



HAL
open science

Constante de Peyre des variétés toriques en caractéristique positive

David Bourqui

► **To cite this version:**

David Bourqui. Constante de Peyre des variétés toriques en caractéristique positive. 2005. hal-00004037v1

HAL Id: hal-00004037

<https://hal.science/hal-00004037v1>

Preprint submitted on 24 Jan 2005 (v1), last revised 17 Jul 2007 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Constante de Peyre des variétés toriques en caractéristique positive

Peyre's constant of toric varieties in positive characteristic

David BOURQUI

Abstract : We compute the anticanonical height zeta function of a (non necessarily split) toric variety defined over a global field of positive characteristic, drawing our inspiration from the method used by Batyrev and Tschinkel to deal with the analogous problem over a number field. By the way, we recall a sketch of their method. One of the difficulties inherent to the functional case is the more delicate interpretation of the main term of the height zeta function. In fact, by combining the formula we obtain with a recent result of Colliot-Thélène and Suresh, we see that the known conjectural interpretation of the main term is not valid for every toric variety defined over a global field of positive characteristic, contrarily to what happens over a number field.

Résumé : Nous calculons la fonction zêta des hauteurs anticanonique d'une variété torique (non nécessairement déployée) définie sur un corps global de caractéristique positive. Nous nous inspirons pour cela de la méthode utilisée par Batyrev et Tschinkel pour traiter la situation analogue en caractéristique zéro, méthode que nous rappelons d'ailleurs dans ses grandes lignes. Une des difficultés spécifiques à la caractéristique non nulle est l'interprétation plus délicate du terme dominant de la fonction zêta des hauteurs. En combinant la formule obtenue à un résultat récent de Colliot-Thélène et Suresh, on constate d'ailleurs que l'interprétation conjecturale connue du terme dominant n'est pas valable pour toutes les variétés toriques définies sur un corps global de caractéristique positive, contrairement au cas de la caractéristique zéro.

AMS Classification : 11G35, 11G50, 14M25, 11M41

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Position et origine du problème	3

1.2	L'adaptation de la méthode de Batyrev et Tschinkel en caractéristique positive	7
1.3	Quelques rappels et notations	9
1.4	Hauteurs d'Arakelov, mesure de Tamagawa et constante de Peyre	13
2	Tores algébriques	16
2.1	Quelques rappels	16
2.2	L'espace adélique associé à un tore algébrique	17
2.3	Le degré	20
2.4	La dualité de Nakayama	24
2.5	Mesure adélique et nombre de Tamagawa d'un tore algébrique	25
2.6	Résolution flasque d'un tore algébrique et applications	29
2.7	Un invariant des tores algébriques définis sur les corps de fonctions	35
2.8	Un autre invariant des tores algébriques définis sur les corps de fonctions	38
2.9	Preuve de l'égalité $\mathcal{K}_T = \zeta(T)$	40
3	Hauteurs sur une variété torique et fonction zêta associée	44
3.1	Variétés toriques	44
3.2	Fonction zêta des hauteurs	45
3.3	Mesure et nombre de Tamagawa d'une variété torique	46
3.4	Le résultat	48
3.5	Stratégie de Batyrev et Tschinkel	49
4	Calcul des transformées de Fourier et expression intégrale de la fonction zêta des hauteurs	50
4.1	Caractères du groupe des idèles	50
4.2	Caractères de $T(\mathbf{A}_K)$	52
4.2.1	Cas arithmétique	53
4.2.2	Cas fonctionnel	54
4.3	Préliminaires au calcul des transformées de Fourier	55
4.4	Les transformées de Fourier locales aux places non ramifiées .	57
4.5	Le cas des places ramifiées	59
4.6	Propriétés analytiques de la transformée de Fourier globale . .	62
4.6.1	Cas fonctionnel	63
4.6.2	Cas arithmétique	65
4.7	L'expression intégrale de la fonction zêta des hauteurs	66
4.7.1	Cas fonctionnel	66
4.7.2	Cas arithmétique	69

5	Évaluation de l'intégrale	71
5.1	Définition d'une certaine classe de fonctions	72
5.1.1	Un premier exemple	73
5.1.2	Encore quelques définitions	74
5.1.3	Une généralisation du premier exemple	75
5.2	Comportement des fonctions étudiées par intégration	78
6	Application aux fonctions zêta des hauteurs	85
6.1	Preliminaires	85
6.2	Application des lemmes techniques	86
6.2.1	Cas arithmétique	86
6.2.2	Cas fonctionnel	87
6.3	Calcul de la constante	91

1 Introduction

1.1 Position et origine du problème

Soit V une variété projective définie sur un corps global K , i.e. un corps de nombres ou le corps de fonctions d'une courbe projective, lisse et géométriquement intègre, définie sur un corps fini. Soit H une hauteur exponentielle relative à un fibré en droites ample. Alors pour tout réel B le nombre

$$n_{V,H}(B) = \# \{x \in V(K), H(x) \leq B\}$$

est fini. Si l'ensemble $V(K)$ est dense pour la topologie de Zariski, la quantité $n_{V,H}(B)$ tend donc vers l'infini quand B tend vers l'infini. Une question naturelle est alors d'essayer de décrire le comportement asymptotique de la quantité $n_{V,H}(B)$, en d'autres termes le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée. On cherche notamment à interpréter cette description en termes de la géométrie de la variété V . C'est l'objet d'un programme initié par Manin et ses collaborateurs, qui s'est révélé extrêmement riche et ouvert : pour la vérification des prédictions de Manin pour des classes particulières de variétés, des techniques très diverses ont pu être employées. Ces prédictions (raffinées par Peyre puis Batyrev et Tschinkel) sont maintenant établies pour plusieurs classes de variétés. Nous renvoyons le lecteur aux textes [Pe4] et [Pe5] pour un état général de la question et les références de nombreux travaux sur le sujet.

Soulignons que la très grande majorité de ces travaux se placent dans le cas où K est un corps de nombres. Ici nous nous intéressons au cas où K est de caractéristique non nulle, cas encore peu exploré dans la littérature. Avant

toute chose, nous allons préciser l'une des prédictions de Manin (raffinée par Peyre) concernant le comportement asymptotique de $n_{V,H}(B)$, dans le cas où le corps de base est un corps de nombres. Elle peut s'énoncer de la manière suivante.

Question 1.1

Soit V une variété projective et lisse définie sur un corps de nombres K . On suppose que la classe du faisceau anticanonique est à l'intérieur du cône effectif, et que l'ensemble $V(K)$ des points rationnels de V est dense pour la topologie de Zariski. Soit t le rang du groupe de Néron-Séveri de V . Soit H une hauteur relative au faisceau anticanonique, et $C_{V,H}^*$ la constante associée définie par Peyre. Est-il vrai qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U de V tel qu'on ait

$$n_{U,H}(B) \underset{B \rightarrow +\infty}{\sim} C_{V,H}^* B \log(B)^{t-1} \quad ? \quad (1.1.1)$$

La restriction à un ouvert U éventuellement strict de V est nécessaire en raison de l'existence possible de fermés accumulateurs, dont un prototype est donné par les diviseurs exceptionnels sur les surfaces de del Pezzo.

La constante $C_{V,H}^*$ de l'énoncé est définie par Peyre dans [Pe1]. Dans [Pe2], le même auteur définit un analogue de $C_{V,H}^*$ dans le cas où le corps de base est de caractéristique non nulle¹. Il existe donc une version fonctionnelle immédiate de la question 1.1. Cependant, la nature de l'ensemble des valeurs prises par les fonctions hauteurs dans le cas fonctionnel² entraîne immédiatement qu'une formule du type (1.1.1) ne sera certainement pas vérifiée.

Pour obtenir une version fonctionnelle satisfaisante de la question 1.1, on remarque que le comportement asymptotique de $n_{V,H}(B)$ est étroitement lié, par des théorèmes taubériens, au comportement analytique de la série génératrice

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in V(K)} H(x)^{-s}$$

(s désignant une variable complexe), que l'on baptise fonction zêta des hauteurs. Un des moyens d'obtenir une formule du type (1.1.1) est d'ailleurs d'étudier d'abord le comportement analytique de cette fonction, puis d'appliquer un théorème taubérien adéquat. On a par exemple le résultat suivant.

¹Cependant, dans ce cas, des hypothèses supplémentaires sur la variété sont a priori nécessaires pour définir $C_{V,H}^*$

²Typiquement, ce sera l'ensemble $q^{\mathbf{Z}}$ où q est le cardinal du corps des constantes.

Théorème 1.2

S'il existe un ouvert U non vide tel que $\zeta_{U,H}(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction

$$s \longmapsto (s-1)^t \zeta_{U,H}(s)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{\Re(s) > 1 - \varepsilon\}$, et vérifie $g(1) = C_{V,H} \stackrel{\text{déf}}{=} (t-1)! C_{V,H}^*$ alors la formule (1.1.1) est vérifiée pour cet ouvert U .

La question qui suit peut alors être vue comme une version fonctionnelle de la question 1.1.

Question 1.3

Soit V une variété projective et lisse définie sur un corps global K de caractéristique positive. On suppose que la classe du faisceau anticanonique est à l'intérieur du cône effectif, et que l'ensemble $V(K)$ des points rationnels de V est dense pour la topologie de Zariski. Soit t le rang du groupe de Néron-Séveri de V . Soit H une hauteur relative au faisceau anticanonique, et $C_{V,H}$ la constante associée définie par Peyre. Est-il vrai qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U de V tel que la série

$$\zeta_{U,H}(s) = \sum_{x \in U(K)} H(x)^{-s}$$

converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et, pour un certain $\varepsilon > 0$, se prolonge en une fonction méromorphe sur l'ouvert $\{\Re(s) > 1 - \varepsilon\}$, qui a un pôle d'ordre t en $s = 1$, et telle que

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t \zeta_{U,H}(s) = C_{V,H} \quad ?$$

Naturellement, et en accord avec les remarques déjà faites, même si cette question admet une réponse positive, on ne pourra pas appliquer le théorème 1.2. En caractéristique non nulle, la fonction zêta des hauteurs aura d'autres pôles que 1 sur la droite $\Re(s) = 1$, et même en général d'autres pôles que ceux provenant de la périodicité de H (cf. plus bas).

Concernant la question 1.3, le cas des espaces projectifs est traité par Wan dans [Wa], montrant ainsi une formule figurant déjà dans [Se2]. Le cas des variétés de drapeaux, qui englobe le précédent, a été traité indépendamment par Peyre dans [Pe2] et Lai et Yeung dans [LaYe] (sans interprétation de la constante dans ce dernier cas).

Dans ce texte, on étudie la question 1.3 pour une variété torique projective et lisse définie sur un corps de fonctions, non nécessairement déployée.

Une de motivations de ce travail est que le problème analogue sur les corps de nombres a déjà été traité avec succès³, qui plus est de deux manière différentes : Batyrev et Tschinkel ont démontré dans [BaTs1] et [BaTs3] la validité des prédictions de Manin pour les variétés toriques en exploitant la structure de groupe du tore pour utiliser des techniques d’analyse harmonique. Par la suite Salberger a redémontré dans [Sa] le résultat dans un cadre plus restreint (variétés toriques déployées, définies sur \mathbf{Q} , de faisceau anticanonique globalement engendré) mais par une méthode complètement différente basée sur l’usage de la description explicite des torseurs universels au-dessus des variétés toriques.

Dans [Bo1] et [Bo2], nous avons montré comment, en s’inspirant de la méthode de Salberger, on pouvait traiter le cas des variétés toriques déployées définies sur un corps de fonctions quelconque (sans hypothèse sur le faisceau anticanonique).

Dans ce texte, nous adaptons au cas fonctionnel l’approche utilisée par Batyrev et Tschinkel dans [BaTs1] et [BaTs3], pour traiter le cas des variétés toriques non nécessairement déployées. La sous-section suivante détaille cette adaptation. Afin de souligner les analogies et les différences qui existent dans le traitement du calcul de la fonction zêta des hauteurs des variétés toriques dans les cas fonctionnel et arithmétique, nous nous considérerons dans tout ce texte les deux cas simultanément, en rappelant (souvent sous forme abrégée) l’essentiel des arguments utilisés par Batyrev et Tschinkel. Bien entendu, notre contribution au calcul de la fonction zêta des hauteurs des variétés toriques concerne uniquement le cas fonctionnel.

Le résultat auquel nous aboutissons (théorème 3.4) ne permet pas a priori⁴ de donner une réponse positive à la question 1.3.

En effet, en prenant pour ouvert U l’orbite ouverte, on obtient bien le domaine de convergence et le prolongement espérés pour la fonction zêta des hauteurs, ainsi qu’un pôle de l’ordre annoncé en $s = 1$. Cependant la constante obtenue comme terme principal de la fonction zêta des hauteurs en $s = 1$ s’écrit

$$\mathcal{K}_T C_{V,H}$$

où T est l’orbite ouverte de X_Σ et \mathcal{K}_T un invariant entier du tore algébrique T , spécifique à la caractéristique non nulle, défini à la section 2.7. Cette constante coïncide donc avec la constante conjecturale si et seulement si $\mathcal{K}_T = 1$. Pour certaines classes de tores algébriques⁵ (cf. proposition 2.15),

³C’était également le cas pour les variétés de drapeaux.

⁴contrairement au résultat de Batyrev et Tschinkel dans le cas des corps de nombres.

⁵un peu plus étendues que celles traitée dans le dernier chapitre de [Bo3], dont le présent texte est une version revue, corrigée et améliorée.

nous montrons que \mathcal{K}_T est égal à 1.

Par ailleurs, tout récemment, Colliot-Thélène et Suresh ont exhibé dans [CTSu] un tore algébrique avec $\mathcal{K}_T \neq 1$. Comme tout tore algébrique admet, d'après [CTHaSk], une compactification projective et lisse, ceci fournit donc un exemple de variété torique pour laquelle la réponse à la question 1.3 est *négative*.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Antoine Chambert-Loir, Jean-Louis Colliot-Thélène et Emmanuel Peyre pour leurs remarques, corrections et suggestions concernant ce texte.

1.2 L'adaptation de la méthode de Batyrev et Tschinkel en caractéristique positive

Dans cette section, nous résumons brièvement la méthode utilisée dans [BaTs3] et [BaTs1], en expliquant quelles parties de la preuve nécessitent une modification en caractéristique non nulle.

La première étape consiste à définir précisément un système de hauteurs puis à l'étendre à l'espace adélique associé au tore. La construction est strictement la même dans le cas fonctionnel. Elle est rappelée dans les sections 3.2 et 3.5.

À ce stade, il faut déjà noter que la topologie de l'espace adélique associé au tore a des propriétés différentes dans chacun des deux cas. Moralement, en fait, la situation est plus agréable en caractéristique positive : beaucoup des groupes topologiques mis en jeu sont compacts (proposition 2.3 et section 4.6).

Pour pouvoir appliquer la formule de Poisson, il faut s'assurer de l'intégrabilité de la transformée de Fourier de la hauteur. Cette transformée se décompose en produit de transformées de Fourier locales. On utilise dans le cas arithmétique l'expression explicite de presque toutes les transformées de Fourier locales, et des majorations adéquates pour les transformées de Fourier restantes. La formule explicite est la même dans le cas fonctionnel, c'est le théorème 4.6. En ce qui concerne les transformées de Fourier locales aux places restantes, leur continuité suffit pour assurer la convergence dans le cas fonctionnel, cependant nous avons besoin de quelques renseignements sur la forme des fonctions obtenues (lemme 4.9).

Le choix d'un scindage du groupe des caractères permet alors de constater que la fonction zêta des hauteurs s'obtient par intégration (sur un espace

vectorel réel dans le cas arithmétique, sur un produit de cercles dans le cas fonctionnel) d’une fonction qui possède une expression en terme de produit de fonctions L de Hecke ([BaTs1, Theorem 3.1.3] et [BaTs3, page 46] pour le cas arithmétique, corollaire 4.11 pour le cas fonctionnel). Il faut maîtriser le comportement analytique de cette fonction, et dans le cas arithmétique, on a besoin pour cela d’un contrôle uniforme sur les bandes verticales des fonctions L , obtenu via le principe de Phragmen-Lindelf ([BaTs1, Theorem 3.2.3]). Dans le cas fonctionnel, l’holomorphie de la fonction $L(., \chi)$ quand le caractère χ est non trivial est suffisante.

Il s’agit maintenant, pour évaluer la fonction zêta des hauteurs, de comprendre comment l’intégration modifie le comportement analytique de la fonction sous l’intégrale (cet étape n’apparaît d’ailleurs pas dans le cas des tores anisotropes). C’est l’objet de la proposition technique de Batyrev et Tschinkel [BaTs3, Theorem 6.19], qui procèdent par applications successives du théorème des résidus. Un analogue direct de leur méthode en caractéristique non nulle s’avère difficile à mettre en œuvre, car bien que la compacité des espaces topologiques mis en jeu simplifie un peu les choses, rendant inutiles des hypothèses du type contrôle uniforme sur les bandes verticales, indispensables en caractéristique zéro, les fonctions zêtas des hauteurs en caractéristique non nulle s’avèrent posséder plus de pôles sur la droite $\Re(s) = 1$ que ceux donnés par la simple $\frac{2i\pi}{\log q}$ -périodicité, où q est le cardinal du corps des constantes. Ce phénomène est même déjà visible dans le cas des variétés toriques déployées. Prenons en effet l’exemple de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$: la formule de la page 355 de [Bo1] montre que la fonction zêta des hauteurs anticanonique de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ s’écrit

$$\zeta_H(s) = f_1(q^{-s}) \zeta_C(2s - 1)^2 + f_2(q^{-s}) \zeta_C(2s - 1) + f_3(q^{-s}),$$

où, pour $i = 1, 2, 3$, $s \mapsto f_i(q^{-s})$ est holomorphe sur le domaine $\Re(s) > \frac{1}{2}$ et $s \mapsto f_1(q^{-s})$ ne s’annule pas sur ce domaine. Ainsi l’ensemble des pôles situés sur la droite $\Re(s) = 1$ est $\{1 + \frac{ik\pi}{\log q}\}_{k \in \mathbf{Z}}$. Rappelons que dans le cas de la caractéristique zéro, Batyrev et Tschinkel montrent que le seul pôle de la fonction zêta des hauteurs des variétés toriques sur la droite $\Re(s) = 1$ est $s = 1$. La gestion des pôles supplémentaires en caractéristique non nulle se révèle vite être très délicate (voire ingérable...) si on veut suivre au plus près la méthode de Batyrev et Tschinkel. C’est pourquoi, pour aboutir à une version fonctionnelle de leur résultat technique, nous exploitons la périodicité des fonctions mises en jeu pour obtenir une interprétation en terme de séries de type combinatoire de la fonction obtenue après intégration sur le produit de cercles. Les techniques utilisées pour évaluer ces séries sont alors similaires à celles employées dans [Bo2]. Les lemmes 5.6 et 5.7 jouent

le rôle en caractéristique positive de la proposition technique de Batyrev et Tschinkel citée ci-dessus.

La description du comportement analytique de la fonction obtenue après intégrations successives revient (dans un sens à préciser, cf. les lemmes 5.5 et 5.6, l'énoncé du théorème 6.19 de [BaTs3] ainsi que le début de la section 5) à prendre le quotient d'un certain \mathbf{Z} -module. Dans le cas arithmétique, ce quotient est donné par la résolution flasque du groupe des caractères du tore par le groupe de Picard de la variété torique. Ceci vient de l'isomorphisme entre la partie réelle de l'espace adélique associé au tore et le groupe des caractères rationnels du tore étendu aux réels (cf. [BaTs3, p. 46]). Dans le cas fonctionnel, on n'a pas une situation complètement similaire et il faut regarder le complexe donné par l'image par l'application degré de la suite exacte de tores algébrique duale de la résolution flasque (plus exactement une suite exacte définie à partir de ce complexe).

La dernière étape consiste à calculer explicitement le terme principal de la fonction zêta des hauteurs en $s = 1$, et vérifier s'il coïncide ou non avec la prédiction de Peyre. On a besoin d'un théorème d'Ono sur le nombre de Tamagawa d'un tore algébrique (théorème 2.6), lequel théorème a été démontré dans [On3] pour tout corps global, mais a cependant dû être corrigé par Oesterlé dans le cas de la caractéristique non nulle, en introduisant un facteur correctif dans la définition du nombre de Tamagawa. On a besoin également de résultats de Colliot-Thélène et Sansuc, démontrés pour tout corps global également, et permettant d'obtenir le lemme 2.13. On peut donc ici reprendre la ligne du calcul de Batyrev et Tschinkel, ce qui est fait dans la partie 6. Cependant le facteur correctif en caractéristique non nulle évoqué précédemment et le fait que la suite exacte mise en jeu lors du calcul de l'intégrale n'est plus exactement celle donnée par la résolution flasque font qu'on obtient, tous calculs faits, la constante prédite par Peyre, multipliée par l'invariant \mathcal{K}_T du tore T déjà évoqué.

Rappelons que la question de savoir si cet invariant vaut toujours 1, et donc si la constante obtenue est bien la constante annoncée, a reçu tout récemment une réponse négative de Colliot-Thélène et Suresh. Nous montrons pour notre part que cet invariant vaut 1 pour certaines classes de tores algébriques (proposition 2.15).

1.3 Quelques rappels et notations

Nous fixons ici quelques notations et définitions utilisées dans l'ensemble du texte.

On note $[E]$ le cardinal d'un ensemble fini E .

Si N est un \mathbf{Z} -module libre de type fini, on note $N^\vee = \text{Hom}(N, \mathbf{Z})$ son dual algébrique, $N_{\mathbf{R}} = N \otimes \mathbf{R}$ et $N_{\mathbf{C}} = N \otimes \mathbf{C}$.

Si U est un ouvert de $N_{\mathbf{R}}$ on note

$$\mathcal{T}(U) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbf{s} \in N_{\mathbf{C}}, \Re(\mathbf{s}) \in U\}$$

le domaine tubulaire au-dessus de U .

Un *cône* de $N_{\mathbf{R}}$ sera par convention un cône convexe polyédral rationnel de $N_{\mathbf{R}}$, i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs d'un nombre fini d'éléments de N . Si Λ est un cône de $N_{\mathbf{R}}$, son dual

$$\Lambda^* \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in N_{\mathbf{R}}^\vee, \forall \lambda \in \Lambda, \langle y, \lambda \rangle \geq 0\}$$

est encore un cône. L'intérieur relatif de Λ sera noté $\text{intrel}(\Lambda)$. On définit alors, pour tout \mathbf{s} élément de $\mathcal{T}(\text{intrel}(\Lambda))$,

$$\times_{N, \Lambda}(\mathbf{s}) = \int_{\Lambda^*} e^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle} dy,$$

où dy est la mesure de Lebesgue sur $N_{\mathbf{R}}^\vee$, normalisée de sorte que le réseau N^\vee soit de covolume 1. Cette fonction sera appelée *\times -fonction* du cône Λ . Notons que si \mathbf{s}_0 est un élément de $\mathcal{T}(\text{intrel}(\Lambda))$ on a

$$\times_{N, \Lambda}(\mathbf{s}_0) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{\text{rg}(N)} \times_{N, \Lambda}(s \mathbf{s}_0). \quad (1.3.1)$$

et que si $N' \subset N$ est un sous-module d'indice fini on a

$$\times_{N, \Lambda}(\mathbf{s}) = [N : N'] \times_{N', \Lambda}(\mathbf{s}). \quad (1.3.2)$$

On note \mathbf{S}_N le dual topologique de N , c'est-à-dire le groupe topologique $\text{Hom}(N, \mathbf{S}^1)$, qui est isomorphe à $(\mathbf{S}^1)^{\text{rg}(N)}$. Si n est un élément de N et \mathbf{z} un élément de \mathbf{S}_N , on note \mathbf{z}^n l'élément $\mathbf{z}(n) \in \mathbf{S}^1$. Si $d\mathbf{z}$ est une mesure de Haar sur \mathbf{S}_N , on a $\int_{\mathbf{S}_N} \mathbf{z}^n d\mathbf{z} = 0$ pour tout élément n non nul de N . On munira toujours \mathbf{S}_N de la mesure de Haar $d\mathbf{z}$ telle que $\int_{\mathbf{S}_N} d\mathbf{z} = 1$. En d'autres termes, dans toute expression du type

$$\int_{\mathbf{S}_N} \dots d\mathbf{z}$$

il sera toujours sous-entendu que $d\mathbf{z}$ est la mesure de Haar de volume total 1.

Lemme 1.4

Soient M un \mathbf{Z} -module libre de rang fini et N un sous-module de M d'indice fini. Soient $(n_j)_{j \in J}$ une famille finie d'éléments de N , et ϕ une fonction en $[J]$ variables continue sur \mathbf{S}^1 . On a alors

$$\int_{\mathbf{S}_N} \phi(\mathbf{z}^{n_j}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbf{S}_M} \phi(\mathbf{z}^{n_j}) d\mathbf{z}.$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser une base de M adaptée à N , et de remarquer que si k est un entier non nul on a pour toute fonction ψ continue sur \mathbf{S}^1

$$\int_{\mathbf{S}^1} \psi(z^k) dz = \int_{\mathbf{S}^1} \psi(z) dz,$$

où dz désigne la mesure uniforme sur le cercle. □

Pour tout réel α , on note $\mathbf{R}_{>\alpha}$ l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}, x > \alpha\}$. On définit de même de manière évidente les ensembles $\mathbf{R}_{\geq\alpha}$, $\mathbf{R}_{<\alpha}$ et $\mathbf{R}_{\leq\alpha}$.

On note, pour tout corps K , \overline{K} une clôture algébrique de K et K^s la clôture séparable de K dans \overline{K} .

On désigne par k un corps fini de cardinal q . Dans tout ce texte, on appellera *corps de fonctions* le corps de fonctions d'une courbe \mathcal{C} projective, lisse et géométriquement intègre définie sur un corps fini contenant k . Pour un tel corps de fonctions K on note q_K le cardinal du corps des constantes, et d_K son degré absolu, de sorte que $q_K = q^{d_K}$. Le corps des constantes de K , noté \mathbf{F}_K , est donc un corps fini à q_K éléments. Un tel corps de fonctions n'est rien d'autre qu'une extension finie séparable du corps des fractions rationnelles en une indéterminée $\mathbf{F}_K(T)$, avec \mathbf{F}_K algébriquement clos dans K .

Soit K un corps global, i.e. un corps de nombres ou un corps de fonctions. Dans tout ce texte, on dira être dans le cas arithmétique si le corps de base est un corps de nombres et dans le cas fonctionnel si c'est un corps de fonctions. Dans le cas arithmétique, on note $\text{disc}(K)$ le discriminant absolu de K et dans le cas fonctionnel on note g_K le genre de K .

On note \mathcal{P}_K l'ensemble des places de K , et $\mathcal{P}_{K,f}$ (respectivement $\mathcal{P}_{K,\infty}$) l'ensemble des places finies (respectivement infinies) de K . On identifiera un élément v de $\mathcal{P}_{K,f}$ à l'unique valuation normalisée qui le représente, i.e. l'unique élément de v dont le groupe de valeurs est \mathbf{Z} . Dans le cas fonctionnel, on a $\mathcal{P}_K = \mathcal{P}_{K,f}$ et \mathcal{P}_K s'identifie à l'ensemble des points fermés de la courbe \mathcal{C} .

Pour $v \in \mathcal{P}_K$, on note K_v le complété de K en v . Pour $v \in \mathcal{P}_{K,f}$, on note également \mathcal{O}_v l'anneau de valuation de v , et k_v le corps résiduel de v .

Dans le cas fonctionnel, on note aussi

$$f_v = [k_v : \mathbf{F}_K]$$

le degré résiduel $\| \cdot \|_v$.

Le cardinal de k_v sera noté q_v . Dans le cas fonctionnel, il est égal à $q_K^{f_v}$.

On normalise la mesure de Haar dx_v sur K_v de la manière suivante : si v est finie, on choisit dx_v de sorte qu'on ait la relation $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = 1$, si v est infinie et $K_v = \mathbf{R}$, dx_v est la mesure de Lebesgue usuelle et si K_v est isomorphe à \mathbf{C} on prend $dx_v = i dz d\bar{z}$.

Si S est un sous-ensemble fini de \mathcal{P}_K contenant $\mathcal{P}_{K,\infty}$, on note

$$\mathcal{O}_S = \bigcap_{v \notin S} \mathcal{O}_v$$

l'anneau des S -entiers.

Soit $v \in \mathcal{P}_{K,f}$. Pour $x \in K_v$ on note

$$|x|_v = q_v^{-v(x)}.$$

Si $v \in \mathcal{P}_K \setminus \mathcal{P}_{K,f}$, $|\cdot|_v$ désigne la valeur absolue usuelle sur \mathbf{R} si $K_v = \mathbf{R}$, et le carré de la valeur absolue usuelle sur \mathbf{C} si K_v est isomorphe à \mathbf{C} .

