HAL open science

Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique p-adique

Colette Moeglin

▶ To cite this version:

Colette Moeglin. Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique p-adique. 2004. hal-00003594

HAL Id: hal-00003594
https://hal.science/hal-00003594

Preprint submitted on 15 Dec 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00003594, version 1 - 15 Dec 2004

Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique p-adique

C. Mœglin
Institut de Mathématiques de Jussieu
CNRS

Ici F est un corps p-adique avec $p \neq 2$ pour les constructions et p grand pour le théorème prouvant la stabilité. On note W_F le groupe de Weyl de F et on fixe un groupe classique G (cf. 1.1 ci-dessous pour plus de précision) dont on note ${}^LG$ le groupe dual au sens de Langlands. Le but de ce travail est de construire certains paquets de représentations de G associés à des morphismes, ψ, de $W_F \times SL(2, \mathbb{C} \times SL(2, \mathbb{C})$ dans le groupe ${}^LG$. On note le centralisateur de ψ dans ${}^LG^0$ par $Cent_{{}^LG}\psi$. Dans tout ce papier, nous allons supposer que ψ est discret avec pour définition de ce mot le fait que le groupe $Cent_{{}^LG}(\psi)$ est fini.

Chaque représentation à l'intérieur du paquet associé à ψ va être paramétrisée par un caractère du groupe $Cent_{{}^LG}(\psi)$, mais elle ne sera, en général pas irréductible et pourra même dans le cas le plus général être nulle. Bien sûr ces contructions sont dictées par l'endoscopie, endoscopie qui fait intervenir d'une part les groupes endoscopiques de G mais aussi une forme tordue du GL dans lequel ${}^LG$ se plonge naturellement ; ces idées sont dûes à Arthur. On doit même pouvoir vérifier que les représentations ainsi associées sont uniquement déterminées par les relations venant de cette endoscopie. Toutefois, on laisse cette vérification pour un papier ultérieur qui est loin d'être écrit et qui a de toute façon besoin des travaux récents de Waldspurger [16].

Pour pouvoir faire la construction annoncée, il faut déjà savoir construire les séries discrètes, c'est-à-dire les représentations associées à des morphismes de la forme ψ décrite ci-dessus mais dont la restriction à la deuxième copie de $SL(2, \mathbb{C})$ est triviale. Ceci est fait dans [12] et [13] sous l'hypothèse que l'on connait les points de réductibilité de certaines induites de cuspidales. Ici on a vraiment besoin d'avoir une interprétation de ces points de réductibilité en terme de paramétrisation de Langlands, ce qui n'était pas vraiment nécessaire dans les références ci-dessus ; les hypothèses précises dont on a besoin sont celles de [11] 2.1 on les rappelera encore ici. Soyons quand même optimiste, chaque fois que l'on a une interprétation en terme d'algèbre de Hecke, le problème est soluble.

En plus, comme on a en vue une construction avec des propriétés fortes venant de l'endoscopie, il faudra alors aussi savoir que les séries discrètes auxquelles on finit par se ramener ont ces propriétés. Dans l'état actuel un seul cas est à peu près complètement fait, il s'agit du groupe $SO(2n+1)$ et des morphismes ψ qui se factorisent par le Frobenius, cf [14], [16] ; l'endoscopie n'est pas écrite, elle nécessite un lemme fondamental qui n'est pas encore connue mais on voit comment on peut faire sans rajouter d'idées par rapport à ces références. Le cas où ψ est trivial sur le groupe de ramification sauvage est lui aussi en vue avec le même type d'idée (cf. [10]). Les travaux de [4] et [8] qui sont de même nature supposent que ψ est trivial sur les 2 copies de $SL(2, \mathbb{C})$ et notre papier dans ce cas ne dit rien puisque qu'alors paquet de Langlands et paquet d'Arthur coïncident.

Ainsi la situation considérée ici n'est pas vide et les constructions faites sont écrites dans un cadre général ; ce sont surtout des constructions de nature combinatoire.

L'idée est alors la suivante ; on note Δ le plongement diagonal de $SL(2, \mathbb{C})$ dans le produit $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$. Ainsi pour ψ comme ci-dessus, le composé $\psi \circ \Delta$ est un morphisme de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ dans ${}^LG$ et doit donc correspondre à un paquet de représentations tempérées. Clairement, $Cent_{{}^LG}\psi$ contient le groupe analogue pour $\psi \circ \Delta$.

Un cas est plus facile, et nous l'avons traité en [11], il s'agit du cas où l'inclusions naturelle $Cent_{{}^LG}(\psi)$ dans $Cent_{{}^LG}(\psi \circ \Delta)$ est un isomorphisme ; on appelle ce cas le cas élémentaire. Dans ce cas, l'application qui a un caractère ϵ de $Cent_{{}^LG}(\psi)$ associe une représentation $\pi(\psi, \epsilon)$ est injective à valeurs dans l'ensemble des représentations irréductibles et $\psi(\psi, \epsilon)$ se calcule en fonction de $\pi(\psi \circ \Delta, \epsilon)$ par une formule du type de celle qui calcule la généralisation de l'involution d'Iwahori-Matsumoto et donnée par Aubert ([2]), Schneider-Stuhler ([15]) ; les constructions sont rappelées en 6 ci-dessous.

Le deuxième cas est celui où $\psi \circ \Delta$ est lui aussi discret ; ce cas est celui qui occupe la plus grande partie de ce travail ; le but est de se ramener au cas élémentaire, éventuellement pour des groupes de rang plus petit. Les représentations du paquet sont donc indexées par les caractères, ϵ, du centralisateur de ψ. Mais à la différence de ce qui se passe (au moins conjecturalement) pour les séries discrètes et le cas de [11] à un tel caractère, on associe une représentation qui n'est pas irréductible en général. Ce phénomène avait déjà été vu dans le cas archimédien par Adams et Johnson et récemment dans le cas du groupe G_2 par W.T.Gan et N.Gurevich ([5]).

Dans la première partie de cet article (cf 2) on donne une formule pour construire ces représentations, c'est-à-dire associer à ψ et ϵ un élément $\pi(\psi,\epsilon)$ du groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de G ; avec cette formule, il n'est pas difficile de montrer que la somme :

$$\sum_{\epsilon} \epsilon(\psi(z))\pi(\psi,\epsilon),$$

où z est l'élément non trivial de la deuxième copie de $SL(2,\mathbb{C})$, est un caractère stable si des combinaisons linéaires de séries discrètes associées essentiellement à $\psi\circ\Delta$ est elle-même stable (ce que l'on sait dans les cas où on sait contruire ces séries discrètes cf. [14]). Cette partie est en fait facile. Voici la définition dans le groupe de Grothendieck : on plonge ${}^LG$ dans le GL convenable par la représentation naturelle et on voit donc ψ comme une représentation de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ que l'on décompose en une somme de représentations irréductibles de la forme $\rho\otimes Rep_a\otimes Rep_b$ où ρ est une représentation irréductible de W_F (nécessairement autoduale) et a,b sont des entiers avec une condition de parité dont nous n'avons pas besoin ici. Pour un tel triplet (ρ,a,b) on pose $A:=(a+b)/2-1$ et $B:=|a-b|$ et on note ζ le signe de $a-b$ en convenant $\zeta=+$ si $a=b$. On appellera l'ensemble des quadruplets (ρ,A,B,ζ) ainsi obtenus $Jord(\psi)$ et on voit naturellement ϵ comme une application de $Jord(\psi)$ dans ±1. Pour avoir une définition à donner qui sort du cas ψ élémentaire déjà étudié en [11], on suppose qu'il existe $(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)$ avec $A>B$; on fixe un tel quadruplet. Grâce à la correspondance de Langlands locale pour les groupes linéaires, on identifie ρ à une représentation irréductible d'un groupe linéaire convenable. Pour $C\in]B,A]$, on note δ_C l'unique sous-module irréductible de l'induite, pour un groupe linéaire convenable, $\rho|\,|^{\zeta B}\times\cdots\times\rho|\,|^{-\zeta C}$. Ainsi δ_C est une représentation de Steinberg tordue si $\zeta=+$ et une représentation de Speh tordue si $\zeta=-$. On pose ϵ_0 la valeur de ϵ sur (ρ,A,B,ζ) et on note ψ',ϵ' l'analogue de ψ,ϵ en enlevant le bloc (ρ,A,B,ζ). Ci-dessous, on va rajouter à ψ',ϵ' un ou 2 quadruplets cela veut dire que l'on considère un couple analogue à ψ,ϵ mais dont les blocs de Jordan sont ceux de ψ',ϵ' auxquels on rajoute ceux écrits. Il faudrait aussi expliquer $Jac...$, c'est fait en 1.2, disons ici simplement que c'est une partie d'un module de Jacquet. On pose alors :

$$\pi(\psi,\epsilon)=\oplus_{C\in]B,A]}(-1)^{A-C}\delta_C\times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0))$$

$$\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)),$$

où par convention si $A=B+1$, $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0))=\pi(\psi',\epsilon')$ si $\epsilon_0=+$ et vaut 0 (c'est-à-dire n'apparaît pas) si $\epsilon_0=-$. C'est une description par induction car les morphismes qui interviennent dans cette définition soit sont relatif à un groupe de rang plus petit soit si on les notes ψ'' vérifient $\sum_{(\rho'',A'',B'',\zeta'')\in Jord(\psi'')}A''-B''<\sum_{(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\psi)}A'-B'$; quand cette somme est nulle, on est précisément dans le cas des morphismes élémentaires. Il est assez facile de démontrer que cette définition ne dépend pas du choix de (ρ,A,B,ζ) vérifiant $A>B$.

Dans la deuxième partie de cet article (4), on montre que l'élément du groupe de Grothendieck est une somme sans multiplicité de représentations irréductibles totalement décrites par exemple dans 4.2. La description explicite n'est pas évidente et cette partie est vraiment technique. Mais j'ai l'impression que l'on va devoir faire la même chose pour les groupes linéaires tordus et qu'elle est donc indispensable. Le résultat peut s'exprimer ainsi par récurrence ; on utilise la notation $<\delta,X>$ pour signifier le socle de l'induite $\delta\times X$ quand X est une représentation semi-simple d'un groupe de même type que G et δ une représentation irréductible d'un groupe linéaire. Avec les notations ci-dessus :

$$\pi(\psi,\epsilon)=<\delta_A,\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\epsilon_0)>$$

$$\oplus_{\lambda;\lambda^{A-B+1}=\epsilon_0}\prod_{C\in[B,C]}(-1)^{[C]}\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B,A]}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{[C]}\lambda)),$$

avec comme convention que $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\epsilon_0)=0$ si $A=B+1$ et $\epsilon_0=-$ et vaut $\pi(\psi',\epsilon')$ si $A=B+1$ et $\epsilon_0=+$. On remarque que la somme sur λ contient exactement un terme si $A-B$ est pair et en contient soit 0 soit 2 si $(A-B)$ est impair la différence dépendant de la valeur de ϵ_0. Cette description est par induction comme ci-dessus, on peut en faire une description sans induction mais ce n'est guère plus limpide (cf 4.2).

A la fin du papier, on traite le cas des morphismes ψ généraux ; on le fait assez rapidement, on les obtient comme module de Jacquet de représentation associés à des morphismes ψ' tel que $\psi'\circ\Delta$ est discret. Ici on peut avoir $\pi(\psi,\epsilon)=0$, on en donne un exemple. Il y aurait donc beaucoup à dire sur ces représentations alors que l'on ne dit essentiellement rien dans ce papier. Mais à mon avis, avant de se lancer dans une description forcément technique il faut prouver que l'on a fait les bons choix, c'est-à-dire vérifier qu'ils sont ceux dictés par l'endoscopie ce qui n'est pas fait ici.

L'intérêt de ce travail, s'il en a un, est d'obtenir des conséquences pour les formes automorphes de carré intégrables. On espère quand même que si notre couple ψ,ϵ est la situation locale d'une situation globale à

laquelle est attachée un paquet de représentations automorphes de carré intégrable, les représentations associées décrivent les composantes locales. Rien n'est clair mais ce qui est très encourageant est que je crois bien que les définitions sont imposées par l'endoscopie et cette unicité forcera les identifications souhaitées.

1 Précisions sur les groupes considérés et conventions

1.1 Définition de base

Si G est un groupe symplectique, il n'y a aucun choix, le groupe est déployé et son L-groupe est à centre connexe. Et on considère des morphismes $\psi : W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $S0(2n+1,\mathbb{C})$ ainsi que des morphismes ϵ du $Cent_{SO(2n+1,\mathbb{C})}\psi$ dans $\{\pm 1\}$.

Si G est un groupe des automorphismes d'une forme orthogonale sur un espace de dimension impaire, G est soit déployé correspondant à une forme orthogonale isotrope et on pose $\sharp G = +1$ ou G correspond à une forme orthognale de noyau anisotrope de dimension 3 et on pose $\sharp_G = -1$. Le L-groupe est $Sp(2n)$ si n est le rang de G et son centre est isomorphe à $\{\pm 1\}$. Quand on aura un morphisme, ϵ d'un sous-groupe de $Sp(2n)$ contenant le centre dans $\{\pm 1\}$, on dira que $\epsilon_Z = \sharp_G$ quand la restriction de ϵ à ce centre est triviale si $\sharp_G = +1$ et non triviale sinon . Pour un tel G, on considère dans ce travail les morphismes ψ de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $Sp(2n,\mathbb{C})$ des morphismes ϵ du centralisateur de ψ dans $\{\pm 1\}$ tel que $\epsilon_Z = \sharp_G$; c'est une traduction terre à terre d'un isomorphisme dû à Kottwitz.

Si G est le groupe orthogonal d'une forme orthogonale sur un espace de dimension paire, la situation est plus compliquée. La forme dépendant de son discriminant qui est une classe de carré, notée ici seulement η, et de l'invariant de Hasse. Dans tout ce qui suit on considère des morphismes, ψ, fixés de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe ; ici le L-groupe est par définition $O(2n,\mathbb{C})$ si $2n$ est la dimension de la forme orthogonale. On note $\sharp_G$ le discriminant de la forme. C'est impropre puisque G ne dépend de $\sharp_G$ que si la classe de carré est celle de 1. Pour un tel groupe orthogonal, on impose toujours dans cet article que le déterminant de la restriction de ψ à W_F qui s'identifie à un caractère quadratique de W_F corresponde à la classe de carrés η par réciprocité. Et η sera toujours implicitement fixé ; il n'intervient pas explicitement. On considère aussi des morphismes ϵ du centralisateur de ψ dans $\{\pm 1\}$ et, comme dans le cas de dimension impaire, on demande que $\epsilon_Z = \sharp_G$.

Le lecteur doit être averti que les subtilités ci-dessus sont en fait cachées dans ce papier ; elles n'interviennent que pour la construction des séries discrètes que l'on va admettre ci-dessous.

On note Δ l'application diagonale de $SL(2,\mathbb{C})$ dans $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$. Et dans tout ce travail, on dit que le composé $\psi \circ \Delta$ qui est un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ est un morphisme discret si le centralisateur de son image est un groupe fini.

1.2 Notations

On appellera segment dans ce travail un intervalle de la forme $[x,y]$ où $x,y \in 1/2\mathbb{Z}$ et $x-y \in \mathbb{Z}$. Le segment sera considéré comme croissant si $x-y$ est négatif et décroissant sinon. Dans un tel segment, ce qui nous intéresse sont les demi-entiers inclus dans ce segment qui sont non entiers exactement quand x,y sont non entiers.

Soit X une représentation de longueur finie de G et $x \in \mathbb{R}$, ρ une représentation cuspidale irréductible autoduale d'un GL convenable, on note d_ρ le rang de ce groupe. On suppose que G contient un sous-groupe parabolique dont le Levi est isomorphe à $GL(d_\rho) \times G(n-d_\rho)$, où $G(n-d_\rho)$ est un groupe de même type que G mais de rang $n-d_\rho$. On va définir $Jac_x X$ comme un élément du groupe de Grothendieck associé aux représentations de longueur finie de $G(n-d_\rho)$; pour cela, on calcule le module de Jacquet de X le long du radical unipotent d'un parabolique de G de Levi $GL(d_\rho) \times G(n-d_\rho)$, noté momentanément X_P. On regarde X_P d'abord comme représentation de $GL(d_\rho)$ et on la projette sur le support cuspidal $\rho|\,|^x$; on note X_x cette projection. Tout sous-quotient irréductible de X_x comme représentation de $GL(d_\rho) \times G(n-d_\rho)$ est de la forme $\rho|\,|^x \otimes Y$ et $Jac_x X$ est par définition la somme des Y qui apparaissent comme de tels sous-quotient compté avec la multiplicité du sous-quotient irréductible où ils apparaissent.

Soit $x,y \in \mathbb{R}$, on généralise la définition en posant $Jac_{x,y}X := Jac_y Jac_x X$. On remarque que $Jac_{x,y}X$ peut se calculer en considérant d'abord le module de Jacquet de X par rapport au radical unipotent d'un parabolique de Levi $GL(2d_\rho)$ puis en restreignant encore et en projettant sur le bon support cuspidal. Si $\rho|\,|^x \times \rho|\,|^y$ est irréductible, on vérifie ainsi que

$$Jac_{x,y}X = Jac_{y,x}X \tag{1}$$

pour tout X. La propriété (1) est donc vraie pour tout couple x,y tel que $x-y \neq \pm 1$.

On pourra encore généraliser à plus de 2 projections. Soit X une représentation de longueur finie et $[\alpha,\beta]$ un segment. On a donc défini $Jac_{x\in[\alpha,\beta]}X$ comme étant par définition $Jac_\beta \cdots Jac_{\beta-i} \cdots Jac_\alpha X$.

On utilisera à plusieurs reprises la propriété suivante : soit X une représentation de longueur finie et soit $\mathcal{E}$ un ensemble totalement ordonné de demi-entiers relatifs. Soit y le plus grand élément de $\mathcal{E}$ au sens ordinaire.

On suppose que $Jac_{x\in\mathcal{E}}X \neq 0$. Alors, on va montrer qu'il existe z un élément de $\mathcal{E}$ qui précède y, tel que $[z,y]$ soit un segment et tel que $Jac_{x\in[y,z]}X \neq 0$. La même assertion est vraie si y est le plus petit élément de $\mathcal{E}$.

En effet, on peut supposer que X est irréductible et que y est le dernier élément de $\mathcal{E}$ pour l'ordre de $\mathcal{E}$; ainsi il n'y a pas à démontrer que z précède y. Et la non nullité du module de Jacquet assure par réciprocité de Frobenius qu'il existe une sous-représentation irréductible σ de $GL(d_\rho|\mathcal{E}|)$ et une représentation irréductible X' convenable d'un groupe de même type que G mais de rang plus petit tel que :

$$X \hookrightarrow \sigma \times X'. \tag{2}$$

On écrit σ dans la classification de Zelevinski comme sous-module d'une induite du type $\times_{i\in[1,v]}\sigma_i$ où les σ_i sont des Steinberg tordues c'est-à-dire des représentations de la forme $<\rho|\,|^{x_i},\cdots,\rho|\,|^{y_i}>$ avec v un entier, pour tout $i\in[1,v]$, $[x_i,y_i]$ un segment et $y_i \geq x_i$, ainsi que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_v$. De plus $\mathcal{E}$ est l'union ensembliste de ces segments. On suppose que y est maximal dans $\mathcal{E}$. Ainsi il existe i tel que $y_i = y$ et on fixe i minimum avec cette propriété. Ainsi les segments $[x_j,y_j]$ pour $j<i$ ne sont pas liés à $[x_i,y_i]$ et il existe donc une représentation σ'' convenable telle que $\sigma \hookrightarrow <\rho|\,|^{x_i},\cdots,\rho|\,|^{y_i}> \times\sigma''$. Ainsi on a une inclusion analogue à (2) en remplaçant σ par $<\rho|\,|^{x_i},\cdots,\rho|\,|^{y_i}>$ et l'assertion avec $z=x_i$ s'en déduit. Si y est minimal au lieu de maximal on raisonne de la même façon mais en remplaçant Steinberg par Speh.

1.3 Classification des paramètres.

Quand on a un morphisme ψ comme ci-dessus on le prolonge en un morphisme dans un groupe linéaire convenable, $GL(2n)$ pour G un groupe orthogonal de rang n et $GL(2n+1)$ pour G un groupe symplectique de rang n et on obtient donc une représentation de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$. On décompose cette représentation en sous-représentations irréductibles et comme les représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{C})$ sont classifiées par leur dimension uniquement, une sous-représentation irréductible est de la forme $\rho \otimes Rep_a \otimes Rep_b$ où $a,b\in\mathbb{N}$, Rep_a, Rep_b sont les représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{C})$ de cette dimension et ρ est une représentation irréductible de W_F. Ainsi à ψ on associe $Jord(\psi)$ qui par définition est l'ensemble des triples (ρ,a,b) tel que $\rho\otimes Rep_a\otimes Rep_b$ intervienne dans la représentation associée à ψ, ce triple étant compté avec la multiplicité de la sous-représentation. On peut faire la même chose pour $\psi\circ\Delta$ et $Jord(\psi\circ\Delta)$ se constitue de couples (ρ,c). On montre aisément que

$$Jord(\psi\circ\Delta) = \cup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}\{(\rho,c); c\in[|a-b|+1, a+b-1]_2\},$$

où $[?,?]_2$ représente l'ensemble des éléments du segment de même parité que les extrêmités..

On vérifie aussi aisément que ψ (resp. $\psi\circ\Delta$) discret entraîne que l'ensemble $Jord(\psi)$ (resp. $Jord(\psi\circ\Delta)$) est sans multiplicité. L'absence de multiplicité force que toutes les représentations ρ intervenant doivent être autoduales et on a aussi une condition de parité sur $a+b$ pour tout $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$ parité déterminée par ρ et le groupe G. On n'a pas besoin d'en savoir plus sauf qu'étant donné un ensemble de triple (ρ,a,b) où ρ est autodual, a,b ont la bonne condition de parité et que l'on a l'égalité de dimension $\sum_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} d_\rho ab = m^*$ où d_ρ est la dimension de la représentation ρ et où m^* est la dimension de la représentation naturelle du L-groupe de G. Traduisons aussi le cas où $\psi\circ\Delta$ est discret : cela dit exactement que $Jord(\psi)$ est sans multiplicité et pour tout ρ fixée autoduale comme ci-dessus et pour tous couples (a,b), (a',b') distincts tels que (ρ,a,b) et $(\rho,a',b')\in Jord(\psi)$,

$$[|a-b|+1, a+b-1]\cap[|a'-b'|+1, a'+b'-1] = \emptyset.$$

Soit ψ comme ci-dessus tel que $\psi\circ\Delta$ soit discret. Alors le centralisateur de l'image de ψ est isomorphe à $|Jord(\psi)|$ copies de $\{\pm1\}$ sauf si $G=Sp(2n)$ où il faut se restreindre aux éléments de produit $+1$; en oubliant cette condition, on calcule le centralisateur dans $O(2n+1)$ au lieu de $SO(2n+1)$ c'est à dire que l'on a ajouté le centre. On identifie un morphisme de ce centralisateur dans $\{\pm1\}$ à une application de $Jord(\psi)$ dans $\{\pm1\}$ où la restriction au centre du L-groupe donne la condition :

$$\times_{(\rho,a,b)}\epsilon(\rho,a,b) = \sharp_G,$$

où pour unifier, on a posé $\sharp_{Sp(2n)} = +1$ ce qui compense "l'oubli" ci-dessus de se limiter aux éléments de déterminant $+1$.

Dans tout le papier, au lieu de fixer G, on ne fixe que le type de G, cela détermine G si c'est un groupe symplectique et on se donne ψ,ϵ comme ci-dessus ce qui détermine la forme orthogonale dont G est le groupe d'automorphismes grâce au déterminant de ψ et à la restriction de ϵ au centre du L-groupe.

Jusqu'au chapitre 7 on suppose que $\psi\circ\Delta$ est discret.

Hypothèse générale : *dans tout ce papier on fixe ψ comme ci-dessus mais on fait l'hypothèse : pour tout groupe H de même type que G mais de rang inférieur ou égal et pour tout morphisme ψ' de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})$*

dans ${}^LH$ et tout caractère ϵ' de $Cent_{{}^LH}(\psi')$ avec les propriétés que l'on va écrire ci-dessous, on sait associer une représentation cuspidales $\pi(\psi',\epsilon')$ avec les propriétés de réductibilité écrites aussi ci-dessous.

Propriétés sur (ψ',ϵ') : la restriction de ψ' à W_F est une sous-représentation de la restriction de ψ à W_F, cela s'entend évidemment après avoir envoyé les L-groupes dans le groupe linéaire convenable par la représentation naturelle de ces L-groupes. Pour tout ρ représentation irréductible apparaissant dans la restriction de ψ' à W_F, la représentation de $SL(2,\mathbb{C})$ dans l'espace isotypique correspondant est une somme de représentations indexés par leur dimension $a' \in Jord_\rho(\psi')$, ensemble qui doit vérifier que s'il contient l'entier a il contient aussi tous les entiers de la forme $a-2i$ avec $i \in [0,[a/2]]$. De plus ϵ' qui définit une application de $Jord_\rho(\psi')$ dans ± 1 vérifie pour tout $a \in Jord_\rho(\psi')$ (comme dans la phrase précédente) $\epsilon'(\rho,a) = (-1)^{[a/2]}\eta$ où η est un signe indépendant de a qui vaut $+1$ dans le cas où $Jord_\rho(\psi')$ est formé d'entier pair et peut valoir ± 1 dans l'autre cas.

Propriétés sur $\pi(\psi',\epsilon')$: soit ρ une représentation cuspidale unitaire irréductible d'un groupe linéaire de la forme $GL(d_\rho,F)$ (ce qui définit d_ρ) ; grâce à la correspondance de Langlands locale, on identifie ρ à un morphisme irréductible de W_F dans $GL(d_\rho,\mathbb{C})$; on dit que ρ est symplectique si ce morphisme est à valeurs dans $Sp(d_\rho,\mathbb{C})$ et orthogonal sinon. On suppose que ρ est autoduale ; on définit $Jord_\rho(\psi')$ comme on l'a fait ci-dessus, en admettant l'ensemble vide et on note a_ρ le plus grand élément de cet ensemble s'il est non vide. Dans le cas où $Jord_\rho(\psi')$ est vide, on pose $a_\rho = 0$ si ρ est de type opposé à ${}^LG$ (c'est-à-dire orthogonal quand ${}^LG$ est symplectique et vice et versa) et $a_\rho = -1$ sinon. La propriété demandée à $\pi(\psi',\epsilon')$ est alors que l'induite $\rho|\,|^s \times \pi(\psi',\epsilon')$ pour s un réel est irréductible sauf exactement quand $s = \pm(a_\rho+1)/2$.

