Wa 1982] L.C. Washington. – «Introduction to Cyclotomic Fields» ; Springer-Verlag, New York (1982).