Avec ce choix de valeur absolues, pour tout $x \in K^*$ on a $|x|_v = 1$ pour tout $v \in \mathcal{P}_K$ sauf un nombre fini et la *formule du produit*

$$\prod_{v \in \mathcal{P}_K} |x|_v = 1.$$

La fonction zêta de Dedekind de K , notée ζ_K , est définie par la formule

$$\zeta_K(s) = \prod_{v \in \mathcal{P}_{K,f}} (1 - q_v^{-s})^{-1}$$

où s est une variable complexe. On dispose ([We1, VII, §6]) des résultats suivants sur le comportement analytique de ζ_K .

Dans le cas arithmétique, la série définissant $\zeta_K(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} tout entier, avec un pôle simple en $s = 1$.

Dans le cas fonctionnel, la série définissant $\zeta_K(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} tout entier, avec un pôle simple en $s = 1$, et sans zéro pour $\Re(s) \neq \frac{1}{2}$. De plus $\zeta_K(s)$ est une fraction rationnelle en q_K^{-s} , plus précisément on a

$$\zeta_K(s) = \frac{P(q_K^{-s})}{(1 - q_K^{-s})(1 - q_K^{1-s})}$$

où P est un polynôme (cf. [We1, VII §6, Thm 4]).

Comme nous allons utiliser la cohomologie galoisienne, nous effectuons quelques rappels sur les propriétés des groupes de cohomologie à la Tate, renvoyant à [Se1, Chapitre VIII] pour plus de détails. Soit G un groupe fini. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on peut définir sur la catégorie des G -modules un foncteur $\widehat{H}^n(G, \cdot)$, à valeurs dans la catégorie des \mathbf{Z} -modules, vérifiant entre autres les propriétés suivantes :

- Pour $n \geq 1$, ce foncteur coïncide avec le foncteur classique $H^n(G, \cdot)$, n -ème foncteur dérivé droit du foncteur «points fixes sous G ».
- Si M est un G -module et

$$N_G : m \mapsto \sum_{g \in G} g.m$$

est la norme, on a $\widehat{H}^0(G, M) = M^G/N_G M$.

- Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de G -modules, on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \widehat{H}^{n-1}(G, M'') \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^n(G, M') \longrightarrow \widehat{H}^n(G, M) \\ &\longrightarrow \widehat{H}^n(G, M'') \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^{n+1}(G, M') \longrightarrow \widehat{H}^{n+1}(G, M) \dots \end{aligned}$$

- Si M et M' sont des G -modules et m et n sont dans \mathbf{Z} , on a un cup-produit

$$\widehat{H}^m(G, M) \otimes \widehat{H}^n(G, M') \longrightarrow \widehat{H}^{m+n}(G, M \otimes M')$$

qui permet en particulier, pour tout n de \mathbf{Z} , d'identifier $\widehat{H}^{-n}(G, M)$ au dual de $\widehat{H}^n(G, M^\vee)$.

- Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\widehat{H}^n(G, M)$ est tué par la multiplication par $[G]$. Si de plus M est de type fini, $\widehat{H}^n(G, M)$ est fini.

Dans toute la suite, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, nous noterons $H^n(G, M)$ le groupe $\widehat{H}^n(G, M)$, sauf dans le cas où n vaut explicitement 0, où nous conserverons la notation $\widehat{H}^0(G, M)$ pour éviter toute confusion.

1.4 Hauteurs d'Arakelov, mesure de Tamagawa et constante de Peyre

Dans cette section, nous rappelons brièvement la construction des hauteurs d'Arakelov sur une variété projective définie sur un corps global à partir de métriques adéliques sur les fibrés en droites, renvoyant à [Pe3, chapitre 2]

pour plus de détails. Suivant Peyre ([Pe1] et [Pe2]), nous expliquons ensuite comment une métrique adélique sur le faisceau anticanonique d'une variété projective lisse V définie sur un corps global K induit une mesure sur l'espace adélique⁶ $V(\mathbf{A}_K)$ associé à V à partir de laquelle on peut définir la constante $C_{V,H}$ apparaissant dans les questions 1.1 et 1.3. Là encore, nous renvoyons à [Pe1] et [Pe2] pour plus de détails.

Soit V une variété projective, lisse et géométriquement intègre définie sur un corps global K , et soit L un fibré en droites sur V . Si v est une place de K , une *métrique v -adique* sur L est la donnée, pour tout point K_v -rationnel $x : \text{Spec}(K_v) \rightarrow V$, d'une norme v -adique $\| \cdot \|_{v,x}$ sur $L(x) = x^*L$, telle que pour tout ouvert de Zariski U de V et toute section s de L sur U , l'application

$$x \mapsto \| s(x) \|_{v,x}$$

est continue sur $U(K_v)$ pour la topologie v -adique. Si $v \in \mathcal{P}_{K,f}$, la donnée d'un modèle projectif \mathcal{V} de V sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ et d'un modèle \mathcal{L} de L sur \mathcal{V} définit de manière naturelle une telle métrique.

Une *métrique adélique* sur L est alors la donnée d'une famille $(\| \cdot \|_v)_{v \in \mathcal{P}_K}$ de métriques v -adiques sur L vérifiant la condition suivante : il existe un ensemble fini S de places de K contenant les places infinies, un modèle projectif \mathcal{V} de V sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_S)$, et un modèle \mathcal{L} de L sur \mathcal{V} , tels pour presque tout v de $\mathcal{P}_K \setminus S$ la métrique $\| \cdot \|_v$ est définie par le couple $(\mathcal{V} \times_{\mathcal{U}} \text{Spec}(\mathcal{O}_v), \mathcal{L} \times_{\mathcal{U}} \text{Spec}(\mathcal{O}_v))$.

Une *hauteur d'Arakelov* sur V est un couple $(L, (\| \cdot \|_v))$ où L est un fibré en droites sur V et $(\| \cdot \|_v)$ une métrique adélique sur L .

La *fonction hauteur* associée est l'application qui à $x \in V(K)$ associe

$$H_L(x) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} \| s(x) \|_{v,x}^{-1}$$

où s est une section locale de L non nulle en x , la formule du produit montrant que cette définition ne dépend pas du choix d'une telle section s .

Soit V une variété algébrique projective et lisse de dimension d définie sur K , et $(\| \cdot \|_v)_{v \in \mathcal{P}_K}$ une métrique sur le faisceau anticanonique.

Pour tout $v \in \mathcal{P}_K$, une telle métrique définit une mesure $\omega_{V,v}$ sur $V(K_v)$ (on rappelle qu'on a choisi une normalisation de la mesure de Haar sur K_v , cf. section 1.3).

⁶La définition générale de l'espace adélique associé à une variété algébrique est traitée dans [We2, I.2] et [Oe, I.3]. Ici, V étant projective, cet espace peut être défini comme étant l'espace topologique

$$\prod_{v \in \mathcal{P}_K} V(K_v)$$

muni de la topologie produit.

Nous supposons à présent que que la variété V vérifie les hypothèses énoncées dans [Pe2, 2.1] (ces hypothèses sont vérifiées par les variétés toriques). En particulier la classe du faisceau anticanonique de V appartient à l'intérieur du cône effectif, le cône effectif de V est polyédral rationnel, et le groupe $\text{Pic}(V^s)$ (où $V^s = V \times_K K^s$) est un \mathbf{Z} -module libre de rang fini.

Pour de telles variétés, la mesure de Tamagawa sur l'espace adélique $V(\mathbf{A}_K)$ est donnée par la formule⁷

$$\omega_V = C_{K,V} l_S(V) \prod_{v \in S} \omega_{V,v} \prod_{v \notin S} L_v(1, \text{Pic}(V^s))^{-1} \omega_{V,v},$$

où

$$C_{K,V} = \begin{cases} \text{disc}(K)^{-\frac{\dim(V)}{2}} & \text{dans le cas arithmétique} \\ q_K^{(1-g_K) \dim(V)} & \text{dans le cas fonctionnel,} \end{cases}$$

$$l_S(V) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg}(\text{Pic}(V^s))} \prod_{v \notin S} L_v(s, \text{Pic}(V^s)),$$

S est un sous-ensemble fini de \mathcal{P}_K contenant toutes les places ramifiées et toutes les places infinies et, pour $v \notin S$, $L_v(s, \text{Pic}(V^s))$ est le terme local de la fonction L associée à la représentation

$$\rho : \text{Gal}(K^s/K) \rightarrow \text{Aut}(\text{Pic}(V^s)).$$

Nous sommes à présent en mesure de définir la constante $C_{V,H}$ apparaissant dans les questions 1.1 et 1.3. Soit H une hauteur issue du faisceau anticanonique de V , définie à l'aide d'une métrique adélique. On définit alors trois constantes à partir de ces données.

L'invariant $\alpha^*(V)$ est défini comme

$$\alpha^*(V) = \times_{\text{Pic}(X_\Sigma), C_{\text{eff}}(V)}(\omega_V^{-1}) \quad (1.4.1)$$

où $C_{\text{eff}}(V)$ est le cône effectif de V .

L'invariant $\beta(V)$ est défini comme

$$\beta(V) = [H^1(K, \text{Pic}(V^s))].$$

Enfin on définit

$$\tau_H(V) = \omega_V \left(\overline{V(K)} \right),$$

en d'autre termes $\tau_H(V)$ est le volume pour la mesure ω_V de l'adhérence de l'ensemble des points rationnels de V dans l'espace adélique $V(\mathbf{A}_K)$.

⁷Un des points importants de la construction est de montrer la convergence du produit !

La constante $C_{V,H}$ est alors égale par définition à

$$C_{V,H} = \alpha^*(V) \beta(V) \tau_H(V).$$

Soulignons que la nécessité d'introduire la constante $\beta(V)$ a été mise en évidence par le résultat de Batyrev et Tschinkel sur les variétés toriques.

2 Tores algébriques

2.1 Quelques rappels

Soit K un corps quelconque. Un groupe algébrique T défini sur K est un *tore algébrique* (de dimension d) s'il existe un isomorphisme de K^s -groupes algébriques

$$T_{K^s} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{G}_{m,K^s})^d.$$

On note $X(T)$ le groupe des caractères de T , i.e. le groupe des morphismes de K^s -groupes algébrique de T_{K^s} vers \mathbf{G}_{m,K^s} . C'est un \mathbf{Z} -module libre de rang d , sur lequel le groupe $\text{Gal}(K^s/K)$ agit continûment, et qui dépend fonctoriellement de T .

Par [On2, Proposition 1.2.1] il existe une extension galoisienne finie L de K qui déploie T , en d'autres termes on a un isomorphisme de L -groupes algébriques

$$T_L \xrightarrow{\sim} (\mathbf{G}_{m,L})^d.$$

et l'action de $\text{Gal}(K^s/K)$ sur $X(T)$ se factorise à travers $\text{Gal}(L/K)$. En fait le foncteur qui à un tore algébrique T associe $X(T)$ définit une équivalence entre la catégorie des tores algébriques définis sur K et la catégorie des modules libres de rang fini muni d'une action continue de $\text{Gal}(K^s/K)$. Si L/K est finie galoisienne, cette équivalence induit une équivalence entre la catégorie des tores algébriques définis sur K et déployés par L et la catégorie des $\text{Gal}(L/K)$ -modules libres de rang fini.

Si T est un tore algébrique déployé par une extension finie galoisienne de groupe G , le groupe $T(K) = T(L)^G$ des points K -rationnels de T s'identifie canoniquement à

$$\text{Hom}_G(X(T), L^*) = (X(T)^\vee \otimes L^*)^G.$$

Exemples : Un exemple immédiat de tore algébrique est fourni par les tores déployés, c'est-à-dire les groupes algébriques K -isomorphes à un produit de copies de $\mathbf{G}_{m,K}$.

Un autre exemple, important pour la suite, est donné par la situation suivante : soit K_0/K une extension finie séparable, et L/K une extension

finie galoisienne de groupe G contenant K_0 . Soit G_0 le groupe de Galois de L/K_0 . Au G -module de permutation $\mathbf{Z}[G/G_0]$ correspond, par l'équivalence de catégories ci-dessus, la *restriction à la Weil* de K_0 à K de \mathbf{G}_m , notée $\text{Res}_{K_0/K} \mathbf{G}_m$. En particulier on a la propriété

$$(\text{Res}_{K_0/K} \mathbf{G}_m)(K) = (K_0)^* .$$

Un tore algébrique sur K est dit *quasi-déployé* s'il est isomorphe sur K à un produit de tores du type $\text{Res}_{K_0/K} \mathbf{G}_m$. Un tore algébrique sur K , déployé par L , est quasi-déployé si et seulement si son groupe des caractères est un G -module de permutation, c'est-à-dire possède une \mathbf{Z} -base stable sous l'action de G .

En fait dans la situation ci-dessus, pour tout tore algébrique T défini sur K_0 , on peut définir la restriction à la Weil de K_0 à K de T (cf. [On2, §1.4]), qui est un tore algébrique défini sur K vérifiant en particulier

$$(\text{Res}_{K_0/K} T)(K) = T(K_0).$$

Par la suite seul le cas $T = \mathbf{G}_m$ nous sera utile.

2.2 L'espace adélique associé à un tore algébrique

Soit K un corps global. On note $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$ le groupe des idèles de K , muni de la topologie adélique classique, qui en fait un groupe topologique abélien localement compact. On a une injection diagonale $\mathbf{G}_m(K) \hookrightarrow \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$ qui identifie $\mathbf{G}_m(K)$ à un sous-groupe discret de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$.

Pour tout $v \in \mathcal{P}_K$, on note abusivement $\mathbf{G}_m(\mathcal{O}_v)$ le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}_m(K_v) = K_v^*$. On a donc

$$\mathbf{G}_m(\mathcal{O}_v) = \begin{cases} \mathcal{O}_v^* & \text{si } v \text{ est finie,} \\ \{1, -1\} & \text{si } K_v = \mathbf{R}, \\ \mathbf{S}^1 & \text{si } K_v \text{ est isomorphe à } \mathbf{C}. \end{cases}$$

Soit

$$\mathbf{K}(\mathbf{G}_m) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} \mathbf{G}_m(\mathcal{O}_v),$$

c'est le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$.

On a un morphisme de valuation

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_v) &\longmapsto \sum_{v \in \mathcal{P}_K} \log |x_v|_v . \end{aligned}$$

Dans le cas arithmétique, ce morphisme est surjectif, car il l'est déjà en restriction à $\mathbf{G}_m(K_v)$ si v est infinie. On note alors ce morphisme \deg_K .

Dans le cas fonctionnel, le morphisme de valuation est proportionnel au morphisme

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ (x_v) &\longmapsto \sum_{v \in \mathcal{P}_K} f_v v(x) \end{aligned}$$

et c'est ce dernier morphisme que l'on note \deg_K . Par [We1, VII §5, Cor 6], \deg_K est alors surjectif.

Dans les deux cas, le noyau de \deg_K contient $\mathbf{G}_m(K)$ (par la formule du produit) et $\mathbf{K}(\mathbf{G}_m)$. Il sera noté $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)^1$.

Si L/K est une extension finie séparable, $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)$ s'injecte naturellement dans $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)$.

Dans le cas arithmétique, on a la relation

$$\deg_{L|\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)} = [L : K] \deg_K. \quad (2.2.1)$$

Dans le cas fonctionnel, on a la relation

$$d_L \deg_{L|\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)} = d_K [L : K] \deg_K, \quad (2.2.2)$$

où l'on rappelle que q^{d_L} et q^{d_K} représentent les cardinaux des corps des constantes des corps de fonctions L et K respectivement.

Si L/K est une extension galoisienne de groupe G , G agit sur $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)$ et on a

$$\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)^G = \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K).$$

On note $C_K = \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K)/\mathbf{G}_m(K)$ le groupe des classes d'idèles de K .

Nous décrivons maintenant la généralisation de ces notions à un tore algébrique T quelconque. Bien entendu pour $T = \mathbf{G}_m$ on retrouvera les définitions précédentes. La construction de l'espace adélique associé à un tore algébrique T est en fait un cas particulier de la construction générale de l'espace adélique associé à une variété algébrique définie sur K (cf. [We2, I.2] et [Oe, I.3]). Elle peut se faire de la façon suivante.

Pour toute place v de K , $T(K_v)$ est muni naturellement d'une structure de groupe topologique abélien localement compact. On désigne alors (abusivement) par $T(\mathcal{O}_v)$ le sous-groupe compact maximal de $T(K_v)$. En fait, si S désigne l'ensemble des places de K infinies ou ramifiées dans L et S_L l'ensemble des places de L divisant une place de S , le schéma en groupes

$$\mathcal{T} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{S_L} \otimes X(T))^G$$

est un modèle de T sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_S)$, et pour toutes les places v en dehors de S on a $T(\mathcal{O}_v) = \mathcal{T}(\mathcal{O}_v)$, d'où la notation adoptée.

L'espace adélique associé à T peut alors être décrit ensemblistement par

$$T(\mathbf{A}_K) = \left\{ (x_v) \in \prod_v T(K_v), x_v \in T(\mathcal{O}_v) \text{ pour presque tout } v \in \mathcal{P}_K \right\}.$$

C'est un groupe abélien, que l'on munit de la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les sous-ensembles du type

$$\prod_{v \in S} U_v \times \prod_{v \notin S} T(\mathcal{O}_v)$$

où S est un ensemble fini de places de K et, pour $v \in S$, U_v est un ouvert de $T(K_v)$. Cette topologie, qui est plus fine que la topologie issue de la topologie produit sur $\prod T(K_v)$, fait de $T(\mathbf{A}_K)$ un groupe topologique localement compact. On peut alors identifier $T(K)$ à un sous-groupe discret de $T(\mathbf{A}_K)$.

On note

$$\mathbf{K}(T) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} T(\mathcal{O}_v),$$

c'est le sous-groupe compact maximal de $T(\mathbf{A}_K)$.

Si L est une extension finie galoisienne de K déployant T , de groupe de Galois G , on dispose également, comme pour $T(K)$, d'une description simple de tous ces groupes en termes du G -module $X(T)$, pratique pour manipuler des suites exactes. Pour toute place v de K , on a une identification naturelle

$$T(K_v) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(X(T), (L \otimes_K K_v)^*).$$

Rappelons que $(L \otimes_K K_v)^*$ s'identifie à $\prod_{\mathcal{V}|v} L_{\mathcal{V}}^*$. Dans le cas où v est finie, le sous-groupe $T(\mathcal{O}_v)$ s'identifie alors à

$$\text{Hom}_G \left(X(T), \prod_{\mathcal{V}|v} \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^* \right).$$

Si on choisit une place \mathcal{V} divisant v et si on note G_v son groupe de décomposition on a les identifications

$$T(K_v) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{G_v}(X(T), L_{\mathcal{V}}^*)$$

et

$$T(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{G_v}(X(T), \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^*).$$

On peut identifier $T(\mathbf{A}_K)$ au groupe

$$\mathrm{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L))$$

muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)$, et $\mathbf{K}(T)$ au groupe

$$\mathrm{Hom}_G(X(T), \mathbf{K}(\mathbf{G}_{m,L})).$$

Exemple : Soit K_0 une extension finie séparable de K , et $T = \mathrm{Res}_{K_0/K} \mathbf{G}_m$. Alors $T(\mathbf{A}_K)$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_0})$.

2.3 Le degré

Soit T un tore algébrique défini sur un corps global K , déployé par une extension finie galoisienne L de groupe de Galois G . Soit $m \in X(T)^G$. L'évaluation en m induit un morphisme continu

$$m : T(\mathbf{A}_K) = \mathrm{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)) \rightarrow \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)^G = \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_K).$$

Plus généralement tout morphisme de K -tores algébriques induit un morphisme continu sur les espaces adéliques associés. Le morphisme défini ci-dessus correspond au morphisme $T \rightarrow \mathbf{G}_m$ dual du morphisme de G -modules $\mathbf{Z} \rightarrow X(T)$ qui envoie 1 sur m .

Par composition de m avec deg_K on obtient un morphisme continu

$$\tilde{m} : T(\mathbf{A}_K) \rightarrow \mathbf{R}$$

dans le cas arithmétique et

$$\tilde{m} : T(\mathbf{A}_K) \rightarrow \mathbf{Z}$$

dans le cas fonctionnel. On note deg_T le morphisme défini par

$$\begin{aligned} T(\mathbf{A}_K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T)^G, \mathbf{R}) \\ x &\longmapsto (m \mapsto \tilde{m}(x)) \end{aligned}$$

dans le cas arithmétique, et

$$\begin{aligned} T(\mathbf{A}_K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T)^G, \mathbf{Z}) \\ x &\longmapsto (m \mapsto \tilde{m}(x)) \end{aligned}$$

dans le cas fonctionnel. Ces morphismes sont évidemment indépendants du choix de L . Dans le cas fonctionnel, le morphisme deg_T n'est autre que le morphisme θ défini par Oesterlé dans [Oe, I.5.5], composé avec \log_{q_K} .

Il est clair que le degré est fonctoriel dans le sens suivant : si

$$\tilde{f} : X(T_2) \longrightarrow X(T_1)$$

est un morphisme de G -modules, induisant un morphisme

$$f : T_1 \longrightarrow T_2$$

de tores algébriques, ainsi que des morphismes

$$\bar{f} : (X(T_1)^G)_{\mathbf{R}}^{\vee} \longrightarrow (X(T_2)^G)_{\mathbf{R}}^{\vee},$$

dans le cas arithmétique et

$$\bar{f} : (X(T_1)^G)^{\vee} \longrightarrow (X(T_2)^G)^{\vee},$$

dans le cas fonctionnel, on a $\deg_{T_2} \circ f = \bar{f} \circ \deg_{T_1}$.

Le noyau de \deg_T sera noté $T(\mathbf{A}_K)^1$. Par la formule du produit, $T(K)$ est contenu dans $T(\mathbf{A}_K)^1$. Par ailleurs il est clair que $T(\mathbf{A}_K)^1$ contient $\mathbf{K}(T)$. En outre, $T(\mathbf{A}_K)^1$ s'identifie au groupe

$$T(\mathbf{A}_K)^1 = \text{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)^1).$$

Dans le cas arithmétique, \deg_T est surjectif, car il l'est déjà en restriction à $T(K_v)$ si v est infinie. Dans le cas fonctionnel, ce n'est plus nécessairement le cas, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.1

Soit K un corps de fonctions. Soit K_0 une extension finie séparable de K contenue dans L , T le tore $\text{Res}_{K_0/K} \mathbf{G}_m$ et $G_0 = \text{Gal}(K/K_0)$. Soit d_0 tel que $q_{K_0} = q_K^{d_0}$, de sorte que $d_0 = \frac{d_{K_0}}{d_K}$. Alors, via les identifications naturelles $T(\mathbf{A}_K) = \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_0})$ et $(X(T)^G)^{\vee} = \mathbf{Z}$, le morphisme \deg_T n'est autre que le morphisme $d_0 \deg_{K_0}$, et son image est $d_0 \mathbf{Z}$. En particulier \deg_T n'est pas nécessairement surjectif.

Démonstration : Soit $t \in \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_0})$. Via l'identification

$$T(\mathbf{A}_K) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_0}),$$

il lui correspond l'élément de

$$T(\mathbf{A}_K) = \text{Hom}_G(\mathbf{Z}[G/G_0], \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L))$$

qui envoie G_0 sur t . Le \mathbf{Z} -module $\mathbf{Z}[G/G_0]^G$ est de rang 1 engendré par $\sum_{g \in G/G_0} g G_0$. Le morphisme $\deg_T(t)$ envoie alors $\sum_{g \in G/G_0} g G_0$ sur

$$\begin{aligned} \deg_K \left(\prod_{g \in G/G_0} g t \right) &= \frac{d_L}{d_K [L : K]} \sum_{g \in G/G_0} \deg_L(g t) \\ &= \frac{d_L [G]}{d_K [L : K] [G_0]} \deg_L(t) \\ &= \frac{d_L}{d_K [L : K_0]} \deg_L(t) \\ &= d_0 \frac{d_L}{d_{K_0} [L : K_0]} \deg_L(t) \\ &= d_0 \deg_{K_0}(t), \end{aligned}$$

la première et la dernière égalité venant de la formule (2.2.2). Le fait que l'image est $d_0 \mathbf{Z}$ découle alors de l'existence de diviseurs de degré 1 ([We1, VII, § 5, Cor 6]). \square

Dans le cas fonctionnel, on note \mathcal{D}_T l'image du morphisme \deg_T .

Lemme 2.2

Soit M un G -module libre de rang fini. Alors la flèche naturelle

$$(M^\vee)^G \longrightarrow (M^G)^\vee$$

est une injection de conoyau fini.

Démonstration : Le quotient M/M^G étant sans torsion, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow (M/M^G)^\vee \rightarrow M^\vee \rightarrow (M^G)^\vee \rightarrow 0$$

En prenant les G -invariants, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \left((M/M^G)^\vee \right)^G \rightarrow (M^\vee)^G \rightarrow (M^G)^\vee \rightarrow H^1(G, (M/M^G)^\vee)$$

dont l'avant-dernière flèche est la flèche de l'énoncé. Son conoyau est donc fini. Soit ϕ un élément de $(M^\vee)^G = \text{Hom}_G(M, \mathbf{Z})$ dont la restriction à M^G est nulle. Pour tout $x \in M$, $N_G x$ est un élément de M^G et on a

$$0 = \phi(N_G x) = [G] \phi(x)$$

donc $\phi(x) = 0$. Ainsi ϕ est nulle, d'où l'injectivité (en d'autres termes, le dual d'un G -module anisotrope est anisotrope). \square

Dans le cas fonctionnel, considérons maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)^1 \longrightarrow \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L) \xrightarrow{\deg_L} \mathbf{Z} \longrightarrow 0,$$

tensorisons par $X(T)^\vee$ et prenons les G -invariants, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)^1 \longrightarrow T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow (X(T)^\vee)^G$$

et donc un morphisme $T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow (X(T)^\vee)^G$, de noyau $T(\mathbf{A}_K)^1$, noté $\deg_{T,L}$. Si on note encore $\deg_{T,L}$ le morphisme obtenu par composition avec l'injection naturelle $(X(T)^\vee)^G \hookrightarrow (X(T)^G)^\vee$, on a la relation

$$d_L \deg_{T,L} = d_K [L : K] \deg_T.$$

Contrairement au morphisme \deg_T , le morphisme $\deg_{T,L}$ dépend du choix de l'extension déployant T .

Dans le cas arithmétique, on peut de même définir un morphisme

$$\deg_{T,L} : T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow (X(T)^\vee)_{\mathbf{R}}^G.$$

Proposition 2.3

Le quotient $T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)$ est compact. Dans le cas fonctionnel, le quotient $T(\mathbf{A}_K)^1/\mathbf{K}(T).T(K)$ est fini.

Démonstration : La première assertion est un cas particulier de [Oe, IV.1.3.], où elle est montrée plus généralement pour un groupe résoluble. Nous donnons pour notre part une preuve de ce résultat pour un tore algébrique défini sur un corps global à la section 2.6.

La compacité de $T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)$ entraîne celle de $T(\mathbf{A}_K)^1/\mathbf{K}(T).T(K)$, et donc la finitude de ce dernier groupe dans le cas fonctionnel car il est alors également discret. Cependant cette finitude peut se retrouver directement, en remarquant qu'on a

$$(T(\mathbf{A}_L)^1)^G = T(\mathbf{A}_K)^1,$$

d'où une injection

$$T(\mathbf{A}_K)^1/(\mathbf{K}(T_L).T(L))^G \hookrightarrow (T(\mathbf{A}_L)^1/\mathbf{K}(T_L).T(L))^G.$$

Or $T(\mathbf{A}_L)^1/\mathbf{K}(T_L).T(L)$ n'est autre que $(\text{Pic}^0(\mathcal{C}))^{\dim(T)}$, où \mathcal{C} est la courbe projective et lisse définie sur \mathbf{F}_L et de corps de fonctions L . On en déduit que le groupe

$$T(\mathbf{A}_K)^1/(\mathbf{K}(T_L).T(L))^G$$

est fini. Maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{K}(T).T(K) \longrightarrow (\mathbf{K}(T_L).T(L))^G \longrightarrow H^1(G, \mathbf{K}(T_L) \cap T(L))$$

et la finitude de $\mathbf{K}(T_L) \cap T(L)$, donc de $H^1(G, \mathbf{K}(T_L) \cap T(L))$, montre la finitude de $T(\mathbf{A}_K)^1/\mathbf{K}(T).T(K)$. \square

Proposition 2.4

Si K est un corps de fonctions, le conoyau de deg_T est fini.

Démonstration : C'est un cas particulier de [Oe, I.5.6.b]. Nous redémontrons le résultat pour les tores à la section 2.6. \square

Dans le cas fonctionnel, on note C_T le conoyau de deg_T .

Nous posons

$$T(C_K) = \text{Hom}_G(X(T), C_L) = T(C_L)^G.$$

Le groupe $T(\mathbf{A}_K)/T(K)$ s'injecte dans $T(C_K)$ mais ne lui est en général pas égal, le défaut est mesuré par le groupe de Tate-Shafarevich de T (voir la section 2.5).

Un cas important d'égalité se produit quand T est la restriction à la Weil de K_0 à K de \mathbf{G}_m , pour K_0 extension séparable de K . Dans ce cas, $T(C_K)$ s'identifie à C_{K_0} . En effet, par le théorème de Hilbert 90,

$$C_{K_0} = C_L^{\text{Gal}(L/K_0)}.$$

Bien entendu l'isomorphisme

$$T(C_K) \xrightarrow{\sim} T(\mathbf{A}_K)/T(K)$$

est encore valable si T est quasi-déployé.