2 Définition de $\pi(\psi,\epsilon)$ quand $\psi \circ \Delta$ est discret.

2.1 Défininitions

On fixe ψ,ϵ comme en 1.3, on suppose, comme annoncé, que $\psi\circ\Delta$ est discret et on va associer à ce couple un élément du groupe de Grothendieck des représentations de G. Cette définition se fait par induction. On a défini en [11] (cf. 6) cet élément dans le cas où pour tout $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$, $inf(a,b) = 1$ et dans ce cas, c'est une représentation irréductible. Remarquons que la condition que l'on vient juste d'écrire est exactement équivalente à ce que $Cent_{{}^LG}(\psi)$ soit naturellement isomorphe à $Cent_{{}^LG}(\psi\circ\Delta)$. Supposons donc que cette condition n'est plus vérifiée et fixons $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ tel que $inf(a,b) \geq 2$. On note alors ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant le bloc (ρ,a,b) et on note ϵ' la restriction de ϵ à $Jord(\psi')$. On pose $\zeta_{a,b}$ le signe de $a-b$ si $a \neq b$ et $+$ sinon. On suppose que l'on a défini $\pi(\psi_1,\epsilon_1)$ pour tout (ψ_1,ϵ_1) relatif à un groupe de même type que G mais de rang plus petit ; on suppose que cette représentation est aussi définie si ψ_1 est relatif à G mais si $|Jord(\psi_1)|$ est strictement plus grand que $|Jord(\psi)|$. Remarquons que c'est une bonne hypothèse de récurrence puisque le cardinal de $Jord(\psi)$ est nécessairement borné supérieurement. On définit alors dans le groupe de Grothendieck :

si $inf(a,b) = 2$ et $\epsilon(\rho,a,b) = -$, on pose :

$$\pi(\psi,\epsilon) := \oplus_{\eta=\pm 1}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+\zeta_{a,b}1,b-\zeta_{a,b}1,\eta)(\rho,a-1,b-1,-\eta)),$$

où la notation signifie que l'on ajoute à $Jord(\psi')$ les 2 blocs $(\rho,a+\zeta_{a,b}1,b-\zeta_{a,b}1),(\rho,a-1,b-1)$ en prolongeant ϵ' sur ces blocs par 2 valeurs inégales (et on somme sur les possibilités).

si $inf(a,b) = 2$ et $\epsilon(\rho,a,b) = +$, on pose :

$$\pi(\psi,\epsilon) =$$
$$< \rho|\,|^{(a-b)/2},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta_{a,b}((a+b)/2-1)} > \times \pi(\psi',\epsilon') \ \ominus_{\eta=\pm}\ \pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+\zeta_{a,b}1,b-\zeta_{a,b}1,\eta),(\rho,a-1,b-1,\eta)).$$

si $inf(a,b) \geq 3$, on remarque que si on ajoute à $Jord(\psi')$ le bloc $(\rho,a+\zeta_{a,b}2,b-\zeta_{a,b}2)$ on définit un morphisme pour un groupe de rang $\zeta_{a,b}(a-b)+1$ plus petit que G. On sait donc définir $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+\zeta_{a,b}2,b-\zeta_{a,b}2,\epsilon(\rho,a,b)))$ (où l'on prolonge ϵ' à l'aide de $\epsilon(\rho,a,b)$). On sait aussi, avec l'hypothèse de récurrence définir pour $\eta = \pm$, $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+\zeta_{a,b}1,b-\zeta_{a,b}1,\eta)(\rho,sup(0,a-b)+1,sup(0,b-a)+1,\eta\epsilon(\rho,a,b)))$. On pose alors :

$$\pi(\psi,\epsilon) = \oplus_{j\in[1,inf(a,b)[}(-1)^{inf(a,b)-1+j}$$
$$< \rho|\,|^{(a-b)/2},\cdots,\rho|\,|^{-(a-b)/2-\zeta_{a,b}j} > \times Jac_{(a-b)/2+\zeta_{a,b}2,\cdots,(a-b)/2+\zeta_{a,b}j}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+\zeta_{a,b}2,b-\zeta_{a,b}2,\epsilon(\rho,a,b)))$$
$$\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{[inf(a,b)/2]}\eta^{inf(a,b)}\epsilon(\rho,a,b)^{inf(a,b)-1}$$
$$\pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+\zeta_{a,b}1,b-\zeta_{a,b}1,\eta),(\rho,sup(0,a-b)+1,sup(0,b-a)+1,\eta\epsilon(\rho,a,b))),$$

quand $j = 1$ il n'y a pas de Jac par convention.

Pour unifier les notations, on peut inclure le cas $inf(a,b)=2$ dans la définition générale à condition de poser dans ce cas :

$$\pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+\zeta_{a,b}2,b-\zeta_{a,b}2,\eta)=\begin{cases}=\pi(\psi',\epsilon') \text{ si } \eta=+\\ =0 \text{ si } \eta=-.\end{cases}$$

Récrivons ces formules en supposant que $a\geq b$ de façon à ce qu'elles soient plus lisibles :

$$\pi(\psi,\epsilon)=\sum_{j\in[1,b[}(-1)^{b-1+j}$$

$$<\rho|\,|^{(a-b)/2},\cdots,\rho|\,|^{-(a-b)/2-j}>\times Jac_{(a-b)/2+2,\cdots,(a-b)/2+j}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+2,b-2,\epsilon(\rho,a,b))$$

$$\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{[b/2]}\eta^b\epsilon(\rho,a,b)^{b-1}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+1,b-1,\eta),(\rho,a-b+1,0,\eta\epsilon(\rho,a,b)).$$

2.2 Autre formulation

Soit (ψ,ϵ) comme ci-dessus, on a défini ces objets en utilisant $Jord(\psi)$ en tant qu'ensemble de triplet (ρ,a,b) venant naturellement de la décomposition en représentations irréductibles de la représentation de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$. On peut remplacer ces triplets par des quadruplets (ρ,A,B,ζ) en posant $\zeta=\zeta_{a,b}$ avec nos définitions antérieurs, $A=(a+b)/2-1$ et $B=|a-b|/2$; ainsi A,B sont des demi-entiers positifs ou nuls avec $A-B\in\mathbb{N}$, si $B=0$, $\zeta=+$ nécessairement. Remarquons aussi que dans cette correspondance, $inf(a,b)=1$ si et seulement si $A=B$. En particulier ψ est élémentaire si $A=B$ pour tout quadruplet de $Jord(\psi)$.

Le fait que $\psi\circ\Delta$ est discret se traduit par le fait que pour tout couple de quadruplets (ρ,A,B,ζ) et $(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\psi)$ soit $\rho\neq\rho'$ soit $[B,A]\cap[B',A']=\emptyset$ ce qui se traduit encore par le fait que soit $B>A'$ soit $B'>A$.

Notons encore $Jord(\psi)$ l'ensemble de ces quadruplets et reformulons les définitions avec ces nouvelles notations.

Supposons qu'il existe (ρ,A,B) dans $Jord(\psi)$ tel que $A>B$; on pose $\epsilon_0:=\epsilon(\rho,A,B,\zeta)$. Alors

$$\pi(\psi,\epsilon)=\oplus_{C\in]B,A]}(-1)^{A-C}<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C}>\times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta(C)}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\epsilon_0))$$

$$\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta)),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)).$$

Ici il faut comme convention que les termes contenant $(\rho,A,B+2,\epsilon_0)$ n'existent pas si $A=B+1$ et $\epsilon_0=-$ et qu'ils font seulement intervenir ψ',ϵ' si $A=B+1$ et $\epsilon_0=+$.

2.3 Propriétés

La première propriété à remarquer est la suivante : soit D un demi-entier tel que pour tout C tel que $D-C\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, il existe un signe ζ_C tel que $(\rho,C,C,\zeta_C)\in Jord(\psi)$ et si D est demi-entier non entier, alors $\epsilon(\rho,1/2,1/2,\zeta_{1/2})=-$. Alors $\pi(\psi,\epsilon)=\pi(\psi',\epsilon')$ si $Jord(\psi)=Jord(\psi')$ et $\epsilon=\epsilon'$ à la seule différence près que ζ_C peut ne pas être le même signe pour ψ et pour ψ' (pour le moment on utilise le même bloc (ρ,A,B,ζ) pour les définitions) ; cela résulte par récurrence par exemple de 6 propriété 1.

2.3.1 Indépendance des choix

Soit $(\psi,\epsilon),(\rho,a,b)$ comme ci-dessus ou plutôt (ρ,A,B,ζ) avec $A>B$. On suppose qu'il existe $(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\psi)$ un bloc de Jordan différent de (ρ,A,B,ζ) mais vérifiant aussi $A'>B'$. On aurait pu l'utiliser pour définir $\pi(\psi,\epsilon)$ montrons que l'on aurait obtenu le même résultat.

On note ψ'',ϵ'' le morphisme qui se déduit de ψ,ϵ en enlevant les 2 blocs (ρ,A,B,ζ) et (ρ',A',B',ζ') et on pose $\epsilon_0=\epsilon(\rho,A,B,\zeta)$, $\epsilon_0'=(\rho,A',B',\zeta')$. Pour $C\in]B,A]$ et $C'\in]B',A']$, on pose :

$$\delta_C:=<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C}>;\delta_{C'}=<\rho'|\,|^{\zeta' B'},\cdots,\rho'|\,|^{-\zeta' C'}.$$

Le seul cas difficile est le cas où $\rho'=\rho$ ce que nous supposerons pour pouvoir employer sans ambiguité la notation $Jac_{x,\cdots}$.

En utilisant (ρ,A,B,ζ) pour définir $\pi(\psi,\epsilon)$ puis (ρ',A',B',ζ') pour définir les représentations qui interviennent dans la définition de $\pi(\psi,\epsilon)$, on obtient :

$$\pi(\psi,\epsilon)=\oplus_{C\in]B,A]}(-1)^{A-C}\oplus_{C'\in]B',A']}(-1)^{A-C}(-1)^{A'-C'}$$

$$\delta_C \times \Big(Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\big(\delta_{C'} \times Jac_{\zeta'(B'+2),\cdots,\zeta' C'}\pi(\psi'',\epsilon'',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0),(\rho,A',B'+2,\zeta',\epsilon'_0))\big)\Big) \quad (1)$$

$$\oplus_{C\in]B,A]}\oplus_{\eta'=\pm}(-1)^{A-C}(-1)^{[(A'-B'+1)/2]}(\eta')^{A'-B'+1}(\epsilon'_0)^{A'-B'}$$

$$\delta_C \times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi'',\epsilon'',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0)(\rho,A',B'+1,\zeta',\eta'),(\rho,B',B',\zeta',\eta'\epsilon'_0)) \quad (2)$$

$$\oplus_{C'\in]B',A']}\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{A'-C'}(-1)^{[(A-B+1)/2]}(\eta')^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B}$$

$$\delta_{C'} \times Jac_{\zeta(B'+2),\cdots,\zeta C'}\pi(\psi'',\epsilon'',(\rho,A',B'+2,\zeta',\epsilon'_0)(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)) \quad (3)$$

$$\oplus_{\eta=\pm,\eta'=\pm}(-1)^{[(A-B+1)/2]}(\eta')^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B}(-1)^{[(A'-B'+1)/2]}(\eta')^{A'-B'+1}(\epsilon'_0)^{A'-B'}$$

$$\pi(\psi'',\epsilon'',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0),(\rho,A',B'+1,\zeta',\eta'),(\rho,B',B',\zeta',\eta'\epsilon'_0). \quad (4)$$

Le terme (4) est parfaitement symétrique en (ρ,A,B,ζ) et (ρ,A',B',ζ') et il en est de même des termes (2) et (3) quand on les considère ensemble. Il n'y a que le terme (1) qui n'est pas symétrique de façon évidente. On va donc montrer qu'en fait il l'est.

Fixons $C\in]B,A]$ et $C'\in]B',A']$; l'un des segments $[\zeta B,-\zeta C]$, $[\zeta' B',-\zeta' C']$ contient l'autre d'où $\delta_C\times\delta_{C'}$ est une représentation irréductible du GL convenable et elle est donc isomorphe à $\delta_{C'}\times\delta_C$. Les segments $[\zeta(B+2),\zeta C]$ et $[\zeta'(B'+2),\zeta' C']$ sont disjoints et non liés, on a donc (cf. 1.2) pour tout élément du groupe de Grothendieck X

$$Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}Jac_{\zeta'(B'+2),\cdots\zeta' C'}X \simeq Jac_{\zeta'(B'+2),\cdots\zeta' C'}Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}X.$$

Montrons que $Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\delta_{C'}\times X=\delta_{C'}\times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}X$, pour tout X comme ci-dessus ; c'est complètement clair quand on a remarqué que ni $\zeta' B'$ ni $\zeta' C'$ ne sont dans le segment $[\zeta(B+2),\zeta C]$; là on utilise clairement le fait que $\psi\circ\Delta$ est discret. Ainsi la contribution au terme (1) des objets relatifs au couple (C,C') n'est autre que

$$(-1)^{A+A'-C-C'}\delta_C\times\delta_{C'}\times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}Jac_{\zeta'(B'+2),\cdots\zeta' C'}\pi(\psi'',\epsilon'',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0),(\rho,A',B'+2,\zeta',\epsilon'_0)).$$

Et comme on l'a vu ce terme est parfaitement symétrique en (A,B,C) et (A',B',C'). Cela termine la preuve.

2.4 Stabilité

Théorème : *On fixe un morphisme ψ de $W_F\times SL(2,\mathbb{C}\times SL(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG$ comme en 1.1 ; en particulier on suppose que $\psi\circ\Delta$ vu comme morphisme de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG$ est discret. La combinaison linéaire de caractère de représentations :*

$$\sum_{\epsilon:Jord(\psi)\to\{\pm1\}}\prod_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)}\epsilon(\rho,a,b)^{b-1}\pi(\psi,\epsilon)$$

est stable si toute combinaison linéaire de séries discrètes $\sum_{\epsilon:Jord(\psi')\to\{\pm1\}}\pi(\psi',\epsilon)$ est stable où ψ' est un morphisme de $W_F\times SL(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG'$ avec G' de même type que G vérifiant que $Jord(\psi')\subset Jord(\psi\circ\Delta)$.

Ici la terminologie employée en terme de décomposition de la représentation définie par ψ est plus parlante que celle de 2.2.

On a démontré en [11] la stabilité sous l'hypothèse du théorème dans le cas où pour tout $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$, $inf(a,b)=1$; sous cette hypothèse, il suffit même d'avoir la stabilité pour $\psi'=\psi\circ\Delta$. On peut donc supposer que $Jord(\psi)$ contient au moins un triplet (ρ,a,b) avec $inf(a,b)\geq 2$. Supposons d'abord que $inf(a,b)=2$ avec les notations ci-dessus. Les morphismes qui apparaissent sont (ψ',ϵ'), on a enlevé le bloc (ρ,a,b) et les morphismes ψ_- qui se déduit de ψ en remplaçant le bloc (ρ,a,b) par les 2 blocs $(\rho,a+\zeta_{a,b}1,b-\zeta_{a,b}1),(\rho,a-1,b-1)$. On a $Jord(\psi'\circ\Delta)=Jord(\psi\circ\Delta)-\{(\rho,sup(a,b)+1),(\rho,sup(a,b)-1)\}$. On peut donc légitimement admettre le résultat de stabilité pour ψ' par récurrence (l'hypothèse du théorème pour ψ est plus forte que pour ψ'). De plus $Jord(\psi_-\circ\Delta)=Jord(\psi\circ\Delta)$. On peut aussi admettre la stabilité car l'hypothèse du théorème est la même pour ψ et ψ_- mais $|Jord(\psi)|=|Jord(\psi_-)|-1<|Jord(\psi_-)|$. On décompose la somme

$$\sum_{\epsilon}\prod_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi)}\epsilon(\rho',a',b')^{b'-1}\pi(\psi,\epsilon)=$$

$$\sum_{\substack{\epsilon,\,Jord(\psi)\to\{\pm1\};\\ \epsilon(\rho,a,b)=+}}\prod_{(\rho',a',b')\in Jord(\psi')}\epsilon(\rho',a',b')^{b'-1}<\rho|\,|^{(a-b)/2},\cdots,\rho|\,|^{\zeta_{a,b}((a+b)/2-1)}>\times\pi(\psi',\epsilon)$$

$$- \sum_{\substack{\epsilon : Jord(\psi) \to \{\pm 1\}; \\ \eta = \pm}} \epsilon(\rho, a, b) \prod_{(\rho', a', b') \in Jord(\psi')} \epsilon(\rho', a', b')^{b'-1} \epsilon(\rho, a, b)^{b-1} \tag{1}$$

$$\pi(\psi', \epsilon', (\rho, a + \zeta_{a,b}1, b - \zeta_{a,b}1, \eta)(\rho, a - 1, b - 1, \eta\epsilon(\rho, a, b))).$$

La première somme est stable par l'hypothèse de récurrence appliqué à ψ'. Pour montrer la stabilité de la deuxième somme, on va appliquer la récurrence au morphisme qui se déduit de ψ' en ajoutant les 2 blocs $(\rho, a + \zeta_{a,b}1, b - \zeta_{a,b}), (\rho, a - 1, b - 1)$. Pour ϵ, η comme dans la somme, on construit un morphisme ϵ'' de $Jord(\psi'')$ dans $\{\pm 1\}$ comme dans l'écriture ci-dessus, c'est-à-dire en prolongeant la restriction de ϵ à $Jord(\psi')$ par η sur $(\rho, a + \zeta_{a,b}1, b - \zeta_{a,b})$ et par $\eta\epsilon(\rho, a, b)$ sur $(\rho, a - 1, b - 1, \eta\epsilon(\rho, a, b))$. Et on calcule

$$\prod_{(\rho'', a'', b'') \in Jord(\psi'')} \epsilon''(\rho'', a'', b'')^{b''-1} = \Big(\prod_{(\rho', a', b') \in Jord(\psi) - \{(\rho, a, b)\}} \epsilon'(\rho', a', b')^{b'-1} \Big) \big(\eta^{b - \zeta_{a,b}1 - 1} \eta^{b-2} \epsilon(\rho, a, b)^{b-2} \big).$$

On remarque que quelque soit la valeur de $\zeta_{a,b}$, $\eta^{b - \zeta_{a,b}1 - 1}\eta^{b-2} = +$. On obtient donc exactement le signe qui apparaît dans la somme (1) (quand on n'oublie pas le $\epsilon(\rho, a, b)$ qui se trouve devant le produit). D'où la stabilité.

On considère maintenant le cas où $inf(a, b) > 2$. Il faut écrire $\sum_\epsilon \prod_{(\rho,a,b) \in Jord(\psi)} \epsilon(\rho, a, b)^{b-1} \pi(\psi, \epsilon)$ en utilisant 2.1. Cela donne une somme sur $j \in [1, inf(a, b)[$ et un terme complémentaire. Fixons d'abord $j \in [1, inf(a, b)[$, et étudions

$$\sum_\epsilon \prod_{(\rho,a,b) \in Jord(\psi)} \epsilon(\rho, a, b)^{b-1}$$

$$< \rho| \,|^{(a-b)/2}, \cdots, \rho| \,|^{-(a-b)/2 - \zeta_{a,b}j} > \times Jac_{(a-b)/2 + \zeta_{a,b}2, \cdots, \zeta_{a,b}((a+b)/2-1)} \pi(\psi', \epsilon', (\rho, a + \zeta_{a,b}2, b - \zeta_{a,b}2, \epsilon(\rho, a, b))).$$

Pour (ψ, ϵ) fixé, on note ψ'', ϵ'' le couple qui se déduit de ψ, ϵ en changeant simplement $(\rho, a, b, \epsilon(\rho, a, b))$ en $(\rho, a + 2\zeta_{a,b}, b - 2\zeta_{a,b}, \epsilon(\rho, a, b))$. Comme dans ce changement la parité de b est respectée il est clair que le signe défini avec ϵ est le même que celui avec ϵ'' quand on remplace ψ par ψ''. Donc la stabilité résulte de l'hypothèse de récurrence et du fait qu'elle commute à la prise de module de Jacquet et à l'induction.

Il reste le terme complémentaire (on enlève le signe $(-1)^{[inf(a,b)/2]}$ qui est indépendant des termes de la somme)

$$\sum_{\substack{\epsilon : Jac(\psi) \to \{\pm 1\}, \\ \eta = \pm}} \epsilon(\rho, a, b)^{inf(b,a)-1} \eta^{inf(a,b)} \epsilon(\rho, a, b)^{b-1} \Big(\prod_{(\rho', a', b') \in Jord(\psi')} \epsilon(\rho', a', b')^{b'-1} \Big)$$

$$\pi(\psi', \epsilon', (\rho, a + \zeta_{a,b}, b - \zeta_{a,b}, \eta), (\rho, sup(a - b, 1), sup(b - a, 1), \eta\epsilon(\rho, a, b). \tag{2}$$

Pour ϵ, η fixé comme dans la somme, on définit ψ'', ϵ'' en remplaçant $(\rho, a, b, \epsilon(\rho, a, b))$ par $(\rho, a + \zeta_{a,b}1, b - \zeta_{a,b}1, \eta) \cup (\rho, sup(a - b, 1), sup(b - a, 1), \eta\epsilon(\rho, a, b))$. Et il faut encore calculer

$$\prod_{(\rho'', a'', b'') \in Jord(\psi'')} \epsilon''(\rho'', a'', b'')^{b''-1} = \eta^{b - \zeta_{a,b}1 - 1} \eta^{sup(b-a,0)} \epsilon(\rho, a, b)^{sup(b-a,0)} \prod_{(\rho', a', b') \in Jord(\psi')} \epsilon'(\rho', a', b')^{b'-1}. \tag{3}$$

Et on vérifie que :

$$\eta^{b - \zeta_{a,b}1 - 1} \eta^{sup(b-a,0)} \epsilon(\rho, a, b)^{sup(b-a,0)} = \eta^{inf(a,b)} \epsilon(\rho, a, b)^{inf(a,b)-1} \epsilon(\rho, a, b)^{b-1}$$

c'est-à-dire que le signe intervenant dans (2) est le même que celui de (3). On obtient alors la stabilité en appliquant le théorème à ψ'' et cela termine la preuve.

3 Propriétés des modules de Jacquet

Dans tout ce paragraphe, on fixe ψ, ϵ, ρ et $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ (avec les notations de 2.2 et on suppose que $A > B$. On suppose toujours que $\psi \circ \Delta$ est discret. On raisonne par récurrence d'abord par récurrence croissante sur le rang du groupe puis par récurrence croissante sur $s_\psi := \sum_{(\rho,A,B,\zeta) \in Jord(\psi)} A - B$; en effet si $s_\psi = 0$, ψ est élémentaire au sens de 6 et la situation sera toujours connue dans ce cas. Le but de tout ce travail est bien de ramené la définition générale au cas élémentaire. On aurait sans doute pu se passer dans cette partie de mettre dans la récurrence que pour les ψ', ϵ' plus petit que notre ψ, ϵ au sens ci-dessus, $\pi(\psi', \epsilon')$ est une vraie représentation, c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients positifs de représentations irréductibles, mais

je mets quand même cette propriété dans la récurrence pour éviter des problèmes avec l'interprétation de la non nullité des modules de Jacquet que nous allons considérer ; sinon il faudrait se méfier des simplifications éventuelles. Donc cette section ne sera complétée qu'aprés la fin de la section 4.

On démontre simultanément les 2 propositions ci-dessous :

3.1

Supposons ici que $B \geq 1$ et que pour tout élément (ρ, A', B', ζ') de $Jord(\psi)$, on ait $A' \neq B-1$. En particulier, en gardant la notation (ψ', ϵ') de 2.1 le morphisme définit en ajoutant à $Jord(\psi')$ le quadruplet $(\rho, A'-1, B'-1, \zeta')$ est encore discret et de restriction discrète à W_F fois la diagonale de $Sl(2, \mathbb{C})$. En terme de représentation, si (ρ, a, b) correspond à (ρ, A, B, ζ), on enlève 2 au sup de (a, b) après avoir supposé que $sup(a, b) - inf(a, b) \geq 2$. On pose toujours $\epsilon_0 = \epsilon(\rho, A, B, \zeta)$.

Proposition : *Supposons que $B \geq 1$ mais pas nécessairement $A > B$ comme ci-dessus. Alors*

$$Jac_{\zeta B, \cdots, \zeta A)}\pi(\psi, \epsilon) = \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B-1, \zeta, \epsilon_0)).$$

3.2

Proposition : *Soit $x \in \mathbb{R}$. On fixe ψ, ϵ et ρ alors $Jac_x\pi(\psi, \epsilon) = 0$ sauf éventuellement s'il existe $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ et $x = \zeta' B'$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Jac_{x,x}\pi(\psi, \epsilon) = 0$.*

On les démontre par récurrence, en utilisant la formule définissant $\pi(\psi, \epsilon)$ (cf 2.1). Si $A = B$ dans la proposition 3.1, cela se fait par récurrence à partir du cas où ψ est élémentaire (cf. 6 propriété 2), on ne détaille pas, c'est plus simple que le cas où $A > B$ ce que nous supposerons à partir de maintenant.