2.4 La dualité de Nakayama

Soit K un corps global et T un tore algébrique sur K , déployé par une extension galoisienne L de groupe G . La dualité de Nakayama donne un moyen simple de calculer la cohomologie du G -module $T(C_L)$. Le résultat suivant est une conséquence de [Na, Theorem 3]. Rappelons que les groupes de cohomologie considérés sont les groupes de cohomologie à la Tate (cf. les rappels de la section 1.3). La théorie du corps de classe donne l'existence d'un élément distingué α de $H^2(G, C_L)$, engendrant $H^2(G, C_L)$, et appelé classe fondamentale.

Théorème 2.5 (Nakayama)

Le cup-produit par α induit pour tout $n \in \mathbf{Z}$ un isomorphisme

$$H^n(G, X(T)^\vee) \xrightarrow{\sim} H^{n+2}(G, T(C_L)).$$

En particulier les groupes de cohomologie $H^n(G, T(C_L))$ sont finis pour tout n .

Rappelons que pour tout n le groupe fini $H^n(G, X(T)^\vee)$ s'identifie canoniquement au dual du groupe fini $H^{-n}(G, X(T))$.

2.5 Mesure adélique et nombre de Tamagawa d'un tore algébrique

Si X est une variété algébrique lisse définie sur un corps global K , on a déjà rappelé qu'une métrisation du faisceau anticanonique de X permet, pour tout $v \in \mathcal{P}_K$, de construire une mesure $\omega_{X,v}$ sur l'espace analytique $X(K_v)$. Rappelons aussi que tout choix d'une section globale ω partout non nulle du faisceau anticanonique en fournit une métrisation par la formule

$$\forall x \in X(K_v), \quad \forall s \in \omega_X^{-1}(x), \quad \|s\|_v = \frac{|s(x)|_v}{|\omega(x)|_v},$$

le choix de la valeur absolue $|\cdot|_v$ sur $\omega_X^{-1}(x)$ étant arbitraire. Si $X = G$ est un groupe algébrique et ω est de plus choisie G -invariante à gauche, les mesures locales obtenues sont des mesures de Haar à gauche.

Ono, dans l'article [On2], définit le nombre de Tamagawa d'un tore algébrique défini sur un corps global. Dans [On3], il établit une relation simple entre ce nombre de Tamagawa et certains invariants de type cohomologique du tore (cf. le théorème 2.6 ci-dessous), montrant en particulier la rationalité du nombre de Tamagawa (chose nullement évidente sur la définition initiale). Cette relation joue un rôle important dans l'interprétation du terme principal des fonctions zêta des hauteurs des variétés toriques, dans le cas arithmétique comme dans le cas fonctionnel. Cependant, dans le cas des corps de fonctions, il s'est avéré que la définition du nombre de Tamagawa d'un tore algébrique donnée dans [On2] était incompatible avec la relation du théorème 2.6. Par la suite Oesterlé a montré dans [Oe] qu'en introduisant dans la définition d'Ono un facteur correctif égal au cardinal du conoyau du degré (ce que nous avons noté \mathcal{C}_T), la relation du théorème 2.6 devenait correcte. Nous rappelons dans cette section la construction du nombre de Tamagawa d'un tore algébrique, et le résultat principal de [On3].

Soit T un tore algébrique de dimension d , défini sur un corps global K . Soit Ω_T une d -forme différentielle K -rationnelle T -invariante sur T (une telle

forme est uniquement déterminée à multiplication par un élément de K^* près). Cette forme induit donc pour tout $v \in \mathcal{P}_K$ une mesure de Haar $\omega_{T,v}$ sur $T(K_v)$.

On suppose T déployé par une extension galoisienne L de groupe de Galois G . L'action de G sur $X(T)$ fournit une représentation

$$\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(X(T)_{\mathbf{C}}).$$

Soit v une place finie. On suppose d'abord v non ramifiée dans L/K . Soit Fr_v un frobenius local (sa classe de conjugaison dans G ne dépend que de v), on pose pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 0$

$$L_v(s, T) = \frac{1}{\det(1 - \rho(\text{Fr}_v) q_v^{-s})}.$$

Si v est ramifiée, on pose

$$L_v(s, T) = \frac{1}{\det(1 - \rho_v(\text{Fr}_v) q_v^{-s})}$$

où Fr_v est un frobenius local et, si on note G_v un groupe de décomposition et I_v le groupe d'inertie correspondant, ρ_v est la représentation

$$\rho_v : G_v/I_v \rightarrow \text{Aut}(X(T)_{\mathbf{C}}^{I_v})$$

déduite de ρ . Les fonctions $L_v(s, T)$ ne dépendent pas du choix de l'extension L déployant T . On a alors pour presque toute place v finie la relation

$$\int_{T(\mathcal{O}_v)} \omega_{T,v} = \frac{1}{L_v(1, T)}$$

Posons, si v est finie,

$$d\mu_v = \frac{1}{L_v(1, T)} \omega_{T,v},$$

et si v est infinie

$$d\mu_v = \omega_{T,v}.$$

On aura alors

$$\int_{T(\mathcal{O}_v)} d\mu_v = 1$$

pour presque tout v .

Posons

$$C_K = \begin{cases} \text{disc}(K)^{-\frac{d}{2}} & \text{dans le cas arithmétique} \\ q_K^{(1-g_K)d} & \text{dans le cas fonctionnel.} \end{cases}$$

On peut alors définir une mesure de Haar ω_T sur $T(\mathbf{A}_K)$ en posant

$$\omega_T = C_K \prod_{v \in \mathcal{P}_K} d\mu_v.$$

Par la formule du produit, ω_T ne dépend pas du choix de la forme Ω_T .

À partir de ω_T , on construit une mesure de Haar sur $T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)$ de la manière suivante.

Dans le cas arithmétique, soit dt la mesure de Lebesgue sur $(X(T)^G)_{\mathbf{R}}^{\vee}$, normalisée par le réseau $(X(T)^G)^{\vee}$. Rappelons que \deg_T induit un isomorphisme de groupes topologiques

$$T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1 \xrightarrow{\sim} (X(T)^G)_{\mathbf{R}}^{\vee}.$$

Soit alors ω_T^1 la mesure sur $T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)$ définie par la relation

$$\widetilde{\omega}_T = \omega_T^1 dt$$

où $\widetilde{\omega}_T$ désigne la mesure quotient sur $T(\mathbf{A}_K)/T(K)$ induite par ω_T , $T(K)$ étant muni de la mesure discrète.

Dans le cas fonctionnel, comme $T(\mathbf{A}_K)^1$ est ouvert dans $T(\mathbf{A}_K)$, la restriction de ω_T à $T(\mathbf{A}_K)^1$ fournit une mesure de Haar sur $T(\mathbf{A}_K)^1$. Soit ω_T^1 la mesure quotient sur $T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)$,

On pose, dans le cas arithmétique,

$$b(T) = \int_{T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)} \omega_T^1$$

et dans le cas fonctionnel

$$b(T) = \log(q_K)^{-r} \int_{T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)} \omega_T^1.$$

(rappelons que $T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)$ est compact), où r désigne le rang de $X(T)^G$.

On définit aussi, si S est un ensemble fini de places de K contenant les places infinies,

$$\omega_{T,S} = C_K \prod_{v \in S} \omega_{T,v} \prod_{v \notin S} d\mu_v$$

ainsi que

$$b_S(T) = \int_{T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)} \omega_{T,S}^1$$

dans le cas arithmétique et

$$b_S(T) = \log(q_K)^{-r} \int_{T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)} \omega_{T,S}^1$$

dans le cas fonctionnel.

Notons qu'en particulier

$$\int_{\mathbf{K}(T)} \omega_{T,S} = C_K \prod_{v \in S} \int_{T(\mathcal{O}_v)} \omega_{T,v} \prod_{v \notin S} \int_{T(\mathcal{O}_v)} d\mu_v$$

est non nul.

Soit à présent

$$L(s, T) = \prod_{v \in \mathcal{P}_{K,f}} L_v(s, T).$$

Ce produit eulérien converge absolument pour $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe avec un pôle d'ordre r en $s = 1$. On pose

$$l(T) = \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1)^r L(s, T).$$

Si S est un ensemble fini de places de K contenant les places infinies, on pose également

$$L_S(s, T) = \prod_{v \notin S} L_v(s, T)$$

et

$$l_S(T) = \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1)^r L_S(s, T).$$

On pose alors, suivant Ono,

$$\tau(T) = \frac{b(T)}{l(T)}$$

dans le cas arithmétique et, suivant Oesterlé ([Oe, I.5.9 et 5.12.]),

$$\tau(T) = \frac{1}{[\mathcal{C}_T]} \frac{b(T)}{l(T)}.$$

dans le cas fonctionnel. Le nombre $\tau(T)$ est appelé *nombre de Tamagawa* du tore algébrique T . Pour tout ensemble fini S de places de K contenant les places infinies, il est également égal à

$$\frac{b_S(T)}{l_S(T)}$$

dans le cas arithmétique et

$$\frac{1}{[\mathcal{C}_T]} \frac{b_S(T)}{l_S(T)}$$

dans le cas fonctionnel.

Soit

$$h(T) = [H^1(G, X(T))],$$

$$\text{III}(T) = \text{Ker} (H^1(G, T(L)) \rightarrow H^1(G, T(\mathbf{A}_L)))$$

et

$$i(T) = [\text{III}(T)].$$

Ces définitions ne dépendent pas du choix de l'extension déployant T . Notons que la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte de G -modules

$$0 \longrightarrow X(T)^\vee \otimes \mathbf{G}_m(L) \longrightarrow X(T)^\vee \otimes \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L) \longrightarrow X(T)^\vee \otimes C_L \longrightarrow 0$$

fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow T(K) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow T(C_K) \longrightarrow H^1(G, T(L)) \longrightarrow H^1(G, T(\mathbf{A}_L))$$

et donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)/T(K) \longrightarrow T(C_K) \longrightarrow \text{III}(T) \longrightarrow 0.$$

L'objet de l'article [On3], corrigé par Oesterlé dans le cas fonctionnel, est la démonstration du

Théorème 2.6 (Ono, Oesterlé)

On a la relation

$$\tau(T) = \frac{h(T)}{i(T)}.$$

Ce résultat, comme déjà indiqué, sera utile lors de l'interprétation du terme principal de la fonction zêta des hauteurs.

2.6 Résolution flasque d'un tore algébrique et applications

La notion de résolution flasque d'un tore algébrique a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTSa] en vue de l'étude de la R-équivalence sur les tores.

Soit T un tore algébrique défini sur un corps K , déployé par une extension L de groupe de Galois G . Rappelons qu'un G -module M libre de rang fini est dit *flasque* si pour tout sous-groupe H de G on a $H^{-1}(H, M) = 0$. Par [CTSa, lemme 3, page 181] il existe une suite exacte de G -modules de rang fini

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \tag{2.6.1}$$

où P est de permutation et Q est flasque. Soit T_P le tore algébrique associé au G -module P . C'est un tore quasi-déployé. Soit T_Q le tore algébrique associé au G -module Q .

Nous avons d'abord des résultats n'utilisant pas le caractère flasque de Q . Rappelons que les lemmes 2.7 et 2.8 sont des cas particuliers de résultats d'Oesterlé.

Lemme 2.7

Supposons que K est un corps de fonctions. Le morphisme

$$\deg_{T,L} : T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow (X(T)^\vee)^G$$

est de conoyau fini, et il en est de même du morphisme

$$\deg_T : T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow (X(T)^G)^\vee.$$

Démonstration : Le conoyau de la flèche $(P^\vee)^G \rightarrow (X(T)^\vee)^G$ est le groupe $H^1(G, Q^\vee)$ qui est fini (en fait nul car Q est flasque, mais la finitude suffit). Comme T_P est quasi-déployé, le morphisme $\deg_{T_P,L}$ est de conoyau fini. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T_P(\mathbf{A}_K) & \longrightarrow & T(\mathbf{A}_K) \\ \downarrow \deg_{T_P,L} & & \downarrow \deg_{T,L} \\ (P^\vee)^G & \longrightarrow & (X(T)^\vee)^G \end{array}$$

permet de conclure pour $\deg_{T,L}$. Or on a la formule

$$d_L \deg_{T,L} = d_K [L : K] \deg_T,$$

et $(X(T)^\vee)^G$ est un sous-module d'indice fini de $(X(T)^G)^\vee$. On en déduit le résultat pour \deg_T . \square

Lemme 2.8

Pour tout corps global K , le groupe $T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)$ est compact.

Démonstration : Nous notons $C_L^1 = \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)^1/\mathbf{G}_m(L)$. C'est un groupe compact par [We1, IV§4, Theorem 6]. Soit

$$T(C_K)^1 = \text{Hom}_G(X(T), C_L^1).$$

Si T est quasi-déployé, on a

$$T(C_K)^1 \xrightarrow{\sim} T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)$$

car, par le théorème de Hilbert 90, si L/K_0 est galoisienne, on a

$$(C_L^1)^{\text{Gal}(K/K_0)} = C_{K_0}^1.$$

Ainsi $T(C_K)^1$ est encore un groupe compact. En général, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} T_P(\mathbf{A}_K)^1/T_P(K) & \longrightarrow & T(\mathbf{A}_K)^1/T(K) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ T_P(C_K)^1 & \longrightarrow & T(C_K)^1 \end{array}$$

d'après lequel il suffit de montrer que la flèche $T_P(C_K)^1 \rightarrow T(C_K)^1$ est de conoyau fini.

La suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^\vee \longrightarrow P^\vee \longrightarrow X(T)^\vee \longrightarrow 0$$

fournit la suite exacte

$$T_P(C_K)^1 \longrightarrow T(C_K)^1 \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L)^1).$$

et il suffit donc montrer la finitude de $H^1(G, T_Q(C_L)^1)$.

Pour cela, on utilise dans le cas fonctionnel la suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^\vee \otimes C_L^1 \longrightarrow Q^\vee \otimes C_L \xrightarrow{\text{Id} \otimes \text{deg}_L} Q^\vee \longrightarrow 0.$$

La suite exacte de cohomologie sous G associée fournit la suite exacte

$$T_Q(C_K) \longrightarrow (Q^\vee)^G \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L^1)) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L)).$$

Par dualité de Nakayama, $H^1(G, T_Q(C_L))$ est fini et la flèche

$$T_Q(C_K) \longrightarrow (Q^\vee)^G$$

n'est autre que la factorisation de $\text{deg}_{T_Q, L}$ par $T_Q(C_K)$, son conoyau est donc fini.

Dans le cas arithmétique, on utilise la suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^\vee \otimes C_L^1 \longrightarrow Q^\vee \otimes C_L \xrightarrow{\text{Id} \otimes \text{deg}_L} Q_{\mathbf{R}}^\vee \longrightarrow 0$$

et un argument strictement similaire (ici $\text{deg}_{T_Q, L}$ est d'ailleurs surjectif). \square

Soit v une place finie de K , \mathcal{V} une place de L au-dessus de v , et G_v le groupe de décomposition de \mathcal{V} .

Lemme 2.9 (Ono)

Soit $1 \rightarrow T'' \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow 1$ une suite exacte de tores. Si v est non ramifiée dans L/K , le morphisme

$$T'(\mathcal{O}_v) \longrightarrow T(\mathcal{O}_v)$$

est surjectif.

Démonstration : La preuve figure dans [On1, Lemma 4.2.1], nous la rappelons. On a

$$\begin{aligned} T(\mathcal{O}_v) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_v}(X(T), \mathcal{O}_v^*), \\ T'(\mathcal{O}_v) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_v}(X(T'), \mathcal{O}_v^*) \end{aligned}$$

et une suite exacte

$$T'(\mathcal{O}_v) \longrightarrow T(\mathcal{O}_v) \longrightarrow H^1(G_v, X(T'')^\vee \otimes \mathcal{O}_v^*).$$

Or, comme v est non ramifiée, \mathcal{O}_v^* est cohomologiquement trivial, et comme $X(T'')^\vee$ est sans torsion, d'après [Se1, IX, § 5, Corollaire], $X(T'')^\vee \otimes \mathcal{O}_v^*$ est encore cohomologiquement trivial, d'où le résultat. \square

Le résultat suivant est dû à Draxl ([Dr, page 449]).

Proposition 2.10 (Draxl)

Le morphisme valuation induit une injection de groupes

$$T(K_v)/T(\mathcal{O}_v) \hookrightarrow (X(T)^\vee)^{G_v}$$

de conoyau fini, qui est un isomorphisme si v est non ramifiée dans L/K .

Nous exploitons à présent le caractère flasque de Q .

Proposition 2.11

Si v est finie et non ramifiée dans L/K , le morphisme

$$T_P(K_v) \longrightarrow T(K_v)$$

est surjectif.

Démonstration : Le conoyau du morphisme en question est

$$H^1(G_v, Q^\vee \otimes K_v^*) = H^1(G_v, T_Q(K_v)).$$

La nullité de ce groupe découle de l'application de la dualité de Nakayama aux corps locaux : on a des isomorphismes

$$H^1(G_v, Q^\vee \otimes K_v^*) \xrightarrow{\sim} H^{-1}(G_v, Q^\vee) \xrightarrow{\sim} H^1(G_v, Q^\vee).$$

Le premier isomorphisme est donné par la dualité de Nakayama et le deuxième par le fait que, v étant non ramifiée, G_v est cyclique. Le dernier groupe est nul car Q est flasque.

On peut se passer de la dualité de Nakayama en remarquant qu'en fait le résultat est valable pour toute résolution flasque d'un tore déployé par une extension L_1/K_1 de groupe de Galois \mathfrak{g} cyclique et même métacyclique⁸ (le corps de base K_1 étant quelconque). En effet dans ce cas par [CTSa, Proposition 2, p. 184] le tore T_Q est facteur direct d'un tore quasi-déployé. On a donc $H^1(\mathfrak{g}, T_Q(L_1)) = 0$ par le théorème de Hilbert 90. \square

Pour tout ensemble fini S de places de K contenant les places infinies, nous notons

$$T(\mathbf{A}_K)_S = T(\mathbf{A}_K) \bigcap \prod_{v \notin S} T(K_v).$$

D'après ce qui précède, si S contient les places ramifiées, le morphisme

$$T_P(\mathbf{A}_K)_S \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)_S$$

est surjectif.

Soit $\overline{T(K)}$ l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v \in \mathcal{P}_K} T(K_v)$ muni de la topologie produit et soit

$$A(T) = \left(\prod_{v \in \mathcal{P}_K} T(K_v) \right) / \overline{T(K)},$$

c'est le groupe d'obstruction à l'approximation faible. Comme T_P est quasi-déployé on a, par [Ha, p. 334], $A(T_P) = 0$.

Soit S un ensemble fini de places de K contenant les places infinies et les places ramifiées dans L/K . Le morphisme

$$T_P(\mathbf{A}_K)_S \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)_S$$

est continu pour la topologie produit, et surjectif. On en déduit que $\overline{T(K)}$ contient $T(\mathbf{A}_K)_S$. Si on désigne par $\overline{T(K)}^S$ l'adhérence de l'image de $T(K)$ dans $\prod_{v \in S} T(K_v)$, on a donc le résultat suivant.

Lemme 2.12

On a un scindage

$$\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K) = T(\mathbf{A}_K)_S \times \overline{T(K)}^S$$

⁸ayant tous ses Sylow cycliques

et les égalités

$$A(T) = T(\mathbf{A}_K) / \left(\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K) \right) = \left(\prod_{v \in S} T(K_v) \right) / \overline{T(K)}^S.$$

On a en fait le résultat suivant.

Lemme 2.13

Le conoyau du morphisme

$$T_P(\mathbf{A}_K) / T_P(K) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K) / T(K)$$

est exactement $A(T)$.

Dans le cas des corps de nombres, ce résultat est indiqué dans [BaTs1, Theorem 3.1.1].

Démonstration : Notons γ le morphisme $T_P(\mathbf{A}_K) \rightarrow T(\mathbf{A}_K)$ et $\bar{\gamma}$ le morphisme $T_P(\mathbf{A}_K) / T_P(K) \rightarrow T(\mathbf{A}_K) / T(K)$. En tensorisant le dual de la suite exacte (2.6.1) avec C_L et en prenant les G -invariants, on obtient une suite exacte

$$T_P(C_K) \longrightarrow T(C_K) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L)) \longrightarrow H^1(G, P^\vee \otimes C_L).$$

Par dualité de Nakayama

$$H^1(G, P^\vee \otimes C_L) \xrightarrow{\sim} H^1(G, P)^* = 0$$

car P est de permutation. On peut compléter la suite exacte obtenue en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} T_P(C_K) & \longrightarrow & T(C_K) & \longrightarrow & H^1(G, T_Q(C_L)) & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \wr & & \uparrow & & & & \\ T_P(\mathbf{A}_K) / T_P(K) & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & T(\mathbf{A}_K) / T(K) & \xrightarrow{p} & A(T) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Rappelons que la flèche verticale de gauche est un isomorphisme car T_P est quasi-déployé. Il faut montrer que la suite du bas est exacte. Évidemment p est surjectif. Comme $A(T_P) = 0$ et que γ est continu pour la topologie produit, on a les inclusions

$$\gamma(T_P(\mathbf{A}_K)) = \gamma\left(\overline{T_P(K)} \cap T_P(\mathbf{A}_K)\right) \subset \overline{\gamma(T_P(K))} \cap T(\mathbf{A}_K) \subset \overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)$$

donc $p \circ \bar{\gamma} = 0$. Par un argument de Colliot-Thélène et Sansuc ([CTSa, page 219]), il existe un morphisme

$$A(T) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L))$$

tel que le diagramme obtenu en rajoutant cette flèche est encore commutatif (le lemme s'en déduit par une rapide chasse au diagramme). En effet on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T(C_K) & \longrightarrow & H^1(G, T_Q(C_L)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_P(\mathbf{A}_K) & \longrightarrow & T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow H^1(G, T_Q(\mathbf{A}_L)) \end{array}$$

où la ligne du bas est exacte. Comme $A(T_P) = 0$, l'image de $T_P(\mathbf{A}_K)$ est contenue dans $\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)$ (cf. ci-dessus) et le morphisme

$$T(\mathbf{A}_K) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L))$$

factorise à travers $A(T)$, d'où le morphisme recherché. \square

L'argument ci-dessus permet en fait (cf. [CTSa]) de montrer que $A(T)$ s'identifie au conoyau du morphisme

$$H^1(G, T_Q(L)) \longrightarrow H^1(G, T_Q(\mathbf{A}_L))$$

et d'en déduire l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow A(T) \longrightarrow H^1(G, T_Q(C_L)) \longrightarrow \text{III}(T) \longrightarrow 0. \quad (2.6.2)$$

Par dualité de Nakayama, on a

$$H^1(G, T_Q(C_L)) \xrightarrow{\sim} H^1(G, Q)^*$$

d'où un résultat dû initialement à Voskresenskii.

Lemme 2.14 (Voskresenskii)

On a l'égalité

$$[A(T)] = \frac{[H^1(G, Q)]}{[\text{III}(T)]}.$$

Ceci nous servira pour le calcul du terme principal de la fonction zêta des hauteurs dans la section 6.

2.7 Un invariant des tores algébriques définis sur les corps de fonctions

Dans cette partie ainsi que dans les deux parties qui suivent, K désigne un corps de fonctions, de corps des constantes k . Soit T un tore algébrique défini sur K . Considérons une résolution flasque \mathcal{R} de $X(T)$

$$\mathcal{R} : 0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

On obtient alors par dualité une suite exacte de tores

$$0 \longrightarrow T_Q \longrightarrow T_P \longrightarrow T \longrightarrow 0.$$

Au niveau des espaces adéliques, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_Q(\mathbf{A}_K) \longrightarrow T_P(\mathbf{A}_K) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K).$$

Enfin, en prenant l'image de cette suite exacte par l'application degré (cf. section 2.3), on obtient un complexe

$$\mathcal{D}_{T_Q} \longrightarrow \mathcal{D}_{T_P} \longrightarrow \mathcal{D}_T.$$

On a en fait le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_{T_Q} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{T_P} & \longrightarrow & \mathcal{D}_T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (Q^G)^\vee & \longrightarrow & (P^G)^\vee & \longrightarrow & (X(T)^G)^\vee \end{array}$$

où les flèches verticales sont de conoyau fini. Comme $(P^G)^\vee \rightarrow (X(T)^G)^\vee$ est surjective, la flèche

$$\mathcal{D}_{T_P} \longrightarrow \mathcal{D}_T$$

est de conoyau fini. On note \mathcal{K}_T le cardinal de ce conoyau. Notons que ce conoyau ne dépend pas du choix de la résolution flasque. En effet soit P_1 un G -module de permutation, on obtient une résolution flasque \mathcal{R}_1

$$\mathcal{R}_1 : 0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \oplus P_1 \longrightarrow Q \oplus P_1 \longrightarrow 0$$

et

$$\text{Coker}(\mathcal{D}_{T_P \times T_{P_1}} \rightarrow \mathcal{D}_T) = \text{Coker}(\mathcal{D}_{T_P} \rightarrow \mathcal{D}_T).$$

Par ailleurs si

$$\mathcal{R}' : 0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P' \longrightarrow Q' \longrightarrow 0.$$

est une autre résolution flasque de $X(T)$, par [CTSa, lemme 5], les G -modules Q et Q' sont isomorphes après addition de G -modules de permutation convenables.

Cet invariant \mathcal{K}_T , spécifique à la caractéristique non nulle, est le nouveau terme qui apparaît dans l'expression du terme principal de la fonction zêta des hauteurs des variétés toriques en caractéristique non nulle.

En particulier (cf. énoncé du théorème 3.4) ce terme principal concide avec l'expression conjecturale donnée par Peyre si et seulement si $\mathcal{K}_T = 1$. Colliot-Thélène et Suresh ont montré dans [CTSu] que ce n'était pas toujours le cas, mais on a cependant la proposition suivante.

Proposition 2.15

On a $\mathcal{K}_T = 1$ dans les cas suivants : T vérifie l'approximation faible (i.e. $A(T) = 0$), T est anisotrope, T est déployé par une extension dans laquelle k est algébriquement clos.

Démonstration : Si $A(T) = 0$, par le lemme 2.13 le morphisme

$$T_P(\mathbf{A}_K) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)$$

est surjectif. Ainsi par définition $\mathcal{K}_T = 1$.

Si T est anisotrope, $X(T)^G = 0$, donc $\mathcal{D}_T = 0$, d'où le résultat.

Si T (et donc T_P) est déployé par une extension dans laquelle k est algébriquement clos, on verra plus loin (corollaire 2.18 ou section 4.2) que $\mathcal{C}_T = 0$, i.e.

$$\mathcal{D}_T = (X(T)^G)^\vee,$$

et de même

$$\mathcal{D}_{T_P} = (P^G)^\vee.$$

Mais, le quotient $P^G/X(T)^G$ étant sans torsion, la flèche

$$(P^G)^\vee \rightarrow (X(T)^G)^\vee$$

est surjective, d'où le résultat. \square

Remarque : Le cas où $A(T) = 0$ contient en particulier, d'après la suite exacte (2.6.2), le cas où $H^1(G, Q) = 0$. Cette dernière situation se produit en particulier quand T est quasi-déployé ou quand T est déployé par une extension métacyclique⁹ de K . \square

On considère encore une résolution flasque de $X(T)$

$$\mathcal{R} : 0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

et la suite exacte duale de tores

$$0 \longrightarrow T_Q \longrightarrow T_P \longrightarrow T \longrightarrow 0.$$

Comme P est de permutation, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow X(T)^G \longrightarrow P^G \longrightarrow Q^G \longrightarrow H^1(G, X(T)) \longrightarrow 0.$$

L'homologie du complexe

$$(Q^G)^\vee \rightarrow (P^G)^\vee \rightarrow (X(T)^G)^\vee$$

est donc de cardinal $[H^1(G, X(T))]$ (rappelons que ce dernier cardinal est noté $h(T)$).

Le lemme suivant est utilisé dans le calcul du terme principal de la fonction zêta des hauteurs dans le cas fonctionnel.

⁹dont le groupe de Galois est à Sylow cycliques

Lemme 2.16

L'homologie du complexe

$$\mathcal{D}_{T_Q} \longrightarrow \mathcal{D}_{T_P} \longrightarrow \mathcal{D}_T$$

est de cardinal

$$\frac{h(T) [\mathcal{C}_{T_Q}] [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T}{[\mathcal{C}_{T_P}]}$$

Démonstration : Notons \mathcal{H} ce cardinal. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{T_Q} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{T_P} & \longrightarrow & \mathcal{D}_T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (Q^G)^\vee & \longrightarrow & (P^G)^\vee & \longrightarrow & (X(T)^G)^\vee \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{T_Q} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{T_P} & \longrightarrow & \mathcal{C}_T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

où les verticales sont exactes et les horizontales sont des complexes, en d'autres termes on a une suite exacte de complexes. Par ailleurs les complexes sont exacts en : \mathcal{D}_{T_Q} , $(Q^G)^\vee$, $(X(T)^G)^\vee$ et \mathcal{C}_T . Les caractéristiques d'Euler-Poincaré de ces complexes sont alors, de haut en bas : $\frac{\mathcal{K}_T}{\mathcal{H}}$, $\frac{1}{h(T)}$ et $\frac{[\mathcal{C}_{T_Q}] [\mathcal{C}_T]}{[\mathcal{C}_{T_P}]}$. Comme on a une suite exacte de complexes, on en déduit la relation

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{K}_T} \frac{1}{h(T)} \frac{[\mathcal{C}_{T_P}]}{[\mathcal{C}_{T_Q}] [\mathcal{C}_T]} = 1,$$

d'où le résultat. □

2.8 Un autre invariant des tores algébriques définis sur les corps de fonctions

Rappelons que dans cette section, comme dans la précédente, K est un corps de fonctions, de corps des constantes k .

Dans la section 5.2.7. de [Bo3], nous introduisons un autre invariant des tores algébriques définis sur un corps de fonctions. Nous en rappelons la définition.

On considère toujours T un tore algébrique défini sur K . Soit \mathcal{G} le groupe de Galois de K^s/K , il contient un sous-groupe distingué \mathcal{H} tel que le quotient \mathcal{G}/\mathcal{H} s'identifie à \mathfrak{G} le groupe de Galois absolu de k . La représentation continue de \mathcal{G} dans $\text{Aut}(X(T))$ induit une représentation continue

$$\varrho : \mathfrak{G} \longrightarrow \text{Aut}(X(T)^{\mathcal{H}}).$$

Soit $\mathfrak{g}_T = \mathfrak{G}/\text{Ker}(\varrho)$ et $d_T = [\mathfrak{g}_T]$. Ainsi le corps fini à $q_k^{d_T}$ éléments est le corps des constantes minimal d'une extension galoisienne L/K déployant T .

Soit L/K une extension finie galoisienne de groupe G , déployant T . Soit H l'image de \mathcal{H} dans G . On peut toujours choisir L de telle sorte que $G/H = \mathfrak{g}_T$, ce que nous ferons pour la suite de cette section. Considérons alors une résolution flasque \mathcal{R} de $X(T)$

$$\mathcal{R} : 0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Prenons les invariants sous H , on obtient une suite exacte de \mathfrak{g}_T -modules

$$0 \longrightarrow X(T)^H \longrightarrow P^H \longrightarrow Q^H \xrightarrow{\delta_{\mathcal{R}}} H^1(H, X(T)) \longrightarrow 0.$$

Alors l'entier

$$[H^1(\mathfrak{g}_T, \text{Ker}(\delta_{\mathcal{R}}))]$$

ne dépend pas du choix de \mathcal{R} et on définit $\zeta(T)$ comme l'invariant

$$\frac{d_T^{\text{rg}(X(T)^G)} [H^1(\mathfrak{g}_T, \text{Ker}(\delta_{\mathcal{R}}))]}{[\mathcal{C}_T] [\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H)]}$$

Au vu du théorème 5.3.3. de [Bo3] et du théorème 3.4, et compte tenu du fait que tout tore algébrique admet une compactification équivariante projective et lisse ([CTHaSk]), on a que $\zeta(T) = \mathcal{K}_T$ pour tout tore T défini sur K . Bien entendu cette relation peut se montrer de manière plus directe, sans invoquer des calculs de fonctions zêta des hauteurs. C'est ce que nous expliquons ci-dessous.

Dans [Bo3], nous montrons que $\zeta(T)$ était égal à 1 dans les cas suivant : T anisotrope, T quasi-déployé, T déployé par une extension dans laquelle k est algébriquement clos, et T déployé par une extension métacyclique. La preuve de ce dernier fait, d'ailleurs assez pénible, s'étend aisément au cas où $H^1(G, Q)$ est trivial.

La présentation plus intrinsèque du calcul de la fonction zêta des hauteurs que nous proposons dans cet article permet donc, par rapport au calcul présenté dans [Bo3, Chapitre 6], d'identifier une classe plus large de tores algébriques pour lesquelles le terme supplémentaire en caractéristique non nulle est trivial (proposition 2.15), avec en outre une preuve plus simple.

2.9 Preuve de l'égalité $\mathcal{K}_T = \zeta(T)$

Nous conservons toutes les notations des sections 2.7 et 2.8. En particulier on suppose avoir fixé une résolution flasque \mathcal{R}

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

de $X(T)$, induisant, via les H invariants, une suite exacte de \mathfrak{g}_T -modules

$$0 \longrightarrow X(T)^H \longrightarrow P^H \longrightarrow Q^H \xrightarrow{\delta_R} H^1(H, X(T)) \longrightarrow 0.$$

On note $Q_{\mathcal{R}}$ le \mathfrak{g}_T -module $\text{Ker}(\delta_R)$, on a donc une suite exacte de \mathfrak{g}_T -modules

$$0 \longrightarrow X(T)^H \longrightarrow P^H \longrightarrow Q_{\mathcal{R}} \longrightarrow 0. \quad (2.9.1)$$

Nous voulons donc prouver l'égalité

$$\mathcal{K}_T = \frac{d_T^{\text{rg}(X(T)^G)} [H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathcal{R}})]}{[\mathcal{C}_T] [\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H)]}.$$

Lemme 2.17

\mathcal{D}_T contient $d_T (X(T)^G)^\vee$.

Démonstration : Pour tout G -module M , on note N_G la norme sur M , i.e. le morphisme qui à $m \in M$ associe l'élément de M^G

$$N_G(m) = \sum_{g \in G} g m.$$

Soit

$$\phi \in T(\mathbf{A}_L) = \text{Hom}(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)).$$

Le morphisme $\text{deg}_T(N_G\phi)$ envoie $m \in X(T)^G$ sur

$$\begin{aligned} \text{deg}_K \left(\prod_{g \in G} (g\phi)(m) \right) &= \text{deg}_K \left(\prod_{g \in G} g \cdot (\phi(g^{-1}m)) \right) \\ &= \text{deg}_K \left(\prod_{g \in G} g \cdot (\phi(m)) \right) \\ &= \frac{d_T}{[L:K]} \text{deg}_L \left(\prod_{g \in G} g \cdot (\phi(m)) \right) \\ &= d_T \text{deg}_L(\phi(m)). \end{aligned}$$

La troisième égalité provient de la formule (2.2.2). Ainsi l'image de $N_G T(\mathbf{A}_L)$ par deg_T est incluse dans $d_T (X(T)^G)^\vee$.

Soit à présent ψ un élément de $d_T (X(T)^G)^\vee$. Comme il existe des idèles de degré 1 et que $X(T)^G$ est en tant que \mathbf{Z} -module un facteur direct de $X(T)$, on peut construire un morphisme

$$\phi \in \text{Hom}(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L))$$

tel que pour $m \in X(T)^G$ on ait

$$\text{deg}_L(\phi(m)) = \frac{\psi(m)}{d_T},$$

et donc pour un tel ϕ , $\text{deg}_T(N_G\phi) = \psi$. Ainsi la flèche

$$\text{deg}_T : N_G T(\mathbf{A}_L) \longrightarrow d_T (X(T)^G)^\vee$$

est surjective, d'où le résultat. □

Corollaire 2.18

Si k est algébriquement clos dans L , on a $\mathcal{C}_T = 0$.

Démonstration : En effet dans ce cas on a $d_T = 1$. □

Le G -module de permutation P peut s'écrire

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}[G/G_i],$$

où I est un ensemble fini et G_i un sous-groupe de G . Pour tout $i \in I$, soit $K_i = K^{G_i}$ et d_i le degré absolu de K_i . On a donc $q_{K_i} = q^{d_i}$. On identifiera

désormais $P^{\mathbf{G}}$ et $(P^G)^\vee$ à \mathbf{Z}^I . Le sous-module \mathcal{D}_{TP} de $(P^G)^\vee$ s'identifie alors, d'après le lemme 2.1, à $\bigoplus d_i \mathbf{Z}$. En particulier on a

$$[\mathcal{C}_{TP}] = \prod_{i \in I} d_i.$$

Notons γ le morphisme $X(T)^G \rightarrow P^G$ induit par la résolution flasque ci-dessus, et, pour $i \in I$, γ_i sa composante d'indice i .

Désignons par $n(d_i)$ le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ \delta_i \in \mathbf{N}^I, 0 \leq \delta_i < \frac{d_T}{d_i}, \forall m \in X(T)^G, d_T \text{ divise } \sum_i d_i \delta_i \gamma_i(m) \right\}.$$

Les deux lemmes suivants donnent deux expressions de $n(d_i)$ dont la comparaison permet d'aboutir à la relation cherchée.

Lemme 2.19

On a l'égalité

$$n(d_i) = \frac{d_T^{[I]} [H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathcal{R}})]}{[\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H)] [\mathcal{C}_{TP}]}.$$

Démonstration : La suite exacte (2.9.1) induit la suite exacte

$$H^{-1}(\mathfrak{g}_T, P^H) \longrightarrow H^{-1}(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathcal{R}}) \longrightarrow \widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H) \longrightarrow \widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, P^H).$$

Comme P^H est un \mathfrak{g}_T -module de permutation et \mathfrak{g}_T est cyclique, on a

$$H^{-1}(\mathfrak{g}_T, P^H) = H^1(\mathfrak{g}_T, P^H) = 0$$

et finalement on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{-1}(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathcal{R}}) \longrightarrow \widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_i} \mathbf{Z} \\ m \longmapsto \gamma_i(m).$$

Soit M le quotient de $\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H)$ par $H^{-1}(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathcal{R}})$. On obtient donc une injection

$$M \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_i} \mathbf{Z} \\ m \longmapsto \gamma_i(m)$$

d'où une surjection

$$\mathrm{Hom} \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_i} \mathbf{Z}, \mathbf{Z}/d_T \mathbf{Z} \right) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z}/d_T \mathbf{Z}).$$

En identifiant $\text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_i} \mathbf{Z}, \mathbf{Z}/d_T \mathbf{Z}\right)$ à $\bigoplus_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{Z}/\frac{d_T}{d_i} \mathbf{Z}$, le morphisme ci-dessus devient

$$(\delta_i) \longmapsto \left(m \longmapsto \sum_i d_i \delta_i \gamma_i(m) \right),$$

et $n(d_i)$ n'est autre que le cardinal du noyau de ce morphisme, soit

$$\begin{aligned} n(d_i) &= \frac{\prod_i \frac{d_T}{d_i}}{[\text{Hom}(M, \mathbf{Z}/d_T \mathbf{Z})]} \\ &= \frac{d_T^{[I]}}{[M] \prod_i d_i} \end{aligned}$$

d'où (comme \mathfrak{g}_T est cyclique, $H^{-1}(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}})$)

$$n(d_i) = \frac{d_T^{[I]} [H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathfrak{R}})]}{\left[\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H) \right] \prod_i d_i}$$

ce qui est bien le résultat annoncé. □

Lemme 2.20

On a la relation

$$n(d_i) = \frac{d_T^{[I] - \text{rg}(X(T)^G)} [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T}{[\mathcal{C}_{T_P}]}$$

Démonstration : Le morphisme

$$\pi : (P^G)^\vee = \mathbf{Z}^I \rightarrow (X(T)^G)^\vee,$$

dual du morphisme γ , s'écrit de manière explicite

$$(n_i) \longmapsto \left(m \longmapsto \sum_{i \in I} n_i d_i \gamma_i(m) \right)$$

et induit un morphisme de groupes finis

$$\tilde{\pi} : \mathbf{Z}^I / d_T \mathbf{Z}^I \rightarrow (X(T)^G)^\vee / d_T (X(T)^G)^\vee$$

On voit facilement que

$$[\text{Ker}(\tilde{\pi})] = n(d_i) \prod_{i \in I} d_i$$

d'où

$$n(d_i) = \frac{d_T^{[I]}}{[\mathrm{Im}(\tilde{\pi})] [\mathcal{C}_{T_P}]}.$$

Rappelons que l'image de \mathcal{D}_{T_P} dans \mathbf{Z}^I s'identifie à $\oplus d_i \mathbf{Z}$. Ainsi l'image de $\tilde{\pi}$ est l'image de \mathcal{D}_{T_P} dans $(X(T)^G)^\vee / d_T (X(T)^G)^\vee$, son cardinal est donc l'indice de $d_T (X(T)^G)^\vee$ dans \mathcal{D}_T^0 , où l'on désigne par \mathcal{D}_T^0 l'image de \mathcal{D}_{T_P} dans $(X(T)^G)^\vee$. En effet \mathcal{D}_{T_P} contient $d_T (P^G)^\vee$, et donc \mathcal{D}_T^0 contient $d_T (X(T)^G)^\vee$ car π est surjectif.

On a la chaîne d'inclusions

$$d_T (X(T)^G)^\vee \subset \mathcal{D}_T^0 \subset \mathcal{D}_T \subset (X(T)^G)^\vee$$

et les indices des inclusions sont respectivement $[\mathrm{Im}(\tilde{\pi})]$, \mathcal{K}_T et $[\mathcal{C}_T]$.

On a donc

$$[\mathrm{Im}(\tilde{\pi})] [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T = d_T^{\mathrm{rg}(X(T)^G)}.$$

Finalement

$$n(d_i) = \frac{d_T^{[I]}}{[\mathrm{Im}(\tilde{\pi})] [\mathcal{C}_{T_P}]} = \frac{d_T^{[I] - \mathrm{rg}(X(T)^G)} [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T}{[\mathcal{C}_{T_P}]}$$

ce qui est bien le résultat annoncé. □

Des lemmes 2.19 et 2.20, on tire immédiatement la relation

$$\mathcal{K}_T = \frac{d_T^{\mathrm{rg}(X(T)^G)} [H^1(\mathfrak{g}_T, Q_{\mathbb{R}})]}{[\widehat{H}^0(\mathfrak{g}_T, X(T)^H)] [\mathcal{C}_T]} = \varsigma(T),$$

qui est bien la relation cherchée.

3 Hauteurs sur une variété torique et fonction zêta associée

3.1 Variétés toriques

Soit M un \mathbf{Z} -module libre de rang fini et $\Sigma \subset M_{\mathbf{R}}$ un éventail projectif et lisse. À un tel objet combinatoire est associé, pour tout corps L , une compactification équivariante projective et lisse d'un tore déployé sur L de dimension $\mathrm{rg}(M)$, autrement dit une variété torique projective, lisse et déployée sur L (on renvoie aux références classiques sur les variétés toriques, comme [Fu] et [Od]). On la note $X_{\Sigma, L}$.

Soit T un tore algébrique de dimension d défini sur un corps K . Soit L/K une extension galoisienne de groupe G déployant T .

Soit $\Sigma \subset X(T)_{\mathbf{R}}^{\vee}$ un éventail projectif et lisse. On suppose de plus que Σ est un G -éventail, c'est-à-dire que G agit sur Σ en préservant les cônes. Alors G agit aussi sur la variété torique projective $X_{\Sigma,L}$, et on peut donc considérer le quotient de $X_{\Sigma,L}$ par G . Ce quotient est une variété X_{Σ} définie sur K , qui est une compactification équivariante projective et lisse de T (cf. [Vo, §1]). Soit $\Sigma(1)$ l'ensemble des rayons de Σ , et P_{Σ} le G -module de permutation $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$. Le G -module $\text{Pic}(X_{\Sigma,L})$ est libre de rang fini et on a une suite exacte de G -modules

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow P_{\Sigma} \longrightarrow \text{Pic}(X_{\Sigma,L}) \longrightarrow 0. \quad (3.1.1)$$

Il en résulte par dualité une suite exacte de tores algébriques

$$0 \longrightarrow T_{\text{NS}} \longrightarrow T_{P_{\Sigma}} \longrightarrow T \longrightarrow 0. \quad (3.1.2)$$

De plus $\text{Pic}(X_{\Sigma,L})$ est un G -module flasque. Dans le cas où K est de caractéristique zéro, ce résultat est contenu dans la proposition 6 (page 189) de [CTSa]. Le cas où K est de caractéristique non nulle en découle. Choisissons en effet un corps K' de caractéristique 0 tel qu'il existe une extension galoisienne L' de K' de groupe G . Il existe donc un tore algébrique T_P défini sur K' et déployé par L' , et une compactification lisse et projective $X_{\Sigma,K'}$ de T_P , telle que les G -modules $\text{Pic}(X_{\Sigma,L'})$ et $\text{Pic}(X_{\Sigma,L})$ sont isomorphe, et d'après [CTSa] $\text{Pic}(X_{\Sigma,L'})$ est flasque.

3.2 Fonction zêta des hauteurs

On conserve les objets et notations introduits à la section précédente, et on suppose désormais que K un corps global.

Soit $\phi \in PL(\Sigma)_{\mathbf{C}}^G$. Pour $v \in \mathcal{P}_K$ on définit, suivant [BaTs1, Definition 2.1.5], une hauteur locale

$$H_{\phi,v} : T(K_v) \longrightarrow \mathbf{C}$$

invariante sous l'action de $T(\mathcal{O}_v)$, de la façon suivante. Soit \mathcal{V} une place de L divisant v , et G_v le groupe de décomposition de \mathcal{V} .

Supposons d'abord que v est finie. Le morphisme valuation

$$\mathcal{V} : \begin{array}{ccc} L_{\mathcal{V}}^* & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ x & \longmapsto & \mathcal{V}(x) \end{array}$$

est G_v -équivariant et permet, en identifiant $T(K_v)$ à $\text{Hom}_{G_v}(X(T), L_v^*)$, de définir par composition un morphisme

$$j_v : T(K_v) \longrightarrow \text{Hom}_{G_v}(X(T), \mathbf{Z}) = (X(T)^\vee)^{G_v}$$

puis pour tout $\phi \in \text{PL}(\Sigma)_{\mathcal{C}}^G$ la hauteur locale

$$H_{\Sigma, v}(\phi) : \begin{array}{ccc} T(K_v) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \exp[\log(q_v) \phi(j_v(x))]. \end{array}$$

Si v est infinie, on a un isomorphisme

$$j_v : T(K_v)/T(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{\sim} (X(T)^\vee)_{\mathbf{R}}^{G_v}$$

et on définit $H_{\Sigma, v}(\phi)$ par la même formule que ci-dessus, en imposant $\log(q_v) = 1$.

Pour $x \in T(K)$ on pose

$$H_\phi(x) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} H_{\phi, v}(x).$$

Si $\phi \in \text{PL}(\Sigma)^G$, $H_\phi(x)$ est la restriction à $T(K)$ d'une hauteur d'Arakelov associée au faisceau inversible représenté par ϕ .

On pose alors

$$\zeta_{H_\phi}(s) = \sum_{x \in T(K)} H_\phi(x)^{-s}$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que la série converge, et plus généralement

$$\zeta_H(\phi) = \sum_{x \in T(K)} H_{-\phi}(x)$$

pour tout $\phi \in \text{PL}(\Sigma)_{\mathcal{C}}^G$ tel que la série converge.

3.3 Mesure et nombre de Tamagawa d'une variété torique

Dans le cas où $\phi_0 \in \text{PL}(\Sigma)^G$ correspond au faisceau anticanonique de X_Σ , la métrisation dont provient la hauteur H_{ϕ_0} induit pour tout v une mesure $\omega_{X_\Sigma, v}$ sur $X_\Sigma(K_v)$.

Comme la forme Ω_T utilisée dans la section 2.5 pour la construction des mesures de Haar $\omega_{T, v}$ sur $T(K_v)$ est une section non nulle sur T du faisceau canonique de X_Σ , il existe, par définition de la fonction hauteur associée à une métrique adélique (cf. par exemple [Pe3, chapitre 2]) une

famille $(\alpha_v) \in (\mathbf{R}_{>0})^{\mathcal{P}_K}$ avec $\alpha_v = 1$ pour presque tout v et $\prod_{v \in \mathcal{P}_K} \alpha_v = 1$ telle que, pour tout $x \in T(K_v)$, on a

$$\| \Omega_T(x)^{-1} \|_v = \alpha_v H_{\phi_0, v}(x).$$

En vue du calcul du terme principal de la fonction zêta des hauteurs, il faut comparer les mesures $\omega_{X_\Sigma, v}$ et $H_{\Sigma, v}(x, \phi_0) \omega_{T, v}$ sur $T(K_v)$. C'est l'objet de la proposition 3.4.4. de [BaTs1], dont nous rappelons la preuve.

Soient $x \in T(K_v)$ et U un ouvert de Zariski de T contenant x tel qu'il existe un K -morphisme étale

$$f : U \longrightarrow \mathbf{A}_K^d,$$

vérifiant

$$f^* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_d} \right) = \beta \Omega_U^{-1}.$$

avec $\beta \in K^*$. Ce morphisme induit pour un ouvert analytique W de $T(K_v)$ contenant x un isomorphisme analytique

$$f : W \xrightarrow{\sim} f(W) \subset K_v^d.$$

Par définition de $\omega_{T, v}$ on a

$$\omega_{T, v} = |\beta|_v (f^{-1})_* (dx_1 \dots dx_d)$$

et par ailleurs

$$\omega_{X_\Sigma, v} = |\beta|_v (f^{-1})_* (\| \Omega_T(f^{-1}(x))^{-1} \|_v dx_1 \dots dx_d)$$

d'où

Lemme 3.1

Il existe une famille $(\alpha_v) \in (\mathbf{R}_{>0})^{\mathcal{P}_K}$ avec $\alpha_v = 1$ pour presque tout v et

$$\prod_{v \in \mathcal{P}_K} \alpha_v = 1$$

telle que

$$\forall v \in \mathcal{P}_K, \quad \omega_{X_\Sigma, v}|_{T(K_v)} = \alpha_v H_{\phi_0, v}(\cdot) \omega_{T, v}.$$

Rappelons (cf. section 1.4) que le *nombre de Tamagawa* de X_Σ est alors par définition

$$\gamma_H(X_\Sigma) = \omega_{X_\Sigma} \left(\overline{X_\Sigma(K)} \right),$$

où

$$\omega_{X_\Sigma} = C_{X_\Sigma, K} l_S(X_\Sigma) \prod_{v \in S} \omega_{X_\Sigma, v} \prod_{v \notin S} L_v(1, \text{Pic}(X_\Sigma^s)^{-1}) \omega_{X_\Sigma, v}.$$

Lemme 3.2 (Batyrev, Tschinkel)

On a

$$\int_{T(K) \cap T(\mathbf{A}_K)} \omega_{X_\Sigma} = \int_{X_\Sigma(K)} \omega_{X_\Sigma}.$$

C'est la proposition 3.4.5 de [BaTs1], énoncée a priori en caractéristique zéro, mais la preuve n'utilise pas le fait que la caractéristique est nulle.

3.4 Le résultat

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer notre résultat principal.

Rappelons tout d'abord le résultat obtenu par Batyrev et Tschinkel dans [BaTs3].

Théorème 3.3 (Batyrev, Tschinkel)

Soit K un corps de nombres. L/K une extension finie galoisienne de groupe G , et Σ un G -éventail projectif et lisse. Soit X_Σ la variété torique projective et lisse, définie sur K , qui lui est associée. Soit $\phi_0 \in \text{PL}(\Sigma)^G$ un représentant du faisceau anticanonique de X_Σ .

Alors la série $\zeta_H(s\phi_0)$ converge absolument pour $s \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1})$ et, pour un certain $\varepsilon > 0$, la fonction

$$f : s \longmapsto (s-1)^{\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))} \zeta_H(s\phi_0)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur le domaine $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1-\varepsilon})$, vérifiant

$$f(1) = \alpha^*(X_\Sigma) [H^1(G, \text{Pic}(X_{\Sigma,L}))] \gamma_H(X_\Sigma).$$

Nous obtenons pour notre part le théorème suivant.

Théorème 3.4

Soit K un corps de fonctions, L/K une extension finie galoisienne de groupe G , et Σ un G -éventail projectif et lisse. Soit X_Σ la variété torique projective et lisse, définie sur K , qui lui est associée. C'est une compactification d'un tore algébrique T . Soit $\phi_0 \in \text{PL}(\Sigma)^G$ un représentant du faisceau anticanonique de X_Σ .

Alors la série $\zeta_H(s\phi_0)$ converge absolument pour $s \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1-\varepsilon})$ et pour un certain $\varepsilon > 0$ se prolonge en une fonction méromorphe sur un domaine du type $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1-\varepsilon})$. Ce prolongement a un pôle d'ordre le rang du groupe de Picard de X_Σ en $s = 1$, et on a

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))} \zeta_H(s\phi_0) = \mathcal{K}_T \alpha^*(X_\Sigma) [H^1(G, \text{Pic}(X_{\Sigma,L}))] \gamma_H(X_\Sigma).$$

Rappelons que la constante \mathcal{K}_T a été définie à la section 2.7, et que par [CTSu] on n'a pas nécessairement $\mathcal{K}_T = 1$. Ce théorème est donc l'analogue fonctionnel du théorème 3.3, à la constante \mathcal{K}_T près.

Notre preuve, comme déjà indiqué, est fortement inspirée des preuves de [BaTs1] et [BaTs3].

3.5 Stratégie de Batyrev et Tschinkel

Une des idées essentielles de Batyrev et Tschinkel pour étudier la fonction zêta des hauteurs des variétés toriques est d'appliquer la formule de Poisson pour obtenir une représentation intégrale de $\zeta_H(\phi)$. Pour cela, on commence par étendre la hauteur en une fonction continue sur $T(\mathbf{A}_K)$ en posant pour $(x_v) \in T(\mathbf{A}_K)$

$$H_\phi((x_v)) = \prod_{v \in \mathcal{P}_K} H_{\phi,v}(x_v).$$

Ainsi H_ϕ est invariante sous l'action de $\mathbf{K}(T)$ (ceci sera utile pour annuler beaucoup de transformées de Fourier). Rappelons un énoncé de la formule de Poisson (cf. [Bki, Proposition 8, p. 127]) :

Théorème 3.5 (Formule de Poisson)

Soit \mathcal{G} un groupe topologique abélien localement compact muni d'une mesure de Haar dg , \mathcal{H} un sous-groupe fermé muni d'une mesure de Haar dh . Soit dx la mesure de Haar sur le quotient \mathcal{G}/\mathcal{H} , normalisée par la relation $dg = dx dh$. Soit \mathcal{H}^\perp le groupe des caractères de \mathcal{G} triviaux sur \mathcal{H} , qu'on munit de la mesure de Haar $d\chi$ duale de la mesure dx . Soit $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction \mathbf{L}^1 et $\mathcal{F}F$ sa transformée de Fourier par rapport à dg . On suppose que $\mathcal{F}F$ est \mathbf{L}^1 sur \mathcal{H}^\perp .

Alors, pour presque tout g de \mathcal{G} , la fonction $g \mapsto F(gh)$ est \mathbf{L}^1 sur \mathcal{H} , et on a la formule

$$\int_{\mathcal{H}} F(gh)dh = \int_{\mathcal{H}^\perp} \chi(g) (\mathcal{F}F)(\chi)d\chi.$$

On va appliquer ce résultat à $\mathcal{G} = T(\mathbf{A}_K)$ muni de la mesure de Haar $\omega_{T,S}$ définie à la section 2.5 (pour un certain ensemble fini S de places défini à la section 4.6), $\mathcal{H} = T(K)$, identifié à un sous-groupe discret de $T(\mathbf{A}_K)$ et muni de la mesure discrète. On munit donc $(T(\mathbf{A}_K)/T(K))^*$ de la mesure de Haar duale de la mesure quotient sur $T(\mathbf{A}_K)/T(K)$, cette mesure duale sera notée $d\chi$.

Lemme 3.6

Soit ϕ un élément de $\text{PL}(\Sigma)^G$ tel que $H_{-\phi}$ est \mathbf{L}^1 sur $T(\mathbf{A}_K)$. Soit $\mathcal{F}H_{-\phi}$ la transformée de Fourier de $H_{-\phi}$ par rapport à la mesure $\omega_{T,S}$. Supposons en

outre que $\mathcal{F}H_{-\phi}$ est \mathbf{L}^1 sur $(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$.

Alors $H_{-\phi}$ est \mathbf{L}^1 sur $T(K)$ et on a la formule

$$\sum_{x \in T(K)} H_{-\phi}(x) = \int_{(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*} (\mathcal{F}H_{-\phi})(\chi) d\chi.$$

Démonstration : Comme $H_{-\phi}$ est $\mathbf{K}(T)$ -invariante, $(\mathcal{F}H_{-\phi})(\chi)$ est nulle si χ n'est pas trivial sur $\mathbf{K}(T)$. Ainsi si $\mathcal{F}H_{-\phi}$ est \mathbf{L}^1 sur $(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$, elle le sera sur $(T(\mathbf{A}_K)/T(K))^*$. L'application du théorème 3.5 montre alors que, pour presque tout g de $T(\mathbf{A}_K)$, $x \mapsto H_{-\phi}(gx)$ est \mathbf{L}^1 sur $T(K)$ et on a la formule

$$\begin{aligned} \sum_{x \in T(K)} H_{-\phi}(gx) &= \int_{(T(\mathbf{A}_K)/T(K))^*} \chi(g)(\mathcal{F}H_{-\phi})(\chi) d\chi \\ &= \int_{(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*} \chi(g)(\mathcal{F}H_{-\phi})(\chi) d\chi. \end{aligned}$$

Comme $\int_{\mathbf{K}(T)} \omega_{T,S} \neq 0$ (cf. section 2.5), ces conditions sont même vérifiées pour au moins un $g \in \mathbf{K}(T)$ convenable, en particulier comme $H_{-\phi}$ est $\mathbf{K}(T)$ -invariante on en déduit que $H_{-\phi}$ est \mathbf{L}^1 sur $T(K)$. La formule annoncée en découle. \square

Remarque : Dans le cas fonctionnel, l'hypothèse que $H_{-\phi}$ est intégrable entraîne automatiquement l'intégrabilité de $\mathcal{F}H_{-\phi}$, grce à la compacité de $(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$. \square

Pour les calculs ultérieurs, on a besoin d'une expression relativement explicite de la transformée de Fourier. C'est le but de la partie suivante. La représentation intégrale est obtenue au corollaire 4.11.