On fixe donc $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0$ dans $Jord(\psi, \epsilon)$ tel que $A > B$ et pour le moment, on n'impose rien à B. Soit $C \in]B, A]$. On doit calculer :

$$Jac_{\zeta B, \cdots, \zeta A}\Big(< \rho| \,|^{\zeta B}, \cdots, \rho| \,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+2), \cdots, \zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))\Big). \tag{1}$$

On a $Jac_{\zeta B}Jac_{\zeta(B+2), \cdots, \zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) = Jac_{\zeta(B+2), \cdots, \zeta C}Jac_{\zeta B}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) = 0$ par la 3.1 appliquée par récurrence. Ainsi

$$(1) = Jac_{\zeta(B+1), \cdots, \zeta A}\Big(< \rho| \,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho| \,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+2), \cdots, \zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))\Big)$$

ce qui vaut encore par les calculs standard de modules de Jacquet :

$$Jac_{\zeta C, \cdots, \zeta A}\Big(< \rho| \,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho| \,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+1), \cdots, \zeta(C-1)}Jac_{\zeta(B+2), \cdots, \zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))\Big).$$

De plus on a par définition, pour tout élément X du groupe de Grothendieck :

$$Jac_{\zeta C}Jac_{\zeta(B+1), \cdots, \zeta(C-1)}Jac_{\zeta(B+2), \cdots, \zeta C}X = Jac_{\zeta(B+1), \cdots, \zeta C}Jac_{\zeta(B+2), \cdots, \zeta C}X.$$

Par calculer le Jac qui nous intéresse, on calcule tous les modules de Jacquet des constituants de $\pi(\psi', \epsilon', \cdots)$ le long du parabolique de Levi $GL((2(C-B)-1)d_\rho, F) \times G'$, où G' est un groupe de même type que G mais de rang plus petit. On regarde ces modules de Jacquet dans le groupe de Grothendieck ce sont donc des combinaisons linéaires de représentations irréductibles du type $\sigma' \otimes X'$. Ensuite on projette sur le support cuspidal qui nous intéresse. Pour faire ce calcul, on reprend les classifications de Zelevinsky des σ' soit par segment croissant si $\zeta = +$ soit par segment décroissant si $\zeta = -$ de telle sorte que la seule représentation σ' qui contribue soit

$$< \rho| \,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho| \,|^{\zeta C} > \times < \rho| \,|^{\zeta(B+2)}, \cdots, \rho| \,|^{\zeta C} > .$$

Mais cette induite est irréductible donc isomorphe à

$$< \rho| \,|^{\zeta(B+2)}, \cdots, \rho| \,|^{\zeta C} > \times < \rho| \,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho| \,|^{\zeta C} > .$$

Mais cela montre que l'on aurait obtenu le même résultat en calculant

$$Jac_{\zeta(B+1), \cdots, \zeta C}Jac_{\zeta(B+2), \cdots, \zeta C}Jac_{\zeta(B+1), \cdots, \zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)).$$

Mais ceci fait zéro car ce calcul se "factorise" par $Jac_{\zeta(B+1)}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0))$ dont la proposition 3.2 appliquée par récurrence donne la nullité. D'où

$$(1) = Jac_{\zeta(C+1),\cdots,\zeta A} < \rho|\,|^{\zeta(B-1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(C-1)} > \times Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(C-1)}Jac_{\zeta(B+2),\cdots\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B{+}2,\zeta,\epsilon_0)).$$

Or ni $\zeta(B-1)$ ni $\zeta(C-1)$ ne sont des éléments du segment $[\zeta(C+1),\zeta A]$ et on obtient donc par les calculs standard de modules de Jacquet (le rappel de 5.6.3 suffit ici) :

$$(1) =< \rho|\,|^{\zeta(B-1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(C-1)} > \times Jac_{\zeta(C+1),\cdots,\zeta A}Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(C-1)}Jac_{\zeta(B+2),\cdots\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B{+}2,\zeta,\epsilon_0)).$$

Or de façon assez formelle :

$$Jac_{\zeta(C+1),\cdots,\zeta A}Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(C-1)}Jac_{\zeta(B+2),\cdots\zeta C} = Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(C-1)}Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta A}$$

Ce qui donne encore :

$$(1) =< \rho|\,|^{\zeta(B-1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(C-1)} > \times Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(C-1)}Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta A}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0)).$$

On veut encore remplacer $Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta A}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0))$ par $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\epsilon_0)$; si $A = B+1$ de toute façon ce terme n'intervenait pas, si $A \geq B+2$, c'est la proposition 3.1 que l'on applique par récurrence au bloc $(\rho,A,B+2,\zeta)$ qui en vérifie les hypothèses. D'où finalement

$$(1) =< \rho|\,|^{\zeta(B-1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(C-1)} > \times Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(C-1)}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\epsilon_0)). \tag{2}$$

C'est-à-dire qu'en calculant $Jac_{\zeta B,\cdots,\zeta A}$ on a remplacé (A,B,C) par $(A-1,B-1,C-1)$.

On a aussi par définition, pour $\eta = \pm$,

$$Jac_{\zeta B,\cdots,\zeta A}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)) =$$

$$Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta A}\,Jac_{\zeta B}$$

$$\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)).$$

Supposons maintenant que les hypothèses de la proposition 3.1 soient satisfaites. En particulier le bloc (ρ,B,B,ζ) les vérifie ; on a alors par récurrence

$$Jac_{\zeta B}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)) = \pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B-1,B-1,\zeta,\eta\epsilon_0).$$

On en déduit :

$$Jac_{\zeta B,\cdots,\zeta A)}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0) =$$

$$Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta A}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B-1,B-1,\zeta,\eta\epsilon_0)),$$

et en appliquant la proposition 3.1 par récurrence ce que l'on a le droit de faire

$$= \pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B,\zeta,\eta),(\rho,B-1,B-1,\zeta,\eta\epsilon_0)), \tag{3}$$

c'est-à-dire qu'ici aussi, on a obtenu le terme de départ mais en remplaçant le couple (A,B) par le couple $(A-1,B-1)$. Ainsi en mettant ensemble les termes obtenus en (2) ci-dessus sans aucune hypothèse sur (A,B) et les termes (3) qui eux ont été obtenus modulo les hypothèses de 3.1 on obtient exactement la définition de $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B-1,\zeta,\epsilon_0))$ qui elle nécessite aussi l'hypothèse que le morphsime $(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B-1,\zeta,\epsilon_0))$ soit de restriction discrète à la diagonale c'est-à-dire l'hypothèse de 3.1. Cela termine la preuve de cette proposition.

Montrons maintenant la deuxième proposition ; cette proposition a été démontrée dans le cas où ψ est élémentaire (cf. 6) et on suppose donc que ψ n'est pas élémentaire. On fixe $(\rho,A,B,\zeta) \in Jord(\psi)$ tel que $A > B$ et on pose encore $\epsilon_0 := \epsilon(\rho,A,B,\zeta)$.

Soit x tel que $Jac_x\pi(\psi,\epsilon) \neq 0$; nécessairement, en revenant à la définition 2.1

soit il existe $\eta = \pm$ tel que $Jac_x\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon(\rho,a,b))) \neq 0$

soit il existe $C \in]B,A]$ tel que

$$Jac_x\Big(< \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\epsilon_0))\Big) \neq 0.$$

Pour le premier cas, les valeurs de x qui ne satisfont pas à la proposition sont uniquement $\zeta(B+1)$. Dans le deuxième cas, celles qui ne satisfont pas sont ζC avec $C \in]B,A]$ et celles qui vérifient

$$Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C,x}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0)) \neq 0.$$

Dans cette dernière éventualité, on vérifie en utilisant la proposition elle-même par récurrence que les seules difficultés viennent de $x = \zeta(B+1)$ et $x = \zeta(C+1)$. On va encore vérifier que $x = \zeta(C+1)$ avec $C = A$ n'est pas une exception ; en effet si $C = A$, on applique 3.1 à $(\rho, A, B+2, \zeta)$ pour obtenir faut

$$Jac_{\zeta(B+2)\cdots,\zeta A}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) = \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \epsilon(\rho, a, b)))$$

et en appliquand 3.2 par récurrence, $Jac_{\zeta(A+1)}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \epsilon(\rho, a, b))) \neq 0$ entraîne qu'il existe $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ avec $\zeta(A+1) = \zeta' B'$ c'est-à-dire la propriété cherchée.

En résumé, les valeurs qui nous gênent sont $x = \zeta(C+1)$ avec $C \in [B, A[$ (c'est-à-dire B inclus et A exclu). Supposons d'abord que $C \in]B, A[$. Alors les termes de la somme définissant $\pi(\psi, \epsilon)$ qui contribuent au $Jac_{\zeta(C+1)}$ sont exactement au nombre de 2, celui correspondant à $C+1$ et celui correspondant à C. La contribution du terme correspondant à C est :

$$(-1)^{A-C} Jac_{\zeta(C+1)}\Big(< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))\Big) =$$

$$(-1)^{A-C} < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C,\zeta(C+1)}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))$$

et la contribution du terme correspondant à $C+1$ est

$$(-1)^{A-C-1} Jac_{\zeta(C+1)}\Big(< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(C+1)} > \times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta(C+1)}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))\Big) =$$

$$(-1)^{A-C-1}(< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta(C+1)}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)).$$

La somme des 2 contributions fait donc 0 comme annoncé. Reste à voir le cas où $C = B$ c'est-à-dire à calculer $Jac_{\zeta(B+1)}\pi(\psi, \epsilon)$. Le calcul est assez difficile car tous les termes contribuent. On fait d'abord le cas où $A = B+1$. Dans ce cas, si $\epsilon_0 = +$

$$\pi(\psi, \epsilon) =< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+1)} > \times \pi(\psi', \epsilon') \ominus_{\eta=\pm} \pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+1, B+1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, \eta))$$

et si $\epsilon_0 = -$

$$\pi(\psi, \epsilon) = \oplus_{\eta=\pm}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+1, B+1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, -\eta)).$$

On vérifie avec 6 que dans le deuxième cas $Jac_{\zeta(B+1)} = 0$. Dans le cas où $\epsilon_0 = +$, avec 6 on vérifie que

$$Jac_{\zeta(B+1)}(\oplus_{\eta=\pm}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A = B+1, A = B+1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, \eta)) =< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi(\psi', \epsilon').$$

Il est alors clair" que $Jac_{\zeta(B+1)}\pi(\psi, \epsilon) = 0$ dans ce cas aussi.

On suppose maintenant que $A = B+2$. Ici on a :

$$\pi(\psi, \epsilon) =< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+2)} > \times Jac_{\zeta(B+2)}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+2, B+2, \zeta, \epsilon_0)) \tag{4}$$

$$- < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+1)} > \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+2, B+2, \zeta, \epsilon_0)) \tag{5}$$

$$\ominus_{\eta=\pm}\eta\pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+2, B+1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, \eta\epsilon_0)). \tag{6}$$

Dans (6) on remplace $\pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+2, B+1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, \eta\epsilon_0))$ par sa définition en utilisant $(\rho, B+2, B+1, \zeta)$ et cette définition dépend de la valeur de η. Ainsi

$$(6) = \ominus < \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+2)} \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, B, B, \zeta, \epsilon_0))$$

$$\oplus_{\eta=\pm,\eta'=\pm}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+2, B+2, \zeta, \eta'), (\rho, B+1, B+1, \zeta, \eta\eta'), (\rho, B, B, \zeta, \eta\epsilon_0)). \tag{7}$$

Quand on applique $Jac_{\zeta(B+1)}$ à (7), il n'y a pas de contribution des termes tels que $\eta' \neq \epsilon_0$ et on obtient :

$$\ominus < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+2)} \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, B, B, \zeta, \epsilon_0)) \tag{8}$$

$$\oplus < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+2, B+2, \zeta, \epsilon_0)). \tag{9}$$

Il est clair que (9) annule la contribution de $Jac_{\zeta(B+1)}$ appliqué à (5). On calcule $Jac_{\zeta(B+1)}$ appliqué à (4) en utilisant 2 fois 3.1 d'abord pour $(\rho, B+2, B+2, \zeta)$ puis pour $(\rho, B+1, B+1, \zeta)$

$$Jac_{\zeta(B+1)}Jac_{\zeta(B+2)}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+2, B+2, \zeta, \epsilon_0)) = Jac_{\zeta(B+1)}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, B+1, B+1, \zeta, \epsilon_0) =$$

$$\pi(\psi', \epsilon', (\rho, B, B, \zeta, \epsilon_0).$$

Et ainsi (8) annule $Jac_{\zeta(B+1)}$ appliqué à (4). Cela termine la preuve de ce cas.

On fait maintenant le cas général qui est de même nature. On suppose donc que $A > B+2$ et on écrit :

$$\pi(\psi,\epsilon) = \oplus_{C\in]B,A]}(-1)^{A-C} < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0)) \qquad (*_C)$$

$$\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B}$$
$$\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)). \qquad (*_\eta).$$

On fixe $C > B+1$ et on récrit $(*_C)$ en remplaçant $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0))$ par sa définition, en utilisant $(\rho,A,B+2,\zeta)$. D'où

$$(*_C) := (-1)^{A-C}\oplus_{C'\in]B+2,A]}(-1)^{A-C'} < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times$$

$$Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\Big(< \rho|\,|^{\zeta(B+2)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C'} > \times Jac_{\zeta(B+4),\cdots,\zeta C'}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+4,\zeta,\epsilon_0))\Big) \qquad (\dagger_C)$$

$$(-1)^{A-C}\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{(A-B-1)/2]}\eta^{A-B-1}\epsilon_0^{A-B} < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times$$
$$Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+3,\zeta,\eta),(\rho,B+2,B+2,\zeta,\eta\epsilon_0)). \qquad (\dagger'_C)$$

Dans les formules ci-dessus, $Jac_{\zeta(B+2)}$ se calcule aisément car on a supposé que $C > B+1$

$$(\dagger_C) = (-1)^{A-C}\oplus_{C'\in]B+2,A]}(-1)^{A-C'} < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times$$

$$Jac_{\zeta(B+3),\cdots,\zeta C}\Big(< \rho|\,|^{\zeta(B+1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C'} > \times Jac_{\zeta(B+4),\cdots,\zeta C'}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+4,\zeta,\epsilon_0))\Big)$$

et quand on applique encore $Jac_{\zeta(B+1)}$ si $C \neq B+1$ cela donne encore, pour $C \neq B+1$:

$$Jac_{\zeta(B+1)}(\dagger_C) = (-1)^{A-C}\oplus_{C'\in]B+2,A]}(-1)^{A-C'} < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times$$

$$Jac_{\zeta(B+3),\cdots,\zeta C}\Big(< \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C'} > \times Jac_{\zeta(B+4),\cdots,\zeta C'}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+4,\zeta,\epsilon_0))\Big)$$

Supposons que $C' > C$, le terme correspondant au couple (C,C') se récrit :

$$(-1)^{A-C}(-1)^{A-C'} < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C'} > \times$$

$$Jac_{\zeta(B+3),\cdots,\zeta C}Jac_{\zeta(B+4),\cdots,\zeta C'}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+4,\zeta,\epsilon_0)).$$

Supposons maintenant que $C' \leq C$, on vérifie que cela se récrit :

$$(-1)^{A-C}(-1)^{A-C'} < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(C'-1)} > \times$$

$$Jac_{\zeta(B+3),\cdots,\zeta(C'-1),\zeta(C'+1),\cdots,\zeta C}Jac_{\zeta(B+4),\cdots,\zeta C'}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+4,\zeta,\epsilon_0))$$

ce qui est encore :

$$(-1)^{A-C}(-1)^{A-C'} < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(C'-1)} > \times$$

$$Jac_{\zeta(B+3),\cdots,\zeta(C'-1)}Jac_{\zeta(B+4),\cdots,\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+4,\zeta,\epsilon_0)).$$

Si on remplace ci-dessus C par C' et C' par $C+1$ on obtient l'opposé de la contribution du couple (C,C') trouvé précédemment ou encore le terme correspondant au couple (C,C') avec $C' > C > B+1$ a une contribution opposée à celle du couple $C' = C+1 \leq C = C'$. En d'autre termes

$$\oplus_{C\in]B+1,A]}Jac_{\zeta(B+1)}(\dagger_C) = 0$$

On applique $Jac_{\zeta(B+1)}$ à $(\dagger'_C)$ après avoir utilisé 3.1 pour calculer $Jac_{\zeta(B+2)}$. On suppose encore que $C \neq B+1$ et on trouve :

$$Jac_{\zeta(B+1)}(\dagger'_C) = (-1)^{A-C}\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{[(A-B-1)/2]}\eta^{A-B-1}\epsilon_0^{A-B} < \rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C} > \times$$

$$Jac_{\zeta(B+3),\cdots,\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+3,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)).$$

On récrit $(*)_\eta$ en utilisant $(\rho, A, B+1, \zeta)$ pour définir $\pi(\psi', \epsilon', \cdots)$ qui intervient dans cette expression et on somme tout de suite sur η. Cela donne :

$$\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B} \oplus_{C\in]B+1,A]} (-1)^{A-C} < \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times$$

$$Jac_{\zeta(B+3),\cdots,\zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+3, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \eta\epsilon_0) \tag{10}$$

$$\oplus_{\eta=\pm,\eta'=\pm}(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B}(-1)^{[(A-B)/2]}(\eta')^{A-B}(\eta)^{A-B-1}$$

$$\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \eta'), (\rho, B+1, B+1, \zeta, \eta\eta'), (\rho, B, B, \eta\epsilon_0)). \tag{11}$$

Comme $(-1)^{[(A-B+1)/2]} = -(-1)^{[(A-B-1)/2]}$, en appliquant $Jac_{\zeta(B+1)}$ à (10), on annule les contributions de $Jac_{\zeta(B+1)}(\dagger'_C$ pour tout $C \neq B+1$. On a ainsi montré que

$$Jac_{\zeta(B+1)}\pi(\psi, \epsilon) = Jac_{\zeta(B+1)}\Big((-1)^{A-B-1} < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+1)} > \times\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) \tag{12}$$

$$\oplus_{\eta=\pm,\eta'=\pm}(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B}(-1)^{[(A-B+2)/2]}(\eta')^{A-B}(\eta)^{A-B-1}$$

$$\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \eta'), (\rho, B+1, B+1, \zeta, \eta\eta'), (\rho, B, B, \eta\epsilon_0))\Big).$$

Comme dans le cas $A = B+2$, les seuls termes associées à η, η' qui donne une contribution non nulle quand on applique $Jac_{\zeta(B+1)}$ sont ceux pour lesquels $\eta' = \epsilon_0$ (cf 6 propriété 6) le signe est alors $(-1)^{[(A-B+1)/2+[(A-B)/2]}$; en particulier il ne dépend pas de η et quand on somme sur η le Jac est $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))$ au signe près que l'on vient d'écrire. On remarque que $(-1)^{[(A-B+1)/2+[(A-B)/2]}$ est $(+1)$ si $(A-B)$ est pair et -1 sinon, c'est-à-dire qu'il vaut $(-1)^{A-B}$. La contribution que l'on vient de trouver est donc l'opposée de (12), ce qui donne la nullité cherchée.

Il reste à démontrer que $Jac_{x,x}\pi(\psi, \epsilon) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Grâce à ce que l'on a déjà démontré, le seul cas à considérer est $x = \zeta B$. Et clairement, par l'hypothèse de récurrence pour tout $\eta = \pm$

$$Jac_{x,x}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, \eta\epsilon_0)) = 0$$

. Soit $C \in]B, A]$, on pose $\delta_C :=< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} >$. On a

$$Jac_{\zeta B}Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0) = Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}Jac_{\zeta B}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta\epsilon, \epsilon_0) = 0$$

par la partie de 3.2 déjà démontré. De plus $Jac_{\zeta B}\delta_C^* = 0$ et $Jac_{\zeta B,\zeta B}\delta_C = 0$. Cela suffit pour obtenir

$$Jac_{\zeta B,\zeta B}\Big(\delta_C \times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))\Big) = 0.$$

Cela termine la preuve.

3.3

Proposition : *soit $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0) \in Jord(\psi, \epsilon)$ tel que $A > B$, alors $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\pi(\psi, \epsilon) = \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \epsilon_0)$. En particulier ceci est 0 si $A = B+1$ et $\epsilon_0 = -$.*

Soit $C \in]B, A]$; on pose $\delta_C :=< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} >$ et $Y_C := Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))$. Et pour $\eta = \pm$, on pose $X_\eta := \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, \eta\epsilon_0))$.

On fixe C et on calcule d'abord $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}(\delta_C \times Y_C)$. Pour tout $x \in [\zeta B, -\zeta A]$, $Jac_x\delta_C^* = 0$ et les calculs standard de module de Jacquet (cf. par exemple 5.6.3) entraînent alors que ce Jac est la somme sur $\ell \in [(B+1), -A]$ de termes de la forme :

$$Jac_{\zeta B,\cdots,\zeta\ell}\delta_C \times Jac_{\zeta(\ell-1),\cdots,-\zeta A}Y_C$$

où le premier Jac n'intervient pas si $\ell = B+1$ et le deuxième n'intervient pas si $\ell = -A$. Pour tout $y \in [\zeta(B+2), \zeta A]$ et tout $y' \in [\zeta(\ell-1), -\zeta A]$, on a $\zeta(y-y') \geq (B+2-B) = 2$. On a donc :

$$Jac_{\zeta(\ell-1),\cdots,-\zeta A}Y_C = Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta A}Jac_{\zeta(\ell-1),\cdots,-\zeta A}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)). \tag{1}$$

Supposons que $\ell > -A$ et montrons que (1) est nul. Grâce à 3.2, la non nullité de (1) nécessite qu'il existe $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi')$ tel que $\zeta'B' = \zeta(\ell-1)$. On rappelle que $\ell - 1 \in [B, -A]$; le fait que $\psi \circ \Delta$ est discret

et que $B' \neq B$ nécessairement, entraîne que $|\ell - 1| \notin [B, A]$. On pose $x = \zeta(\ell - 1)$ et on a sûrement que (1) se factorise par

$$Jac_{x,\cdots,-\zeta B}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)). \tag{2}$$

Le lemme 3.4 que l'on démontrera ci-dessous appliqué à $y = -\zeta B$ prouve la nullité de (2) et donc celle de (1). Remarquons d'autre part que si $\ell = -A$, $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A=\zeta\ell}\delta_C = 0$ sauf pour $C = A$ ou cela vaut 1. Ainsi la contribution des termes $\delta_C \times Y_C$ au calcul du module de Jacquet cherché provient uniquement du terme correspondant à $C = A$ et ce terme donne

$$Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta A}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)). \tag{3}$$

On fixe maintenant $\eta = \pm$ et on démontre plus généralement,

soit (ψ_1, ϵ_1) un couple de même type que ψ, ϵ, en particulier $\psi_1 \circ \Delta$ est supposé discret ; on suppose qu'il existe B_1 un demi-entier et un signe ζ_1 tel que $(\rho, B_1, B_1, \zeta_1) \in Jord(\psi_1)$. Alors :

$$Jac_{\zeta_1 B_1,\cdots,-\zeta_1 B_1}\pi(\psi_1, \epsilon_1) = 0.$$

On démontre cette assertion par récurrence ; elle est vraie pour les séries discrètes, elle est donc vraie pour les morphismes ψ_1 qui sont élémentaires étant donné la façon que l'on a de les obtenir à partir des séries discrètes. On est donc ramené au cas où il existe $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi_1)$ avec $A' > B'$. On utilise ce quadruplet pour donner la définition de $\pi(\psi_1, \epsilon_1)$; cette définition fait intervenir des $\pi(\psi_1', \epsilon_1', (\rho, A', B'+2, \zeta', \epsilon_0'))$ et des $\pi(\psi_1', \epsilon_1', (\rho, A', B'+1, \zeta', \eta'), (\rho, B', B', \zeta', \eta'\epsilon_0'))$ qui vérifient les mêmes hypothèses que ψ_1, ϵ_1. Pour pouvoir conclure par récurrence, il suffit de vérifier que $Jac_{\zeta_1 B_1,\cdots,-\zeta_1 B_1}$ commute aux inductions par des représentations de la forme $< \rho|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta' C'} >$ où $C' \in]B', A']$ et des opérations $Jac_{\zeta'(B'+2),\cdots,\zeta' A'}$. Cela a été vérifié dans 2.3.1. D'où l'assertion.

Ainsi $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\pi(\psi, \epsilon) = Jac_{\zeta(B+2),\cdots,}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) = \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0))$ grâce à 3.1 appliqué à $(\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)$. Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer le lemme ci-dessous.

3.4

Le lemme ci-dessous est purement technique et ρ, ψ, ϵ sont fixés comme dans tout ce chapitre. En particulier $\psi \circ \Delta$ est discret.

Lemme : *Soit y un demi-entier relatif tel que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$, $|y| \notin [B', A']$. Alors pour tout x tel que $|x| \leq |y|$ avec $x - y \in \mathbb{Z}$, $Jac_{x,\cdots,y}\pi(\psi, \epsilon) = 0$.*

On le démontre par récurrence. On suppose d'abord que ψ est élémentaire. L'hypothèse sur y dit simplement que pour tout bloc de Jordan de ψ nécessairement de la forme (ρ, B', B', ζ') on a $|y| \neq B'$. De plus on sait que $|x| \leq |y|$. Il faut évidemment revenir à la définition ; on peut supposer, comme nous le ferons que $\pi(\psi, \epsilon)$ n'est pas cuspidale. On a alors montré qu'il existe $\zeta = \pm$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha > 1$ tels que $(\rho, (\alpha-1)/2, (\alpha-1)/2, \zeta)) \in Jord(\psi)$ et l'une des 2 situations ci-dessous est réalisée (on pose $B := (\alpha - 1)/2$) :

$B > 0$ et $(\rho, B-1, B-1, \zeta') \notin Jord(\psi)$ (quelque soit $\zeta' = \pm$) ou $B = 1/2$ et $\epsilon(\rho, B, B, \zeta) = +$; on note alors ψ_1 le morphisme qui se déduit de ψ en changeant le bloc de Jordan (ρ, B, B, ζ) en $(\rho, B-1, B-1, \zeta)$ et ϵ_1 le morphisme qui se déduit naturellement de ϵ et alors $\pi(\psi, \epsilon)$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho|\,|^{\zeta B} \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)$;

sinon alors $B > 1/2$ et $(\rho, B-1, B-1, \zeta) \in Jord(\psi)$ avec $\epsilon(\rho, B, B, \zeta) = \epsilon(\rho, B-1, B-1, \zeta)$ et on note ψ_1 le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant ces 2 blocs de Jordan et ϵ_1 la restriction évidente de ϵ. Alors, $\pi(\psi, \epsilon)$ est l'un des 2 sous-modules irréductibles de l'induite :

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B-1)} > \times \pi(\psi_1, \epsilon_1).$$

De plus, dans les 2 cas, B est tel que $Jac_z\pi(\psi, \epsilon) = 0$ pour tout z tel que $|z| < B$.

Revenons à la propriété que l'on cherche à montrer ; avec ce qui précède la nullité est claire si $|x| < B$. On suppose donc que $|x| \geq B$ et on raisonne par l'absurde en supposant que $Jac_{x,\cdots,y}\pi(\psi, \epsilon) \neq 0$. Dans le premier cas, on a soit $Jac_{x,\cdots,y}\pi(\psi_1, \epsilon_1) \neq 0$ soit il existe $x_1 \in [x, y]$ tel que $|x_1| = B$ et $Jac_{x,\cdots x_1+\gamma, x_1-\gamma,\cdots y}\pi(\psi_1, \epsilon_1) \neq 0$, où $\gamma = 1$ si le segment $[x, y]$ est décroissant et -1 sinon. Cela entraîne encore $Jac_{x_1-\gamma,\cdots,y}\pi(\psi_1, \epsilon_1) \neq 0$. On a encore $|x_1 - \gamma| \leq |y|$ et toutes les hypothèses de l'énoncé vérifiées. On obtient alors le résultat par récurrence. Le deuxième cas se traite de la même façon ; on montre encore que si $Jac_{x,\cdots,y}\pi(\psi, \epsilon) \neq 0$, il existe x' avec $|x'| \leq |y|$ tel que $[x', y]$ soit un sous-intervalle de $[x, y]$ et tel que nécessairement $Jac_{x',\cdots y}\pi(\psi_1, \epsilon_1) \neq 0$ (cf. 1.2). Cela permet de conclure.