4 Calcul des transformées de Fourier et expression intégrale de la fonction zêta des hauteurs

4.1 Caractères du groupe des idèles

Soit E un corps global. Si χ est un caractère de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_E)$, pour $v \in \mathcal{P}_E$ on note χ_v le caractère induit sur $\mathbf{G}_m(E_v)$ via l'injection naturelle de $\mathbf{G}_m(E_v)$ dans $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_E)$. Tout caractère de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_E)$ trivial sur $\mathbf{K}_{\mathbf{G}_m}.\mathbf{G}_m(E)$ est de la forme

$$\chi : (x_v) \mapsto \prod_{v \in \mathcal{P}_{E,f}} z_v^{v(x_v)} \prod_{v \in \mathcal{P}_{E,\infty}} e^{it_v \log|x|_v}$$

avec $(z_v) \in (\mathbf{S}^1)^{\mathcal{P}_{E,f}}$ et $(t_v) \in \mathbf{R}^{\mathcal{P}_{E,\infty}}$. Pour tout $v \in \mathcal{P}_{E,f}$ on a donc $z_v = \chi_v(\pi_v)$. On peut alors définir la fonction L associée

$$L_E(s, \chi) = \prod_{v \in \mathcal{P}_{E,f}} \frac{1}{1 - z_v q_v^{-s}}$$

Ce produit eulérien converge absolument pour $\Re(s) > 1$. Si χ est de plus trivial sur $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_E)^1$ il s'écrit

$$x \longmapsto e^{iy \deg_E(x)}$$

avec $y \in \mathbf{R}$ dans le cas arithmétique, et

$$x \longmapsto z^{\deg_E(x)}$$

avec $z \in \mathbf{S}^1$ dans le cas fonctionnel.

Si S est un ensemble fini de \mathcal{P}_E contenant les places infinies, on définit aussi

$$L_{E,S}(s, \chi) = \prod_{v \notin S} \frac{1}{1 - z_v q_v^{-s}}.$$

Dans le cas fonctionnel on notera $\mathcal{L}_E(\cdot, \chi)$ la fonction vérifiant

$$\mathcal{L}_E(q_E^{-s}, \chi) = L_E(s, \chi).$$

On définit de même la notation $\mathcal{L}_{E,S}(\cdot, \chi)$.

Dans le cas où χ est trivial, on obtient une fonction zêta tronquée que l'on notera

$$\zeta_{E,S}(s) = \prod_{v \notin S} \frac{1}{1 - q_v^{-s}}.$$

Dans le cas fonctionnel, on notera $Z_{E,S}$ la fonction vérifiant

$$Z_{E,S}(q_E^{-s}) = \zeta_{E,S}(s).$$

D'après [We1, VII, § 7, Thm 6], on a

Lemme 4.1

Si χ n'est pas trivial sur $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_E)^1$, la fonction $L_{E,S}(s, \chi)$ est holomorphe sur \mathbf{C} . Dans le cas fonctionnel, elle s'exprime comme un polynôme en q_E^{-s} .

4.2 Caractères de $T(\mathbf{A}_K)$

Nous reprenons les notations de la partie 3.1, le corps de base étant un corps global K . Dans le cas fonctionnel, le corps des constantes de K est désormais supposé de cardinal q .

Nous notons $\Sigma(1)_G$ l'ensemble des orbites de $\Sigma(1)$ sous l'action de G . Pour chaque $\alpha \in \Sigma(1)_G$ nous choisissons un élément de α , nous notons ρ_α le générateur de cet élément ainsi que G_α le stabilisateur de ρ_α . Soit $K_\alpha = L^{G_\alpha}$.

Dans le cas fonctionnel, nous noterons d_α le degré absolu de K_α , on a donc $[\mathbf{F}_{K_\alpha}] = q^{d_\alpha}$.

Le G -module de permutation $P_\Sigma = \mathbf{Z}^{\Sigma(1)}$ s'identifie alors à

$$\bigoplus_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{Z}[G/G_\alpha].$$

Dans le cas fonctionnel, on a d'après le lemme 2.1,

$$[\mathcal{C}_{T_{P_\Sigma}}] = \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} d_\alpha.$$

Rappelons (section 3.1) qu'on a une suite exacte de G -modules

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{Z}[G/G_\alpha] \longrightarrow \text{Pic}(X_{\Sigma,L}) \longrightarrow 0$$

et que $\text{Pic}(X_{\Sigma,L})$ est un G -module flasque.

Notons $\tilde{\gamma}$ le morphisme

$$X(T) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{Z}[G/G_\alpha].$$

Pour $m \in X(T)$ on a

$$\tilde{\gamma}(m) = (\langle m, g \rho_\alpha \rangle)_{\substack{\alpha \in \Sigma(1)_G \\ g \in G/G_\alpha}}.$$

Le morphisme $\tilde{\gamma}$ induit par dualité un morphisme de tores algébriques

$$T_{P_\Sigma} = \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \text{Res}_{K_\alpha/K} \mathbf{G}_m \longrightarrow T$$

et en passant aux espaces adéliques associés un morphisme continu

$$\gamma : \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha}) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K).$$

Ce dernier morphisme n'est autre que le morphisme

$$\bigoplus_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \text{Hom}_G(\mathbf{Z}[G/G_\alpha], \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)) \longrightarrow \text{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L))$$

induit par la composition avec $\tilde{\gamma}$.

Le but de ce qui suit est d'expliciter le morphisme de caractères

$$(T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^* \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} (\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})/\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})^1)^*$$

induit par γ .

On considère le morphisme dual

$$\gamma^\vee : \mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G} \longrightarrow \text{Hom}(X(T)^G, \mathbf{Z}).$$

4.2.1 Cas arithmétique

Les applications deg_{T_p} et deg_T induisent des isomorphismes

$$(T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^* \xrightarrow{\sim} X(T)_{\mathbf{R}}^G$$

et

$$\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} (\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})/\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})^1)^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^{\Sigma(1)_G}$$

tels que la flèche

$$(T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^* \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} (\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})/\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})^1)^*$$

est induite par la flèche

$$\tilde{\gamma}_{\mathbf{R}} : X(T)_{\mathbf{R}}^G \longrightarrow \left(\bigoplus_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{Z}[G/G_\alpha] \right)_{\mathbf{R}}^G = \mathbf{R}^{\Sigma(1)_G}.$$

Nous choisissons une fois pour toutes un scindage de deg_T , ce qui fournit un isomorphisme

$$\begin{aligned} (T(\mathbf{A}_K)/T(K))^* &\longrightarrow (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^* \times (T(\mathbf{A}_K)^1/T(K))^* \\ \chi &\longmapsto (\chi', \chi'') \end{aligned}$$

Si $\chi \in (T(\mathbf{A}_K)/T(K))^*$ nous noterons (χ_α) les composantes du caractère $\chi \circ \gamma$, de sorte que (χ_α) est un élément de $(\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha}))^*$.

Si $\chi'' \in (T(\mathbf{A}_K)^1/T(K))^*$ et $y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G$ on notera χ_y'' le caractère défini, via le scindage ci-dessus, par (y, χ'') . Pour $\alpha \in \Sigma(1)_G$ on notera aussi y_α le réel $\langle \rho_\alpha, y \rangle$.

Lemme 4.2

Soit $\chi = y \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*$. Soit $\alpha \in \Sigma(1)_G$. Alors pour $x \in \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})$ on a

$$(\chi)_\alpha(x) = e^{iy_\alpha \deg_{K_\alpha}(x)}.$$

4.2.2 Cas fonctionnel

Ce cas demande un peu plus d'attention, à cause de la non-surjectivité en général du morphisme \deg_T .

Notons d'abord que γ^\vee est surjectif. En effet la suite exacte

$$0 \longrightarrow X(T)^G \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G} \longrightarrow \text{Pic}(X_\Sigma).$$

qui montre que $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}/X(T)^G$ est sans torsion.

On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \text{Hom}_G(\mathbf{Z}[G/G_\alpha], \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)) & \xrightarrow{\gamma} & \text{Hom}_G(X(T), \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_L)) \\ \downarrow \text{deg}_{T_{P_\Sigma}} & & \downarrow \text{deg}_T \\ \mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G} & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \text{Hom}(X(T)^G, \mathbf{Z}) \end{array}$$

Ce diagramme est commutatif, par functorialité du degré (section 2.3). En particulier, on retrouve le fait que le conoyau de \deg_T est fini, comme conséquence de cette commutativité et de la surjectivité de γ^\vee . On notera que si L a même corps des constantes que K , les d_α sont tous égaux à un, $\deg_{T_{P_\Sigma}}$ est surjectif et donc \deg_T également, ce qui redémontre le corollaire 2.18.

Comme dans le cas arithmétique, nous choisissons une fois pour toutes un scindage de \deg_T , qui fournit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (T(\mathbf{A}_K)/T(K))^* & \longrightarrow & (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^* \times (T(\mathbf{A}_K)^1/T(K))^* \\ \chi & \longmapsto & (\chi', \chi'') \end{array}$$

et si $\chi \in T(\mathbf{A}_K)^*$ nous noterons (χ_α) les composantes du caractère $\chi \circ \gamma$, de sorte que (χ_α) est un élément de $\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})^*$.

Le groupe topologique $(T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*$ s'identifie à $\mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}$.

Si $\chi'' \in (T(\mathbf{A}_K)^1/T(K))^*$ et $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}$ on notera $\chi''_{\mathbf{z}}$ le caractère défini, via le scindage ci-dessus, par (\mathbf{z}, χ'') .

Pour $\alpha \in \Sigma(1)_G$, on notera $\langle m, \rho_\alpha \rangle$ l'élément $m \mapsto \langle m, \rho_\alpha \rangle$ de $(X(T)^G)^\vee$. Le diagramme ci-dessus montre que $d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle$ est dans \mathcal{D}_T et le

Lemme 4.3

Soit $\chi = \mathbf{z} \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*$. Soit $\alpha \in \Sigma(1)_G$. Alors pour $x \in \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})$ on a

$$(\chi)_\alpha(x) = (\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle})^{\deg_{K_\alpha}(x)}.$$

4.3 Préliminaires au calcul des transformées de Fourier

Soit v une place finie de K . Nous choisissons une place \mathcal{V} de L au-dessus de v , nous notons G_v son groupe de décomposition. On a une identification

$$T(K_v) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{G_v}(X(T), L_{\mathcal{V}}^*).$$

Par composition avec \mathcal{V} on obtient une injection

$$T(K_v)/T(\mathcal{O}_v) \hookrightarrow (X(T)^\vee)^{G_v}.$$

Nous notons $\Sigma(1)_{G_v}$ l'ensemble des orbites de $\Sigma(1)$ sous l'action de G_v , et pour $\alpha \in \Sigma(1)_G$ nous notons $\Sigma(1)_{G_v}^\alpha$ le sous-ensemble de $\Sigma(1)_{G_v}$ des orbites incluses dans α . Soit Σ^{G_v} l'ensemble des cônes de Σ globalement invariants sous l'action de G_v , en d'autres termes les cônes σ dont l'ensemble des rayons $\sigma(1)$ est stable sous l'action de G_v . Pour un cône $\sigma \in \Sigma^{G_v}$, nous notons $\sigma(1)_{G_v}$ l'ensemble des orbites de $\sigma(1)$ sous l'action de G_v , et pour $\alpha \in \Sigma(1)_G$ nous notons $\sigma(1)_{G_v}^\alpha$ le sous-ensemble de $\sigma(1)_{G_v}$ des orbites incluses dans α .

Pour $\beta \in \Sigma(1)_{G_v}$ nous notons l_β le cardinal de β , ρ_β un générateur d'un élément quelconque de β et

$$\tau_\beta = \sum_{\rho \in G_v \cdot \rho_\beta} \rho,$$

de sorte que τ_β est un élément de $(X(T)^\vee)^{G_v}$. Rappelons que l'on note $\text{intrel}(\sigma)$ l'intérieur relatif d'un cône σ .

Lemme 4.4

$(X(T)^\vee)^{G_v}$ est recouvert par les ensembles $\text{intrel}(\sigma) \cap (X(T)^\vee)^{G_v}$ pour σ décrivant Σ^{G_v} . En particulier si $x \in (X(T)^\vee)^{G_v}$ est non nul, il existe un élément $\sigma \in \Sigma^{G_v}$ non nul tel que x s'écrit

$$x = \sum_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}} n_\beta \tau_\beta$$

où les n_β sont des entiers strictement positifs.

Démonstration : Soit $x \in (X(T)^\vee)^{G_v}$. Si x est non nul, x est dans l'intérieur relatif d'un unique cône σ de Σ . Alors, pour tout $g \in G_v$, $x = gx$ est dans l'intérieur relatif du cône $g\sigma$ de Σ , et donc $g\sigma = \sigma$. Ainsi $\sigma \in \Sigma^{G_v}$. Le reste du lemme en découle aisément. \square

Considérons l'application

$$\begin{aligned} G/G_\alpha &\longrightarrow \{w \in \mathcal{P}_{K_a}, v|w\} \\ g &\longmapsto g^{-1} \cdot \mathcal{V}|_{K_\alpha} \end{aligned}$$

Ce n'est autre que le passage au quotient par l'action de G_v , d'où une correspondance entre $\Sigma(1)_{G_v}^\alpha$ et les places de K_α au-dessus de v . Soit $\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^\alpha$ et w_β la place correspondante. On a alors

$$l_\beta = \frac{[G_v]}{[(g_\beta G_\alpha g_\beta^{-1} \cap G_v)]}$$

où $g_\beta \in G$ est tel que $\rho_\beta = g_\beta \cdot \rho_\alpha$.

Si v est non ramifiée dans L , on a alors

$$[k_{\mathcal{V}} : k_v] = [G_v]$$

et

$$[k_{\mathcal{V}} : k_{w_\beta}] = [g_\beta G_\alpha g_\beta^{-1} \cap G_v]$$

d'où $l_\beta = [k_{w_\beta} : k_v]$ et $q_{w_\beta} = q_v^{l_\beta}$.

Dans le cas fonctionnel, on a de plus $q_{w_\beta} = q_{K_\alpha}^{f_{w_\beta}} = q^{d_\alpha f_{w_\beta}}$ soit $f_v l_\beta = d_\alpha f_{w_\beta}$.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})/\mathbf{K}(\mathbf{G}_m) \cdot \mathbf{G}_m(K_\alpha) & \xrightarrow{\gamma} & T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T) \cdot T(K) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \prod_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^\alpha} \mathbf{G}_m(K_{w_\beta})/\mathbf{G}_m(\mathcal{O}_{w_\beta}) & \xrightarrow{\gamma_v} & T(K_v)/T(\mathcal{O}_v) \hookrightarrow (X(T)^\vee)^{G_v} \end{array}$$

L'application γ_v envoie π_{w_β} sur $e_\beta \tau_\beta$, où e_β désigne l'indice de ramification de w_β dans L . Elle provient du morphisme de G_v -modules

$$X(T) \longrightarrow \bigoplus_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^\alpha} \mathbf{Z} [(G_v/g_\beta G_\alpha g_\beta^{-1}) \cap G_v].$$

Ainsi si v n'est pas ramifiée dans K , $T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$ s'identifie à $(X(T)^\vee)^{G_v}$, car tout élément de $(X(T)^\vee)^{G_v}$ s'écrit comme une combinaison entière des τ_β pour $\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^\alpha$ et $\alpha \in \Sigma(1)_G$. Ceci vient du fait que

$$H^1(G_v, Q^\vee) \xrightarrow{\sim} H^{-1}(G_v, Q) = 0$$

car Q est flasque. La flèche $(P_\Sigma^\vee)^{G_v} \rightarrow (X(T)^\vee)^{G_v}$ est donc surjective. Nous retrouvons ainsi la proposition 2.10. On peut dans ce cas définir

$$\chi_v(\tau_\beta) = (\chi_\alpha)_{w_\beta} (\pi_{w_\beta}).$$

4.4 Les transformées de Fourier locales aux places non ramifiées

Rappelons que $\mathrm{PL}(\Sigma)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{G}}$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{C}^{\Sigma(1)G}$. Si $\phi = (s_{\alpha})$, nous désignerons alors la fonction $H_{\phi}(\cdot)$ par $H(\cdot, (s_{\alpha}))$ et la fonction $H_{\phi,v}(\cdot)$ par $H_v(\cdot, (s_{\alpha}))$.

Désormais nous choisissons pour S un sous-ensemble fini de \mathcal{P}_K contenant les places infinies et les places ramifiées dans L/K (ainsi, même s'il s'agit d'un détail purement technique, que les places v telles que $\int_{T(\mathcal{O}_v)} \omega_{T,v} \neq L_v(1, T)$).

Soit $v \in \mathcal{P}_K \setminus S$. Les auteurs de [BaTs1] définissent¹⁰ alors un polynôme à coefficients entiers $Q_{\Sigma,v}$ en les $[\Sigma(1)_{G_v}]$ indéterminées $(X_{\beta})_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}}$ par la formule

$$\sum_{\sigma \in \Sigma^{G_v}} \prod_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}} \frac{X_{\beta}}{1 - X_{\beta}} = \frac{Q_{\Sigma,v}(X_{\beta})}{\prod_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}} (1 - X_{\beta})}.$$

Un résultat facile mais important pour les résultats de convergence et de prolongement de la fonction zêta des hauteurs est ([BaTs1, Proposition 2.2.3])

Proposition 4.5 (Batyrev, Tschinkel)

Le polynôme $Q_{\Sigma,v}(X_{\beta}^{l_{\beta}}) - 1$ ne contient que des monômes de degré total supérieur ou égal à 2.

Le résultat suivant ([BaTs1, Theorem 2.2.6]) donne une expression explicite des transformées de Fourier locales aux places $v \notin S$.

Théorème 4.6 (Batyrev, Tschinkel)

Soit $v \notin S$ une place de K . Soit $\chi \in (T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$. On a pour tout $(s_{\alpha}) \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)G})$

$$\begin{aligned} & \int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(s_{\alpha})) \chi_v(x) d\mu_v \\ &= \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \prod_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^{\alpha}} \frac{1}{1 - \chi_v(\tau_{\beta}) q_v^{-l_{\beta} s_{\alpha}}} \right) \\ & \quad \times Q_{\Sigma,v} \left[\left(\chi_v(\tau_{\beta}) q_v^{-l_{\beta} s_{\alpha}} \right)_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^{\alpha}} \right]_{\alpha \in \Sigma(1)_G}. \end{aligned}$$

¹⁰la définition utilisée dans [BaTs1] est en fait légèrement différente car on y utilise le polynôme $Q_{\Sigma,v}(X_{\beta}^{l_{\beta}})$, ceci étant on obtient bien la même formule pour la transformée de Fourier locale.

Démonstration : Nous rappelons brièvement la preuve de ce théorème, donnée dans [BaTs1]. On utilise l'identification de $T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$ à $(X(T)^\vee)^{G_v}$ (proposition 2.10). Comme la fonction $H_v(\cdot, -(s_\alpha))$ est $T(\mathcal{O}_v)$ invariante, elle induit une fonction sur $(X(T)^\vee)^{G_v}$, qui sera notée de façon identique. Le lemme 4.4 permet d'écrire

$$\begin{aligned}
& \int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) \chi_v(x) d\mu_v \\
&= \left(\int_{T(\mathcal{O}_v)} d\mu_v \right) \sum_{x \in T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) \chi_v(x) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma^{G_v}} \sum_{x \in \text{intrel}(\sigma) \cap (X(T)^\vee)^{G_v}} H_v(x, -(s_\alpha)) \chi_v(x) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma^{G_v}} \sum_{n_\beta \in \mathbf{Z}_{>0}^{\sigma(1)G_v}} H_v \left(\sum n_\beta \tau_\beta, -(s_\alpha) \right) \chi_v \left(\sum n_\beta \tau_\beta \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma^{G_v}} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \prod_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}^\alpha} \sum_{n_\beta \in \mathbf{Z}_{>0}} q_v^{-n_\beta l_\beta s_\alpha} \chi_v(\tau_\beta)^{n_\beta} \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma^{G_v}} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \prod_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}^\alpha} \frac{\chi_v(\tau_\beta) q_v^{-l_\beta s_\alpha}}{1 - \chi_v(\tau_\beta) q_v^{-l_\beta s_\alpha}}.
\end{aligned}$$

d'où le résultat par définition de $Q_{\Sigma, v}$. L'avant-dernière égalité vient du fait que si $\phi = (s_\alpha)$, on a par définition de la hauteur locale (cf. section 3.2)

$$\begin{aligned}
H_v \left(\sum_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}} n_\beta \tau_\beta, -(s_\alpha) \right) &= q_v^{\sum_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}} n_\beta \phi(\tau_\beta)} \\
&= q_v^{\sum_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \sum_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}^\alpha} n_\beta l_\beta s_\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Les résultats de la section 4.3 montrent immédiatement le

Lemme 4.7

On a

$$\prod_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^\alpha} \frac{1}{1 - \chi_v(\tau_\beta) q_v^{-l_\beta s_\alpha}} = \prod_{\substack{w \in \mathcal{P}_{K_\alpha}, \\ w|v}} \frac{1}{1 - (\chi_\alpha)_w(\pi_w) q_w^{-s_\alpha}}.$$

soit dans le cas fonctionnel

$$\prod_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^\alpha} \frac{1}{1 - \chi_v(\tau_\beta) q_v^{-l_\beta s_\alpha}} = \prod_{\substack{w \in \mathcal{P}_{K_\alpha}, \\ w|v}} \frac{1}{1 - (\chi_\alpha)_w(\pi_w) q^{-f_w d_\alpha s_\alpha}}.$$

Rappelons que, dans le cas arithmétique, si $\chi = \chi_y''$, on a d'après le lemme 4.2

$$\begin{aligned} (\chi_\alpha)_w (\pi_w) q_w^{-s_\alpha} &= e^{i \log(q_w) y_\alpha} (\chi_\alpha'')_w (\pi_w) q_w^{-s_\alpha} \\ &= q_w^{-s_\alpha + i y_\alpha} (\chi_\alpha'')_w (\pi_w) \end{aligned}$$

et dans le cas fonctionnel, si $\chi = \chi_z''$ on a d'après le lemme 4.3

$$(\chi_\alpha)_w (\pi_w) q^{-f_w d_\alpha s_\alpha} = (z^{(m, \rho_\alpha)} q^{-s_\alpha})^{d_\alpha f_w} (\chi_\alpha'')_w (\pi_w).$$

4.5 Le cas des places ramifiées

En ce qui concerne l'expression des transformées de Fourier locales aux places ramifiées et aux places infinies, on a dans le cas arithmétique le résultat suivant.

Lemme 4.8

Soit $v \in S$, et χ'' un caractère de $(T(\mathbf{A}_K)^1 / \mathbf{K}(T).T(K))^*$. Il existe alors une fonction $f_{\chi'', v}$ holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G})$ et vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G, \quad \forall (s_\alpha) \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G}), \\ \int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) (\chi_y'')_v(x) \omega_{T,v} = f_{\chi'', v}(s_\alpha + i y_\alpha). \end{aligned}$$

Il est à noter qu'on a également (et surtout) besoin de majorations adéquates pour montrer le caractère \mathbf{L}^1 de $\mathcal{F}H_{-\phi}$ (cf. [BaTs3, Theorem 4.4.]).

Dans le cas fonctionnel, de telles majorations sont inutiles grce à la compacité de $(T(\mathbf{A}_K))^*$. Cependant nous avons besoin de renseignements précis sur la forme des fonctions obtenues, plus compliquée que dans le cas arithmétique. On se place dans la suite de cette section dans le cas fonctionnel.

On a alors l'existence d'un entier strictement positif m tels que les deux lemmes suivants sont vérifiés :

Lemme 4.9

Soit $v \in S$, et χ'' un caractère de $(T(\mathbf{A}_K)^1 / \mathbf{K}(T).T(K))^*$. Il existe alors une fonction f holomorphe sur $\{(z_n) \in \mathbf{C}^m, |z_n| < 1\}$, une famille $(\gamma_n)_{1 \leq n \leq m}$ d'éléments de \mathcal{D}_T ainsi qu'une famille d'entiers positifs $(\delta_{\alpha, n})_{n=1, \dots, m}$ telle que, $\alpha \in \Sigma(1)_G$

pour tout n , l'un au moins des $\delta_{\alpha,n}$ est non nul, vérifiant

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}, \quad \forall (s_\alpha) \in \mathcal{T} \left(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G} \right),$$

$$\int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) (\chi_{\mathbf{z}}'')_v(x) \omega_{T,v} = f \left(\mathbf{z}^\gamma q^{-\sum_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \delta_{\alpha,n} s_\alpha} \right)_{n=1, \dots, m}$$

Démonstration : Rappelons que nous avons identifié $T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$ à un sous-module d'indice fini de $(X(T)^\vee)^{G_v}$, et que pour tout $\beta \in \Sigma(1)_{G_v}$ ce sous-module contient $e_\beta \tau_\beta$. On a, la hauteur locale étant $T(\mathcal{O}_v)$ -invariante,

$$\int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) (\chi_{\mathbf{z}}'')_v(x) \omega_{T,v}$$

$$= \left(\int_{T(\mathcal{O}_v)} \omega_{T,v} \right) \sum_{x \in T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) (\chi_{\mathbf{z}}'')_v(x)$$

Soit $\sigma \in \Sigma^{G_v}$ et $x \in (\sigma) \cap T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$. Alors x s'écrit

$$x = \sum_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}} x_\beta e_\beta \tau_\beta + y$$

où les x_β sont des entiers positifs et y est un élément de l'ensemble fini

$$\left\{ \sum_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}} n_\beta \tau_\beta, \quad 0 \leq n_\beta < e_\beta \right\} \cap (T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)).$$

On a alors

$$H_v(x, -(s_\alpha)) (\chi_{\mathbf{z}}'')_v(x)$$

$$= \prod_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}} H_v(e_\beta \tau_\beta, -(s_\alpha))^{x_\beta} ((\chi_{\mathbf{z}}'')_v(e_\beta \tau_\beta))^{x_\beta}$$

$$\times H_v(y, -(s_\alpha)) (\chi_{\mathbf{z}}'')_v(y)$$

On voit qu'il suffit donc de montrer que pour tout $x \in T(K_v)/T(\mathcal{O}_v)$ non nul la fonction

$$(\mathbf{z}, (s_\alpha)) \longmapsto H_v(x, -(s_\alpha)) (\chi_{\mathbf{z}}'')_v(x)$$

est de la forme

$$(\mathbf{z}, (s_\alpha)) \longmapsto c \mathbf{z}^\gamma q^{-\sum_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \delta_\alpha s_\alpha},$$

où $\gamma \in \mathcal{D}_T$, les δ_α sont des entiers positifs non tous nuls, et c est un nombre complexe de module 1.

Soit x un tel élément, qui s'écrit d'après le lemme 4.4

$$x = \sum_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \sum_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}^\alpha} n_\beta \tau_\beta$$

où les n_β sont des entiers strictement positifs. On a

$$H_v(x, -(s_\alpha)) = \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \prod_{\beta \in \sigma(1)_{G_v}^\alpha} q_v^{-n_\beta l_\beta s_\alpha}.$$

Par ailleurs

$$\mathbf{z} \mapsto \frac{(\chi''_{\mathbf{z}})_v(x)}{(\chi''_v)(x)}$$

est un caractère de $\mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}$, d'où

$$(\chi''_{\mathbf{z}})_v(x) = c \mathbf{z}^\gamma$$

où $\gamma \in \mathcal{D}_T$ et c est un nombre complexe de module 1. Ceci montre le lemme.

□

Lemme 4.10

Il existe une fonction f holomorphe sur $\{z \in \mathbf{C}^m, |z_n| < 1\}$, une famille d'entiers positifs $(k_{\alpha,n})_{n=1,\dots,m}$, et une famille d'entiers positifs $(\delta_{\alpha,n})_{n=1,\dots,m}$ telle que, pour tout n , l'un au moins des $\delta_{\alpha,n}$ est non nul, vérifiant

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}, \quad \forall (s_\alpha) \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G}),$$

$$\int_{x \in \overline{T(K)}^S} H(x, -(s_\alpha)) (\mathbf{1}_{\mathbf{z}})_v(x) \prod_{v \in S} \omega_{T,v} = f \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{k_{\alpha,n} d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\delta_{\alpha,n} s_\alpha} \right)_{n=1,\dots,m}$$

Rappelons que l'on désigne par $\overline{T(K)}^S$ l'adhérence de l'image de $T(K)$ dans $\prod_{v \in S} T(K_v)$.

Démonstration : Notons

$$\mathbf{K}^S = \prod_{v \in S} T(\mathcal{O}_v).$$

On a

$$\begin{aligned} & \int_{x \in \overline{T(K)}^S} H_v(x, -(s_\alpha)) (\mathbf{1}_{\mathbf{z}})_v(x) \prod_{v \in S} \omega_{T,v} \\ &= \left(\int_{\overline{T(K)}^S \cap \mathbf{K}^S} \prod_{v \in S} \omega_{T,v} \right) \sum_{x \in \overline{T(K)}^S / (\overline{T(K)}^S \cap \mathbf{K}^S)} H(x, -(s_\alpha)) (\mathbf{1}_{\mathbf{z}})(x). \end{aligned}$$

Soit $(\sigma_v) \in \prod_{v \in S} \Sigma^{G_v}$. Tout élément (x_v) de $\overline{T(K)}^S / \left(\overline{T(K)}^S \cap \mathbf{K}^S \right) \cap (\sigma_v)_{v \in S}$ s'écrit

$$\left(\sum_{\beta \in (\sigma_v)_{G_v}(1)} x_\beta e_\beta \tau_\beta + y_v \right)_{v \in S}$$

où les x_β sont des entiers positifs et $y = (y_v)_{v \in S}$ est un élément de l'ensemble fini

$$\left(\left\{ \sum_{\beta \in (\sigma_v)_{G_v}(1)} n_\beta \tau_\beta, \quad 0 \leq n_\beta < e_\beta \right\} \right) \cap \overline{T(K)}^S / \left(\overline{T(K)}^S \cap \mathbf{K}^S \right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} H(x, -(s_\alpha))(\mathbf{1}_z)(x) \\ = (\mathbf{1}_z)(y) \prod_{v \in S} H_v(y_v, -(s_\alpha)) H_v(e_\beta \tau_\beta, -(s_\alpha))^{x_\beta} (\mathbf{1}_z)_v (e_\beta \tau_\beta)^{x_\beta}. \end{aligned}$$

On voit qu'il suffit pour montrer le lemme de montrer que pour tout x élément non nul de $\overline{T(K)}^S / \left(\overline{T(K)}^S \cap \mathbf{K}^S \right)$, la fonction

$$(\mathbf{z}, (s_\alpha)) \longmapsto H(x, -(s_\alpha))(\mathbf{1}_z)(x)$$

est de la forme

$$(\mathbf{z}, (s_\alpha)) \longmapsto \mathbf{z}^{\sum_{\alpha \in \Sigma(1)_G} k_\alpha d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\sum_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \delta_\alpha s_\alpha},$$

où les k_α sont des entiers et les δ_α sont des entiers positifs non tous nuls. Pour cela il suffit de remarquer la chose suivante : d'après la proposition 2.13, il existe $t \in T(K)$ et $y \in T(\mathbf{A}_K)$ un élément de l'image de $\prod_{\alpha} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})$ par γ tels que $x = yt$. Comme $\mathbf{1}_z$ est trivial sur $T(K)$, on obtient

$$\mathbf{1}_z(x) = \mathbf{1}_z(y) = \prod_{\alpha} (\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle})^{k_\alpha}.$$

où les k_α sont des entiers, la dernière égalité provenant du lemme 4.3. Ceci montre le lemme. \square

4.6 Propriétés analytiques de la transformée de Fourier globale

Pour $\alpha \in \Sigma(1)_G$, nous notons S_α les places de K_α au-dessus des places de S .

On va déduire de ce qui précède que pour tout $(s_\alpha) \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)G})$, la fonction $H(\cdot, -(s_\alpha))$ est \mathbf{L}^1 sur $T(\mathbf{A}_K)$, et des expressions explicites des transformées de Fourier.

Par la proposition 4.5, pour tout (s_α) dans $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>\frac{1}{2}}^{\Sigma(1)G})$ le produit eulérien

$$\prod_{v \notin S} Q_{\Sigma, v} \left[\left(q_v^{-l_\beta s_\alpha} \right)_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^\alpha} \right]_{\alpha \in \Sigma(1)_G}$$

est absolument convergent.

4.6.1 Cas fonctionnel

On a par le théorème 4.6 et le lemme 4.9

$$\begin{aligned} & \int_{x \in T(\mathbf{A}_K)} |H(x, -(s_\alpha))| \omega_{T, S} \\ &= \int_{x \in T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(\Re(s_\alpha))) \omega_{T, S} \\ &= q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)} \prod_{v \in S} \int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(\Re(s_\alpha))) \omega_{T, v} \\ & \quad \times \prod_{v \notin S} \int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(\Re(s_\alpha))) d\mu_v \\ &= \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha, S_\alpha} (q^{-d_\alpha \Re(s_\alpha)}) \right) \times \prod_{v \notin S} Q_{\Sigma, v} \left[\left(q_v^{-l_\beta \Re(s_\alpha)} \right)_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^\alpha} \right]_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \\ & \quad \times F((q^{-\Re(s_\alpha)})) \end{aligned}$$

(les fonctions Z_{K_α, S_α} ont été introduites à la section 4.1) où F est une fonction holomorphe sur $\{(z_\alpha) \in \mathbf{C}^{\Sigma(1)G}, |z_\alpha| < 1\}$. Ceci montre que pour (s_α) dans $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)G})$ la fonction $H(\cdot, -(s_\alpha))$ est \mathbf{L}^1 .

Soit alors $\chi'' \in (T(\mathbf{A}_K)^1 / \mathbf{K}(T) \cdot T(K))^*$. Par le théorème 4.6 et les lemmes 4.7 et 4.9, il existe une fonction $f_{\chi''}$ holomorphe sur

$$\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>\frac{1}{2}}^{\Sigma(1)G} \times \mathbf{R}_{>0}^m)$$

et, pour tout $n = 1, \dots, m$, des éléments $\gamma_n \in \mathcal{D}_T$ et des entiers positifs $(\delta_{\alpha, n})_{\alpha \in \Sigma(1)_G}$ non tous nuls, tels qu'on ait :

$$\forall (s_\alpha) \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)G}), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T},$$

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{F}H(\cdot, -(s_\alpha))) (\chi_{\mathbf{z}}'') \\
&= \int_{x \in T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s_\alpha)) \chi_{\mathbf{z}}''(x) \omega_{T,S} \\
&= q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)} \prod_{v \in S} \int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) (\chi_{\mathbf{z}}'')_v(x) \omega_{T,v} \\
&\quad \times \prod_{v \notin S} \int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) (\chi_{\mathbf{z}}'')_v(x) d\mu_v \\
&= \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathcal{L}_{K_\alpha, S_\alpha} \left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}, \chi_\alpha'' \right) \right) \\
&\quad \times f_{\chi''} \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right)_{\alpha \in \Sigma(1)_G}, \left(\mathbf{z}^{\gamma_n} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} q^{-\delta_{\alpha,n} s_\alpha} \right)_{n=1, \dots, m} \right).
\end{aligned}$$

Les fonctions $\mathcal{L}_{K_\alpha, S_\alpha}$ ont été introduites à la section 4.1. Remarquons que les γ_n et les $\delta_{\alpha,n}$ dépendent de χ'' , mais pour alléger l'écriture nous n'indiquons pas cette dépendance qui ne joue aucun rôle par la suite. La notation $\delta_{\alpha,n}$ est encore utilisée ci-dessous pour désigner d'autres entiers, encore une fois ceci est sans importance pour la suite.

Nous obtenons également, par le théorème 4.6 et les lemmes 4.7 et 4.10, le résultat suivant : il existe une fonction f holomorphe sur

$$\mathcal{T} \left(\mathbf{R}_{> \frac{1}{2}}^{\Sigma(1)_G} \times \mathbf{R}_{> 0}^m \right)$$

et, pour tout $n = 1, \dots, m$, des entiers $(k_{\alpha,n})$ et des entiers positifs $(\delta_{\alpha,n})$ non tous nuls, tels qu'on ait

$$\forall (s_\alpha) \in \mathcal{T} \left(\mathbf{R}_{> 1}^{\Sigma(1)_G} \right), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T},$$

$$\begin{aligned}
& \int_{x \in \overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s_\alpha)) \mathbf{1}_{\mathbf{z}}(x) \omega_{T,S} \\
&= q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)} \left(\prod_{v \notin S} \int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) (\mathbf{1}_{\mathbf{z}})_v(x) d\mu_v \right) \\
&\quad \times \int_{x \in \overline{T(K)}^S} H(x, -(s_\alpha)) (\mathbf{1}_{\mathbf{z}})(x) \prod_{v \in S} \omega_{T,v} \\
&= q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha, S_\alpha} (\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}) \right) \\
&\quad \times f \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right)_{\alpha \in \Sigma(1)_G}, \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{k_{\alpha,n} d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\delta_{\alpha,n} s_\alpha} \right)_{n=1, \dots, m} \right).
\end{aligned}$$

4.6.2 Cas arithmétique

On obtient, de façon similaire au cas fonctionnel,

$$\begin{aligned}
& \int_{x \in T(\mathbf{A}_K)} |H(x, -(s_\alpha))| \omega_{T,S} \\
&= \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \zeta_{K_\alpha, S_\alpha} (\Re(s_\alpha)) \right) \times \prod_{v \notin S} Q_{\Sigma, v} \left[\left(q_v^{-l_\beta \Re(s_\alpha)} \right)_{\beta \in \Sigma(1)_{G_v}^\alpha} \right]_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \\
&\quad \times F((-\Re(s_\alpha)))
\end{aligned}$$

où F est une fonction holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G})$, d'où le caractère \mathbf{L}^1 de $H(\cdot, -(s_\alpha))$ pour $(s_\alpha) \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G})$.

Les expressions explicites des transformées de Fourier sont plus simples que dans le cas fonctionnel. Soit $\chi'' \in (T(\mathbf{A}_K)^1 / \mathbf{K}(T).T(K))^*$. Il existe alors une fonction $f_{\chi''}$ holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>\frac{1}{2}}^{\Sigma(1)_G})$ vérifiant

$$\forall (s_\alpha) \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)_G}), \quad \forall y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G,$$

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{F}H(\cdot, -(s_\alpha))) (\chi_y'') \\
&= \text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}} \int_{x \in T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s_\alpha)) \chi_y''(x) \omega_{T,S} \\
&= \text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} L_{K_\alpha, S_\alpha} (s_\alpha + i y_\alpha, \chi_\alpha'') \right) f_{\chi''}(s_\alpha + i y_\alpha).
\end{aligned}$$

Il existe également une fonction f holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>\frac{1}{2}}^{\Sigma(1)G})$ vérifiant

$$\forall (s_\alpha) \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)G}), \quad \forall y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G,$$

$$\begin{aligned} & \int_{x \in \overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s_\alpha)) \mathbf{1}_y(x) \omega_{T,S} \\ &= \text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_{\Sigma})}{2}} \left(\prod_{v \notin S} \int_{x \in T(K_v)} H_v(x, -(s_\alpha)) (\mathbf{1}_y)_v(x) d\mu_v \right) \\ & \quad \times \int_{x \in \overline{T(K)}^S} H(x, -(s_\alpha)) (\mathbf{1}_y)(x) \prod_{v \in S} \omega_{T,v} \\ &= \text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_{\Sigma})}{2}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} \zeta_{K_\alpha, S_\alpha}(s_\alpha + i y_\alpha) \right) \times f((s_\alpha) + i y). \end{aligned}$$

4.7 L'expression intégrale de la fonction zêta des hauteurs

Dans le cas arithmétique comme dans le cas fonctionnel, nous conservons pour toute la suite du texte les notations f et f_χ pour les fonctions introduites à la section 4.6.

Notons γ^* le morphisme de caractères

$$(T(\mathbf{A}_K)^1 / \mathbf{K}(T) \cdot T(K))^* \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} (\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha})^1 / \mathbf{K}(\mathbf{G}_m) \mathbf{G}_m(K_\alpha))^*$$

induit par le morphisme

$$\gamma : \prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_{K_\alpha}) \longrightarrow T(\mathbf{A}_K)$$

défini à la section 4.2. Rappelons que par le lemme 2.13, $A(T)^*$ s'identifie à $\text{Ker}(\gamma^*)$.

Rappelons aussi que l'on désigne par r le rang de $X(T)^G$.

4.7.1 Cas fonctionnel

En vue d'obtenir une formule intégrale explicite, il nous faut déterminer la mesure de Haar induite par $d\chi$ sur chacun des facteurs du produit $(T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^* \times (T^1(\mathbf{A}_K)/T(K))^*$.

Rappelons que $(T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^* = \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}$ est un sous-groupe de $(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$ d'indice fini égal au cardinal de $T(\mathbf{A}_K)^1/\mathbf{K}(T).T(K)$. Notons $\text{cl}(T)$ ce cardinal. En appliquant la formule de Poisson 3.5 avec $\mathcal{G} = T(\mathbf{A}_K)$, $dg = \omega_{T,S}$, $\mathcal{H} = T(K)$, dh la mesure discrète, et $g \in \mathbf{K}(T)$, et en prenant pour fonction F l'indicatrice de $\mathbf{K}(T)$, on obtient

$$\int_{(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*} d\chi = \frac{[\mathbf{K}(T) \cap T(K)]}{\int_{\mathbf{K}(T)} \omega_{T,S}}$$

(rappelons que $\int_{\mathbf{K}(T)} \omega_{T,S} \neq 0$, cf. section 2.5). Or

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{K}(T)} \omega_{T,S} &= [\mathbf{K}(T) \cap T(K)] \int_{\mathbf{K}(T).T(K)/T(K)} \omega_{T,S}^1 \\ &= \frac{[\mathbf{K}(T) \cap T(K)]}{\text{cl}(T)} \int_{T(\mathbf{A}_K)^1/T(K)} \omega_{T,S}^1 \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*} d\chi = \frac{\text{cl}(T)}{\log(q)^r b_S(T)}.$$

Le volume de $\mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}$ pour la mesure $d\chi$ est donc égal à

$$\frac{1}{\log(q)^r b_S(T)}.$$

Pour $\phi = (s_\alpha)$ élément de $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)G})$, on a vu que $H(\cdot, -(s_\alpha))$ est \mathbf{L}^1 sur $T(\mathbf{A}_K)$, et qu'on peut alors directement appliquer le lemme 3.6.

On obtient donc l'expression

$$\begin{aligned} \sum_{x \in T(K)} H(x, -(s_\alpha)) &= \sum_{\chi'' \in \text{Ker}(\gamma^*)} \int_{\chi' \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*} (\mathcal{F}H(\cdot, -(s_\alpha))) (\chi' \chi'') d\chi' \\ &\quad + \sum_{\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)} \frac{q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)}}{\log(q)^r b_S(T)} I_{\chi''}(s_\alpha), \end{aligned}$$

où, pour $\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)$, $I_{\chi''}(s_\alpha)$ est définie par l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} \mathcal{L}_{K_\alpha, S_\alpha}(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}, \chi''_\alpha) \right) \\ \times f_{\chi''} \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right), \left(\mathbf{z}^{\gamma n} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha} \right) \right) d\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\chi'' \in \text{Ker}(\gamma^*)} \int_{\chi' \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*} (\mathcal{F}H(\cdot, -(s_\alpha))) (\chi' \chi'') d\chi' \\
&= \int_{\chi' \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*} \left(\sum_{\chi'' \in \text{Ker}(\gamma^*)} (\mathcal{F}H(\cdot, -(s_\alpha)) \chi') (\chi'') \right) d\chi' \\
&= \int_{\chi' \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*} [A(T)] \left(\int_{x \in \overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s_\alpha)) \chi'(x) \omega_{T,S} \right) d\chi' \\
&= \frac{q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)} [A(T)]}{\log(q)^r b_S(T)} I_1(s_\alpha)
\end{aligned}$$

où $I_1(s_\alpha)$ est la fonction donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha, s_\alpha} (\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}) \right) \\
& \quad \times f \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right), \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{k_{\alpha, n} d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha} \right) \right) d\mathbf{z}.
\end{aligned}$$

La deuxième égalité s'obtient par application de la formule de Poisson 3.5 avec $\mathcal{G} = T(\mathbf{A}_K)$, $\mathcal{H} = \overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)$, $dh = dg = \omega_{T,S}$ et $F = H(\cdot, -(s_\alpha)) \chi'$.

On obtient finalement :

Corollaire 4.11

Dans le cas fonctionnel, pour tout (s_α) élément de $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)_G})$, on a la représentation intégrale suivante

$$\sum_{x \in T(K)} H(x, -(s_\alpha)) = \frac{q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)}}{\log(q)^r b_S(T)} \left([A(T)] I_1(s_\alpha) + \sum_{\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)} I_{\chi''}(s_\alpha) \right)$$

où $I_1(s_\alpha)$ est la fonction donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha, s_\alpha} (\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}) \right) \\
& \quad \times f \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right), \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{k_{\alpha, n} d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha} \right) \right) d\mathbf{z}
\end{aligned}$$

et, pour $\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)$, $I_{\chi''}(s_\alpha)$ est définie par l'intégrale

$$\int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathcal{L}_{K_\alpha, S_\alpha}(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}, \chi''_\alpha) \right) \\ \times f_{\chi''} \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right), \left(\mathbf{z}^{\gamma^n} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha} \right) \right) d\mathbf{z}.$$

La technique pour évaluer de telles intégrales est développée à la section 5.

4.7.2 Cas arithmétique

De même que dans le cas fonctionnel, il faut expliciter la mesure $d\chi$. Rappelons que dans ce cas on a défini la mesure $\omega_{T,S}^1$ sur $T(\mathbf{A}_K)^1/T(\mathbf{A}_K)$ par la relation $\widetilde{\omega}_{T,S} = \omega_{T,S}^1 dt$, où $\widetilde{\omega}_{T,S}$ est la mesure quotient de $\omega_{T,S}$ sur $T(\mathbf{A}_K)/T(K)$, $T(K)$ étant muni de la mesure discrète, et dt est la mesure de Lebesgue sur $T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K) = ((X(T)^G)_{\mathbf{R}}^\vee)$ normalisée par le réseau $(X(T)^G)^\vee$. $d\chi$ est alors la mesure duale de $\widetilde{\omega}_{T,S}$. Si on note $(\omega_{T,S}^1)^*$ et $(dt)^*$ les mesures duales de $\omega_{T,S}^1$ et dt respectivement, on a

$$d\chi = (\omega_{T,S}^1)^* (dt)^*.$$

Maintenant, $T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)$ étant compact, $(\omega_{T,S}^1)^*$ est la mesure de Haar sur le groupe discret $(T^1(\mathbf{A}_K)/T(K))^*$ pour laquelle chaque point a pour masse

$$\frac{1}{\int_{T^1(\mathbf{A}_K)/T(K)} \omega_{T,S}^1} = \frac{1}{b_S(T)}.$$

Par ailleurs, on note désormais dy la mesure de Lebesgue sur

$$(T(\mathbf{A}_K)/T^1(\mathbf{A}_K))^* = X(T)_{\mathbf{R}}^G,$$

normalisée par le réseau $X(T)^G$. On sait qu'on a

$$dy = \frac{(dt)^*}{(2i\pi)^r}.$$

Pour appliquer le lemme 3.6, on a besoin d'abord de prouver le caractère \mathbf{L}^1 de $\mathcal{F}H_{-\phi}$ sur $(T(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T).T(K))^*$, ce qui était automatique dans le cas fonctionnel. Ceci est fait dans [BaTs3] en utilisant la décomposition de la transformée de Fourier en produit de transformées locales et des majorations

adéquates pour les transformées de Fourier locales aux places ramifiées et aux places infinies.

Ceci étant, on obtient pour tout (s_α) élément de $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)G})$ l'expression

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in T(K)} H(x, -(s_\alpha)) \\ &= \frac{\text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}}}{(2i\pi)^r b_S(T)} \sum_{\chi'' \in (T^1(\mathbf{A}_K)/\mathbf{K}(T) \cdot T(K))^*} \int_{y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} L_{K_\alpha, s_\alpha}(s_\alpha + iy_\alpha, \chi''_\alpha) \right) \\ & \quad \times f_{\chi''}(s_\alpha + iy_\alpha) dy. \end{aligned}$$

On a en fait

$$\begin{aligned} \sum_{x \in T(K)} H(x, -(s_\alpha)) &= \sum_{\chi'' \in \text{Ker}(\gamma^*)} \int_{\chi' \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*} (\mathcal{F}H(\cdot, -(s_\alpha))) (\chi' \chi'') d\chi' \\ & \quad + \sum_{\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)} \frac{\text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}}}{(2i\pi)^r b_S(T)} I_{\chi''}(s_\alpha), \end{aligned}$$

où, pour $\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)$, $I_{\chi''}(s_\alpha)$ est définie par l'intégrale

$$\int_{y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} L_{K_\alpha, s_\alpha}(s_\alpha + iy_\alpha, \chi''_\alpha) \right) f_{\chi''}((s_\alpha + iy_\alpha)) dy.$$

De façon similaire au cas fonctionnel, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi'' \in \text{Ker}(\gamma^*)} \int_{\chi' \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*} (\mathcal{F}H(\cdot, -(s_\alpha))) (\chi' \chi'') d\chi' \\ &= \int_{\chi' \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*} \left(\sum_{\chi'' \in \text{Ker}(\gamma^*)} (\mathcal{F}H(\cdot, -(s_\alpha)) \chi') (\chi'') \right) d\chi' \\ &= \int_{\chi' \in (T(\mathbf{A}_K)/T(\mathbf{A}_K)^1)^*} [A(T)] \left(\int_{x \in \overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s_\alpha)) \chi'(x) \omega_{T,S} \right) d\chi' \\ &= \frac{\text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}} [A(T)]}{(2i\pi)^r b_S(T)} I_1(s_\alpha), \end{aligned}$$

où $I_1(s_\alpha)$ est la fonction donnée par l'intégrale

$$\int_{y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} \zeta_{K_\alpha, s_\alpha}(s_\alpha + iy_\alpha) \right) f((s_\alpha + iy_\alpha)) dy.$$

On obtient donc :

Corollaire 4.12

Dans le cas arithmétique, pour tout $(s_\alpha) \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)G})$ on a la représentation intégrale

$$\sum_{x \in T(K)} H(x, -(s_\alpha)) = \frac{\text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}}}{(2i\pi)^r b_S(T)} \left([A(T)] I_1(s_\alpha) + \sum_{\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)} I_{\chi''}(s_\alpha) \right)$$

où $I_1(s_\alpha)$ est la fonction donnée par l'intégrale

$$\int_{y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} \zeta_{K_\alpha, S_\alpha}(s_\alpha + i y_\alpha) \right) \times f((s_\alpha) + i y) dy$$

et, pour $\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)$, $I_{\chi''}(s_\alpha)$ est définie par l'intégrale

$$\int_{y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} L_{K_\alpha, S_\alpha}(s_\alpha + i y_\alpha, \chi''_\alpha) \right) \times f_{\chi''}((s_\alpha) + i y) dy.$$

La technique pour évaluer une telle intégrale est développée par Bartyrev et Tschinkel dans [BaTs3].

5 Évaluation de l'intégrale

Le but de cette partie est d'obtenir un analogue du résultat technique de Batyrev et Tschinkel, adapté à la forme des fonctions obtenues dans le cas fonctionnel.

Rappelons d'abord, sinon l'énoncé précis du résultat de Batyrev et Tschinkel pour lequel nous renvoyons à [BaTs3, Section 6] (cf. également [CLTs, Section 3]), du moins sa forme.

Si f est une fonction de plusieurs variables complexes méromorphe en zéro, on note $\mu(f)$ la valuation du développement en série de Laurent de f au voisinage de zéro.

Soit $n \geq 1$ un entier et Γ un sous-module de \mathbf{Z}^n tel que $N = \mathbf{Z}^n/\Gamma$ est sans torsion et $\Gamma \cap \mathbf{R}_{\geq 0}^n = \{0\}$. On note π le morphisme quotient $\mathbf{Z}^n \rightarrow N$.

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^n)$. On suppose qu'il existe une écriture

$$f(\mathbf{s}) = C_0 \times_{\mathbf{Z}^n, \mathbf{R}_{\geq 0}^n}(\mathbf{s}) + f_0(\mathbf{s}) = \frac{C_0}{\prod_{i=1}^n s_i} + f_0(\mathbf{s})$$

où $C_0 \neq 0$ et f_0 est une fonction holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^n)$, admettant un prolongement méromorphe sur un domaine du type $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>-\varepsilon}^n)$ pour un certain $\varepsilon > 0$, et vérifiant

$$\mu(f_0) \geq -n + 1.$$

Sous des hypothèses convenables (notamment de croissance modérée dans les bandes i_i pour la fonction θ), on montre alors que la fonction

$$g(\mathbf{s}) = \int_{y \in \Gamma_{\mathbf{R}}} f(\mathbf{s} + i y) dy$$

est holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^n)$ et s'écrit

$$g(\mathbf{s}) = \frac{C_0}{(2i\pi)^{\text{rg}(\Gamma)}} \times_{N, \pi(\mathbf{R}_{\geq 0}^n)} (\pi(\mathbf{s})) + g_0(\mathbf{s})$$

où g_0 est une fonction holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^n)$ admettant un prolongement méromorphe sur un domaine du type $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>-\varepsilon'}^n)$ pour un certain $\varepsilon' > 0$ et vérifiant

$$\mu(g_0) \geq \dim(\Gamma) - n + 1.$$

La preuve consiste grosso modo en une récurrence sur la dimension de Γ utilisant le théorème des résidus. Elle est inadaptable telle quelle au type de fonctions que l'on a à traiter dans le cas fonctionnel, notamment en raison des pôles supplémentaires qui apparaissent sur la droite critique.

La suite de cette partie est consacrée à la démonstration de lemmes techniques adaptés à la situation rencontrée dans le cas fonctionnel.

5.1 Définition d'une certaine classe de fonctions

Soit N un \mathbf{Z} -module libre de rang fini. Pour toute partie A de $N_{\mathbf{R}}$ et toute application $a : A \cap N \rightarrow \mathbf{C}$ on définit

$$L_{N,A,a}(\mathbf{s}) = \sum_{y \in A \cap N} a_y q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle}$$

pour tout \mathbf{s} de $N_{\mathbf{C}}^{\vee}$ tel que cette série est absolument convergente. Pour un tel \mathbf{s} on notera également, pour tout élément \mathbf{z} de \mathbf{S}_N ,

$$\mathcal{L}_{N,A,a}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) = \sum_{y \in A \cap N} a_y \mathbf{z}^y q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle}$$

Si a est la fonction constante égale à 1, on notera $L_{N,A}$ pour $L_{N,A,a}$ et $\mathcal{L}_{N,A}$ pour $\mathcal{L}_{N,A,a}$.

5.1.1 Un premier exemple

Soit Υ un cône de N , tel que Υ^* soit d'intérieur non vide. La série définissant $L_{N,\Upsilon}(\mathbf{s})$ converge alors absolument pour tout \mathbf{s} de $\mathcal{T}(\text{int}(\Upsilon^*))$. La fonction $L_{N,\Upsilon}(\mathbf{s})$ est utilisée par Peyre dans [Pe2] pour une définition alternative de la constante α^* . On a en effet le résultat suivant

Lemme 5.1

Soit λ_0 un élément de l'intérieur de Υ^* . L'application

$$s \longmapsto L_{N,\Upsilon}(s.\lambda_0)$$

est bien définie et holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0})$, et se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} , avec un pôle d'ordre au plus la dimension de Υ en $s = 0$. Si de plus Υ^* est strictement convexe, l'ordre de ce pôle est exactement $\text{rg}(N)$, et on a

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s^{\text{rg}(N)} L_{N,\Upsilon}(s.\lambda_0)) = \log(q)^{-\text{rg}(N)} \times_{N,\Upsilon^*}(\lambda_0).$$

On a donc en particulier d'après (1.4.1)

$$\alpha^*(X_\Sigma) = \log(q)^{\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))} \lim_{s \rightarrow 0} [s^{\text{rg}(\text{Pic}(X_\Sigma))} L_{\text{Pic}(X_\Sigma)^\vee, C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^*}(s[-\mathcal{K}_{X_\Sigma}])]. \quad (5.1.1)$$

Remarquons en outre que si $N' \subset N$ est un sous réseau d'indice fini de N on a

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s^{\text{rg}(N)} L_{N,\Upsilon}(s.\lambda_0)) = [N : N'] \lim_{s \rightarrow 0} (s^{\text{rg}(N)} L_{N',\Upsilon}(s.\lambda_0)). \quad (5.1.2)$$

Démonstration : Nous introduisons ici des notations que nous utiliserons par la suite.

On écrit Υ comme le support d'un éventail régulier Δ , dont l'ensemble des rayons est noté $\Delta(1)$. Pour $l \in \Delta(1)$ nous notons m_l le générateur du rayon l . Pour tout cône δ de Δ nous notons également

$$I_\delta = \{l \in \Delta(1), l \in \delta\}$$

l'ensemble de ses rayons (ainsi $I_{\{0\}} = \emptyset$). Pour toute partie I de $\Delta(1)$ nous noterons

$$C(I) = \sum_{i \in I} \mathbf{N}_{>0} m_i$$

de sorte que $C(I_\delta)$ est l'ensemble des points du réseau N contenu dans l'intérieur relatif du cône δ .