On fait maintenant le cas général ; on retraduit l'hypothèse, pour tout (ρ, α) bloc de Jordan de $\psi \circ \Delta$, $|y| \neq (\alpha - 1)/2$. Pour terminer la preuve, il faut considérer le cas où dans $Jord(\psi)$ se trouve (ρ, A, B, ζ) avec

$A > B$. Et on suppose que $Jac_{x,\cdots,y}\pi(\psi,\epsilon) \neq 0$. On revient à la définition de $\pi(\psi,\epsilon)$ avec les notations, pour $C \in]B,A]$, δ_C, Y_C de la preuve de 3.3 ainsi que X_η pour $\eta = \pm$. Comme les morphismes qui interviennent dans la définition de X_η on la même restriction à la diagonale de $SL(2,\mathbb{C})$ que ψ, on a tout de suite par récurrence que pour tout $\eta = \pm$, $Jac_{x,\cdots,y}X_\eta = 0$. Fixons maintenant $C \in]B,A]$ et on calcule $Jac_{x,\cdots,y}(\delta_C \times X_C)$ par les formules standard : cet élément est combinaison linéaire d'éléments indexés par un découpage de l'intervalle $[x,y]$ en trois sous-esembles (dont certains peuvent être vides, notés F_1, F_2, F_3 et tel que $Jac_{x\in F_1}\delta_C \neq 0$, $Jac_{x\in F_2}\delta_C^* \neq 0$ et $Jac_{x\in F_3}Y_C \neq 0$. Fixons un tel découpage en supposant que le terme correspondant n'est pas 0. Montrons que $y \in F_3$; s'il n'en était pas ainsi, on aurait soit $|y| \in [B,C]$, ce qui est exclu par hypothèse, soit $|y| < B$. Si cette dernière condition est satisfait tous les points du segment $[x,y]$ sont de valeur absolue strictement inférieur à B et il en est donc de même des éléments de F_1 et des éléments de F_2 ; or F_1 s'il n'est pas vide contient ζB qui ne vérifie pas cette condition et F_2 s'il n'est pas vide contient ζA qui ne vérifie pas non plus cette conditions. Ainsi, on a abouti à une contradiction qui prouve que $y \in F_3$. On a alors remarqué qu'il existe $x' \in [x,y]$ tel que $Jac_{x',\cdots y}Y_C \neq 0$. En revenant à la définition, on a donc :

$$Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C,x',\cdots,y}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0)) \neq 0.$$

On a soit $|y| < B$ soit $|y| > C$. Dans le premier cas, on a :

$$Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C,x',\cdots,y}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0)) = Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}Jac_{x',\cdots y}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0)) = 0$$

par l'hypothèse de récurrence. Dans le 2e cas y est soit l'élément maximal soit l'élément minimal de l'ensemble $[\zeta(B+2),\zeta C] \cup [x',y]$ et il existe donc x'' dans cet ensemble tel que $[x'',y]$ soit un segment (croissant ou décroissant) et

$$Jac_{x'',\cdots y}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0)) \neq 0.$$

Le point est de remarque que $|x''| < |y|$ mais cela vient de ce que $|y|$ est maximal dans l'ensemble $[(B+2),C] \cup [|x'|,|y|]$. Cela termine la preuve.

4 Caractérisation de $\pi(\psi,\epsilon)$ comme représentation

Dans tout ce paragraphe on suppose que $\psi \circ \Delta$ est discret. Et le but de ce paragraphe est de démontrer que les éléments $\pi(\psi,\epsilon)$ a priori définis dans le groupe de Grothendieck sont en fait une somme de représentations irréductibles toutes inéquivalentes. On utilise la notation suivante : soit Y une représentation semi-simple et soit δ une représentation irréductible d'un groupe GL, on note $<\delta, Y>$ le socle de l'induite $\delta \times Y$. On énonce ici les résultats que l'on démontrera en 5.

4.1 Description par récurrence

Théorème : *L'élément $\pi(\psi,\epsilon)$ du groupe de Grothendieck est une représentation dont la description se fait par récurrence ainsi ; on fixe $(\rho,a,b) \in Jord(\psi)$ tel que $inf(a,b) \geq 2$.*

Dans le cas où $inf(a,b) = 2$ et $\epsilon(\rho,a,b) = -$ la définition suffit

$$\pi(\psi,\epsilon) = \oplus_{\eta=\pm}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,a+\zeta_{a,b}1,b-\zeta_{a,b}1,\eta),(\rho,a-1,b-1,-\eta)).$$

Supposons que $inf(a,b) = 2$ et que $\epsilon(\rho,a,b) = +$, alors

$$\pi(\psi,\epsilon) =<< \rho|\,|^{(a-b)/2},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta_{a,b}((a+b)/2-1)} >, \pi(\psi',\epsilon') > .$$

Supposons que $inf(a,b)$ est impair

$$\pi(\psi,\epsilon) =<< \rho|\,|^{(a-b)/2},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta_{a,b}((a+b)/2-1)} >, \pi(\psi',\epsilon',(\rho,inf(a-\zeta_{a,b}2,a),inf(b+\zeta_{a,b}2,b),\epsilon(\rho,a,b))) >$$

$$\oplus\pi(\psi',\epsilon',\cup_{\alpha\in[|a-b|+1,a+b-1]_2}(\rho,sup(\zeta_{a,b}\alpha,1),sup(-\zeta_{a,b}\alpha,1),\epsilon(\rho,a,b)(-1)^{(\alpha-|a-b|-1)/2})).$$

Supposons que $inf(a,b)$ est pair si $\epsilon \neq (-1)^{inf(a,b)/2}$, alors

$$\pi(\psi,\epsilon) =<< \rho|\,|^{(a-b)/2},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta_{a,b}((a+b)/2-1)} >, \pi(\psi',\epsilon',(\rho,inf(a,a-\zeta_{a,b}2),inf(b,b+\zeta_{a,b}2),\epsilon(\rho,a,b)))$$

si $\epsilon(\rho,a,b) = (-1)^{(inf(a,b)/2}$, alors à la représentation ci-dessus, il faut ajouter

$$\oplus_{\eta=\pm}\pi(\psi',\epsilon',\cup_{\alpha\in[|a-b|+1,a+b-1]_2}(\rho,sup(\zeta_{a,b}\alpha,1),sup(-\zeta_{a,b}\alpha,1),(-1)^{(\alpha-|a-b|-1)/2}\eta))).$$

De façon assez concise, en utilsant les notations de 2.2, le théorème ci-dessus se récrit,

soit $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ avec $A > B$, on note comme ci-dessus ψ', ϵ' le couple qui se déduit de ψ, ϵ en enlevant le quadruplet (ρ, A, B, ζ) et avec la notation $\epsilon_0 := \epsilon(\rho, A, B, \zeta)$:

$$\pi(\psi, \epsilon) =<< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0)) >$$

si $A = B + 1$ ce terme n'apparaît que si $\epsilon(\rho, A, B, \zeta) = +$ et vaut le socle de l'induite avec $\pi(\psi', \epsilon')$

$$\oplus_{\eta=\pm;\epsilon_0=\eta^{A-B+1}(-1)^{(A-B+1)(A-B)/2}} \pi(\psi', \epsilon', \cup_{C\in[B,A]}(\rho, C, C, \zeta, (-1)^C\eta)).$$

La somme dans ce dernier terme contient un terme si $A - B$ est pair, il en contient 0 si $A - B$ est impair avec $\epsilon_0 \neq (-1)^{(A-B+1)/2}$ et 2 dans le cas restant. On appelle cette somme les termes complémentaires.

4.2 Description en tant que représentations

Dans cette section on tire quelques conséquences du théorème permettant de mieux cerner la représentation $\pi(\psi, \epsilon)$; on pourra appliquer ces propriétés par récurrence. On utilise le langage de 2.2 les formules étant plus simples bien qu'à mon avis moins conceptuelles.

Théorème *: Soit $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0) \in Jord(\psi, \epsilon)$ tel que $A > B$. Alors $\pi(\psi, \epsilon) =$*

$$\oplus_{\ell\in[0,[(A-B)/2]],\eta=\pm;\epsilon_0=\eta^{A-B+1}} \prod_{C\in[B+\ell,A-\ell]}(-1)^{[C]}$$

$$<< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A}) >, \cdots, < \rho|\,|^{\zeta(B+\ell)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-\ell)}) >, \pi(\psi', \epsilon', \cup_{C\in[B+\ell,A-\ell]}(\rho, C, C, \zeta, \eta(-1)^{[C]}))) >;$$

il n'y a pas d'induction pour $\ell = 0$ et pour $\ell = [(A - B + 1)/2]$ avec $A - B$ impair il n'y a pas de $\cup$.

On remarque que si $A - B + 1$ est impair la somme sur η contient exactement un terme quelque soit ℓ, par contre si $A - B + 1$ est pair, la somme est, suivant les valeurs de ℓ pour ϵ_0 fixé, soit vide soit contient 2 termes (il y a alternance) .

C'est une application répétée du théorème.

4.3 Sans multiplicité

Proposition : *la représentation $\pi(\psi, \epsilon)$ est sans multiplicité toujours sous l'hypothèse que $\psi \circ \Delta$ est discret.*

La proposition est trivialement vraie si ψ est élémentaire car alors $\pi(\psi, \epsilon)$ est irréductible. Avec la récurrence que l'on a mise en place ici, nous allons montrer que cette proposition est conséquence du théorème 4.1. Pour cela, nous allons reformuler ce théorème. On reprend les notations de 2.2 et on fixe $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ en supposant que $A > B$. On note $Irr(\pi(\psi, \epsilon)$ l'ensemble des représentations irréductibles constituant $\pi(\psi, \epsilon)$ comptées avec multiplicité et on généralise cette notation à tous les couples (ψ'', ϵ'') de même nature que ψ, ϵ. Pour $\eta = \pm$, on note ψ_η, ϵ_η le couple qui se déduit de ψ, ϵ en enlevant (ρ, A, B, ζ) et en ajoutant les quadruplets (ρ, C, C, ζ) pour $C \in [B, A]$ en prolongeant ϵ par $\epsilon_\eta(\rho, C, C, \zeta) = (-1)^C\eta$ pour tout $C \in [B, A]$ et ce qui n'est défini, par hypothèse, que si $\epsilon_0 = (\prod_{C\in[B,A]}(-1)^{[C]})\eta^{(A-B+1}$. Avec cette notation, le théorème de 4.1 dit que $Irr(\pi(\psi, \epsilon))$ est l'union des $Irr(\pi(\psi_\eta, \epsilon_\eta))$ (pour les η convenables) avec l'ensemble des sous-modules irréductibles de l'induite $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon(\rho, A, B, \zeta))$.

Montrons d'abord plus précisément que

l'application $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}$ induit une bijection de $Irr(\pi(\psi, \epsilon)) - \cup_{\eta=\pm} Irr(\pi(\psi_\eta, \epsilon_\eta))$ sur $Irr(\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A - 1, B + 1, \zeta, \epsilon(\rho, A, B, \zeta)))$. Et que de plus $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}$ annule $\cup_{\eta=\pm} Irr(\pi(\psi_\eta, \epsilon_\eta))$.

On a montré dans la preuve de 3.3 que $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta B}$ annule $\cup_{\eta=\pm} Irr(\pi(\psi_\eta, \epsilon_\eta))$; il en est donc de même à fortiori de $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}$. D'où la deuxième propriété de l'assertion.

Montrons la bijection annoncée ; par définition du socle pour tout $X \in Irr(\pi(\psi, \epsilon)) - \cup_{\eta=\pm} Irr(\pi(\psi_\eta, \epsilon_\eta))$, $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A} X \neq 0$. Et même il existe un élément $Y \in Irr(\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon(\rho, A, B, \zeta)))$ tel que

$$X \hookrightarrow < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times Y. \tag{1}$$

On note σ_Y l'induite du membre de droite de (1). On va démontrer que $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\sigma_Y = Y$ ce qui suffira, car alors σ n'a qu'un unique sous-module irréductible nécessairement X et l'application qui à Y associe l'unique sous-module de σ_Y est l'inverse de la bijection annoncée.

Les formules standard pour calculer les modules de Jacquet montrent que si l'assertion cherchée n'est pas vraie, il existe $x \in [\zeta B, -\zeta A]$ tel que $Jac_{x,\cdots,-\zeta A} Y \neq 0$. On aurait alors aussi

$$Jac_{x,\cdots,-\zeta A}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon(\rho, A, B, \zeta)) \neq 0,$$

ce qui est exclu par 3.4 puisque $A \notin [B', A']$ pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi')$ par l'hypothèse $\psi \circ \Delta$ discret.

L'hypothèse de récurrence assure qu'un X de $Irr(\pi(\psi, \epsilon)) - \cup_\eta Irr(\pi(\psi_\eta, \epsilon_\eta))$ intervient sans multiplicité dans $Irr(\pi(\psi, \epsilon))$. On sait aussi que chaque ensemble $Irr(\pi(\psi_\eta, \epsilon_\eta)$ est sans multiplicité mais il faut encore démontrer quand 2 valeurs de η sont possibles que $Irr(\pi(\psi_+, \epsilon_+)) \cap Irr(\pi(\psi_-, \epsilon_-)) = \emptyset$.

Montrons l'assertion suivante par récurrence ; soit ψ comme ci-dessus et D un entier positif ou nul tel qu'il existe un signe ζ'' avec $(\rho, C, C, \zeta'') \in Jord(\psi)$ et soit ϵ_i pour $i = 1, 2$ des applications de $Jord(\psi)$ dans $\{\pm 1\}$ telles que $\epsilon_1(\rho, D, D, \zeta'') \neq \epsilon_2(\rho, D, D, \zeta'')$. Alors

$$Irr(\pi(\psi, \epsilon_1)) \cap Irr(\pi(\psi, \epsilon_2)) = \emptyset.$$

On démontre cela par récurrence, si ψ est élémentaire cela résulte de ce que l'application qui à ϵ associe $\pi(\psi, \epsilon)$ est injective et à valeurs dans l'ensemble des représentations irréductibles. Si ψ n'est pas élémentaire, on utilise 4.1 comme on l'a fait ci-dessus en remarquant que l'hypothèse sur (ρ, D, D, ζ'') perdure. Cela termine la preuve de la proposition.

4.4 Un cas de présentation par récurrence simple

On garde les notations, ψ', ϵ' qui se déduit de ψ, ϵ en enlevant le bloc de Jordan fixé $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0)$. On suppose que $B \geq 1$ et que $(\rho, A-1, B-1, \zeta) \notin Jord(\psi)$ et on note ψ_- le morphisme qui se déduit de ψ, ϵ en remplaçant le bloc $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0)$ par $(\rho, A-1, B-1, \zeta, \epsilon_0)$. On suppose que $\psi_- \circ \Delta$ est encore discret. Cela se traduit aussi par le fait que pour tout quadruplet $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$, on a $A' \neq B - 1$.

Proposition : *Soit ψ, ϵ et $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ vérifiant les hypothèses ci-dessus. Alors*

$$\pi(\psi, \epsilon) =<< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} >, \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B-1, \zeta, \epsilon_0)) > .$$

On démontre cette proposition est conséquence de 4.1. Et on démontre cela par récurrence pour pouvoir l'utiliser dans les raisonnements par récurrence. On va en fait démontrer quelque chose de plus précis que l'énoncé. On note $Irr(\pi(\psi, \epsilon))$ l'ensemble des sous-modules irréductibles de $\pi(\psi, \epsilon)$; on garde la notation ψ_-, ϵ_- pour le couple qui se déduit de ψ, ϵ en changeant $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0)$ en $(\rho, A-1, B-1, \epsilon_0)$; on définit donc de façon analogue $Irr(\pi(\psi_-, \epsilon_-)$. On va démontrer que

l'application $Jac_{\zeta B, \cdots, \zeta A}$ induit une bijection entre $Irr(\pi(\psi, \epsilon))$ et $Irr(\pi(\psi_-, \epsilon_-))$, l'application inverse étant $Y \mapsto << \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} > \times Y >$.

Dans ces conditions, ce qu'il faut démontrer et que pour tout $X \in Irr(\pi(\psi, \epsilon))$, $Jac_{\zeta B, \cdots \zeta A} X \neq 0$ et que pour tout $Y \in Irr(\pi(\psi_-, \epsilon_-)$, $Jac_{\zeta B, \cdots, \zeta A}(< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} > \times Y) = Y$.

Montrons la première partie, c'est-à-dire soit $X \in Irr(\pi(\psi, \epsilon))$ et montrons que $Jac_{\zeta B, \cdots, \zeta A} X \neq 0$. S'il existe $(\rho', A', B', \zeta') \in Jord(\psi) - \{(\rho, A, B, \zeta)\}$ avec $A' > B'$, on démontre le résultat par récurrence en utilisant 4.1 pour (ρ', A', B', ζ') au lieu de (ρ, A, B, ζ). On suppose donc que pour tout (ρ, A', B', ζ') différent de (ρ, A, B, ζ), on a $A' = B'$. Ainsi si $A = B$, on est ramené au cas élémentaire et le résultat résulte des constructions (cf. 6 propriétés). On suppose donc que $A > B$. Soit $X \in Irr(\pi(\psi, \epsilon))$. On suppose d'abord que X intervient dans le terme complémentaire de 4.1 ; on est alors ramené au cas de morphismes élémentaires et l'on a, pour toute collection de signe ϵ_C indexée par $C \in [B, A]$:

$$\pi(\psi', \epsilon', \cup_{C \in [B,A]}(\rho, C, C, \zeta, \epsilon_C) - \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta B} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta A} \times \pi(\psi', \epsilon', \cup_{C \in [B,A]}(\rho, C-1, C-1, \zeta, \epsilon_C)).$$

Et X est le terme de gauche pour un bon choix de $\epsilon_?$. D'où la non nullité annoncée. On considère finalement le cas où X est un sous-module irréductible de l'induite

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0)).$$

On fixe X' un sous-module irréductible de $\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0))$ telle que l'inclusion ci-dessus se factorise par X' et on applique la proposition à X' en utilisant $(\rho, A-1, B+1, \zeta)$. On note alors X'' tel que $Jac_{\zeta(B+1), \cdots, \zeta(A-1)} X' = X''$ d'où aussi

$$X' =<< \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A-1)} >, X'' > .$$

Avec des résultats standard, on sait que

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta B} \times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-1)} > \times \rho|\,|^{-\zeta A}.$$

On en déduit

$$X \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta B}\times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-1)} > \times \rho|\,|^{-\zeta A}\times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A-1)} > \times X'' \simeq$$

$$\rho|\,|^{\zeta B}\times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A-1)} > \times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-1)} > \times \rho|\,|^{-\zeta A} \times X''.$$

Le point est de démontrer que l'hypothèse entraîne que l'induite $\rho|\,|^{-\zeta A}\times X''$ est irréductible. Cela est équivalent à démontrer que l'induite $\rho|\,|^{-\zeta A} \times X''$ est isomorphe à l'induite $\rho|\,|^{\zeta A} \times X''$ (chacune des induites à un unique sous-module irréductible car $Jac_{\pm A}X'' = 0$). On le sait dans le cas où X'' est de la forme $\pi(?,?)$ où $(?,?)$ est un morphisme élémentaire car $(\rho, 2A-1)$ n'est pas un bloc de Jordan au sens ordinaire de ce morphisme, par hypothèse. Et on se ramène à ce cas, en utilisant 4.2. Ayant cela, on revient aux inclusions ci-dessus :

$$X \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta B}\times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A-1)} > \times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-1)} > \times \rho|\,|^{-\zeta A} \times X'' \simeq$$

$$\rho|\,|^{\zeta B}\times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A-1)} > \times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-1)} > \times \rho|\,|^{\zeta A} \times X'' \simeq$$

$$\rho|\,|^{\zeta B}\times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A-1)} > \times \rho|\,|^{\zeta A}\times < \rho|\,|^{\zeta(B-1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-1)} > \times X''.$$

Et cela donne $Jac_{\zeta B,\cdots,\zeta A}X \neq 0$ comme annoncé. Comme on sait que $Jac_x X = 0$ pour tout $x \in]\zeta B, \zeta A]$, il existe donc Y une représentation irréductible et une inclusion $X \hookrightarrow < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} > \times Y$; comme en plus $Jac_{\zeta B,\zeta B}X = 0$, on a certainement $Jac_x Y = 0$ pour tout $x \in [\zeta B, \zeta A]$ d'où aisément $Jac_{\zeta B,\cdots,\zeta A}X = Y$. Ceci termine la preuve.

Nous utiliserons cette proposition en particulier dans le cas suivant : ψ, ϵ est fixé avec $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0) \in Jord(\psi, \epsilon)$ tel que $A > B+1$. On remarque que dans le corollaire le groupe qui intervient est de rang strictement plus petit que G. On peut donc appliquer le corollaire sans problème dans les démonstrations par récurrence comme nous les faisons ici.

Corollaire : *Pour tout* $C \in]B+1, A]$, $Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) =$

$$<< \rho|\,|^{\zeta(C+1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} >, \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0)) > .$$

La proposition précédente s'applique pour donner :

$$\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) =<< \rho|\,|^{\zeta(B+2)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} >, \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0)) > .$$

Et le corollaire s'en déduit par un calcul de module de Jacquet.

4.5 Propriété d'injectivite

Pour $i = 1, 2$ fixons des couples (ψ_i, ϵ_i) et supposons que $\psi_1 \circ \Delta = \psi_2 \circ \Delta =: \psi_\Delta$. Dans ces conditions $Cent_{^L G}\psi_i$ pour $i = 1, 2$ sont des sous-groupes de $Cent_{^L G}(\psi_\Delta)$; cela a donc un sens de considérer leur intersection. On suppose encore ici que $\psi \circ \Delta$ est discret et ici de façon déterminante on suppose que l'application qui à un caractère ϵ du groupe $Cent_{^L G}(\psi \circ \Delta)$ associe la série discrète $\pi(\psi \circ \Delta, \epsilon)$ est injective. On a aussi besoin de la même assertion pour tous les morphismes ϕ' de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ dans le L groupe d'un groupe de même type que G tel que $Jord(\phi') \subset Jord(\psi \circ \Delta)$.

Proposition : *avec les notations et hypothèses ci-dessus, supposons que la restriction de* ϵ_1 *à* $Cent_{^L G}(\psi_1) \cap Cent_{^L G}(\psi_2)$ *ne coïncide pas avec la restriction de* ϵ_2 *à ce même groupe. Alors* $Irr(\pi(\psi_1, \epsilon_1)) \cap Irr(\pi(\psi_2, \epsilon_2)) = \emptyset$.

Avant de démontrer cette proposition, on va exprimer en termes combinatoires le fait que $\psi_1 \circ \Delta = \psi_2 \circ \Delta$; avec les notations de 2.2 cela dit exactement que pour tout ρ, on a l'égalité ensembliste $\cup_{A_1,B_1}[B_1, A_1] = \cup_{A_2,B_2}[B_2, A_2]$ où A_i, B_i pour $i = 1, 2$ parcourent l'ensemble des couples tels qu'il existe un signe ζ vérifiant $(\rho, A_i, B_i, \zeta) \in Jord(\psi_i)$.

On démontre cette proposition en admettant 4.1 par récurrence d'abord sur le rang du groupe puis sur $\sum_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi_1 \cup Jord(\psi_2} A - B$. Si ce nombre est nul, les 2 morphismes ψ_1 et ψ_2 sont élémentaires mais ils ne coïncident pas forcément. Toutefois, les centralisateurs de ψ_1, de ψ_2 et de ψ_Δ coïncident. On peut donc dire que $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. On a rappelé en 6, la définition des nombres $a_{\rho,\psi_i,\epsilon_i}, b_{\rho,\psi_i,\epsilon_i}$ et des signes $\zeta_{\rho,\psi_i,\epsilon_i}$, pour $i = 1, 2$. Ces définitions se voient sur les modules de Jacquet, donc si il n'y a pas identité entre les valeurs pour $i = 1$ et celles pour $i = 2$, il est immédiat que les représentations correspondantes sont différentes. Pour simplifier l'écriture, on note ces nombres, a, b et le signe ζ. Si $a > b+2$, $Jac_{\zeta(a-1)/2}\pi_{\psi_i,\epsilon_i}$ est de la forme $\pi(\psi_i', \epsilon_i')$ où l'on a simplement remplacé le bloc $(\rho, (a-1)/2, (a-1)/2, \zeta, \epsilon_i(a))$ par $(\rho, (a-3)/2, (a-3)/2, \zeta, \epsilon_i(a)$. On obtient alors le résultat par récurrence. Si $a = b+2$, on définit ψ_i', ϵ_i' en enlevant les 2 blocs $(\rho, (a-1)/2, (a-1)/2, \zeta)$ et $(\rho, (b-1)/2, (b-1)/2, \zeta)$.

On remarque que l'hypothèse $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ entraîne que soit $\epsilon'_1 \neq \epsilon'_2$ soit que $a = 3, b = 1$ et $\epsilon_1(\rho, 3) \neq \epsilon_2(\rho, 3)$; en effet dans le cas où a est pair la valeur de ϵ_i sur (ρ, a) est précisément $(-1)^{a/2+1}$ et est donc indépendante de i. Si a est impair, on a nécessairement $b \geq 1$ avec nos hypothèses et $\epsilon_i(\rho, a) = \epsilon_i(\rho, 1)(-1)^{(a-1)/2}$. Ainsi $\epsilon_i(\rho, a)$ n'est déterminé par ϵ'_i que si $(\rho, 1) \in Jord(\psi'_i)$ c'est-à-dire $b > 1$.

Si $\epsilon'_1 \neq \epsilon'_2$ on obtient le résultat par récurrence en remarquant que $Jac_{\zeta(a-1)/2,\cdots,-\zeta(b-1)/2}\pi(\psi_i, \epsilon_i) = \pi(\psi'_i, \epsilon'_i)$. Dans le cas restant, on suppose pour avoir quelque chose à démontrer que $\pi(\psi'_1, \epsilon'_1) = \pi(\psi'_2, \epsilon'_2)$. On commence par vérifier que cela entraîne que $\psi'_1 = \psi'_2$; on sait que pour tout $(\rho, \alpha) \in Jord(\psi_\Delta)$ avec $\alpha > 3$, il existe pour $i = 1, 2$ un signe $\zeta_{\alpha,i}$ tel que $(\rho, \alpha, \zeta_{\alpha,i}) \in Jord(\psi'_i)$ et le point est de démontrer que $\zeta_{\alpha,1} = \zeta_{\alpha,2}$ pour tout α. Cela se fait avec les modules de Jacquet, considérons d'abord α_0 l'élément minimal ; on a, pour $i = 1, 2$:

$$Jac_{\zeta_{\alpha_0,i}(\alpha_0-1)/2}\pi(\psi'_i, \epsilon'_i) = \pi(\psi''_i, \epsilon''_i),$$

où ψ''_i s'obtient simplement en remplaçant (ρ, α_0) par $(\rho, \alpha_0 - 2)$ sans rien changer aux signes et

$$Jac_{-\zeta_{\alpha_0,i}(\alpha_0-1)/2}\pi(\psi'_i, \epsilon'_i) = 0.$$

Cela entraîne déjà $\zeta_{\alpha_0,1} = \zeta_{\alpha_0,2}$; puis on recommence avec l'élément minimal de $Jord_\rho(\psi''_i) - \{\alpha_0 - 2\}$ et avec $\pi(\psi''_i, \epsilon''_i)$ qui donne le même type de relations.

Maintenant que l'on sait que $\psi'_1 = \psi'_2$, on a aussi $\psi_1 = \psi_2$ et on connaît l'injectivité de l'application $\epsilon \mapsto \pi(\psi, \epsilon)$. Cela termine la preuve du début de la récurrence.

On suppose donc que soit ψ_1 soit ψ_2 n'est plus élémentaire et on fixe B un entier minimum avec la propriété qu'il existe un entier A et un signe ζ tel que $A > B$ et $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi_i)$ pour une valeur de i au moins. Si $i = 1$ et $i = 2$ sont possibles alors A est maximal pour le choix de i fait et par symétrie on peut supposer que $i = 1$. Supposons qu'il existe $X \in Irr(\psi(\psi_i, \epsilon_i))$ pour $i = 1, 2$. On applique 4.1 à ψ_1, ϵ_1 en utilisant (ρ, A, B, ζ). Si $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}X = 0$, on sait qu'il existe $\eta = \pm$ (avec les notations déjà introduites) tel que $X \in Irr(\pi(\psi_\eta, \epsilon_\eta)$. On vérifie que $Cent_{^LG}(\psi_\eta)$ contient $Cent_{^LG}(\psi_1)$ et on vérifie que la restriction de ϵ_η à $Cent_{^LG}(\psi_1)$ n'est autre que ϵ_1 (c'est même comme cela qu'on a construit η). On obtient le résultat cherché par récurrence, en remplaçant ψ_1, ϵ_1 par ψ_η, ϵ_η. On suppose donc que

$$Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}X := Y \neq 0.$$

En particulier $Jac_{\zeta B}X \neq 0$. D'après 3.2 appliqué à ψ_2, on sait qu'il existe A_2 un entier tel que $(\rho, A_2, B, \zeta) \in Jord(\psi_2)$. Il n'y a aucune raison pour que $A_2 = A$. On pose maintenant $A = A_1$. On vérifie comme en 3.3 que la non nullité de $Jac_{\zeta B,\cdots-\zeta B}X$ entraîne que $A_2 > B$. D'après 4.1 précisé en ****, on sait que pour $i = 1, 2$:

$$Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A_i}X =: X_{1,i} \in Irr(\pi(\psi'_i, \epsilon'_i, (\rho, A_i - 1, B_i + 1, \zeta, \epsilon_i(\rho, A_i, B)).$$

Si $A_1 = A_2$, on obtient le résultat par récurrence puisque les hypothèses sont encore vérifiées pour les morphismes intervenant dans le terme de droite ci-dessus.

Supposons donc que $A_1 \neq A_2$. On note A_{max} le plus grand entier tel que pour tout $C \in [B, A_{max}]$ $(\rho, 2C+1) \in Jord(\psi_\Delta)$. On a nécessairement $A_{max} \geq A$; le calcul de $Jord(\psi_\Delta)$ en fonction de $Jord(\psi_i)$ et la maximalité de A_{max}, assurent que pour $i = 1, 2$, il existe un découpage en sous-intervalles $[B_i^k, A_i^k]$ où $k \in [1, N_i]$ avec N_i un entier tel que $[B_i^1, A_i^1] = [B, A_i]$ et pour tout $k \in [1, N_i]$, il existe un signe $\zeta_{k,i}$ tel que $(\rho, A_i^k, B_i^k, \zeta_{k,i}) \in Jord(\psi_i)$. En particulier $\zeta_{1,i} = \zeta$ pour $i = 1, 2$. On note encore A_0 le plus petit entier tel qu'il existe pour $i = 1, 2$ un entier $k_i \leq N_i$ tel que $A_0 = A_{k_1} = A_{k_2}$; comme ces égalités sont vérifiees pour A_{max}, un tel entier existe. Toujours pour $i = 1, 2$, on noter ψ_i^0, ϵ_i^0 le couple qui se déduit de ψ_i, ϵ_i en enlevant les blocs $(\rho, A_i^j, B_i^j, \zeta_{j,i})$ de $Jord(\psi_i)$.

On peut appliquer la proposition 4.4 à $\pi(\psi'_i, \epsilon'_i, (\rho, A_i - 1, B_i + 1, \zeta, \epsilon_i(\rho, A_i, B)$ en utilisant $(\rho, A_i^2, B_i^2, \zeta_{2,i})$ pour calculer $Jac_{\zeta_{2,i}B_i^2,\cdots,\zeta_{2,i}A_i^2}X_{1,i}$, puis de proche en proche pour calculer :

$$Jac_{\zeta_{2,i}B_i^2,\cdots,\zeta_{2,i}A_i^2,\cdots,\zeta_{k_i,i}B_i^{k_i},\cdots,\zeta_{k_i,i}A_i^{k_i}}X_{1,i} = Y_i$$

$$\in Irr(\pi(\psi_i^0, \epsilon_i^0, (\rho, A_i - 1, B_i + 1, \epsilon_i(\rho, A_i, B_i\zeta)), \cup_{j\in[2,k_i]}(\rho, A_i^j - 1, B_i^j - 1, \zeta_{j,i}, \epsilon_i(\rho, A_i^j, B_i^j, \zeta_{j,i})). \quad (1)$$

Montrons que pour $i = 1, 2$ et pour tout $j \in [2, k_i]$, $\zeta_{j,i} = -\zeta$. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on fixe j minimum avec cette propriété, d'où $\zeta_{j,i} = \zeta$ et les propriétés standard de 1.2 (1), montrent que la non nullité ci-dessus entraîne a fortiori la non nullité de $Jac_{\zeta_{j,i}B_i^j}X_{1,i}$ et en revenant encore à la définition de $X_{1,i}$ la non nullité de $Jac_{\zeta B_i^j}X$ (ici on utilise le fait que $B_i^j > A_i > B_i$, d'où $B_i^j - B_i > 1$). Ainsi, en posant $i' := \{1, 2\} - \{i\}$, il existe A' tel que $(\rho, B_i^j, A', \zeta) \in Jord(\psi_{i'})$ d'après 3.2. Ainsi il existe $j' \leq k_{i'}$ tel que $B_i^j = B_{i'}^{j'}$. D'où encore :

$$A_i^{j-1} = B_i^j - 1 = B_{i'}^{j'} - 1 = A_{i'}^{j'-1} < A^0,$$

ce qui contredit la minimalité de A^0. Mais alors ainsi Y_i ne dépend pas de i, on le note Y On remarque que ϵ_i pour $i = 1, 2$ sont uniquement déterminés par le caractère intervenant dans le membre de droite de (1) donc ces caractères ne coïncident pas sur l'intersection des commutants et on obtient une contradiction par la récurrence appliquée à Y. Cela termine la preuve.

5 Preuve de la caractérisation comme représentation

5.1 Quelques notations

On appelle constituant irréductible de $\pi(\psi,\epsilon)$ une représentation irréductible qui intervient avec un coefficient non nul dans l'élément $\pi(\psi,\epsilon)$ vu dans le groupe de Grothendieck. On fixe $(\rho,A,B,\zeta,\epsilon_0)\in Jord(\psi,\epsilon)$ avec $A>B$. Nécessairement $\tilde{\pi}$ est un sous-quotient irréductible de l'une des représentations suivantes :

$$\exists C\in]B,A],\qquad X_C:=\delta_C\times Y_C$$

où $\delta_C=<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>$ et $Y_C:=Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\zeta,\epsilon_0))$ où il n'y a pas de Jac pour $C=B+1$ soit

$$\exists\eta\in\{\pm1\},\qquad X_\eta:=\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)).$$

On démontre le théorème en l'admettant par récurrence pour les représentations $\pi(\psi'',\epsilon'')$ telles que soit le rang du groupe correspondant est plus petit que le rang de G soit on a égalité et $\sum_{(\rho'',A'',B'',\zeta'')\in Jord(\psi'')}A''-B''<\sum_{(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\psi)}A'-B'$.

On remarque que par 4.2 les représentations X_C et X_η sont connues par récurrence.

5.2 Propriétés des modules de Jacquet

Proposition : *Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $\tilde{\pi}$ un constituant irréductible de $\pi(\psi,\epsilon)$ alors $Jac_x\tilde{\pi}=0$ sauf s'il existe $(\rho,A,B,\zeta)\in Jord_\rho(\psi)$ tel que $x=\zeta B$. De plus $Jac_{x,x}\tilde{\pi}=0$ pour tout x*

La proposition est vraie si ψ est élémentaire au sens de 6 (cf propriétés de loc.cit.). On la démontre par récurrence. On reprend les notations de 5.1 et comme dans la preuve de 3, on vérifie que les seules valeurs de x qui ne satisfont pas directement à la conclusion de la proposition sont, pour le ρ de 5.1

$$x=\zeta C, C\in[B,A].$$

Considérons d'abord le cas où $x=\zeta B$; il faut ici démontrer que $Jac_{\zeta B,\zeta B}\tilde{\pi}=0$. Avec 5.1 il suffit de démontrer cela pour X_C et pour X_η (avec les notations de loc.cit.) ; pour X_η cela se fait par récurrence et pour X_C cela a été fait dans la preuve de 3.

Soit $x=\zeta C$ pour $C\in]B,A]$, en particulier $x\neq0$ et on montre d'abord que :

pour tout constituant $\tilde{\pi}$ de $\pi(\psi,\epsilon)$, $Jac_{x,x}\tilde{\pi}=0$ et soit $Jac_x\tilde{\pi}=0$ soit $Jac_x\tilde{\pi}$ est irréductible et dans ce dernier cas, l'induite $\rho|\,|^x\times\tilde{\pi}$ a un unique sous-module irréductible qui est alors $\tilde{\pi}$.

En effet soit $\tilde{\pi}$ un constituant irréductible de $\pi(\psi,\epsilon)$ et montrons que $Jac_{x,x}\tilde{\pi}=0$; pour cela, on fixe, comme en 5.1, soit $C\in]B,A]$ soit η tel que $\tilde{\pi}$ soit un sous-quotient irréductible de X_C ou X_η. Et il suffit donc de démontrer que $Jac_{x,x}X_C=0$ pour tout C comme ci-dessus et $Jac_{x,x}X_\eta=0$ pour $\eta=\pm$. On va le faire en détail pour $x=\zeta(B+1)$ qui est le cas le plus difficile. Fixons d'abord $\eta=\pm$, on a écrit en 4.1 une description explicite des constituants de X_η : l'un des termes (non irréductible en général) est $<\sigma,Y>$ où $\sigma=<\rho|\,|^{\zeta(B+1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>$ et

$$Y=\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+2,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)).$$

Les autres termes sont de la forme $\pi(\psi',\epsilon',\cup_{D\in]B,A]}(\rho,D,D,\zeta,(-1)^{[D]}\lambda),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0))$, où λ est un signe convenable. On montre que pour ces derniers termes $Jac_{\zeta(B+1),\zeta(B+1)}=0$ par exemple par récurrence. Pour le terme $<\sigma,Y>$, on a par la proposition appliquée par récurrence $Jac_{\zeta(B+1)}Y=0$. Or on a aussi $Jac_{\zeta(B+1)}\sigma^*=0$ pour un tel σ et il suffit donc de remarquer que $Jac_{\zeta(B+1),\zeta(B+1)}\sigma=0$ ce qui résulte des résultats de Zelevinski. Cela prouve notre assertion pour les constitutants de X_η.

Revenons donc à C mais pour le moment, on suppose que $C\in]B+1,A]$; ici on a $Jac_{\zeta(B+1)}\delta_C=Jac_{\zeta(B+1)}\delta_C^*=0$; c'est l'hypothèse $C>B+1$. On sait 4.4 corollaire que

$$Y_C=<<\rho|\,|^{\zeta(C+1)},\cdots,\rho|\,|^{A}>,\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\epsilon_0))>.$$

Donc l'hypothèse $j>1$ assure que $Jac_{\zeta(B+1),\zeta(B+1)}Y_C$ se calcule en fonction de $Jac_{\zeta(B+1),\zeta(B+1)}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\epsilon_0))$ qui est nul par récurrence.

Reste le cas $C=B+1$, ici on vérifie que $Jac_{\zeta(B+1)}Y_{C=B+1}=0$: en effet $Y_{B+1}=\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+2,\epsilon(\rho,a,b)))$. D'où notre assertion en utilisant l'hypothèse de récurrence. Ensuite il n'y a plus qu'à vérifier que $Jac_{\zeta(B+1)}<\rho|\,|^{B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(B+1)}>=0$ et $Jac_{\zeta(B+1),\zeta(B+1)}<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(B+1)}>^*=0$. Cela termine la preuve de l'assertion $Jac_{x,x}\tilde{(\pi)}=0$.

Soit maintenant $\tilde{\pi}$ un constituant irréductible de $\pi(\psi,\epsilon)$ tel que $Jac_x\tilde{\pi} \neq 0$. Pour un bon choix de représentation irréductible X, on a une inclusion, par réciprocité de Frobenius : $\tilde{\pi} \hookrightarrow \rho|\,|^x \times X$et puisque $Jac_{x,x}\tilde{\pi} = 0$, nécessairement $Jac_x X = 0$. On calcule Jac_x de l'induite de droite et on trouve que cela vaut X ; ici on a utilisé la non nullité de x. On a ainsi montré toutes nos assertions.

On a démontré en 3.2 pour les valeurs de x écrites ci-dessus, $Jac_x\pi(\psi,\epsilon) = 0$ et on vient de montrer que pour $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ des constituants irréductibles de $\pi(\psi,\epsilon)$ s'il y a une intersection (dans le groupe de Grothendieck) entre $Jac_x\tilde{\pi}$ et $Jac_x\tilde{\pi}'$ alors ces représentations qui sont irréductibles coïncident et que $\tilde{\pi} \simeq \tilde{\pi}'$ en tant qu'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho|\,|^x \times Jac_x\tilde{\pi}$. Il est donc clair qu'il ne peut pas y avoir de simplifications et qu'aucun constituant irréductible de $\pi(\psi,\epsilon)$ ne vérifie $Jac_x \neq 0$ pour ces valeurs de x. Cela termine la preuve.

5.3 Début de la preuve

5.3.1 Hypothèses pour cette sous-section

La démonstration se fait par récurrence puisqu'il n'y a rien à démontrer dans le cas où pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$, $A = B$. Elle est fastidieuse et technique, le lecteur comprendra certainement que ce que l'on cherche à démontrer n'est pas limpide. Je n'ai pas de réalisation de cette représentation. On va commencer par traiter des cas particuliers auxquels la preuve par récurrence se ramènera. De cette façon cela sera un peu moins abstrait. On fixe $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0) \in Jord(\psi,\epsilon)$ tel que $A > B$.

Dans toute cette sous-section, on suppose que $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0)$ que nous venons de fixer est le seul triple de $Jord(\psi)$ vérifiant $A > B$. On suppose aussi que l'ensemble des demi-entiers D pour lesquels il existe un signe ζ_D tels que $D < B$ et (ρ, D, D, ζ_D) est soit vide soit est un intervalle commençant à 0 si B est entier et à 1/2 sinon ; dans ce dernier cas, on suppose que $\epsilon(\rho, 1/2, 1/2, \zeta_{1/2}) = -1$. On suppose aussi que si l'ensemble ci-dessus est un intervalle non nul, ϵ alterne sur cet intervalle.

A partir de 5.3.3 on va supposer que $\zeta = +$ et que A, B sont des entiers ; dans 5.3.2, on ne fait pas ces hypothèses et le lecteur verra ainsi ce que l'on évite en les faisant. L'hypothèse sur ζ permet de fixer la croissance des segments utilises pour la classification des représentations irréductibles de GL. L'hypothèse sur A, B évite de devoir préciser si on commence à 0 ou à 1/2 ; ici les 2 cas ne sont pas identiques, le cas où A et B sont entiers est plus difficile que l'autre car les représentations que l'on construits ne sont pas totalement déterminées par leur module de Jacquet uniquement dans ce cas là. En particulier 5.8.1 n'a pas d'objet si A, B sont des demi-entiers non entiers.

5.3.2 Le cas le plus simple $A = B + 1$

Le cas où $A = B + 1$ a un énoncé très simple rappelons le avant de le démontrer :

si $\epsilon_0 = +$ $\pi(\psi,\epsilon)$ est l'unique sous-module irréductible de $< \rho|\,|^{(a/2-1}, \cdots, \rho|\,|^{-(a/2)} > \times\pi(\psi',\epsilon')$ et en particulier est irréductible.

si $\epsilon_0 = -$, $\pi(\psi,\epsilon) = \oplus_{\eta=\pm}\pi(\psi',\epsilon',(\rho, B+1, B+1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, -\eta))$ et en particulier est de longueur 2 exactement.

Montrons cela ; le cas où $\epsilon_0 = -$ est juste la définition. Supposons donc que $\epsilon_0 = +$. Par définition on a :

$$\pi(\psi,\epsilon) =< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+1))} > \times\pi(\psi',\epsilon') \tag{1}$$

$$\ominus_{\eta=\pm}\pi(\psi',\epsilon',(\rho, B+1, B+1, \zeta, \eta), (\rho, B-1, B-1, -\eta)). \tag{2}$$

On remarque que notre $B+1$ (resp. B) est le $(a_{\rho,\psi'',\epsilon''}-1)/2$ (resp. $(b_{\rho,\psi'',\epsilon''}-1)/2$) de 6 pour ψ'', ϵ'' se déduisant de ψ en enlevant le bloc $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0)$ et en y ajoutant les 2 blocs $(\rho, B+1, B+1, \zeta, \lambda)$, $(\rho, B, B, \zeta, \lambda)$ pour n'importe quel choix de $\lambda = \pm$. On obtient donc immédiatement les assertions : $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, |\,|^{-\zeta B} > \times\pi(\psi',\epsilon')$ est semi-simple de longueur 2 exactement et que (2) est la somme des 2 sous-modules irréductibles de l'induite

$$\rho|\,|^{\zeta(B+1)} \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, |\,|^{-\zeta B} > \times\pi(\psi',\epsilon').$$

Il est alors facile de voir que (2) est inclus dans l'induite de (1) et ici il est déjà clair que $\pi(\psi,\epsilon)$ est une représentation. On applique 6 (propriété 4) à $\pi(\psi',\epsilon')$ puisque que le $(a_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2$ de loc.cit. est ici strictement supérieur à $B+1$: soit $\tilde{\pi}$ un sous-quotient de l'induite de (1), alors il existe un ensemble $\mathcal{E}$ totalement ordonné de demi-entiers relatifs tel que

$$\{|x|; x \in \mathcal{E}\} = \{|x|; x \in [B+1, -B]\}$$

et une représentation irréductible σ sous-module de $\times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\,|^x$ (représentation d'un GL convenable) avec une inclusion $\tilde{\pi} \hookrightarrow \sigma \times \pi(\psi',\epsilon')$. On remarque que pour x tel que $Jac_x\sigma \neq 0$ nécessairement $Jac_x\tilde{\pi} \neq 0$. Mais on a vu en 5.2 que cela entraîne que $x = \zeta B$; on n'a pas exactement vu cela, on pourrait aussi avoir $x = \pm D$ avec D

comme ci-dessus mais il faudrait alors, en repartant de la définition de $\pi(\psi,\epsilon)$, $Jac_x\pi(\psi',\epsilon')\neq 0$ ce qui n'est pas possible à cause des hypothèses sur ϵ. On utilise la classification de Zelevinski à l'aide de segments décroissants si $\zeta=+$ et croissants si $\zeta=-$ et on écrit σ dans cette classification ; c'est-à-dire qu'il existe $v\in\mathbb{N}$ et pour tout $i\in[1,v]$ des segments $[x_i,y_i]$ avec la propriété de croissance précisée, c'est-à-dire $\zeta x_i\geq\zeta y_i$ et pour tout $i\in[1,v[$ $\zeta x_i\leq\zeta x_{i+1}$. On a certainement $Jac_x\sigma\neq 0$ pour $x=x_1$ et pour $x=x_i$ pour i vérifiant pour tout $j<i$ $x_j\neq x_i-1$. Mais si $\mathcal{E}$ ne contient pas $\zeta(B+1)$, B est certainement le plus grand élément de $\zeta\mathcal{E}$ et alors nécessairement $v=1$ et $[x_1,y_1]=[\zeta B,-\zeta(B+1)]$ ce qui est ce que l'on cherche. Si $\mathcal{E}$ contient $\zeta(B+1)$ alors on a

$$x_1=\zeta B, x_2=\zeta(B+1), v=2.$$

On a 2 possibilités pour y_1,y_2. Soit :

$$y_1=\zeta B y_2=-\zeta(B-1) \tag{3}$$

ou

$$y_1=-\zeta B; y_2=\zeta(B+1). \tag{4}$$

Mais dans le cas (3), σ est une induite irréductible et on a aussi $Jac_{\zeta(B+1)}\sigma\neq 0$ ce qui est exclu. Reste le cas (4). Ici on utilise le fait que $\rho|\,|^{\zeta(B+1)}\times\pi(\psi',\epsilon')$ est irréductible donc isomorphe à $\rho|\,|^{-\zeta(B+1)}\times\pi(\psi',\epsilon')$ et on aurait une inclusion

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}&\hookrightarrow<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta B}>\times\rho|\,|^{\zeta(B+1)}\times\pi(\psi',\epsilon')\\&\simeq<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta B}>\times\rho|\,|^{-\zeta(B+1)}\times\pi(\psi',\epsilon').\end{aligned}$$

Or l'induite $<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta B}>\times\rho|\,|^{-\zeta(B+1)}$ est de longueur 2 exactement avec un quotient qui vérifie $Jac_{-\zeta(B+1)}\neq 0$. L'inclusion ci-dessus se factorise donc par le sous-module, i.e. $<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(B+1)}>$. Pour terminer la preuve il ne reste plus qu'à remarquer que l'induite :

$$<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(B+1)}>\times\pi(\psi',\epsilon')$$

n'a qu'un unique sous-module irréductible par réciprocité de Frobenius.

5.3.3 1e construction

On rappelle que l'on fixe $(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)$ avec $A>B+1$ et on pose ϵ_0 la valeur de ϵ sur cet élément de $Jord(\psi)$. On reprend la notation ψ',ϵ' qui se déduit de ψ en enlevant ce bloc de Jordan. Montrons

Lemme : *Soit $\tilde{\pi}$ un constituant de $\pi(\psi,\epsilon)$; alors il existe un entier $t_1\in[0,[(A-B)/2]]$ et un signe λ tel que $\tilde{\pi}$ soit un sous-quotient d'une induite de la forme :*

$$\times_{j\in[0,2t_1-1]}\rho|\,|^{A-2j}\times\cdots\times\rho|\,|^{-(A-2j-1)}\times\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B,A-2t_1]}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{[C]}\lambda)),$$

où $[0,2t_1-1]$ est un ensemble vide si $t_1=0$ et $[B,A-2t_1-2]$ est un ensemble vide si $t_1=(A-B)/2$. De plus nécessairement $\epsilon_0=\prod_{C\in[B,A-2t_1]}\Big((-1)^{[C]}\lambda\Big)$.

On prend la définition de $\pi(\psi,\epsilon)$ soit il existe $\eta=\pm$ tel que $\tilde{\pi}$ soit un sous-quotient de $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0))$ soit il existe $j\in[1,A-B]$ tel que $\tilde{\pi}$ soit un sous-quotient de l'induite (on utilise tout de suite le corollaire de 4.4) :

$$\rho|\,|^{\zeta B}\times\cdots\times\rho|\,|^{-\zeta(B+j)}\times\rho|\,|^{\zeta(B+j+1)}\cdots\times\rho|\,|^{\zeta A}\times\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\epsilon_0).$$

Considérons d'abord ce deuxième cas ; il est encore vrai que $\tilde{\pi}$ est alors sous-quotient de l'induite :

$$\rho|\,|^{A}\times\cdots\times\rho|\,|^{-B}\times\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\epsilon_0)).$$

On applique encore 4.4 pour remplacer $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\epsilon_0)$ par l'induite $\rho|\,|^{B}\times\cdots\rho|\,|^{A-1}\times\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-2,B,\zeta,\epsilon_0)$. Et on obtient que $\tilde{\pi}$ est alors sous-quotient de l'induite :

$$\rho|\,|^{A}\times\cdots\times\rho|\,|^{-(A-1)}\times\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-2,B,\zeta,\epsilon_0)).$$

On applique ensuite le lemme par récurrence pour obtenir le résultat cherché. Reste le premier cas ; on fixe donc η tel que $\tilde{\pi}$ est un sous-quotient de $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0))$. On applique d'abord le lemme par récurrence en utilisant $(\rho,A,B+1,\zeta,\eta)$ (cette étape est vide si $A=B+1$). Ainsi il existe λ et t' tel que $\tilde{\pi}$ soit un sous-quotient d'une induite de la forme :

$$\times_{j\in[0,2t'-1]}\rho|\,|^{A-2j}\times\cdots\times\rho|\,|^{-(A-2j-1)}\times\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in]B,A-2t']}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{[C]}\lambda),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)),$$

avec la relation

$$\prod_{C\in]B,A-2t]}((-1)^{[C]}\lambda)=\eta.$$

Si $(-1)^{B+1}\lambda\neq\eta\epsilon_0$, ou si $B+1=A-2t'$, le lemme s'en déduit automatiquement en posant tout simplement $t_1=t'$. Supposons donc que $(-1)^{B+1}\lambda=\eta\epsilon_0$. On démontre ici que

$$\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in]B,A-2t']}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{[C]}\lambda),(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0))\hookrightarrow$$

$$<\rho|\,|^{\zeta(B+1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta B}>\times\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B+2,A-2t']}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{[C]}\lambda)).$$

Grâce au lemme 4.4, on peut remplacer $\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B+2,A-2t']}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{C}\lambda))$ par l'induite

$$\rho|\,|^{\zeta(B+2)}\times\cdots\times\rho|\,|^{\zeta(A-2t')}\times\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B+1,A-1]}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{[C]+1}\lambda))$$

puis encore $\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B+1,A-2t'-1]}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{[C]+1}\lambda))$ par l'induite

$$\rho|\,|^{\zeta(B+1)}\times\cdots\times\rho|\,|^{\zeta(A-2t'-1)}\times\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B,A-2t'-2]}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{[C]}\lambda)).$$

On remarque que l'on a $\prod_{C\in[B,A-2t'-2]}((-1)^{[C]}\lambda)=\epsilon_0$, donc $\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B,A-2t'-2]}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^{[C]}\lambda))$ a bien la forme qui convient. Il reste à modifier les premiers facteurs de l'induite. Puisque l'on cherche à démontrer que $\tilde{\pi}$ est sous-quotient d'une certaine induite, on peut remplacer l'induite

$$<\rho|\,|^{\zeta(B+1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta B}>\times\rho|\,|^{\zeta(B+2)}\times\rho^{\zeta(A-2t')}\times\rho|\,|^{\zeta(B+1)}\times\cdots\times\rho|\,|^{\zeta(A-2t'-1)}$$

par l'induite

$$\rho|\,|^{A-2t'}\times\cdots\times\rho|\,|^{-(A-2t'-1)}.$$

On obtient le lemme en posant $t_1=t'+1$. Cela termine la preuve.