On a alors

$$L_{N,\Upsilon}(\mathbf{s}) = \sum_{\delta \in \Delta} L_{N,C(I_\delta)}(\mathbf{s}).$$

soit encore en termes plus explicites

$$L_{N,\Upsilon}(\mathbf{s}) = \sum_{\delta \in \Delta} \prod_{l \in I_\delta} \left(\frac{1}{1 - q^{-\langle m_l, \mathbf{s} \rangle}} - 1 \right).$$

d'où le résultat, car le cardinal maximal des ensembles I_δ est la dimension de Υ .

Si Υ est de dimension $\text{rg}(N)$, on obtient la dernière assertion du lemme en découpant l'intégrale sur Υ en somme d'intégrales sur les cônes maximaux de Δ . □

5.1.2 Encore quelques définitions

On fixe désormais *pour toute la suite de la section 5* un cône Λ de $N_{\mathbf{R}}$ d'intérieur non vide et strictement convexe (cette dernière condition équivaut au fait que Λ^* est d'intérieur non vide). On suppose que Λ est engendré par une base de N , on notera $(\lambda_i)_{i \in I}$ la base duale d'une telle base, qui engendre donc de $\Lambda^* \cap N^\vee$. On posera

$$\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i.$$

On définit, pour tout réel η ,

$$\Lambda_{>\eta}^* = \sum_{i \in I} \mathbf{R}_{>\eta} \lambda_i \subset N_{\mathbf{R}}^\vee$$

Ainsi $\Lambda_{>0}^*$ est l'intérieur de Λ^* .

Soit $m \geq 1$ un entier. Soit

$$a : (\Lambda \cap N)^m \rightarrow \mathbf{C}$$

une application et $\varepsilon > 0$ un réel tels que la série définissant $L_{N^m, (\Lambda \cap N)^m, a}(\mathbf{s}_n)$ converge absolument pour tout (\mathbf{s}_n) du domaine $\mathcal{T}(\Lambda_{>-\varepsilon}^*)^m$. Ceci équivaut à demander la convergence de la série

$$\sum_{(y_n) \in (\Lambda \cap N)^m} |a_{y_1, \dots, y_m}| q^{\eta \sum_n \langle y_n, \lambda \rangle}$$

pour tout $\eta < \varepsilon$.

Pour tout $1 \leq n \leq m$ soit

$$\psi_n : N_{\mathbf{R}} \rightarrow N_{\mathbf{R}}$$

une application linéaire. Il existe alors un $\eta > 0$ tel que pour tout n , on ait

$$\psi_n^\vee (\Lambda_{>-\eta}^* \cap \Lambda_{<\eta}^*) \subset \Lambda_{>-\varepsilon}^*.$$

On peut donc définir une fonction holomorphe sur le domaine $\mathcal{T} (\Lambda_{>-\eta}^* \cap \Lambda_{<\eta}^*)$ par la formule

$$f(\mathbf{s}) = L_{N^m, (\Lambda \cap N)^m, a} [\psi_n^\vee(\mathbf{s})]$$

Une telle fonction sera appelée *fonction presque admissible de multiplicité supérieure à zéro*.

Si $r \geq 1$ est un entier, une fonction holomorphe sur un domaine du type $\mathcal{T} (\Lambda_{>0}^* \cap \Lambda_{<\eta}^*)$ sera appelée *fonction presque admissible de multiplicité supérieure à $-r$* s'il existe une écriture

$$f(\mathbf{s}) = g(\mathbf{s}) L_{N, \text{intrel}(\Upsilon)}(\mathbf{s})$$

où $\Upsilon \subset \Lambda$ est un cône de dimension inférieure à r , et $g(\mathbf{s})$ est presque admissible de multiplicité supérieure à 0. Une telle fonction f se prolonge donc en une fonction méromorphe sur le domaine $\mathcal{T} (\Lambda_{>-\eta}^* \cap \Lambda_{<\eta}^*)$.

Si f est une fonction presque admissible de multiplicité supérieure à $-r$, pour tout λ_0 élément de l'intérieur de Λ^* la fonction d'une variable complexe

$$s \mapsto f(s \lambda_0)$$

est méromorphe sur un voisinage de zéro, et a un pôle d'ordre au plus r en zéro.

On appellera *fonction admissible de multiplicité supérieure à $-r$* une fonction holomorphe sur le domaine $\mathcal{T} (\Lambda_{>0}^*)$ et s'écrivant, pour un $\eta > 0$, et pour tout \mathbf{s} dans le domaine $\mathcal{T} (\Lambda_{>0}^* \cap \Lambda_{<\eta}^*)$ comme somme finie de fonctions presque admissibles de multiplicité supérieure à $-r$. Une telle fonction se prolonge donc en une fonction méromorphe sur le domaine

$$\mathcal{T} ((\Lambda_{>-\eta}^* \cap \Lambda_{<\eta}^*) \cup \Lambda_{>0}^*)$$

(et même sur $\mathcal{T} (\Lambda_{>-\eta}^*)$ par un résultat de prolongement à la clôture convexe).
jj

5.1.3 Une généralisation du premier exemple

Soit Υ un cône de N contenu dans Λ . On notera $\langle \Upsilon \rangle$ le sous-espace vectoriel de $N_{\mathbf{R}}$ engendré par Υ . Soit z un élément de $\Lambda \cap N$. On pose

$$\Upsilon_z = \Upsilon \cap \{z + \Lambda\}.$$

On veut étudier

$$L_{N, \Upsilon_z}(\mathbf{s}) = \sum_{\substack{y \in \Upsilon \cap N \\ y \in z + \Lambda \cap N}} q^{\langle y, \mathbf{s} \rangle}.$$

Nous utilisons la même technique que dans la section 4.3.3. de [Bo2]. Nous écrivons

$$L_{N, \Upsilon_z}(\mathbf{s}) = \sum_{\delta \in \Delta} L_{N, \Upsilon_z \cap C(I_\delta)}(\mathbf{s})$$

Pour $\delta \in \Delta$, nous décomposons encore

$$L_{N, \Upsilon_z \cap C(I_\delta)}(\mathbf{s}) = \sum_{K \subset I} (-1)^{|K|} L_{N, C(I_\delta)_{K,z}}(\mathbf{s})$$

où $C(I_\delta)_{K,z}$ est le sous-ensemble de $C(I_\delta)$ formé des éléments y vérifiant

$$\forall i \in K, \langle \lambda_i, y \rangle < \langle \lambda_i, z \rangle.$$

Posons

$$M = [I] \sup_{l \in \Delta(1)} \langle m_l, \lambda \rangle.$$

On a alors

Lemme 5.2

Soient δ un cône de Δ , et K une partie (éventuellement vide) de I . Alors on a une décomposition

$$L_{N, C(I_\delta)_{K,z}}(\mathbf{s}) = L_{N, C(I_{\delta,K})}(\mathbf{s}) L_{N, F(\delta, K, z)}(\mathbf{s})$$

où $I_{\delta,K}$ est un sous-ensemble (éventuellement vide) de I_δ et $F(\delta, K, z)$ est un sous-ensemble fini de $C(I_\delta)_{K,z}$. On a

$$[F(\delta, K, z)] \leq \langle z, \lambda \rangle^{\text{rg}(N)}. \quad (5.1.3)$$

Pour tout $y \in F(\delta, K, z)$ on a

$$\langle y, \lambda \rangle \leq M \langle z, \lambda \rangle. \quad (5.1.4)$$

Par ailleurs si K est vide, on a $I_{\delta,K} = I_\delta$ et $F(\delta, K, z) = \emptyset$.

Supposons enfin $(N / \langle \Upsilon \rangle)^\vee \cap \Lambda^* = \{0\}$. Alors si δ est de dimension maximale, et si K est non vide, $I_{\delta,K}$ est un sous-ensemble strict de I_δ .

Démonstration : Cette démonstration est très similaire à celle du lemme 3 de [Bo2]. Si K est vide, il n'y a rien à démontrer.

Si K n'est pas vide, nous posons

$$I_{\delta,K} = \{l \in I_\delta, \forall i \in K, \langle m_l, \lambda_i \rangle = 0\}$$

et $I'_{\delta,K} = I_\delta \setminus I_{\delta,K}$. Un élément y de $C(I_\delta)$ s'écrit donc de manière unique $y_1 + y_2$ avec $y_1 \in C(I_{\delta,K})$ et $y_2 \in C(I'_{\delta,K})$. Par ailleurs, pour tout $i \in K$ on a $\langle y, \lambda_i \rangle = \langle y_2, \lambda_i \rangle$. Donc si y est dans $C(I_\delta)_{K,z}$, i.e. vérifie

$$\forall i \in K, \langle y, \lambda_i \rangle < \langle z, \lambda_i \rangle$$

alors y_2 est dans $C(I'_{\delta,K})_{K,z}$. Réciproquement tout $y \in C(I_\delta)$ s'écrivant $y_1 + y_2$ avec $y_1 \in C(I_{\delta,K})$ et $y_2 \in C(I'_{\delta,K})_{K,z}$ est un élément de $C(I_\delta)_{K,z}$.

On a donc une décomposition

$$L_{N,C(I_\delta)_{K,z}}(\mathbf{s}) = L_{N,C(I_{\delta,K})}(\mathbf{s}) L_{N,C(I'_{\delta,K})_{K,z}}(\mathbf{s}).$$

Notons $F(\delta, K, z) = C(I'_{\delta,K})_{K,z}$ et montrons que $F(\delta, K, z)$ est fini. Soit y_2 un élément de $F(\delta, K, z)$, qu'on écrit

$$y_2 = \sum_{l \in I'_{\delta,K}} \mu_l m_l$$

avec les μ_l dans $\mathbf{N}_{>0}$.

Par définition de $I'_{\delta,K}$, pour tout l de $I'_{\delta,K}$, il existe i dans K vérifiant $\langle m_l, \lambda_i \rangle \geq 1$ (rappelons que pour tout i on a $\langle m_l, \lambda_i \rangle \geq 0$). Comme y_2 vérifie

$$\forall i \in K, \langle y_2, \lambda_i \rangle < \langle z, \lambda_i \rangle$$

on a

$$\mu_l < \text{Sup}_{i \in K} \langle z, \lambda_i \rangle \leq \langle z, \lambda \rangle.$$

Ainsi $F(\delta, K, z)$ est fini et son cardinal est majoré par

$$\langle z, \lambda \rangle^{[I'_{\delta,K}]} \leq \langle z, \lambda \rangle^{\text{rg}(N)}$$

Par ailleurs un y_2 de $F(\delta, K, z)$ vérifie

$$0 \leq \langle y_2, \lambda \rangle \leq \sum_{l \in I'_{\delta,K}} \langle z, \lambda \rangle \langle m_l, \lambda \rangle \leq M \langle z, \lambda \rangle$$

où on rappelle que

$$M = [I] \text{Sup}_{l \in \Delta(1)} (\langle m_l, \lambda \rangle).$$

Supposons $(N/\langle \Upsilon \rangle)^\vee \cap \Lambda^* = \{0\}$. Ceci équivaut à dire que si $\lambda \in \Lambda^*$ vérifie $\langle m, \lambda \rangle = 0$ pour tout $m \in \langle \Upsilon \rangle$ alors $\lambda = 0$. Mais si δ est de dimension maximale, les $(m_l)_{l \in I_\delta}$ engendrent $\langle \Upsilon \rangle$, et donc si K n'est pas vide, $I'_{\delta,K}$ ne peut être vide. Ceci montre la dernière assertion du lemme. \square

5.2 Comportement des fonctions étudiées par intégration

Soit M un sous \mathbf{Z} -module de N tel que le quotient $\Gamma = M/N$ soit libre. On notera π l'application $N \rightarrow \Gamma$ et ρ l'application $N^\vee \rightarrow M^\vee$.

Nous aurons en particulier à considérer la situation où $\Gamma^\vee \cap \Lambda^* = \{0\}$. Cette hypothèse équivaut au fait que $\rho(\Lambda^*)$ est strictement convexe, ou que $\Lambda \cap M_{\mathbf{R}} = \rho(\Lambda^*)^*$ est d'intérieur non vide, ou encore que l'intérieur de Λ rencontre M .

Lemme 5.3

Sous cette hypothèse, soit

$$\phi : N \rightarrow N$$

un morphisme.

Il existe alors un morphisme

$$\psi : N \rightarrow M$$

tel que

$$(\phi + \psi)(\Lambda) \subset \Lambda.$$

Démonstration : Soit m_0 un élément de M qui est dans l'intérieur de Λ . Soit (λ_i^\vee) la base de N duale de (λ_i) , elle engendre donc Λ .

On pose alors

$$\psi(\lambda_i^\vee) = n_i m_0$$

où $n_i \in \mathbf{N}$ est tel que

$$n_i m_0 + \phi(\lambda_i^\vee) \in \Lambda$$

ce qui définit un morphisme ψ vérifiant la propriété recherchée. □

Notons que pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{T}(\Lambda_{>0}^*)$ on a

$$L_{N, \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}}(\mathbf{s}) = L_{M, \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}}(\pi^\vee(\mathbf{s})).$$

Les lemmes 5.4 et 5.5 ne serviront pas par la suite, ils sont donnés car leur preuve permet de mieux appréhender la démonstration des lemmes 5.6 et 5.7, légèrement plus techniques.

Lemme 5.4

On a

$$\int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathcal{L}_{N, \Lambda}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) d\mathbf{z} = L_{N, \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}}(\mathbf{s}).$$

Démonstration : Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \sum_{y \in \Lambda \cap N} \mathbf{z}^y q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle} d\mathbf{z} &= \sum_{y \in \Lambda \cap N} q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle} \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathbf{z}^y d\mathbf{z} \\
&= \sum_{\substack{y \in \Lambda \cap N \\ \pi(y)=0}} q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle} \\
&= \sum_{y \in \Lambda \cap M} q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle} \\
&= L_{N, \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}}(\mathbf{s})
\end{aligned}$$

d'où le lemme. \square

Afin de calculer le terme principal de la fonction zêta des hauteurs, nous voulons généraliser ce résultat ainsi : supposons donnée $a : \Lambda \cap N \rightarrow \mathbf{C}$ et $\varepsilon > 0$ tels que la série définissant $L_{N, \Lambda, a}(\mathbf{s})$ converge absolument pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{T}(\Lambda_{>-\varepsilon}^*)$. Comme déjà indiquée, ceci équivaut au fait que pour tout $\eta < \varepsilon$ la série

$$\sum_{y \in \Lambda \cap N} |a_y| q^{\eta \langle y, \lambda \rangle}$$

est convergente.

L'intégrale

$$\int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathcal{L}_{N, \Lambda, a}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) \mathcal{L}_{N, \Lambda}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) d\mathbf{z}$$

définit de toute évidence une fonction holomorphe sur le domaine $\mathcal{T}(\Lambda_{>0}^*)$, notée $f_1(\mathbf{s})$.

Lemme 5.5

On fait l'hypothèse que $\Gamma^\vee \cap \Lambda^* = \{0\}$. On a alors une écriture

$$f_1(\mathbf{s}) = L_{N, \Lambda, a}(0) L_{N, \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}}(\mathbf{s}) + g_1(\mathbf{s})$$

où $g_1(\mathbf{s})$ est une fonction admissible de multiplicité supérieure à $1 - \text{rg}(M)$.

Démonstration : On a pour tout \mathbf{s} de $\mathcal{T}(\Lambda_{>0}^*)$,

$$\mathcal{L}_{N, \Lambda, a}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) \mathcal{L}_{N, \Lambda}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) = \sum_{y \in \Lambda \cap N} a_y \mathbf{z}^y q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle} \sum_{y \in \Lambda \cap N} \mathbf{z}^y q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathcal{L}_{N,\Lambda,a}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) \mathcal{L}_{N,\Lambda}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) d\mathbf{z} &= \sum_{(y_0, y_1) \in (\Lambda \cap N)^2} a_{y_1} q^{-\langle y_0 + y_1, \mathbf{s} \rangle} \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathbf{z}^{y_0 + y_1} d\mathbf{z} \\
&= \sum_{y_1 \in \Lambda \cap N} a_{y_1} \sum_{\substack{y_0 \in \Lambda \cap N \\ \pi(y_0 + y_1) = 0}} q^{-\langle y_0 + y_1, \mathbf{s} \rangle} \\
&= \sum_{y_1 \in \Lambda \cap N} a_{y_1} \sum_{\substack{y_0 \in \Lambda \cap M \\ y_0 \in y_1 + \Lambda \cap N}} q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle}.
\end{aligned}$$

On applique alors le lemme 5.2 avec $\Upsilon = \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}$. On obtient la décomposition

$$f_1(\mathbf{s}) = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{K \subset I} (-1)^{|K|} L_{N,C(I_{\delta,K})}(\mathbf{s}) \sum_{y_1 \in \Lambda \cap N} a_{y_1} L_{N,F(\delta,K,y_1)}(\mathbf{s}).$$

Soient δ et K donnés. D'après les majorations (5.1.3) et (5.1.4) on a pour tout η

$$\sum_{y_1 \in \Lambda \cap N} |a_{y_1}| \sum_{y \in F(\delta,K,y_1)} q^{\eta \langle y, \lambda \rangle} \leq \sum_{y_1 \in \Lambda \cap N} |a_{y_1}| \langle y_1, \lambda \rangle^{\text{rg}(N)} q^{\eta M \langle y_1, \lambda \rangle}.$$

et cette dernière série converge pour tout $\eta < \frac{\varepsilon}{M}$. Ainsi la série

$$\sum_{y \in \Lambda \cap N} \left(\sum_{\substack{y_1 \in \Lambda \cap N \\ y \in F(\delta,K,y_1)}} a_{y_1} \right) q^{-\langle y, \mathbf{s} \rangle}$$

définit une fonction admissible de multiplicité supérieure à 0. Comme $\Gamma^\vee \cap \Lambda^* = \{0\}$, d'après la dernière assertion du lemme 5.2 la fonction

$$L_{N,C(I_{\delta,K})}(\mathbf{s}) \sum_{y_1 \in \Lambda \cap N} a_{y_1} L_{N,F(\delta,K,y_1)}(\mathbf{s}).$$

est, si $K \neq \emptyset$, une fonction admissible de multiplicité supérieure à $1 - \text{rg}(M)$.

La contribution des termes correspondant à $K = \emptyset$ dans la décomposition ci-dessus est

$$\left(\sum_{y_1 \in \Lambda \cap N} a_{y_1} \right) \times \left(\sum_{\delta \in \Delta} L_{N,C(I_\delta)}(\mathbf{s}) \right) = L_{N,\Lambda,a}(0) \times L_{M,\Lambda \cap M_{\mathbf{R}}}(\mathbf{s})$$

d'où le lemme. □

Le lemme précédent est jmoralement j suffisant pour obtenir le prolongement analytique de la fonction zêta des hauteurs ainsi que son comportement à l'origine, à partir de la représentation intégrale. Il est par exemple suffisant dans le cas d'une variété torique déployée. Cependant, dans le cas général, l'expression obtenue pour les transformées de Fourier locales aux places non ramifiées nous obligent à en donner des versions un peu plus générales (et un peu plus techniques).

Soit $m \geq 1$ un entier. Pour $1 \leq n \leq m$, soient $\phi_n : N \rightarrow N$ un morphisme $\psi_n : N_{\mathbf{R}} \rightarrow N_{\mathbf{R}}$ une application linéaire telle que $\psi_n(\Lambda) \subset \Lambda$.

Soit $a : (\Lambda \cap N)^m \rightarrow \mathbf{C}$ telle que la série définissant

$$L_{N^m, \Lambda^m, a}(\mathbf{s}_n)$$

converge absolument pour $(\mathbf{s}_n) \in \mathcal{T}(\Lambda_{>\varepsilon}^*)^m$ pour un $\varepsilon > 0$. Comme déjà indiqué, ceci équivaut au fait que pour tout $\eta < \varepsilon$ la série

$$\sum_{(y_n) \in (\Lambda \cap N)^m} |a_{y_1, \dots, y_m}| q^{\eta \sum_n \langle y_n, \lambda \rangle}$$

est convergente.

L'intégrale

$$\int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\Gamma}} \mathcal{L}_{N^m, \Lambda^m, a}(\mathbf{z} \circ \phi_n q^{-\psi_n^{\vee}(\mathbf{s})}) \mathcal{L}_{N, \Lambda}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) d\mathbf{z}$$

définit alors une fonction holomorphe sur $\mathcal{T}(\Lambda_{>0}^*)$, notée $f_2(\mathbf{s})$. Pour $\lambda_0 \in \Lambda_{>0}^*$, la fonction

$$s \mapsto f_2(s \lambda_0)$$

est donc bien définie et holomorphe sur le domaine $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0})$, notons là $f_2^{\lambda_0}$.

Lemme 5.6

On a une écriture

$$f_2(\mathbf{s}) = h_2(\mathbf{s}) L_{M, \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}}(\mathbf{s}) + g_2(\mathbf{s})$$

où $g_2(\mathbf{s})$ est une somme de fonctions presque admissibles de multiplicité supérieure à $1 - \text{rg}(M)$, et $h_2(\mathbf{s})$ est presque admissible de multiplicité supérieure à zéro et vérifie $h_2(0) = L_{N^m, \Lambda^m, a}(0, \dots, 0)$.

En particulier, pour tout $\lambda_0 \in \Lambda_{>0}^*$, la fonction $f_2^{\lambda_0}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>-\varepsilon'})$ pour un certain $\varepsilon' > 0$, avec un pôle d'ordre au plus $\text{rg}(M)$ en $s = 0$. On a

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{\text{rg}(M)} f_2^{\lambda_0}(s) = L_{N^m, \Lambda^m, a}(0, \dots, 0) \lim_{s \rightarrow 0} s^{\text{rg}(M)} L_{N, \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}}(s \lambda_0).$$

Démonstration : Par le lemme 5.3 on peut supposer que $\phi_n(\Lambda) \subset \Lambda$.
La fonction sous l'intégrale s'écrit

$$\sum_{\substack{y_0 \in \Lambda \cap N \\ (y_n) \in (\Lambda \cap N)^m}} a_{y_1, \dots, y_m} \mathbf{z}^{y_0 + \sum_{0 \leq n \leq m} \phi_n(y_n)} q^{-\langle y_0 + \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathcal{L}_{N, \Lambda, a}(\mathbf{z} \circ \phi_n q^{-\psi_n(\mathbf{s})}) \mathcal{L}_{N, \Lambda}(\mathbf{z} q^{-\mathbf{s}}) d\mathbf{z} \\ &= \sum_{(y_n) \in (\Lambda \cap N)^{m+1}} a_{y_1, \dots, y_m} q^{-\langle y_0 + \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle} \\ & \quad \times \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathbf{z}^{y_0 + \sum_{0 \leq n \leq m} \phi_n(y_n)} d\mathbf{z} \end{aligned}$$

Cette dernière expression est égale à

$$\sum_{(y_1, \dots, y_m) \in (\Lambda \cap N)^m} a_{y_1, \dots, y_m} \sum_{\substack{y_0 \in \Lambda \cap N \\ y_0 + \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) \in \Lambda \cap M}} q^{-\langle y_0 + \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle}$$

elle même égale à

$$\sum_{(y_1, \dots, y_m) \in (\Lambda \cap N)^m} a_{y_1, \dots, y_m} q^{\langle \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) - \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle} \sum_{\substack{y_0 \in \Lambda \cap M \\ y_0 \in \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) + \Lambda \cap N}} q^{-\langle y_0, \mathbf{s} \rangle}$$

En appliquant le lemme 5.2 avec $\Upsilon = \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}$, on obtient la décomposition

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{s}) &= \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{K \subset I} (-1)^{[K]} L_{N, C(I_{\delta, K})}(\mathbf{s}) \\ & \quad \times \sum_{(y_1, \dots, y_n)} a_{y_1, \dots, y_n} L_{N, F(\delta, K, \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n))}(\mathbf{s}) \\ & \quad \times q^{\langle \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) - \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle}. \end{aligned}$$

Soient K, δ donnés. D'après les majorations (5.1.3) et (5.1.4) on a pour tout η

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{y \in \Lambda \cap N \\ (y_1, \dots, y_n) \in (\Lambda \cap N)^m \\ y \in F(\delta, K, \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n))}} q^{\eta \langle y + \sum_{1 \leq n \leq m} y_n, \lambda \rangle} \\
& \leq \sum_{(y_1, \dots, y_n) \in (\Lambda \cap N)^m} |a_{y_1, \dots, y_n}| \langle \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n), \lambda \rangle^{\text{rg}(N)} q^{\eta \langle M \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) + \sum_{1 \leq n \leq m} y_n, \lambda \rangle} \\
& \leq \sum_{(y_1, \dots, y_n)} |a_{y_1, \dots, y_n}| M_\phi^{\text{rg } N} \langle \sum_{1 \leq n \leq m} y_n, \lambda \rangle^{\text{rg}(N)} q^{\eta(M+M_\phi) \langle \sum_{1 \leq n \leq m} y_n, \lambda \rangle}.
\end{aligned}$$

où $M_\phi > 0$ est une constante vérifiant

$$\forall n, \forall y \in \Lambda, \langle \phi_n(y), \lambda \rangle \leq M_\phi \langle y, \lambda \rangle.$$

La dernière série converge alors pour $\eta < \frac{\varepsilon}{M+M_\phi}$. Ainsi la fonction

$$\mathbf{s} \mapsto \sum_{(y_1, \dots, y_n)} a_{y_1, \dots, y_n} L_{N, F(\delta, K, \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n))}(\mathbf{s}) q^{\langle \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) - \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle}$$

est presque admissible de multiplicité supérieure à zéro.

La contribution des termes correspondant à $K = \emptyset$ est

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\delta \in \Delta} L_{N, C(I_{\delta, K})}(\mathbf{s}) \right) \times \sum_{(y_1, \dots, y_n)} a_{y_1, \dots, y_n} q^{\langle \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) - \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle} \\
& = h_2(\mathbf{s}) \times L_{N, \Lambda \cap M_{\mathbf{R}}}(\mathbf{s})
\end{aligned}$$

où $h_2(\mathbf{s})$ est une fonction presque admissible de multiplicité supérieure à zéro, vérifiant $h_2(0) = L_{N^m, \Lambda^m, a}(0, \dots, 0)$. Comme dans la preuve du lemme 5.6, la dernière assertion du lemme 5.2 permet de conclure. \square

Considérons à présent la situation suivante. Soit $I' \subset I$ un sous-ensemble *strict* de I , et $\Lambda' \subset \Lambda$ le cône engendré par les $(\lambda_i^\vee)_{i \in I'}$. Si on suppose que Γ vérifie $\Gamma^\vee \cap \Lambda^* = \{0\}$, $\Lambda' \cap M_{\mathbf{R}}$ est d'intérieur vide dans $M_{\mathbf{R}}$. En effet ce cône est le dual du cône $\rho(\Lambda')$, qui contient la droite engendrée par l'élément non nul $\rho(\lambda_{i_0})$, où $i_0 \notin I$.

Soit $\phi : N \rightarrow N$ un morphisme tel que :

- $\phi_{\mathbf{R}} : N_{\mathbf{R}} \rightarrow N_{\mathbf{R}}$ est un isomorphisme
- $\phi(\Lambda') \subset \Lambda'$ et $\phi(\Lambda) \subset \Lambda$.

L'intégrale

$$\int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathcal{L}_{N^m, \Lambda^m, a} \left(\mathbf{z} \circ \phi_n q^{-\psi_n^\vee(\mathbf{s})} \right) \mathcal{L}_{N, \Lambda'} (\mathbf{z} \circ \phi q^{-\phi^\vee(\mathbf{s})}) d\mathbf{z}$$

définit alors une fonction holomorphe sur $\mathcal{T}(\Lambda_{>0}^*)$, notée $f_3(\mathbf{s})$.

Pour $\lambda_0 \in \Lambda_{>0}^*$, la fonction

$$s \mapsto f_3(s \lambda_0)$$

est donc bien définie et holomorphe sur le domaine $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0})$, notons là $f_3^{\lambda_0}$.

Lemme 5.7

On suppose que Γ vérifie $\Gamma^\vee \cap \Lambda^* = \{0\}$. Alors $f_3^{\lambda_0}$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>-\varepsilon'})$ pour un certain $\varepsilon' > 0$, avec un pôle d'ordre au plus $\text{rg}(M) - 1$ en zéro.