5.3.4 2e construction

On fixe encore ψ,ϵ et $(\rho,a,b)\in Jord(\psi)$ en supposant que $inf(a,b)\geq 2$ et que (ρ,a,b) est le seul triple de $Jord(\psi)$ ayant cette propriété; pour simplifier l'écriture on suppose que $a+b$ est pair. Avec les notations de 2.2, cela est équivalent à fixer un quadruplet $(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)$ avec $A>B$ et à supposer que c'est le seul quadruplet avec cette propriété; la parité se traduit par le fait que A et B sont des entiers. On note ici $\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}$ le couple qui se déduit de ψ,ϵ en enlevant (ρ,A,B,ζ) et tous les quadruplets de la forme (ρ,C,C,ζ') pour $C<B$. Pour D un demi-entier tel que $A-D\in\mathbb{N}$ et pour λ un signe, on note $\tilde{\psi}_{D,\lambda},\tilde{\epsilon}_{D,\lambda}$ le couple qui se déduit de $\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}$ en ajoutant cette fois, les quadruplets (ρ,C,C,ζ) pour $D-C\in\mathbb{N}$ et $\tilde{\epsilon}$ vaut sur un tel quadruplet $(-1)^{C}\lambda$; on suppose que $\prod_{C\leq D}((-1)^{[C]}\lambda)=\epsilon_0$ où $\epsilon_0=\epsilon(\rho,A,B,\zeta)$. Pour unifier les énoncés on pose $\tilde{\psi}_{-1,\lambda},\tilde{\epsilon}_{-1,\lambda}=\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}$, où λ ne joue aucun rôle. On impose toujours à λ de vérifier :

$$\prod_{C\leq D}((-1)^{[C]}\lambda)=\epsilon_0\prod_{(\rho,E,E,\zeta');E<B}\epsilon(\rho,E,E,\zeta').$$

Ci-dessous, on a des entiers à cause de l'hypothèse de parité, en général on a des demi-entiers.

Lemme : *Soit $\tilde{\pi}$ un sous-quotient irréductible de $\pi(\psi,\epsilon)$. Il existe un ensemble d'entiers $\mathcal{E}$ totalement ordonnés , un entier D et un signe λ comme ci-dessus vérifiant :*

$$\tilde{\pi}\hookrightarrow\times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\,|^{x}\times\pi(\tilde{\psi}_D,\tilde{\epsilon}_{D,\lambda}),\tag{1}$$

$$\mathcal{E}\cup\{-\mathcal{E}\}=\cup_{E\in[B,A]}[-E,E]\cup_{E<B;(\rho,E,E,\zeta')\in Jord(\psi)}[-E,E]\ominus_{C\leq D}[-C,C].\tag{2}$$

On montre d'abord qu'il existe un ensemble d'entiers $\mathcal{E}'$, vérifiant (2) ainsi que D et λ comme dans l'énoncé mais tel que (1) soit affaibli en $\tilde{\pi}$ est un sous-quotient de l'induite écrite en (1). L'étape faite en 5.3.3 ramène le cas de (ψ,ϵ) au cas d'un paramètre élémentaire. On peut alors lui appliquer progressivement les définitions pour conclure. Il reste à appliquer 6 (propriété 4) qui oblige à changer éventuellement certains signes dans $\mathcal{E}'$ ainsi que son ordre pour obtenir l'inclusion annoncé en (1). Les opérations faites sur $\mathcal{E}'$ ne change pas la propriété (2). La condition sur le signe est automatique car on ne change pas la valeur de $\prod_{(\rho,A',B',\zeta')}\epsilon(\rho,A',B',\zeta')$ dans toutes ces opérations.

5.4 Un cas particulier important

5.4.1 1e étape

On fixe (ρ, A, B, ζ) comme ci-dessus. On fait les hypothèses de 5.3.4 et on en ajoute même d'autres. Pour simplifier les notations on suppose que A, B sont des entiers. Si $B = 0$, on n'ajoute aucune hypothèses. Par contre si $B > 0$, on suppose que $(\rho, C, C, \zeta) \in Jord(\psi)$ pour tout $0 \leq C < B$ et que ϵ alterne sur tous ces blocs, c'est-à-dire qu'il existe un signe λ' tel que $\epsilon(\rho, C, C, \zeta) = (-1)^C \lambda$ pour tout C comme ci-dessus.

On fixe $\tilde{\pi}$ un constituant irréductible de $\pi(\psi, \epsilon)$ et on reprend d'abord la 1e construction 5.3.3, d'où t_1 et λ_1. Ensuite on fait la 2e construction, d'où D et λ. Mais ici on peut préciser un peu les rapports entre t_1 et D (on rappelle que D peut valoir -1). On sait que le signe ϵ_{t_1,λ_1} vaut ϵ sur les blocs jusqu'à $B - 1$ et donc alterne par hypothèse. Puis, par construction il alterne de nouveau sur les $A - B - 2t_1 + 1$ blocs compris entre B et $A - 2t_1$. On pose $2t := A - D$ et $2t$ est exactement le nombre de blocs qui disparaissent de $\psi \circ \Delta$ pour arriver à $\tilde{\psi}_D$ dans ces constructions. Donc soit le signe ϵ_{t_1,λ_1} alterne déjà spontanément à la fin de la première construction et $t = t_1$, soit il n'y a pas alternance et $t = t_1 + inf(B, A - B - 2t_1 + 1)$. Ci-dessous on passe en revue les cas où l'on peut conclure et ensuite on montrera que ce sont les seuls cas qui peuvent se produire.

Lemme : *avec les notations ci-dessus, supposons que l'on peut choisir $\mathcal{E}$ contenant $-\zeta A$ alors $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\tilde{\pi} \neq 0$.*

On fixe $\mathcal{E}$ tel que 5.3.4 soit satisfait et on suppose que $\mathcal{E}$ contient $-\zeta A$. Pour simplifier la démonstration on suppose que $\zeta = +$ pour ne plus devoir l'écrire. Alors il existe $x \in \mathcal{E}$ tel que $[x, -A]$ soit un segment et $Jac_{x,\cdots,-A}\tilde{\pi} \neq 0$ (cf 1.2). Comme $|x| \leq A$, nécessairement $x = B$. D'où le lemme

Supposons maintenant que $D = A$, c'est-à-dire que $t_1 = 0$ dans la première construction 5.3.3 et qu'il n'y a aussi aucune 2e construction, c'est-à-dire que le signe alterne spontanément ; il résulte des définitions que $\tilde{\pi}$ est l'une des représentations "complémentaires" de l'énoncé du théorème celle qui vérifie en plus que le caractère prend des valeurs différentes sur le bloc (ρ, B, B) et $(\rho, B - 1, B - 1)$, ceci n'est de toute façon possible que sous les mêmes conditions que dans l'énoncé du théorème à cause de la condition de signe (cf. Remarque de 5.3.4).

Supposons maintenant que $B > 0$, en particulier $(\rho, 0, 0, \zeta) \in Jord(\psi)$. On suppose que $D = A - 2inf(B, A - B + 1)$. On suppose en plus que si $A - B + 1 > B$, $\lambda \neq \epsilon(\rho, 0, 0, \zeta)$.

On reprend les constructions et en particulier $t := (A - D)/2$, notation déjà introduite avant l'énoncé avec soit $t = t_1$ dans le cas où $\lambda_1 \neq \epsilon(\rho, B - 1, B - 1)$, soit $t = t_1 + inf(B, A - B - 2t_1 + 1)$ dans le cas opposé puisque le signe n'alterne plus. Reprenons l'hypothèse $D = A - 2inf(B, A - B + 1)$ qui dit exactement que $t = inf(B, A - B + 1)$. Ce que l'on veut démontrer ici est que $t_1 = 0$ et $\tilde{\pi}$ sera alors aussi une des représentations complémentaires, celle que l'on n'a pas trouvée ci-dessus.

On a sûrement $t_1 \leq (A - B + 1)/2$ donc si $A - B + 1 \leq B$, on a $t = A - B + 1 > t_1$ d'où $t = t_1 + A - B - 2t_1 + 1 = A - B - t_1 + 1$ d'où encore $t_1 = 0$. Supposons donc que $B < A - B + 1$. Ici on a $t = B$ et soit immédiatement $t_1 = 0$ soit $B > A - B - 2t_1 + 1$. Dans ce cas, quand on reprend la deuxième construction (5.3.4) on constate que l'on ne touche pas au bloc $(\rho, 0, 0, \zeta)$ et donc que $\lambda = \epsilon(\rho, 0, 0, \zeta)$ ce qui est contraire à l'hypothèse et empêche l'inégalité $B > A - B - 2t_1 + 1$. D'où le résultat cherché.

On reprend les notations qui précèdent, en particulier (ρ, A, B, ζ) et ϵ_0.

Lemme : *soit λ tel que $\prod_{C \in [B,A]}((-1)^{[C]}\lambda) = \epsilon_0$ (on suppose qu'il existe un tel λ alors la représentation $\pi_\lambda := \pi(\psi', \epsilon', \cup_{C \in [B,A]}(\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\lambda))$ intervient avec multiplicité 1 exactement dans $\pi(\psi, \epsilon)$.*

On reprend la définition de $\pi(\psi, \epsilon)$; on considère d'abord les sous-quotients intervenant dans

$$\sum_{C \in]\zeta B, \zeta A]} < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B + 2, \zeta, \epsilon_0).$$

Ces sous-quotients vérifient $t_1 \neq 0$ dans la première construction de 5.3.3 et ils ne peuvent être isormorphes à une représentation du type π_λ de l'énoncé. Ce qu'il faut donc démontrer et que π_λ intervient avec multiplicité 1 exactement dans

$$\oplus_{\eta=\pm}(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B + 1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, \eta\epsilon_0)). \qquad (*)$$

Le cas facile est celui où $A = B + 1$; la représentation π_λ n'existe que si $\epsilon_0 = -1$ et les 2 valeurs de λ sont alors possibles ; les représentations π_λ sont exactement celles qui interviennent dans (*) et le seul point à vérifier est :

$$(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B} = (-1)\epsilon_0 = 1.$$

Dans le cas général, on applique le théorème de 4.1 par récurrence en utilisant $(\rho, A, B+1, \eta)$; pour η fixé et pour λ' vérifiant $\prod_{C \in]B+1,A]}((-1)^{[C]}\lambda') = \eta$, la représentation $\pi_{\eta,\lambda'} := \pi(\psi', \epsilon', \cup_{C \in]B+1,A]}(\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\lambda'), (\rho, B, B, \zeta, \eta\epsilon_0$

intervient avec multiplicité 1 exactement dans $\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+1, \zeta, \eta), (\rho, B, B, \zeta, \eta\epsilon_0))$. La représentation π_λ ne peut être que l'une de ces représentations $\pi_{\eta,\lambda'}$ et elle est cette représentation quand on a les égalites :

$$\lambda(-1)^{[B]} = \eta\epsilon_0, \qquad (-1)^{[B+1]}\lambda' = -\eta\epsilon_0.$$

Cela entraîne, $\lambda' = \lambda$. On récrit la propriété de λ :

$$\prod_{C\in[B,A]} ((-1)^{[C]}\lambda) = \epsilon_0 = \lambda^{A-B+1}(-1)^{(A+B-\delta)(A-B+1)/2},$$

où $\delta = 0$ si A, B sont des entiers et -1 sinon. Considérons d'abord le cas où $A - B + 1$ est pair. On a alors, $(-1)^{(A-B+1)/2} = \epsilon_0$ et pour chaque valeur de λ il existe η tel que $\pi_\lambda = \pi_{\eta,\lambda}$; le point est de vérifier le signe, c'est -à-dire :

$$(-1)^{(A-B+1)/2}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B} = (-1)^{(A-B+1)/2}\epsilon_0^{A-B} = 1,$$

comme cherché.

Supposons maintenant que $A-B+1$ est impair ; on a alors une seule valeur de λ possible et elle détermine η puisqu'il faut $(-1)^{[B]}\lambda = \eta\epsilon_0$. Il faut encore vérifier le signe qui vient devant cette représentation ; on remarque que dans π_λ le signe définissant la représentation alterne sur tous les blocs de Jord de la forme (ρ, C, C, ζ) avec $C \in [B, A]$ et en valant $\eta\epsilon_0$ sur (ρ, B, B, ζ) et avec le produit de tous ces signes valant ϵ_0. Cela donne la relation :

$$(\eta\epsilon_0)^{A-B+1}(-1)^{[(A-B+1)/2]} = \epsilon_0.$$

Ainsi

$$(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B} = +1,$$

comme cherché. Cela termine la preuve.

5.4.2 Modules de Jacquet

On refixe les notations tout en gardant $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ avec $A > B + 1$ ainsi que les hypothèses de 5.3.1. Pour simplifier la démonstration et parceque c'est le cas le plus difficile, on suppose que A et B sont des entiers. Pour D un entier avec $D \in [-1, A]$, on note $\mathcal{S}_D$ l'ensemble non ordonné $\cup_{C\in]D,A]}[-C, C]$. Soit $\tilde{\pi}$ un constituant de $\pi(\psi, \epsilon)$. On reprend t, λ comme en 5.3.4 en posant $D = A - 2t$. Rappelons que t est un entier. On a aussi construit l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ tel que

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \times x \in \mathcal{E}\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}_t, \tilde{\epsilon}_{t,\lambda}).$$

Ici $\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}_{t,\lambda}$ se déduit de ψ, ϵ en enlevant tous les blocs de la forme (ρ, A', B', ζ) où $B' \leq B$ et en rajoutant les blocs (ρ, C, C, ζ) où $C \in [0, D]$ (on ne rajoute rien si $D = -1$) et le caractère $\tilde{\epsilon}_{t,\lambda}$ alterne sur tous ces blocs en commençant par $\tilde{\epsilon}_{t,\lambda}(\rho, 0, 0, \zeta) = \lambda$. On sait aussi que

$$\mathcal{E} \cup -\mathcal{E} = \mathcal{S}_D$$

En général cet ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas unique et on n'a pas encore démontré que t, λ le sont. Toutefois, on a :

Lemme : *Soit $\tilde{\pi}$ un constituant de $\pi(\psi, \epsilon)$ et soient t et λ, comme en 5.3.4. Soit aussi un ensemble $\mathcal{E}$ d'entiers, en valeur absolue inférieurs ou égaux à A et tels que $\tilde{\pi}$ soit un sous-quotient de l'induite $\times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}_t, \tilde{\epsilon}_{t,\lambda})$. Alors $\mathcal{E} \cup -\mathcal{E} = \mathcal{S}_D$, où $D = A-2t$ égalité d'ensembles non ordonnés. De plus t et λ sont uniquement déterminés par $\tilde{\pi}$.*

L'existence a été prouvée en 5.3.4. L'unicité résulte d'un calcul de module de Jacquet ; en effet fixons t, λ et $\mathcal{E}$ convenant et un autre triplet t', λ', $\mathcal{E}'$ convenant aussi. On écrit donc $\tilde{\pi}$ d'une part comme sous-quotient de

$$\times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}_t, \tilde{\epsilon}_{t,\lambda}) \tag{1}$$

d'autre part comme sous-quotient de

$$\times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}_{t'}, \tilde{\epsilon}_{t',\lambda'}). \tag{2}$$

Les formules standards calculant les modules de Jacquet sont particulièrement simples à appliquer puisque

$$\forall y; |y| \leq A, Jac_y\pi(\tilde{\psi}_t, \tilde{\epsilon}_{t,\lambda}) = 0 = Jac_y\pi(\tilde{\psi}_{t'}, \tilde{\epsilon}_{t',\lambda'}).$$

Avant de procéder à ces calculs on réordonne $\mathcal{E}$ en changeant aussi éventuellement des signes pour les éléments de cet ensemble de façon à ce que $\tilde{\pi}$ soit un sous-module de (1) ; cela est possible grâce à 6 (propriété 4). Cela nous assure que $Jac_{x\in\mathcal{E}}\tilde{\pi} \neq 0$. On déduit de (1) que $Jac_{x\in\mathcal{E}}\tilde{\pi}$ est non nul et isotypique de type $\pi(\tilde{\psi}_t, \tilde{\epsilon}_{t,\lambda})$ et de (2) que ce module de Jacquet est certainement nul si $\mathcal{E} \cup -\mathcal{E} \neq \mathcal{E}' \cup -\mathcal{E}'$ et s'il n'est pas nul est isotypique de type $\pi(\tilde{\psi}_{t'}, \tilde{\epsilon}_{t',\lambda'})$. Cela donne l'unicité cherchée de t et λ. et de $\mathcal{E} \cup -\mathcal{E}$. Puisque pour l'un des choix cette union est S_D cela est vrai pour tous les choix.

5.4.3

Ici on fait l'hypothèse de 5.3.1. On suppose que $\zeta = +$ sinon il faut le faire intervenir partout et ce qui est croissant devient décroissant.

On fixe $\tilde{\pi}$ et $\mathcal{E}, t, \lambda$ tels que 5.3.4 (1) et (2) soient vérifiés. On renote ici (1) :

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}_t, \tilde{\epsilon}_{t,\lambda}). \tag{1}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est totalement ordonné, ordre noté $>_{\mathcal{E}}$ pour garder $>$ pour l'ordre sur les nombres. On dit que $\mathcal{E}$ est muni d'un ordre maximal si $\mathcal{E}$ s'écrit comme une union de segments croissants, pour $i \in [1, v]$, v convenable, de la forme $[x_i, y_i]$ avec $x_1 \geq \cdots \geq x_v$ et pour $i \leq j$ avec $x_i = x_j$, $y_i \geq y_j$; l'ordre de $\mathcal{E}$ étant l'ordre $[x_1, y_1], \cdots, [x_v, y_v]$. A un tel ensemble ordonné de segments, Zelevinski a associé une représentation irréductible $\sigma_{>_{\mathcal{E}}}$ du groupe linéaire convenable et de façon standard, quand on a une inclusion

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\,|^x \times \pi_{\delta,\zeta} \tag{1}$$

on peut réordonner $\mathcal{E}$ de façon à avoir une inclusion

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \sigma_{>_{\mathcal{E}}} \times \pi_{\delta,\zeta}. \tag{2}$$

Lemme : *Pour $\mathcal{E}$ vérifiant (1), il existe un unique ordre maximal sur cet ensemble tel que (2) soit satisfait. Précisément, $x_1 = B$, pour tout $i \in [1, v[$, $x_i = x_{i+1} + 1$ et $y_1 > \cdots > y_v$, ce qui détermine uniquement l'ordre et induit même des restrictions sur la forme de $\mathcal{E}$.*

On fixe un ordre maximal sur $\mathcal{E}$, d'où les segments $[x_i, y_i]$ pour $i \in [1, v]$.

Ayant mis cet ordre, on montre maintenant que pour tout $i \in [1, v[$, $xi + 1 = x_i - 1$. En effet s'il n'en est pas ainsi, on note $\mathcal{E}_i$ l'ensemble qui se déduit de $\mathcal{E}$ en enlevant simplement x_{i+1} ; c'est encore naturellement une union de segments ordonnés suivant l'ordre de Zelevinski à ceci près que le $i+1$-ième segment peut être plus "grand" que certains de ceux qui le précèdent ; cela se produit si $x_i = x_{i+1}$. Le $i+1$-ième segment dans $\mathcal{E}_i$ est alors $]x_{i+1}, y_{i+1}]$ et ce segment n'est pas lié au sens de Zelevinski avec ceux qui le précède et ont pour origine x avec $x = x_i$. On note σ_i la représentation associée par Zelevinski à $\mathcal{E}_i$. On suppose que i est minimum avec la propriété $x_i \neq x_{i+1} + 1$ et on montre par les arguments bien connus dans les groupes linéaires que

$$\sigma_{\mathcal{E}} \hookrightarrow \rho|\,|^{x_{i+1}} \times \sigma_{\mathcal{E}_i}.$$

Remarquons que $Jac_{x_{i+1},x_1}\sigma_i \neq 0$ et cela entraîne donc que $Jac_{x_{i+1},x_1}\tilde{\pi} \neq 0$. Comme $Jac_{x_1}\tilde{\pi} \neq 0$, on sait a priori que $x_1 = B$ et la même propriété pour x_{i+1}. On vérifie que $Jac_{B,B}\tilde{\pi} = 0$ grâce à 5.2. D'où l'assertion sur les x_i.

Montrons maintenant que pour tout $i \in [1, v[$, $y_i > y_{i+1}$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et fixons i minimum tel que $y_i \leq y_{i+1}$. Alors le i-ème segment de $\mathcal{E}$ n'est pas lié au i+1-ième. On note ici $\mathcal{E}_i$ l'ensemble des segments constituant $\mathcal{E}$ sauf que l'on a enlevé x_{i+1} au i+1-ième et que l'on a permuté le i-ème et le i+1-ème segment. On note σ_i la représentation associée par Zelevinski à l'ensemble des segments constituant $\mathcal{E}_i$ et on a encore une inclusion :

$$\sigma_{\mathcal{E}} \hookrightarrow \rho|\,|^{x_{i+1}} \times \sigma_i.$$

On en déduit que $Jac_{x_{i+1}}\tilde{\pi} \neq 0$ et $x_{i+1} = B$ ce qui est impossible. Cela termine la preuve du lemme.

5.4.4 Non nullité de certains modules de Jacquet

On garde l'hypothèse de 5.3.1. On fixe $\mathcal{E}$ satisfaisant les conditions du paragraphe précédent et en particulier $\mathcal{E}$ peut se voir comme une union de segments. On écrit $\mathcal{E}$ sous forme de tableau où les éléments croissent de 1 sur chaque ligne et décroissent de 1 sur chaque colonne.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = B & \cdots & \cdots & \cdots & y_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_v & \cdots & y_v & & \end{array}$$

On note s le nombre de colonnes et $z_1, \cdots, z_s$ le dernier élément de chaque colonne. Cette présentation permet de calculer aisément $\mathcal{E} \cup -\mathcal{E}$. On a

$$\mathcal{E} \cup -\mathcal{E} = \cup_{x\in[B,y_1]}[-x, x] \cup_{i\in[1,s];z_i\leq 0} [z_i, -z_i] \ominus_{i\in[1,s];z_i>0} [-z_i + 1, z_i - 1].$$

On rappelle que $\mathcal{E} \cup -\mathcal{E} = \cup_{z\in[D+1,A]}[-z,z]$ (où $D = A - 2t$). On en déduit donc :

$$[B, y_1] \cup_{i\in[1,s];z_i\leq 0} \{-z_i\} = [D+1, A] \cup_{i\in[1,s];z_i>0} \{z_i - 1\}. \tag{1}$$

Pour $tilde\pi$ un constituant de $\pi(\psi,\epsilon)$ fixé, en général plusieurs choix de $\mathcal{E}$ sont possibles. Il n'y a pas d'intérêt à les écrire tous mais 2 vont nous servir plus particulièrement. D'abord remarquons que si $\mathcal{E}$ n'est pas vide, ce qui est implicite ici, $\mathcal{E}$ contient soit $-A$ soit A. On rappelle que par définition t vérifie $2t = A - D$ et que nécessairement $t \leq A - B + 1$.

Soit $\tilde{\pi}$ fixé un composant irréductible de $\pi(\psi,\epsilon)$; on suppose que le t et λ qui lui sont associés, vérifient, $t \neq 0$

Lemme : *on peut alors choisir $\mathcal{E}$ comme ci-dessus convenant pour $\tilde{\pi}$ avec l'une des propriétés ci-dessous :*

$\mathcal{E}$ contient $-A$;

ou

$$\mathcal{E} = \begin{array}{ccccc} x_1 = B & \cdots & \cdots & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -B+1 & \cdots & \cdots & \cdots & (D+1) \end{array};$$

ou

$$\mathcal{E} = \begin{array}{ccccc} x_1 = B & \cdots & \cdots & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -B+1 & \cdots & B-t & \cdots & -(D+1) \end{array};$$

ou

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_D := \begin{array}{ccccc} x_1 = B & \cdots & \cdots & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B-2t+1 & \cdots & B-t & \cdots & D+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -B+1 & \cdots & t-B & & \end{array}$$

De plus si un ensemble $\mathcal{E}$ convient qui est tel que le plus petit élément de $\mathcal{E}$ est inférieur ou égal à $-B$, alors $Jac_{B,\cdots,-A}\tilde{\pi} \neq 0$.

On fixe $\mathcal{E}$ et l'ordre maximal sur $\mathcal{E}$ tel que

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \sigma_{>\mathcal{E}} \times \pi_{D,\lambda}.$$

Et on suppose que $\mathcal{E}$ est tel que parmi tous les choix possibles le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$ strictement positifs est minimal.

Soit $i \in [1,v]$ tel que $y_i > 0$, pour tout $j > i$, $y_j \neq y_i - 1$ et $y_i \neq D+1$. Alors on montre que l'on peut remplacer $\mathcal{E}$ par un ensemble coïncidant à l'ordre près avec $\mathcal{E} - \{y_i\} \cup \{-y_i\}$: on procède comme en 5.4.3, en notant $\mathcal{E}_i$ l'ensemble des segments qui se déduit de $\mathcal{E}$ en remplaçant y_i par $y_i - 1$ pour le i-ème segment. On note σ_i la représentation associée par Zelevinski à cet ensemble ordonné de segments et on a encore : $\sigma_{\mathcal{E}} \hookrightarrow \sigma_i \times \rho|\,|^{y_i}$ ici on utilise seulement le fait que pour tout $j > i$, $y_j < y_i - 1$ ou $y_j = y_i$. Comme $y_i \neq D+1$ la représentation $\rho|\,|^{y_i} \times \pi_{\delta,\zeta}$ est irréductible (cf. 6.3.1) et donc isomorphe à $\rho|\,|^{-y_i} \times \pi_{\delta,\zeta}$. D'où l'assertion annoncée.

On suppose que $\mathcal{E}$ ne contient pas $-A$; il contient donc A et nécessairement $y_1 = A$. Ainsi le nombre de colonnes du tableau (le s dans ce qui précède l'énoncé du lemme) vaut $A - B + 1$, ce que l'on va écrire $b := A - B + 1$. (C'est le b dans l'interprétation en terme de bloc de Jordan venant des représentations). On revient aux notations $z_j; j \in [1,b]$ qui précèdent l'énoncé et on remarque que $\{z_j - 1; z_j > 0\}$ est d'après ce que l'on vient de voir un intervalle de la forme $[z, D]$, en acceptant $z = D+1$ si l'ensemble est vide. Ainsi 5.4.4 (1) que l'on rappelle, en acceptant $z = D+1$:

$$[B, A] \cup_{i\in[1,s];z_i\leq 0} \{-z_i\} = [D+1, A] \cup [z, D] = [z, A].$$

D'où $z \leq B$ et $[z, B[= \{-z_i; z_i \leq 0\}$.On pourrait avoir $z = B$ ce qui veut dire que tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont strictement positifs mais on obtient tout de suite une impossibilité, il faudrait $B + 1 \leq B$!. Ainsi $z < B$ Cela veut dire que le tableau s'écrit si $z = 0$

$$\mathcal{E} = \begin{array}{ccccc} B & \cdots & \cdots & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B-2t+1 & \cdots & \cdots & \cdots & D+1 \end{array}$$

Mais on doit avoir $[B,A]\cup[-(B-2t+1),0]=[0,A]$ ce qui force $B-2t+1=-B+1$ et on est dans le 2e cas de l'énoncé.

Si $z\neq 0$

$$\mathcal{E}=\begin{array}{ccccc} B & \cdots & \cdots & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B-2t+1 & \cdots & z & \cdots & D+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -B+1 & \cdots & -z & & \end{array} \qquad (*)$$

En particulier si $z=D+1$ le tableau $\mathcal{E}$ est rectangulaire si $z=D+1$ et on est dans le 3e cas de l'énoncé.

Supposons maintenant que $\{z_j; z_j>0\}$ n'est pas un ensemble vide ; on calcule z en comptant le nombre de lignes. Ce nombre est $2B$ qui se décompose en $2t$ "longues" lignes et $2B-2t$ lignes "courtes". Mais $2z$ est aussi le nombre de lignes "courtes" d'où $z=B-t$ Remarquons qu'il faut donc $t\leq B$ et que $t=B$ est équivalent à ce que le tableau définissant $\mathcal{E}$ soit rectangulaire.

On démontre maintenant la fin du lemme ; en effet supposons qu'un ensemble $\mathcal{E}$ qui convient contient un élément inférieur ou égal à $-B$. On impose en plus à $\mathcal{E}$ vérifiant cette propriété d'avoir un nombre minimal d'éléments strictement positifs. On a donc vu que ou bien on a directement l'assertion, ou bien $\mathcal{E}$ est celui de l'énoncé 2e, 3e ou 4e cas. Dans ces cas, le plus petit élément de $\mathcal{E}$ est $-B+1$; ce qui est donc exclu.

5.4.5

On prend les hypothèses et les notations de la sous-section précédente ; en particulier $\tilde{\pi}$ est fixé, d'où t,λ et $D=A-2t$. On a aussi défini $\mathcal{E}_D$.

Lemme : *On suppose que $D<B-1$ et qu'il existe $C\in]B,A]$ tel que $\tilde{\pi}$ est un sous-quotient de l'induite :*

$$X_C:=<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta C}>\times Jac_{\zeta(B+2),\cdots,\zeta C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\epsilon_0))>.$$

Alors $Jac_{x\in\mathcal{E}_D}\tilde{\pi}=0$.

Dans la preuve, on suppose que $\zeta=+$. Avant de démontrer ce lemme on va faire de façon un peu générale le calcul suivant. Soit ℓ un entier non nul et on pose $\mathcal{A}_\ell$:

$$\begin{array}{cccc} B & B+1 & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B-\ell+1 & B-\ell+2 & \cdots & A-\ell+1 \\ B-\ell & & & \\ \vdots & & & \\ -B+1 & & & \end{array}$$

Alors, si $\ell\leq B-C+1$, on pose

$$\mathcal{A}_{C,\ell}:=\begin{array}{ccccc} B+2 & \cdots & \cdots & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B+3-\ell & \cdots & \cdots & \cdots & A-\ell+1 \\ B+2-\ell & \cdots & C-\ell & & \end{array}$$

et

$$Jac_{x\in\mathcal{A}_\ell}X_C=<\rho|\,|^{-B},\cdots,\rho|\,|^{-C+\ell}>\times Jac_{x\in\mathcal{A}_{C,\ell}}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B-2,\zeta=+,\epsilon_0))$$

où le premier facteur de l'induite n'apparaît pas si $\ell=C-B+1$.

Si $\ell>C-B+1$,

$$Jac_{x\in\mathcal{A}_\ell}X_C=0$$

Pour faire ces calculs, on commence, comme on en a le droit, par calculer $Jac_{B,\cdots,-B+1}X_C$ et cela vaut

$$X'_C:=<\rho|\,|^{-B},\cdots,\rho|\,|^{-C}>\times Y_C,$$

où

$$Y_C=Jac_{(B+2),\cdots,C}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-1,B+1,\zeta=+,\epsilon_0))>.$$

Il faut encore calculer $Jac_{x\in\mathcal{B}}$ du résultat, X'_C, où

$$\mathcal{B} := \begin{array}{ccc} B+1 & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B+2-\ell & \cdots & A-\ell+1. \end{array}$$

Dans le tableau ci-dessous le X dit simplement que l'on omet l'élément situé en principe à cette place et on pose, pour $\ell' \leq C-B+1$

$$\mathcal{C}_{C,\ell'} := \begin{array}{ccccccc} B+2 & \cdots & C & & & & \\ B+1 & \cdots & C-1 & X & C+1 & \cdots & A-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B+2-\ell' & \cdots & C-\ell' & X & C-\ell'+2 & \cdots & A-\ell'+1 \end{array}$$

On montre que pour $\ell' \leq C-B+1$,

$$Jac_{x\in\mathcal{B}_{\ell'}} X'_C =< \rho|\,|^{-B}, \cdots, \rho|\,|^{-C+\ell'} > \times Jac_{x\in\mathcal{C}_{C,\ell'}} \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \epsilon_0)).$$

Le terme de droite intervient clairement dans le terme de gauche mais en principe interviennent aussi les termes indexés par ℓ'' suivants où $\ell'' \leq \ell'$:

$$< \rho|\,|^{-B}, \cdots, \rho|\,|^{-C+\ell''} > \times Jac_{x\in\mathcal{C}_{C,\ell',\ell''}} \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta=+, \epsilon_0)),$$

où $\mathcal{C}_{C,\ell',\ell''} :=$:

$$\begin{array}{ccccccc} B+2 & \cdots & C & & & & \\ B+1 & \cdots & C-1 & X & C+1 & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B+2-\ell'' & \cdots & C-\ell''+1 & X & C-\ell''+3 & \cdots & A-\ell''+2 \\ B+1-\ell'' & \cdots & C-\ell'' & C-\ell''+1 & C-\ell''+2 & \cdots & A-\ell''+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B-\ell'+2 & \cdots & C-\ell' & C-\ell'+1 & C-\ell'+2 & \cdots & A-\ell'+1 \end{array}$$

Mais pour un tel choix de ℓ'', on va montrer que $Jac_{x\in\mathcal{C}_{C,\ell',\ell''}} \pi(\psi', \epsilon', (\rho, a+2, b-2, \epsilon(\rho, a, b))) = 0$. En effet, on considère uniquement la partie du tableau :

$$\mathcal{C}'' := \begin{array}{ccccc} B+2 & \cdots & C & & \\ B+1 & \cdots & C-1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ B+2-\ell'' & \cdots & C-\ell''+1 & & \\ B+1-\ell'' & \cdots & C-\ell'' & C-\ell''+1. & \end{array}$$

Et le Jac dont on cherche à montrer la nullité se factorise par $Jac_{x\in\mathcal{C}''}$. Or une représentation irréductible σ du GL correspondant dont le support cuspidal est l'ensemble des $\rho|\,|^x$ pour x parcourant $\mathcal{C}''$ d'après la classification de Zelevinski ne peut pas avoir $Jac_x\sigma \neq 0$ pour uniquement $x = B+2$. D'où la contradiction, il y aurait une valeur de $x \neq B+2$, $x \in \mathcal{C}''$ telle que $Jac_x \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta=+, \epsilon_0)) \neq 0$. Ceci est exclu par 3 d'où la nullité cherchée.

On obtient, comme annoncé, le cas $\ell \leq C-B+1$ en faisant $\ell' = \ell$ dans ce qui précède et en remarquant de façon tout à fait formelle que l'on peut remplacer $\mathcal{C}_{C,\ell}$ par $\mathcal{A}_{C,\ell}$.

Supposons maintenant $\ell > C-B+1$ et il suffit même de montrer la nullité pour $\ell = C-B+2$. On a d'après ce qui précède :

$$Jac_{x\in\mathcal{A}_\ell} X_j = Jac_{x\in\mathcal{A}'} \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta=+, \epsilon_0)),$$

où

$$\mathcal{A}' := \begin{array}{ccccccc} B+2 & \cdots & C & & & & \\ B+1 & \cdots & C-1 & X & C+1 & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B+1-(C-B) & \cdots & B-1 & X & B+1 & \cdots & A-(C-B) \\ B-(C-B) & \cdots & B-2 & B-1 & B & \cdots & A-(C-B)-1 \end{array}$$

et l'argument déjà donné ci-dessus (pour ℓ'') donne la nullité cherchée. Revenons à l'énoncé du lemme ; quand $D+1 \leq B-1$ (c'est-à-dire $D < B-1$), le calcul de $Jac_{x\in\mathcal{T}_D}\tilde{\pi}$ se factorise par $Jac_{x\in\mathcal{C}_{C,\ell'}}\tilde{\pi}$ pour tout ℓ' tel que $A-\ell'+1 \geq D+1$. On peut donc prendre $\ell' = A-D > A-B+1 \geq C-B+1$. D'où la nullité annoncée.

Remarque : *le même argument s'applique pour $\mathcal{T}_\pm$ où*

$$\mathcal{T}_\pm = \begin{array}{ccc} B & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(B-1) & \cdots & \pm(D+1) \end{array}$$

5.4.6

Corollaire : *Soit $\tilde{\pi}$ un composant irréductible de $\pi(\psi,\epsilon)$. Si D associé à $\tilde{\pi}$ en 5.4.2 vérifie $D < B-1$ alors $\tilde{\pi}$ vérifie soit $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\tilde{\pi} \neq 0$ soit est l'une des représentations complémentaires de 4.1.*

On suppose comme précédemment que $\zeta = +$. On fixe $\tilde{\pi}$ tel que le D qui lui soit associé vérifie $D < B-1$ et on suppose aussi que $Jac_{B,\cdots,-A}\tilde{\pi} = 0$. Il faut démontrer qu'un tel $\tilde{\pi}$ est une des représentations compémentaires de 4.1. Avec le lemme 5.4.5 et la remarque qui le suite, on sait dejà grâce à 5.4.4 que $\tilde{\pi}$ est un sous-quotient de l'une des représentations $X_\eta := pi(\psi',\epsilon',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta,(\rho,B,B,\zeta,\eta\epsilon_0)))$, où η est un signe convenable. On fixe η convenant.

On note ψ'',ϵ'' le couple qui se déduit de ψ',ϵ' en enlevant $(\rho,B-1,B-1,\zeta,\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta))$. Et on montre que $Jac_{B,\cdots,-B+1}X_\eta = 0$ si $\eta\epsilon_0 \neq \epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta)$ et vaut $\pi(\psi'',\epsilon'',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta)))$ sinon (c'est essentiellement ce qui se passe pour les morphismes élémentaires rappelé en 6).

Si $\eta\epsilon_0 \neq \epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta)$, il résulte de 5.4.4 que $D = A$ et 5.3.3 ainsi que 5.3.4 donnent le résultat cherché. Supposons donc que l'on a égalité, ce qui définit η.

Ainsi il existe $\tilde{\pi}'$ un constituant irréductible de $\pi(\psi'',\epsilon'',(\rho,a+1,b-1,\eta)))$ et une inclusion :

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \times_{x\in[B,-B+1]}\rho|\,|^x \times \tilde{\pi}'.$$

On associe à $\tilde{\pi}'$ des données D',λ' et un ensemble $\mathcal{E}'$ comme dans 5.4.2 ; nécessairement D',λ sont aussi D,λ les données associées à $\tilde{\pi}$ (cf 5.4.2). On peut appliquer 4.1 à $(\psi'',\epsilon'',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta))$. Ainsi soit $\mathcal{E}'$ contient $-\zeta A$ soit $\tilde{\pi}'$ est l'une des représentations complémentaires. Si $\mathcal{E}'$ contient $-A$ il existe alors $\mathcal{E}$ convenant pour $\tilde{\pi}$ et contenant aussi $-A$ et on a vu que cela entraîne que $Jac_{B,\cdots,-A}\tilde{\pi} \neq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi $\tilde{\pi}'$ est l'une des représentations complémentaire pour $(\psi'',\epsilon'',(\rho,A,B+1,\zeta,\eta))$.

Concrètement, cela veut dire qu'il existe un signe, κ tel que $\tilde{\pi}' = \pi(\psi'',\epsilon'',\cup_{C\in[B+1,A]}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^C\kappa))$ et $\tilde{\pi}$ d'après 6 est l'une des 2 représentations, indexées par $\kappa' = \pm$

$$\pi(\psi'',\epsilon'',\cup_{C\in[B+1,A]}(\rho,C,C,\zeta,(-1)^C\kappa),(\rho,B,B,\zeta,\kappa'),(\rho,B-1,B-1,\zeta,\kappa').$$

On aura montré que $\tilde{\pi}$ est l'une des représentations complémentaires si l'on vérifie que $(-1)^{B+1}\kappa \neq \kappa'$. Si l'on a égalié, on a aussi $Jac_{(B+1),\cdots,-\ B}\tilde{\pi} \neq 0$ d'où a fortiori $Jac_{(B+1)}\tilde{\pi} \neq 0$ ce qui est exclu par 3.2. D'où le corollaire.

5.4.7

Lemme : *Soient D et λ comme en 5.4.2 et on suppose que $D \geq B-1$ ou encore $D+1 > B-1$. Soit $\mathcal{T} = \mathcal{E}_D$ d'où aussi la représentation $\sigma_\mathcal{T}$. Alors l'induite $\sigma_\mathcal{T} \times \pi(\tilde{\psi}_D,\tilde{\epsilon}_{D,\lambda})$ a un unique sous-module irréductible.*

Le tableau $\mathcal{T}$ a $2B$ lignes chacune formée d'un segment $[x_i,y_i]$ pour $i \in [1,2B]$. Pour tout $i \in [1,2B]$, on note $\sigma_{\geq i}$ la représentation du groupe linéaire convenable qui dans la classification de Zelevinski correspond aux segments $[x_j,y_j]$ pour $j \geq i$. On montre progressivement que pour tout $i \in [1,2B]$,

$$Jac_{x\in\cup_{j<i}[x_j,y_j]}\sigma_\mathcal{T} \times \pi_{\delta,\zeta} = \sigma_{\geq i} \times \pi_{\psi_D,\epsilon_{D,\lambda}}.$$

Pour démontrer cela, on suppose d'abord que $i \leq 2t$; on a alors $y_i = D+1+2t-i \geq B$ d'après l'hypothèse sur D. Si l'assertion n'est pas vraie pour un tel i, il faut nécessairement qu'il existe z tel que $[z,y_i]$ soit un segment et $Jac_{z,\cdots,y_i}\sigma^*_{\geq i} \neq 0$. Mais ceci n'est possible que si $y_i \leq -x_v$ qui est le plus grand élément de $-\mathcal{T}$. Sous l'hypothèse $D+1 \geq B$ on est assuré que $y_{2t} \leq y_i$ mais

$$y_{2t} = D+1 \geq B > -x_v = B-1.$$

Pour $i > 2t$ l'argument est différent ; ici on utilise le fait que tout élément de $[x_i,y_i]$ est strictement plus petit que $-y_v$; cela se voit sur le tableau.

Dans tous les cas on note $\pi_{\mathcal{T},D,\lambda}$ la représentation ainsi définie. On a évidemment accepté $A-D = 2B$ cas où $\mathcal{E}_D$ est rectangulaire.

Ce qui nous reste à démontrer maintenant est que la représentation $\pi_{\mathcal{T},D,\lambda}$ n'est pas un constituant de $\pi(\psi,\epsilon)$ sauf si $A-D = 2B$ et $\lambda = -\epsilon(\rho,0,0,\zeta)$.

5.4.8

On garde les hypothèses et notations précédentes, on rappelle que $2t = A - D$; on garde l'hypothèse $\zeta = +$ pour clarifier la situation. Pour simplifier les notations, on pose $\pi_{D,\lambda} := \pi(\psi_D, \epsilon_{D,\lambda})$. Pour $C \in]B, A]$, on a défini $X_C =< \rho|\,|^B, \cdots, \rho|\,|^{-C} \times Y_C$ où $Y_C = Jac_{B+2,\cdots,C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta = +, \epsilon_0)$. Pour $\eta = \pm$, on pose $X_\eta := \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+1, \zeta = +, \eta), (\rho, B, B, \zeta = +, \eta\epsilon_0))$.

Lemme : *On suppose que $D + 1 > B - 1$ et on fixe $C \in]B, A]$ et $\eta = \pm$.*

(i)Alors $\pi_{D,\lambda}$ n'est pas sous-quotient de $Jac_{x\in\mathcal{T}_D} X_C$ sauf si $C - B + 1 = 2t$.

(ii)Supposons que $C - B + 1 = 2t$. On note $\mathcal{T}'_D$ le tableau

$$\begin{array}{cccccc}
B+1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
B-2t+3 & \cdots & B-t+1 & \cdots & \cdots & D+1 \\
B-2t+2 & \cdots & B-t & \cdots & B-1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
-B+2 & \cdots & -B+t & & &
\end{array}$$

Alors,

$$Jac_{x\in\mathcal{T}_D} X_C = Jac_{x\in\mathcal{T}'_D}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \epsilon_0)). \tag{1}$$

(iii) Supposons encore $C - B + 1 = 2t$. On note $\mathcal{T}_{A-2,B,D}$ l'analogue de $\mathcal{T}_D$ mais en remplaçant le couple (A, B) par $(A-2, B)$; D est sans changement d'où t devient $t-1$. La multiplicité de $\pi_{D,\lambda}$ comme sous-quotient de $Jac_{x\in\mathcal{T}_D} X_C$ est la même que sa multiplicité comme sous-quotient de $Jac_{x\in\mathcal{T}_{A-2,B,D}}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-2, B, \zeta = +, \epsilon_0))$.

(iv)Soit $\eta = \pm$ et $\mathcal{T}_{A-2,B-1,D}$ l'analogue de $\mathcal{T}_D$ mais en y remplaçant (A, B) par $(A-2, B-1)$. La multiplicité de $\pi_{D,\lambda}$ dans $Jac_{x\in\mathcal{T}_D} X_\eta$ est 0 si $\eta\epsilon_0 \neq \epsilon(\rho, B-1, B-1, \zeta = +)$ et égal à la multiplicité de $\pi_{D,\lambda}$ comme sous-quotient de $Jac_{x\in\mathcal{T}_{A-2,B-1,D}}\pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A-2, B-1, \zeta = +, \eta))$, où ici ψ'', ϵ'' se déduit de ψ', ϵ' en enlevant le bloc $(\rho, B-1, B-1, \zeta = +)$.

(v) La multiplicité de $\pi_{D,\lambda}$ comme sous-quotient de $Jac_{x\in\mathcal{T}_D}\pi(\psi, \epsilon)$ est 0 sauf si $t = B$et $\lambda = -\epsilon(\rho, 1, 1)$ où elle vaut 1.

(i) est un calcul fait en 5.4.5 en posant avec les notations de loc. cit $\ell = 2t$: on y a montré que si $\ell > C - B + 1$, le module de Jacquet est nul. Si $\ell < C - B + 1$ dans le calcul de ce module de Jacquet il y a une induction avec le facteur $< \rho|\,|^{-B}, \cdots, \rho|\,|^{-C+\ell-1}$ qui fait que l'ensemble $\mathcal{E}$ associé à $\tilde{\pi}$ ne peut être réduit aux éléments de $\mathcal{T}_D$. D'où (i). Supposons donc que $2t = \ell = C - B + 1$, le (ii) est le calcul déjà fait comme expliqué ci-dessus.

Pour montrer (iii), il faut transformer $\mathcal{T}'_D$ qui est dans le résultat de (ii) en $\mathcal{T}_{A-2,B,D}$. Pour cela, on note momentanément $\mathcal{T}''$ le tableau qui se déduit de $\mathcal{T}'$ en supprimant $B-t+1, \cdots, B-1$ de la ligne qui commence par $B - 2t + 3$ et on a aisément, pour toute représentation X

$$Jac_{x\in\mathcal{T}'_D} X = Jac_{x\in[B-t+1,B-1]} Jac_{x\in\mathcal{T}''} X.$$

Mais $\times_{x\in[B-t+1,B-1]}\rho|\,|^x \times \pi_{D,\lambda}$ est isomorphe à $\times_{x\in[-B+1,-B+t-1]}\rho|\,|^x \times \pi_{D,\lambda}$. Ainsi, on peut remplacer $\mathcal{T}'$ par $\mathcal{T}''$ auquel on rajoute comme dernière ligne le segment $[-B+1, -B+t-1]$. Cela termine la preuve de (iii).

Pour démontrer (iv), on calcule d'abord

$$Jac_{x\in[B,-B+1]}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+1, \zeta = +, \eta), (\rho, B, B, \zeta = +, \eta\epsilon_0)). \tag{2}.$$

Cela vaut 0 si $\eta\epsilon_0 \neq \epsilon(\rho, B-1, B-1, \zeta = +)$ et $\pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B+1, \eta))$ sinon. Ensuite, on calcule le Jac suivant les 2 premières lignes en utilisant 4.4 et on trouve directement (iv).

Montrons maintenant (v). Supposons que $\tilde{\pi}$ soit un constituant irréductible de $\pi(\psi, \epsilon)$ avec D vérifiant $D + 1 \geq B$; on suppose aussi que $Jac_{x\in\mathcal{E}_D}\tilde{\pi} \neq 0$. On montre que $Jac_{B,\cdots,-A}\tilde{\pi} = 0$. En effet, on note σ' la représentation irréductible qui correspond au tableau $\mathcal{E}_D$ dont on a enlevé le dernier élément des $2t$ premières lignes. On a aisément

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \sigma' \times < \rho|\,|^A, \cdots, \rho|\,|^{D+1} > \times \pi_{D,\lambda},$$

pour ζ convenable. Or la représentation $< \rho|\,|^A, \cdots, \rho|\,|^{D+1} > \times \pi_{D,\lambda}$ a un unique sous-quotient irréductible, X, qui vérifie $Jac_{A,\cdots,D+1} X \neq 0$; c'est la représentation qui correspond au paquet élémentaire se déduisant de $\psi_D, \epsilon_{D,\lambda}$, en remplaçant le bloc $(\rho, D, D, \zeta = +)$ par $(\rho, A, A, \zeta = +)$ sans changer le caractère sur ce bloc. Mais cette représentation vérifie $Jac_{-A} X = 0$. Il est nécessaire que $\tilde{\pi} \hookrightarrow \sigma' \times X$ et on en déduit l'assertion $Jac_{B,\cdots,-A}\tilde{\pi} = 0$.

Revenons au calcul de la multiplicité de $\pi_{D,\lambda}$ en tant que sous-quotient de $Jac_{x\in\mathcal{E}_D}\pi(\psi,\epsilon)$. D'après ce qui précède c'est exactement la multiplicité avec laquelle il intervient dans

$$(-1)^{D-B+1}Jac_{x\in\mathcal{T}_{A-2,B,D}}\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-2,B,\zeta=+,\epsilon_0))$$

additionnée de celle avec laquelle il intervient dans

$$(-1)^{[A-B+1)/2]}\eta^{(A-B+1)}\epsilon_0^{A-B}Jac_{x\in\mathcal{T}_{A-2,B-1}}\pi(\psi'',\epsilon'',(\rho,A-2,B-1,\zeta=+,\eta))$$

où $\eta=\epsilon_0\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+)$.

Comme on va le voir, on connait ces multiplicités en appliquant par récurrence 4.1 et on va pouvoir montrer les propriétés cherchées.

Par récurrence, on connait la structure de $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-2,B,\zeta=+,\epsilon_0))$; on va la décrire et appliquer $Jac_{x\in\mathcal{T}_{A-2,B,D}}$ et compter la multiplicité de $\pi_{D,\lambda}$ dans le résultat.