Démonstration : La fonction sous l'intégrale s'écrit

$$\sum_{\substack{y_0 \in \Lambda' \cap N \\ (y_n) \in (\Lambda \cap N)^m}} a_{y_1, \dots, y_m} \mathbf{z}^{\phi(y_0) + \sum_{0 \leq n \leq m} \phi_n(y_n)} q^{-\langle \phi(y_0) + \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathcal{L}_{N, \Lambda, a} (\mathbf{z} \circ \phi_n q^{-\psi_n(\mathbf{s})}) \mathcal{L}_{N, \Lambda'} (\mathbf{z} \circ \phi q^{-\phi^\vee(\mathbf{s})}) d\mathbf{z} \\ &= \sum_{\substack{y_0 \in \Lambda' \cap N \\ (y_n) \in (\Lambda \cap N)^{m+1}}} a_{y_1, \dots, y_m} q^{-\langle \phi(y_0) + \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle} \times \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_\Gamma} \mathbf{z}^{\phi(y_0) + \sum_{0 \leq n \leq m} \phi_n(y_n)} d\mathbf{z} \end{aligned}$$

Cette dernière expression est égale à

$$\sum_{(y_1, \dots, y_m) \in (\Lambda \cap N)^m} a_{y_1, \dots, y_m} \sum_{\substack{y_0 \in \Lambda' \cap N \\ \phi(y_0) + \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) \in \Lambda \cap M}} q^{-\langle \phi(y_0) + \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle}$$

elle même égale à

$$\begin{aligned} & \sum_{(y_1, \dots, y_m) \in (\Lambda \cap N)^m} a_{y_1, \dots, y_m} q^{\langle \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) - \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \rangle} \\ & \times \sum_{\substack{y_0 \in \Lambda' \cap M \\ y_0 \in \sum_{1 \leq n \leq m} \phi^{-1}[\phi_n(y_n)] + \Lambda \cap \phi^{-1}(N)}} q^{-\langle y_0, \phi^\vee(\mathbf{s}) \rangle} \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 5.2 avec $\Upsilon = \Lambda' \cap M_R$, on obtient la décomposition

$$f_3(\mathbf{s}) = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{K \subset I} (-1)^{[K]} L_{N, C(I_{\delta, K})}(\phi^\vee(\mathbf{s})) \\ \times \sum_{(y_1, \dots, y_n)} a_{y_1, \dots, y_n} L_{\phi^{-1}(N), F\left(\delta, K, \sum_{1 \leq n \leq m} \phi^{-1}[\phi_n(y_n)]\right)}(\phi^\vee(\mathbf{s})) \\ \times q^{\left\langle \sum_{1 \leq n \leq m} \phi_n(y_n) - \sum_{1 \leq n \leq m} \psi_n(y_n), \mathbf{s} \right\rangle}$$

et le fait que $\Lambda' \cap M_R$ soit d'intérieur vide, donc de dimension inférieure à $\text{rg}(M) - 1$, permet de conclure. \square

6 Application aux fonctions zêta des hauteurs

6.1 Préliminaires

Rappelons que $X(T)^G$ s'identifie à un sous-réseau de $\mathbf{Z}^{\Sigma(1)G}$ via la suite exacte

$$0 \longrightarrow X(T)^G \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Sigma(1)G} \longrightarrow \text{Pic}(X_\Sigma) \longrightarrow H^1(G, X(T)) \longrightarrow 0. \quad (6.1.1)$$

Soit $m \in X(T)^G$ vérifiant

$$\forall \alpha \in \Sigma(1)_G, \quad \langle m, \rho_\alpha \rangle \geq 0.$$

Alors on a

$$\forall \alpha \in \Sigma(1), \quad \forall \rho \in \alpha, \quad \langle m, \rho \rangle \geq 0.$$

L'éventail Σ étant complet, ses rayons engendrent $X(T)^\vee$, ce qui entraîne $m = 0$. Nous avons donc

$$X(T)^G \cap \mathbf{Z}_{\geq 0}^{\Sigma(1)G} = \{0\} \quad (6.1.2)$$

(on aurait pu aussi directement utiliser le fait général que $C_{\text{eff}}(X_\Sigma)$ est strictement convexe).

Dans le cas fonctionnel, on a par ailleurs un complexe

$$\mathcal{D}_{T_{\text{NS}}} \longrightarrow \mathcal{D}_{T_{P_\Sigma}} \longrightarrow \mathcal{D}_T, \quad (6.1.3)$$

Notons $\mathcal{D}_{T_{\text{NS}}}^0$ le noyau du morphisme $\mathcal{D}_{T_{P_\Sigma}} \rightarrow \mathcal{D}_T$, et \mathcal{D}_T^0 son image. D'après la proposition 2.16 $\mathcal{D}_{T_{\text{NS}}}^0$ est d'indice

$$\frac{h(T) [\mathcal{C}_{T_{\text{NS}}}] [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T}{[\mathcal{C}_{T_{P_\Sigma}}]} \quad (6.1.4)$$

dans $\mathcal{D}_{T_{P_\Sigma}}$.

6.2 Application des lemmes techniques

6.2.1 Cas arithmétique

Rappelons que d'après le corollaire 4.12 on a pour tout (s_α) élément de $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)G})$ la représentation intégrale

$$\sum_{x \in T(K)} H(x, -(s_\alpha)) = \frac{\text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}}}{(2i\pi)^r b_S(T)} \left([A(T)] I_1(s_\alpha) + \sum_{\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)} I_{\chi''}(s_\alpha) \right)$$

où $I_1(s_\alpha)$ est la fonction donnée par l'intégrale

$$\int_{y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} \zeta_{K_\alpha, s_\alpha}(s_\alpha + iy_\alpha) \right) \times f((s_\alpha) + iy) dy$$

et, pour $\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)$, $I_{\chi''}(s_\alpha)$ est définie par l'intégrale

$$\int_{y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} L_{K_\alpha, s_\alpha}(s_\alpha + iy_\alpha, \chi''_\alpha) \right) \times f_{\chi''}((s_\alpha) + iy) dy.$$

On a alors une expression

$$\zeta_H((s_\alpha)) = \frac{\text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}} [A(T)]}{(2i\pi)^r b_S(T)} \int_{y \in X(T)_{\mathbf{R}}^G} g((s_\alpha) + iy) dy$$

où, pour tout $s_\alpha \in \mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1}^{\Sigma(1)G})$,

$$g((s_\alpha)) = \frac{P((s_\alpha))}{\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} (1 - s_\alpha)},$$

P désignant une fonction holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>\frac{1}{2}}^{\Sigma(1)G})$, avec

$$P(1, \dots, 1) = \lim_{s \rightarrow 1} \left((s-1)^{[\Sigma(1)G]} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} \zeta_{K_\alpha, s_\alpha}(s) \right) f((s, \dots, s)) \right).$$

On note C_0 la constante

$$\frac{[A(T)] \text{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}}}{b_S(T)} P(1, \dots, 1).$$

On verra à la section 6.3 qu'elle est non nulle.

On a donc une écriture

$$g((s_\alpha - 1)) = \frac{b_S(T)}{[A(T)] \operatorname{disc}(K)^{-\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}}} C_0 \times_{\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}, \mathbf{R}_{\geq 0}^{\Sigma(1)_G}} ((s_\alpha)) + Q(s_\alpha)$$

où Q est une fonction holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G})$, qui se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>-\frac{1}{2}}^{\Sigma(1)_G})$, vérifiant

$$\mu(Q) \geq -[\Sigma(1)_G] + 1.$$

On montre alors que les hypothèses pour appliquer le lemme technique évoqué au début de la partie 5 sont vérifiées. L'hypothèse de croissance modérée sur les bandes provient de l'existence de majorations uniformes pour les fonctions L .

On en déduit qu'on a une expression

$$\begin{aligned} \zeta_H((1 + s_\alpha)) &= \frac{C_0}{(2i\pi)^r} (2i\pi)^r \times_{\pi(\mathbf{Z}^{\Sigma(1)_G}), \pi(\mathbf{R}_{\geq 0}^{\Sigma(1)_G})} (\pi(s_\alpha)) + R((s_\alpha)) \\ &= C_0 h(T) \times_{\operatorname{Pic}(X_\Sigma), C_{\operatorname{eff}}(X_\Sigma)} (\pi(s_\alpha)) + R((s_\alpha)), \end{aligned}$$

où R est une fonction holomorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G})$, qui se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>-\varepsilon}^{\Sigma(1)_G})$, vérifiant

$$\mu(Q) \geq -[\Sigma(1)_G] + r + 1 = -t + 1.$$

La deuxième égalité provient de la formule (1.3.2) et de la suite exacte (6.1.1).

On en déduit que pour un certain $\varepsilon > 0$ la fonction

$$s \longmapsto \zeta_{\phi_0}(s) = \zeta_H(s(1, \dots, 1))$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1-\varepsilon})$ avec un unique pôle d'ordre $t = \operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X_\Sigma))$ en $s = 1$, de terme principal en $s = 1$ égal à

$$h(T) \alpha^*(X_\Sigma) C_0. \tag{6.2.1}$$

6.2.2 Cas fonctionnel

Rappelons que d'après le corollaire 4.11 on a pour tout (s_α) élément de $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>0}^{\Sigma(1)_G})$ la représentation intégrale

$$\zeta_H(s_\alpha) = \frac{q^{(1-g)\dim(X_\Sigma)}}{\log(q)^r b_S(T)} \left([A(T)] I_1(s_\alpha) + \sum_{\chi'' \notin \operatorname{Ker}(\gamma^*)} I_{\chi''}(s_\alpha) \right)$$

où $I_1(s_\alpha)$ est donnée par la formule

$$\int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha, S_\alpha} (\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}) \right) \\ \times f \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right), \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{k_{\alpha, n} d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha} \right) \right) d\mathbf{z}$$

et $I_{\chi''}(s_\alpha)$ par la formule

$$\int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathcal{L}_{K_\alpha, S_\alpha} (\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}, \chi''_\alpha) \right) \\ \times f_{\chi''} \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right), \left(\mathbf{z}^{\gamma n} \prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha} \right) \right) d\mathbf{z}.$$

Soit tout d'abord $\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)$ et étudions

$$I_{\chi''}(s_\alpha) = \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathcal{L}_{K_\alpha, S_\alpha} (\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}, \chi''_\alpha) \right) \\ \times f_{\chi''} \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right), \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{h_{\alpha, n} \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha} \right) \right) d\mathbf{z}.$$

Par le lemme 1.4 on peut remplacer dans l'intégrale ci-dessus $\mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}$ par $\mathbf{S}_{(X(T)G)^\vee}$.

L'ensemble des $\alpha \in \Sigma(1)_G$ tel que χ''_α est non trivial est donc non vide, et, par le lemme 4.1, pour de tels α la fonction $\mathcal{L}_{K_\alpha, S_\alpha}(\cdot, \chi''_\alpha)$ est holomorphe sur \mathbf{C} . Pour les autres α la fonction L correspondante est une fonction zêta, et finalement on a une écriture (posant $k_{\alpha, 0} = \delta_{\alpha, 0} = d_\alpha$)

$$I_{\chi''}((s_\alpha) + (1, \dots, 1)) = \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{(X(T)G)^\vee}} \frac{P_{\chi''}(\mathbf{z}^{h_{\alpha, n} \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha})_{\substack{\alpha \in \Sigma(1)_G \\ n=0, \dots, m}}}{\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G \setminus \{\alpha_0\}} (1 - \mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha})} d\mathbf{z}$$

où $P_{\chi''}$ est une fonction en $(m+1)[\Sigma(1)_G]$ variables, holomorphe sur

$$\left\{ (z_{\alpha, n}) \in \mathbf{C}^{(m+1)[\Sigma(1)_G]}, \quad |z_{\alpha, n}| \leq q^{\frac{1}{2}} \right\},$$

et α_0 est un élément de $\Sigma(1)_G$. On peut donc écrire, avec les notations de la section 5 et en prenant $N = (X(T_P)^G)^\vee$ et $\Lambda = \mathbf{R}_{\geq 0}^{\Sigma(1)_G}$

$$\begin{aligned} I_{\chi''}((s_\alpha) + (1, \dots, 1)) \\ = \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{(X(T)^G)^\vee}} \mathcal{L}_{N^{m+1}, \Lambda^{m+1}, a}(\mathbf{z} \circ \phi_n q^{-\psi_n^\vee(s)}) \mathcal{L}_{N, \Lambda'}(\mathbf{z} q^{-\phi^\vee(s)}) d\mathbf{z} \end{aligned}$$

pour une application a convenable (on prend le développement de P en série entière au voisinage de 1), $\Lambda' = \mathbf{N}^{\Sigma(1)_G \setminus \{\alpha_0\}}$ et pour des morphismes ϕ_n , ψ_n et ϕ définis de manière évidente. On applique alors le lemme 5.7 (ce qui est licite d'après (6.1.2)) et on obtient que

$$s \mapsto I_{\chi''}((s, \dots, s) + (1, \dots, 1))$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>-\varepsilon'})$ pour un certain $\varepsilon' > 0$, avec un pôle d'ordre au plus

$$[\Sigma(1)_G] - r - 1 = t - 1$$

en zéro.

Étudions à présent $I_1(s_\alpha)$, qui pour mémoire est donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}} \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha, S_\alpha}(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha}) \right) \\ \times f \left(\left(\mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha} \right), \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \mathbf{z}^{k_{\alpha, n} d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha} \right) \right) d\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Par le lemme 1.4 (rappelons que les $d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle$ sont des éléments de \mathcal{D}_T^0), on peut remplacer dans l'intégrale ci-dessus $\mathbf{S}_{\mathcal{D}_T}$ par $\mathbf{S}_{\mathcal{D}_T^0}$. Posant $k_{\alpha, 0} = 1$ et $\delta_{\alpha, 0} = d_\alpha$, on voit qu'on a une écriture

$$I_1((s_\alpha) + (1, \dots, 1)) = \int_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}_{\mathcal{D}_T^0}} \frac{P(\mathbf{z}^{k_{\alpha, n} d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha})_{\alpha \in \Sigma(1)_G}}{\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} (1 - \mathbf{z}^{d_\alpha \langle m, \rho_\alpha \rangle} q^{-d_\alpha s_\alpha})_{n=0, \dots, m}} d\mathbf{z}$$

où P est une fonction en $(m+1)[\Sigma(1)_G]$ variables, holomorphe sur

$$\left\{ (z_{\alpha, n}) \in \mathbf{C}^{(m+1)[\Sigma(1)_G]}, \quad |z_{\alpha, n}| \leq q^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

On peut donc écrire, avec les notations de la section 5, et en prenant $N = \mathcal{D}_{TP_\Sigma}$ et $\Lambda = \mathbf{R}_{\geq 0}^{\Sigma(1)G}$

$$I_1((s_\alpha) + (1, \dots, 1)) = \int_{\mathbf{z} \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}_T^0}} \mathcal{L}_{N^{m+1}, \Lambda^{m+1}, a} \left(\mathbf{z} \circ \phi_n q^{-\psi_n^\vee(s)} \right) \mathcal{L}_{N, \Lambda}(\mathbf{z} q^{-s}) d\mathbf{z}$$

pour une application a convenable (on prend le développement de P en série entière au voisinage de 1) et pour des morphismes ϕ_n et ψ_n définis de manière évidente.

Soit

$$\Theta(s_{\alpha, n}) = \frac{P(q^{-s_{\alpha, n}})}{\prod_{\alpha \in \Sigma(1)G} (1 - q^{-s_{\alpha, 0}})}$$

et $\theta(s_\alpha) = \Theta(\delta_{\alpha, n} s_\alpha)$. On montrera à la section 6.3 que la constante

$$C_0 = \frac{q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)} [A(T)]}{\log(q)^r b_S(T)} \lim_{s \rightarrow 0} s^{[\Sigma(1)G]} \theta(s, \dots, s)$$

est non nulle. Nous avons donc

$$\begin{aligned} P(1, \dots, 1) &= L_{N^m, \Lambda^m, a}(0, \dots, 0) \\ &= \log q^{[\Sigma(1)G]} \left(\prod_{\alpha} d_{\alpha} \right) \frac{\log(q)^r b_S(T)}{q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)} [A(T)]} C_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Nous appliquons alors le lemme 5.6 (ce qui est licite d'après (6.1.2)) et obtenons finalement (compte tenu également de ce qui précède) que

$$\begin{aligned} &\zeta_H((s, \dots, s) + (1, \dots, 1)) \\ &= \frac{q^{(1-g) \dim(X_\Sigma)} [A(T)]}{\log(q)^r b_S(T)} \left(I_1((s, \dots, s) + (1, \dots, 1)) + \sum_{\chi'' \notin \text{Ker}(\gamma^*)} I_{\chi''}((s, \dots, s) + (1, \dots, 1)) \right) \end{aligned}$$

ser prolonge en une fonction méromorphe sur un ouvert du type $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>-\varepsilon})$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et que

$$\begin{aligned} &\lim_{s \rightarrow 0} s^t \zeta_H(1 + s, \dots, 1 + s) \\ &= \log(q)^{[\Sigma(1)G]} \left(\prod_{\alpha} d_{\alpha} \right) C_0 \lim_{s \rightarrow 0} s^t L_{\mathcal{D}_{TNS}^0, \Lambda \cap \mathcal{D}_{TNS}^0} (s(1, \dots, 1)). \end{aligned}$$

On en déduit que $\zeta_0(s) = \zeta_H((s, \dots, s))$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathcal{T}(\mathbf{R}_{>1-\varepsilon})$ avec un pôle d'ordre t en $s = 0$, de terme principal

$$\log(q)^{[\Sigma(1)_G]} [\mathcal{C}_{T_{P_\Sigma}}] C_0 \lim_{s \rightarrow 0} s^t L_{\mathcal{D}_{T_{NS}}^0, \Lambda \cap \mathcal{D}_{T_{NS}}^0}(s(1, \dots, 1)).$$

D'après (5.1.2), (6.1.4) et (5.1.1), on a

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s^t L_{\mathcal{D}_{T_{NS}}^0, \Lambda \cap \mathcal{D}_{T_{NS}}^0}(s(1, \dots, 1)) &= \frac{h(T) [\mathcal{C}_{T_{NS}}] [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T}{[\mathcal{C}_{T_{P_\Sigma}}]} \lim_{s \rightarrow 0} s^t L_{\mathcal{D}_{T_{NS}}, \Lambda \cap \mathcal{D}_{T_{NS}}}(s(1, \dots, 1)) \\ &= \frac{h(T) [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T}{[\mathcal{C}_{T_{P_\Sigma}}]} \lim_{s \rightarrow 0} s^t L_{\text{Pic}(X_\Sigma)^\vee, C_{\text{eff}}(X_\Sigma)^*}(s(1, \dots, 1)) \\ &= \frac{h(T) [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T}{[\mathcal{C}_{T_{P_\Sigma}}]} \log(q)^{-t} \alpha^*(X_\Sigma). \end{aligned}$$

Le terme principal de la fonction zêta des hauteurs en $s = 1$ vaut donc

$$\log(q)^r h(T) [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T \alpha^*(X_\Sigma) C_0 \quad (6.2.2)$$

dans le cas fonctionnel.

6.3 Calcul de la constante

Nous calculons à présent la constante C_0 (et montrons en particulier qu'elle est non nulle). Rappelons que le calcul en caractéristique zéro est effectué dans [BaTs3].

On a

$$\theta(s_\alpha - 1) = \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} \zeta_{K_\alpha, S_\alpha}(s_\alpha) \right) f((s_\alpha))$$

dans le cas arithmétique et

$$\theta(s_\alpha - 1) = \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(1)_G} Z_{K_\alpha, S_\alpha}(q^{-d_\alpha s_\alpha}) \right) f((q^{-d_\alpha s_\alpha}), (q^{-\delta_{\alpha, n} s_\alpha}))$$

dans le cas fonctionnel.

On en déduit, d'après les formules de la section 4.6,

$$\theta((s_\alpha - 1)) = C_{K, X_\Sigma} \int_{T(K) \cap T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s_\alpha)) \omega_{T, S}.$$

où C_{K, X_Σ} désigne $\text{disc}(K)^{\frac{\dim(X_\Sigma)}{2}}$ dans le cas arithmétique et $q^{(g-1)\dim(X_\Sigma)}$ dans le cas fonctionnel. On utilise alors le scindage

$$\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K) = \overline{T(K)}^S \times T(\mathbf{A}_K)_S$$

(lemme 2.12) et les calculs explicites des transformées de Fourier aux places non ramifiées pour trouver que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{[\Sigma(1)_G]} \int_{\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)} H(x, -(s, \dots, s)) \omega_{T,S} \\ = l_S(T) l_S(X_\Sigma) C_{K, X_\Sigma} \int_{\overline{T(K)}^S} \prod_{v \in S} H_v(x, -(1, \dots, 1)) \omega_{T,v} \\ \times \prod_{v \notin S} Q_{\Sigma, v}(q_v^{-1}, \dots, q_v^{-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\overline{T(K)}^S} \prod_{v \in S} H_v(x, -(1, \dots, 1)) \omega_{T,v} \times \prod_{v \notin S} Q_{\Sigma, v}(q_v^{-1}, \dots, q_v^{-1}) \\ = \int_{\overline{T(K)}^S} \prod_{v \in S} \omega_{X_\Sigma, v} \times \prod_{v \notin S} \int_{T(K_v)} \omega_{X_\Sigma, v}. \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois le scindage $\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K) = \overline{T(K)}^S \times T(\mathbf{A}_K)_S$, cette dernière expression vaut

$$C_{K, X_\Sigma} \int_{\overline{T(K)} \cap T(\mathbf{A}_K)} \omega_{X_\Sigma} = C_{K, X_\Sigma} \int_{X_\Sigma(K)} \omega_{X_\Sigma},$$

la dernière égalité étant conséquence du lemme 3.2.

On en déduit

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{[A(T)]}{\log(q)^r b_S(T)} l_S(T) l_S(X_\Sigma) \int_{X_\Sigma(K)} \omega_{X_\Sigma}. \\ &= \frac{[A(T)]}{\log(q)^r b_S(T)} l_S(T) l_S(X_\Sigma) \int_{X_\Sigma(K)} \omega_{X_\Sigma}. \end{aligned}$$

dans le cas fonctionnel et

$$C_0 = \frac{[A(T)]}{b_S(T)} l_S(T) l_S(X_\Sigma) \int_{X_\Sigma(K)} \omega_{X_\Sigma}$$

dans le cas arithmétique.

Or, par le lemme 2.14, on a

$$[A(T)] = \frac{[H^1(G, \text{Pic}(X_{\Sigma, L}))]}{i(T)}.$$

De plus, par le théorème d'Ono et Oesterlé (théorème 2.6) ,

$$\frac{l_S(T)}{b_S(T)} = \frac{1}{\tau(T)} = \frac{i(T)}{h(T)}$$

dans le cas arithmétique et

$$\frac{l_S(T)}{b_S(T)} = \frac{1}{\tau(T) [\mathcal{C}_T]} = \frac{i(T)}{[\mathcal{C}_T] h(T)}$$

dans le cas fonctionnel.

On en déduit

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{h(T)} [H^1(G, \text{Pic}(X_{\Sigma, L}))] l_S(X_{\Sigma}) \int_{X_{\Sigma}(K)} \omega_{X_{\Sigma}} \\ &= \frac{1}{h(T)} \beta(X_{\Sigma}) \gamma_H(X_{\Sigma}) \end{aligned}$$

dans le cas arithmétique et

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{[\mathcal{C}_T]} \log(q)^{-r} \frac{1}{h(T)} [H^1(G, \text{Pic}(X_{\Sigma, L}))] l_S(X_{\Sigma}) \int_{X_{\Sigma}(K)} \omega_{X_{\Sigma}} \\ &= \log(q)^{-r} \frac{1}{h(T) [\mathcal{C}_T]} \beta(X_{\Sigma}) \gamma_H(X_{\Sigma}) \end{aligned}$$

dans le cas fonctionnel.

Le terme principal de la fonction zêta des hauteurs en $s = 1$ est donc, d'après (6.2.1),

$$h(T) \alpha^*(X_{\Sigma}) \frac{1}{h(T)} \beta(X_{\Sigma}) \gamma_H(X_{\Sigma}) = \alpha^*(X_{\Sigma}) \beta(X_{\Sigma}) \gamma_H(X_{\Sigma}).$$

dans le cas arithmétique et, d'après (6.2.2),

$$\begin{aligned} \log(q)^r h(T) [\mathcal{C}_T] \mathcal{K}_T \alpha^*(X_{\Sigma}) \log(q)^{-r} \frac{1}{h(T) [\mathcal{C}_T]} \beta(X_{\Sigma}) \gamma_H(X_{\Sigma}) \\ = \mathcal{K}_T \alpha^*(X_{\Sigma}) \beta(X_{\Sigma}) \gamma_H(X_{\Sigma}). \end{aligned}$$

dans le cas fonctionnel. En particulier, ceci achève la démonstration du théorème 3.4.

Références

- [BaTs1] V.V. BATYREV, Y. TSCHINKEL. Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori. *Int. Math. Res. Notices*, **12**, 1995. p. 591-635.
- [BaTs3] V.V. BATYREV, Y. TSCHINKEL. Manin's conjecture for toric varieties. *J. of Algebraic Geometry*, **7**, 1998. p. 15-53.
- [Bki] N. BOURBAKI. *Éléments de mathématiques XXXII : Théories spectrales. Chapitres 1 et 2*. Actualités scientifiques et industrielles **1332**, Hermann, Paris, 1967.
- [Bo1] D. BOURQUI. Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel. *J. of Number Theory*, **94**, 2002. p. 343-358.
- [Bo2] D. BOURQUI. Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques déployées dans le cas fonctionnel. *J. reine angew. Math.*, **562**, 2003. p. 171-199.
- [Bo3] D. BOURQUI. Fonctions zêta des hauteurs des variétés toriques en caractéristique positive. Thèse de doctorat, Grenoble, 2003. Disponible à l'URL www-fourier.ujf-grenoble.fr/~bourqui/
- [CLTs] A. CHAMBERT-LOIR, Y. TSCHINKEL. Fonctions zêta des hauteurs des espaces fibrés in *Rational points on algebraic varieties*, E. Peyre & Y. Tschinkel, eds. Birkhäuser (2001). p. 71-115.
- [CTHaSk] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. HARARI, N. SKOROBOGATOV. Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann) Prépublication, mai 2003.
- [CTSa] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC. La R-équivalence sur les tores. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, **10**, 1977. p. 175-230.
- [CTSu] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, V. SURESH. Un double contre-exemple. Prépublication, novembre 2004.
- [Dr] P.K.J. DRAXL. L-Funktionen K-algebraischer Tori. *J. of Number Theory*, **3**, 1971. p. 444-467.
- [FrMaTs] J. FRANKE, Y. MANIN, Y. TSCHINKEL. Rational points of bounded height on Fano varieties. *Invent. Math.*, **95**, 1989. p. 421-435.
- [Fu] W. FULTON. *Introduction to toric varieties*. Annals of Mathematics Studies **31**, Princeton University Press (1993).
- [Ha] H. HASSE. *Number theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **229**, Springer, 1980.
- [LaYe] K.F. LAI, K.M. YEUNG. Rational points in flag varieties over function fields. *J. of Number Theory*, **95**, 2002. p. 142-149.

- [Na] T. NAKAYAMA. Cohomology of class field theory and tensor product modules I. *Ann. of Math.*, **65**, 1957. p. 265-267.
- [Od] T. ODA. *Convex bodies and algebraic geometry*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **15**, Springer-Verlag (1988).
- [Oe] J. OESTERLÉ. Nombre de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p . *Invent. Math.*, **78**, 1984. p. 13-88.
- [On1] T. ONO. On some arithmetic properties of linear algebraic groups. *Ann. of Math.*, **70**, 1959. p. 266-290.
- [On2] T. ONO. Arithmetic of algebraic tori. *Ann. of Math.*, **74**, 1961. p. 101-139.
- [On3] T. ONO. On the Tamagawa number of algebraic tori. *Ann. of Math.*, **78**, 1963. p. 47-73.
- [Pe1] E. PEYRE. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. Journal*, **79**, 1995. p. 101-218.
- [Pe2] E. PEYRE. Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie. Prépublication, math.NT/0303067.
- [Pe3] E. PEYRE. Etude asymptotique des points de hauteur bornée. Notes de l'école d'été sur les variétés toriques, Grenoble, juin 2000.
- [Pe4] E. PEYRE. Points de hauteur bornée et géométrie des variétés, d'après Y. Manin et al. Séminaire Bourbaki **891**, juin 2001.
- [Pe5] E. PEYRE. Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesure de Tamagawa. *J. Th. Nombres de Bordeaux*, **15**, 2003. p. 319-349.
- [Sa] P. SALBERGER. Tamagawa measure on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Astérisque*, **251**, 1998. p. 91-258.
- [Se1] J.-P. SERRE. *Corps locaux*. Hermann, 1962.
- [Se2] J.-P. SERRE. *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, translated and edited by M. Brown. Aspect of Mathematics, Vieweg, (1989).
- [Vo] V.E. VOSKRESENSKII. Projective invariant Demazure models. *Math. USSR Izv.*, **20(2)**, 1983. p. 189-202.
- [Wa] D. WAN. Heights and zeta functions in function fields in *The arithmetic of function fields*, D. Goss, D.R. Hayes & M.I. Rosen, eds. Mathematical Research Institute Publications, Ohio State University, de Gruyter (1992). p. 455-463.
- [We1] A. WEIL. *Basic number theory*. Springer Verlag, 1967.
- [We2] A. WEIL. *Adeles and algebraic groups*. Progress in mathematics **23**, Birkhäuser, 1982.

I.R.M.A.R
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France
david.bourqui@math.univ-rennes1.fr