Il y a les sous-modules qui vérifient $Jac_{B,\cdots,-(A-2)}\neq 0$ mais ceux-là donnent 0 quand on leur applique $Jac_{x\in\mathcal{T}_{A-2,B,D}}$ d'après ce que l'on vient de voir (en remplaçant encore (A,B) par $(A-2,B)$;

et il y a les termes dits complémentaires de 4.1, c'est-à-dire les représentations

$$\pi_{\eta'}:=\pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B,A-2]}(\rho,C,C,\zeta=+,(-1)^C\eta'))$$

où $\lambda'=\pm$ vérifie $\times_{C\in[B,A-2]}((-1)^C\eta')=\epsilon_0$. Il faut distinguer suivant les valeurs de η' possibles :

pour η' tel que $(-1)^B\eta'\neq\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+)$; dans ce cas $\pi_{\eta'}$ est spontanément de la forme $\pi_{D,\lambda}$ mais pour la valeur $D=A-2$ et $\lambda=\epsilon(\rho,0,0,\zeta=+)$. Cette représentation intervient effectivement avec multiplicité 1 mais aucune autre valeur de D n'apparaît. La condition pour que cela puisse se produire est donc :

$$\times_{C\in[B,A-2]}((-1)^C(-1)^{B-1}\epsilon(\rho,B-1,B-1,\epsilon=+))=\epsilon_0. \tag{1}$$

pour η' tel que $(-1)^B\eta'=\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+)$; dans ce cas le D et le λ associé a cette représentation vérifie $D=A-2-2inf(B,A-1-B)$. En revenant à la notation t telle que $A-D=2t$, on va avoir $t=1+inf(B,A-B-1)$. Mais on sait a priori que $t\leq B$ (dans le tableau $\mathcal{T}_D$ il y a au plus $2B$ lignes et au moins $2t$ lignes). Ainsi nécessairement $A-B+1<B$. D'où encore $D=A-2-2(A-B-1)=B-(A-B)$ et $D+1=B-(A-B-1)\leq B$ contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. Ces représentations ne nous intéressent donc pas.

Par récurrence, on connaît aussi la structure de $\pi(\psi'',\epsilon'',(\rho,A-2,B-1,\eta))$ pour η véfiant $\eta\epsilon_0=\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+)$; comme ci-dessus, nous n'avons à nous préoccuper que des représentations dites complémentaires dans 4.1. Il s'agit des représentations $\pi_{\eta''}:=\pi(\psi'',\epsilon'',\cup_{C\in[B-1,A-2]}(\rho,C,C,\zeta=+,(-1)^C\eta''))$, où η'' vérifient $\times_{C\in[B-1,A-2]}((-1)^C\eta'')=\eta$. Il faut distinguer suivant les valeurs de η'' possibles :

pour η'' tel que $(-1)^{B-1}\eta''\neq\epsilon(\rho,B-2,B-2,\zeta=+)$ (on suppose ici que $B\geq 2$ et on verra les "petits cas" plus loin) ; dans ce cas $\pi_{\eta''}$ est spontanément de la forme $\pi(D,\lambda)$ mais pour la valeur $D=A-2$ et $\lambda=\epsilon(\rho,0,0,\zeta=+)$. Le problème ici est donc d'éliminer cette représentation avec son analogue trouvée ci-dessus. Déjà elle n'intervient ici que si

$$\prod_{C\in[B-1,A-2]}((-1)^C(-1)^B\epsilon(\rho,B-2,B-2,\zeta=+))=\epsilon_0\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+)$$

On rappelle que $\epsilon(\rho,B-2,B-2,\zeta=+)=-\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+)$ par hypothèse. Cette condition se récrit donc

$$\prod_{C\in[B-1,A-2]}((-1)^C(-1)^{B-1}\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+))=\epsilon_0\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+)$$

ou encore, en changeant l'intervalle du produit :

$$\prod_{C\in[B,A-2]}((-1)^C(-1)^{B-1}\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+))=$$

$$(-1)^{B-1}(-1)^{B-1}\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+)\epsilon_0\epsilon(\rho,B-1,B-1,\zeta=+)=\epsilon_0$$

Ceci est donc exactement la condition (1). La multiplicité avec laquelle elle intervient dans $Jac_{x\in\mathcal{T}_D}\pi(\psi,\epsilon)$ est donc directement 0 si (1) n'est pas satisfait et sinon, il faut se rappeler les signes, cf. ci-dessus et que $D=A-2$,

$$(-1)^{A-B-1}+(-1)^{[(A-B+1)/2]}\eta^{(A-B+1)}\epsilon_0^{A-B}. \tag{2}$$

On remplace dans (1) $\epsilon(\rho, B-1, B-1, \zeta=+)$ par $\eta\epsilon_0$. La condition (1) se récrit

$$(\eta\epsilon_0)^{A-2-B+1} \prod_{C' \in [1,(A-B-1)]} (-1)^{C'} = \epsilon_0$$

ou encore $\eta^{A-B+1}\epsilon_0^{A-B}(-1)^{[A-B]/2} = 1$. Or $(1)^{[(A-B+1)/2]+[(A-B)/2}$ vaut 1 si $A-B$ est pair et -1 si $A-B$ est impair. En d'autres termes cela vaut $(-1)^{A-B}$. La multiplicité cherchée en (2) est donc 0.

Il reste à regarder le cas où η'' est tel que $(-1)^{B-1}\eta'' = \epsilon(\rho, B-2, B-2, \zeta=+)$. Dans ce cas, le D et le λ associé a cette représentation vérifie $D = A-2-2inf(B-1, A-B)$ et λ est déterminé par la valeur de D. C'est-à-dire exactement $\lambda = \epsilon(\rho, 0, 0, \zeta=+)$ si $A-B < B-1$ et l'opposé si $A-B \geq B-1$; il suffit maintenant de remarquer qu'ici $D = A-2inf(B, A-B+1$ et on trouve la contribution d'une des représentations complémentaires de $\pi(\psi, \epsilon)$ (celle qui vérifie $\eta(-1)^B = \epsilon(\rho, B-1, B-1, \zeta=+)$) dont on a déjà prouvé qu'elle intervient avec multiplicité 1 exactement (5.4.1).

Il nous reste à regarder le cas $B=1$; cela se fait comme ci-dessus mais en plus simple car il n'y a qu'un type de représentations complémentaire pour une représentations $\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A', 0, \zeta=+, \epsilon_0'))$ qui correspond à $D = A'$. Cela termine la preuve.

5.4.9 Fin de la preuve de ce cas particulier

Proposition : *sous les hypothèses de ce paragraphe, le théorème 4.1 est vrai.*

Fixons $\tilde{\pi}$ un constituant de $\pi(\psi, \epsilon)$; on note D, λ les nombres qu'on lui a associés en 5.3.4 et 5.4.2.

On a déjà montré que $\tilde{\pi}$ satisfaisait aux propriétés de 4.1 sauf éventuellement si $D+1 \geq B$ et $\tilde{\pi} \simeq \pi_{\mathcal{T}_D, D, \lambda}$. On veut éliminer ce cas sauf si $t = B$ et $\lambda = -\epsilon(\rho, 0, 0, \zeta=+)$ qui est l'une des représentations complémentaires de 4.1. On suppose donc encore que le couple (D, λ) ne vérifie pas cette dernière condition et on a alors démontré que la multiplicité de $\pi_{D,\lambda}$ dans $Jac_{x \in \mathcal{T}_D}\pi(\psi, \epsilon)$ est 0. Il faut en déduire le résultat cherché ; pour cela il suffit de montrer que si $\tilde{\pi}'$ est un consituant irréductible de $\pi(\psi, \epsilon)$ tel que $Jac_{x \in \mathcal{T}_D}\tilde{\pi}'$ contient $\pi_{D,\lambda}$ comme sous-quotient alors $\tilde{\pi}' \simeq \pi_{\mathcal{T}, D, \lambda}$. Fixons donc $\tilde{\pi}'$ comme ci-dessus dont le module de Jacquet contient comme sous-quotient $\otimes_{x \in \mathcal{T}_D}\rho|\,|^x \otimes \pi_{D,\lambda}$. On sait d'après 5.4.4 et 5.4.2 que soit $\tilde{\pi}'$ est un sous-module de

$$< \rho|\,|^B, \cdots, \rho|\,|^{-A} > \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \epsilon_0))) \tag{1}$$

soit $\tilde{\pi}' = \tilde{\pi}_{\mathcal{T}, \delta, \zeta}$, ce que nous voulons. Mais le début de la preuve de (v) du lemme précédent élimine la première possibilité, (1). D'où le corollaire.

5.5 Extension

Ici on étend la preuve ci-dessus au cas où cas très voisin où on suppose :

$(\rho, A, B, \zeta=+, \epsilon_0)$ est l'unique bloc de Jordan vérifiant $A-B > 0$

il existe $C_0 \leq B$ et un signe ϵ tel que $(\rho, C, C, \zeta_C, (-1)^C\epsilon) \in Jord(\psi, \epsilon)$ pour tout $C < C_0$;

on peut toujours supposer $\zeta_C = \zeta$ (cf 2.3) et ce sont donc les hypothèses de 5.3.1.

On fixe encore $\tilde{\pi}$ une composante irréductible de $\pi(\psi, \epsilon)$, on suppose encore que $\zeta = +$ et on montre comme en 5.4.3, que soit

$$Jac_{B, \cdots, -A}\tilde{\pi} \neq 0$$

soit $Jac_{x \in \mathcal{T}}\tilde{\pi} \neq 0$, où

$$\mathcal{T} := \begin{array}{ccc} B & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_0+1 & \cdots & C_0+A-B+1 \end{array}$$

Or, posons $s := B - C_0$; en particulier le tableau ci-dessus a s lignes. On note σ_T la représentation associée par Zelevinsky à l'ensemble des segments qui constiuent les lignes de $\mathcal{T}$. On montre d'abord l'assertion suivante : soit $\tilde{\pi}$ un constituant irréductible de $\pi(\psi, \epsilon)$ tel que $Jac_{x \in \mathcal{T}}\tilde{\pi} \neq 0$; alors $Jac_{x \in \mathcal{T}}\tilde{\pi}$ est irréductible, notons le X. Et $\tilde{\pi}$ est l'unique sous-représentation irréductible de l'induite $\sigma_T \times X$.

On le montre en fixant un sous-quotient irréductible Y de $Jac_{x \in \mathcal{T}}$ tel que $\tilde{\pi}$ soit un sous-module de l'induite $\sigma_T \times Y$; l'existence d'un tel Y est facile par réciprocité de Frobenius et utilisant bien sûr le fait que $Jac_x\tilde{\pi} \neq 0$ avec $|x| \leq A$ nécessite $x = B$. Le point est de montrer que $Jac_yY = 0$ pour tout $y \in [C_0+1, A]$. Or s'il n'en est pas ainsi, il existerait une représentation Y' et une inclusion

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \sigma_T \times \rho|\,|^y \times Y'.$$

Cette inclusion se factorise par un sous-quotient irréductible de $\sigma_T \times \rho|\,|^y$, noté σ'. Mais il résulte des classifications de Zelevinski qu'un tel σ' va avoir la propriété qu'il existe $y' < B$, $y' > 0$ tel que $Jac_{y'}\sigma' \neq 0$. Ceci donne une contradiction $Jac_{y'}\tilde{\pi} \neq 0$. Cela prouve que $Jac_{x\in\mathcal{T}}\sigma_T \times Y = Y$ d'où l'irréductibilité de $Jac_{x\in\mathcal{T}}$ et aussi l'unicité du sous-module irréductible de cette induite.

Cette assertion montre que l'application $Jac_{x\in\mathcal{T}}$ induite une bijection entre l'ensemble des constituants irréductibles de $\pi(\psi,\epsilon)$ tel que ce Jac soit non nul et l'ensemble des sous-quotients irréductibles de $Jac_{x\in\mathcal{T}}\pi(\psi,\epsilon)$.

On calcule facilement $Jac_{x\in\mathcal{T}}\pi(\psi,\epsilon)$ c'est le calcul de 4.4 et on trouve :

$$Jac_{x\in\mathcal{T}}\pi(\psi,\epsilon) = \pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-s,B-s,\zeta=+,\epsilon_0)). \tag{1}$$

Le membre de droite de (1) est précisément le cas que l'on vient de traiter. Ses constituants irréductibles sont donc de 2 types, les X_η appelés termes complémentaires et ceux qui vérifient $Jac_{B-s,\cdots,-A+s} \neq 0$. Soit d'abord $\tilde{\pi}'$ un tel constituant vérifiant $Jac_{B-s,\cdots,-A+s}\tilde{\pi}' \neq 0$; on a déjà vu qu'alors $Jac_{B-s,\cdots,-A+s}\tilde{\pi}$ est un constituant irréductible de $\pi(\psi',\epsilon',A-s-1,B-s+1,\zeta=+,\epsilon_0))$ que l'on note $\tilde{\pi}''$. Soit $\tilde{\pi}$ le constituant de $\pi(\psi,\epsilon)$ qui correspond, c'est -à-dire :

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \sigma_T \times < \rho|\,|^{B-s},\cdots,\rho|\,|^{-A+s} > \times\tilde{\pi}''.$$

On note $\mathcal{T}'$ le tableau $\mathcal{T}$ auquel on a enlevé la première et la dernière colonne et on note $\sigma_{\mathcal{T}'}$ la représentation associée. Alors on a :

$$\sigma_T \hookrightarrow < \rho|\,|^{B},\cdots,\rho|\,|^{B-s+1} > \times\sigma_{T'} \times < \rho|\,|^{A},\cdots,\rho|\,|^{A-s+1} > .$$

On utilise l'isomorphisme :

$$\sigma_{T'} \times < \rho|\,|^{A},\cdots,\rho|\,|^{A-s+1} > \times < \rho|\,|^{B-s},\cdots,\rho|\,|^{-A+s} >$$

$$\simeq < \rho|\,|^{B-s},\cdots,\rho|\,|^{-A+s} > \times\sigma_{T'} \times < \rho|\,|^{A},\cdots,\rho|\,|^{A-s+1} >$$

qui vient des résultats standard de Zelevinsky. On a besoin de l'isomorphisme :

$$< \rho|\,|^{A},\cdots,\rho|\,|^{A-s+1} > \times\tilde{\pi}'' \simeq < \rho|\,|^{-A+s-1},\cdots,\rho|\,|^{-A} > \times\tilde{\pi}'',$$

qui vient du fait que $\tilde{\pi}''$ est un constituant de $\pi(\psi',\epsilon',(\rho,A-s-1,B-s+1,\zeta=+,\epsilon_0)$: $\rho|\,|^x \times \tilde{\pi}''$ est donc irréductible pour tout $x \in [A-s+1,A]$ puisqu'un tel x n'est pas de la forme $C+1$ avec $C \in [A',B']$ où (ρ,A',B',ζ') un bloc de Jordan pour $\psi' \cup (\rho,A-s-A,B-s+1,\zeta=+)$ (cf. 6 que l'on étend facilement à notre cas, en utilisant 4.2 par exemple).

On a encore $\sigma_{\mathcal{T}'} \times < \rho|\,|^{-A+s-1},\cdots,\rho|\,|^{-A} > \simeq < \rho|\,|^{-A+s-1},\cdots,\rho|\,|^{-A} > \times\sigma_{\mathcal{T}'}$. En remettant tous cela ensemble on obtient $Jac_{B,\cdots-A}\tilde{\pi} \neq 0$.

Il ne nous reste donc plus qu'à considérer les termes dits complémentaires qui interviennent dans le terme de droite de (1). Fixons donc η' tel que $\times_{C\in[B-s,A-s]}((-1)^C\eta') = \epsilon_0$ et posons

$$X'_{\eta'} = \pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B-s,A-s]}(\rho,C,C,\zeta=+,(-1)^C\eta')).$$

Et on note $X_{\eta'}$ l'unique représentation irréductible telle que :

$$X_{\eta'} \hookrightarrow \sigma_{\mathcal{T}} \times X'_{\eta'}.$$

Une application directe de 6 montre que $X_{\eta'} = \pi(\psi',\epsilon',\cup_{C\in[B,A]}(\rho,C,C,\zeta=+,(-1)^{C-s}\eta'))$. En posant $\eta = (-1)^s\eta'$ on obtient exactement la représentation complémentaire pour $\pi(\psi,\epsilon)$ correspondant à cet η ; la relation que doit satisfaire η est évidemment satisfaite grâce à celle satisfaite par η'. Cela termine la preuve.

5.6 Réduction

5.6.1 Inversion des socles

Avant de pouvoir faire les réductions, on a besoin du lemme technique ci-dessous. Il emploie les notations suivantes : $[x,y]$ est un segment croissant ou décroissant et $\delta := < \rho|\,|^x,\cdots,\rho|\,|^y >$ est soit un module de Speh soit une série discrète. De même $[x',y']$ est un segment croissant ou décroissant et $\delta' := < \rho'|\,|^{x'},\cdots,\rho'|\,|^{y'} >$. On suppose que $-y \notin [x,y]$ et que $-y' \notin [x',y']$. On suppose aussi $[x,y] \subset [x',y']$ et $x',y' \notin [x,y]$ ce qui ne suppose pas que $[x,y]$ et $[x',y']$ ait la même propriété de croissance.

Soit X une représentation semi-simple et on suppose que pour tout $z \in [x,y]$ et pour tout $z' \in [x',y']$ on ait $Jac_{z,\cdots,y}X = 0$ et $Jac_{z',\cdots,y'}X = 0$. Alors

Lemme : *On a l'égalité des socles :* $< \delta, < \delta', X >>=< \delta', < \delta, X >>$.

Pour démontrer cela, on peut supposer comme nous le ferons que X est irréductible. On remarque que l'induite $\delta \times \delta'$ du GL convenable est irréductible grâce à l'hypothèse $[x, y] \subset [x', y']$. On va démontrer que l'induite $\delta' \times \delta \times X$ a un unique sous-module irréductible ; cela suffira car tout sous-module irréductible de $\delta' \times < \delta, X >$ coïncidera avec ce sous-module qui vaudra donc $< \delta', < \delta, X >>$. Mais $\delta \times \delta' \times X \simeq \delta' \times \delta \times X$. La première induite a donc elle aussi un unique sous-module irréductible, ce sous-module coïncide nécessairement avec $< \delta, < \delta', X >$. D'où l'égalité du lemme. Montrons donc l'unicité. Par réciprocité de Frobenius, il suffit de montrer que

$$Jac_{x', \cdots, y', x, \cdots, y} \delta' \times \delta \times X = X.$$

On vérifie d'abord que $Jac_{x', \cdots, y'} \delta' \times \delta \times X = \delta \times X$. Il est clair que $\delta \times X$ est un constituant du module de Jacquet cherché et si ce n'est pas le seul, il y a un découpage de $[x', y']$ en 3 ensembles $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ordonnés par l'ordre induit du segment tel que $Jac_{z \in E_1} \delta' \neq 0$, $Jac_{z \in E_2} (\delta')^* \neq 0$ et $Jac_{z \in E_3} \delta \times X \neq 0$. Or y' ne peut être ni dans E_2 ni dans E_3 d'après les hypothèses faites. Donc $y' \in E_1$. Mais la non nullité de $Jac_{z \in E_1} \delta'$ avec $y' \in E_1$ force $E_1 = [x', y']$. Il ne reste plus qu'à calculer $Jac_{x, \cdots, y} \delta \times X$, ce qui se fait de façon totalement analogue pour trouver X. Cela termine la preuve.

5.6.2 Un résultat technique

Soit Y' une représentation irréductible de $G(n')$, c'est-à-dire d'un groupe de même type que G et de rang n'. On fixe ρ et des demi-entiers a, b, a', b'. On suppose que $a - b$ et $a' - b'$ sont des entiers relatifs et on pose $\delta :=< \rho| \,|^a, \cdots, \rho| \,|^b >$ et $\delta' :=< \rho| \,|^{a'}, \cdots, \rho| \,|^{b'} >$. On a en vue un résultat du genre : soit Y un sous-module irréductible de $\delta' \times Y'$, alors il existe une bijection (naturelle) entre les sous-quotients irréductibles de $\delta \times Y$ et les sous-quotients irréductibles de $\delta \times Y'$; la bijection étant donnée par $Jac_{a', \cdots, b'}$. Un tel résultat est tout à fait faux en général, la condition minimum pour qu'il puisse être vrai est que les induites dans $GL(d_\rho(a + a' - b - b' + 2))$, $\delta \times \delta'$ et $\delta \times (\delta')^*$) sont irréductibles. Nous ferons donc cette hypothèse dans tout ce paragraphe et nous ferons aussi comme hypothèse dans tout ce paragraphe que pour tout $x \in [a', b']$, $Jac_{x, \cdots, b'} Y' = 0$ et que soit $\{a, -b\} \cap [a', b'] = \emptyset$ soit $\{b', -b'\} \cap [a, b] = \emptyset$.

5.6.3 Calcul élémentaire

On va constamment utiliser de proche en proche le calcul élémentaire suivant : soit X une représentation (non nécessairement irréductible) de G et soit α, β des demi-entiers tels que $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$. Soit encore y un demi-entier. Alors $Jac_y(< \rho| \,|^\alpha, \cdots, \rho| \,|^\beta > \times X)$ est, dans le groupe de Grothendieck, la somme d'au plus 3 représentations :

$< \rho| \,|^{\alpha + \zeta 1}, \cdots, \rho| \,|^\beta > \times X$ si $\alpha = y$ et alors ζ est le signe de $\alpha - \beta$

$< \rho| \,|^\alpha, \cdots, \rho| \,|^{\beta - \zeta 1} \times X$ si $-\beta = y$ et ζ est alors comme ci-dessus

$< \rho| \,|^\alpha, \cdots, \rho| \,|^\beta > \times Jac_y X$.

5.6.4 Conséquences des hypothèses

Montrons tout de suite la conséquence des hypothèses faites ci-dessus :

pour tout $x \in [a', b']$, $Jac_{x, \cdots, b'} (\delta \times Y') = 0$.

Supposons d'abord que $\{a, -b\} \cap [a', b'] = \emptyset$ alors $Jac_{x, \cdots, b'} (\delta \times Y') \simeq \delta \times Jac_{x, \cdots, b'} Y'$ d'après 5.6.3, de proche en proche seul le 3e cas est possible.

Sous l'autre hypothèse, $\{b', -b'\} \cap [a, b] = \emptyset$, on n'a pas l'isomorphisme précédent mais $Jac_{x, \cdots, b'} (\delta \times Y') \neq 0$ nécessite qu'il existe un sous-ensemble $E \subset [x, b']$ (qui peut a priori être vide) tel que $Jac_{x' \in E} Y' \neq 0$, et une décomposition de $[x, b'] - E$ en deux sous-ensembles E_+ et E_- tels que $Jac_{x_+ \in E_+} \delta \neq 0$ et $Jac_{x_- \in E_-} \delta^* \neq 0$. Cela entraîne déjà que E_+ est de la forme $[a, a_1]$ et que E_- est de la forme $[-b, b_1]$. Comme par hypothèse ni b' ni $-b'$ ne sont dans $[a, b]$, E contient b' ce qui est impossible par hypothèse et prouve l'assertion

Montrons encore :

si $-b' \notin [a', b']$, $Jac_{a', \cdots, b'} (\delta \times \delta' \times Y') = \delta \times Y'$

si $-b' \in [a', b']$ mais $[a', -b'[\cap \{a, -b\} = \emptyset$ et $\forall y \in [a', -b'[$, $Jac_y Y' = 0$; alors $Jac_{a', \cdots, b'} (\delta \times \delta' \times Y'$ est exactement la somme de 2 copies de $\delta \times Y'$.

On raisonne comme dans le 2e cas ci-dessus en remarquant que $\delta \times \delta' \times Y' \simeq \delta' \times \delta \times Y'$: le calcul du module de Jacquet se fait en considérant les découpages de $[a', b']$ en 3 sous-ensembles, F_+, F_-, F tels que $Jac_{y_+ \in F_+} \delta' \neq 0$, $Jac_{y_- \in F_-} (\delta')^* \neq 0$ et $Jac_{y \in F} \delta \times Y' \neq 0$. Ainsi F_+ est de la forme $[a', a_1]$, F_- est de la forme $[-b', b_1]$ et F est le complémentaire. Supposons d'abord que $-b' \notin [a', b']$. Dans ce cas F_- est vide et F est un segment d'extrêmité b' ou est vide. Or on sait que si F est non vide $Jac_{x \in F} (\delta \times Y') = 0$. Donc F est aussi vide et il n'y a qu'un choix de découpage. D'où le résultat.

On suppose maintenant que $-b' \in [a', b']$; alors donc F vaut $(]a_1, -b'[\cup]b_1, b'[)$. D'abord on montre que dans le découpage ci-dessus, si F_- est non vide, nécessairement $b_1 = b'$. En effet, $Jac_{x\in]a_1,-b'[\cup]b_1,b']}X \simeq Jac_{x\in]b_1,b']\cup]a_1,-b'[}X$, pour toute représentation X, l'isomorphisme venant de ce que pour tout élément x_1 de $]b_1, b']$ et tout élément x_2 de $]a_1, -b'[$, $x_1 \neq x_2 \pm 1$. Ainsi, il faut en particulier $Jac_{x\in]b_1,b']}(\delta \times Y') \neq 0$ ce qui entraîne que $b_1 = b'$ si F_- est non vide. Continuons de supposer que F_- est non vide et montrons que $]a_1, -b'[$ est vide. Notons y le premier élément de cet intervalle s'il est non vide ; on doit avoir $Jac_y(\delta \times Y') \neq 0$. On a énumérer les situation où cela pouvait se produire et les hypothèses ont été mises pour précisément éliminer ces cas. Ainsi, il y a au plus un découpage possible avec $F_- \neq \emptyset$. Ce découpage fonctionne d'ailleurs très bien. Il n'y a aussi qu'un découpage avec $F_- = \emptyset$, c'est celui où $F_+ = [a', b']$ (sinon il faudrait $Jac_{y\in]a_1,b']}(\delta \times Y') \neq 0$). Ensuite le résultat cherché s'en déduit.

On suppose ici que $-b' \notin [a', b']$. Comme cas particulier (où $[a, b]$ est vide) de ce que l'on a vu ci-dessus, on sait que $Jac_{x\in[a',b']}\delta' \times Y' \simeq Y'$ est irréductible. En particulier l'induite $\delta' \times Y'$ a un unique sous-module irréductible, que l'on note Y et Y intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient de cette induite.

5.6.5 Enoncé du résultat technique et démonstration

Lemme : *On fixe a, b, a', b' comme ci-dessus en supposant que $-b' \notin [a', b']$ et soient Y', Y comme ci-dessus L'application qui à un sous-quotient irréductible θ de $\delta \times Y$ associe $Jac_{a',\cdots,b'}\theta$ définit une bijection de l'ensemble des sous-quotients irréductibles de $\delta \times Y$ dans l'ensemble des sous-quotients irréductibles de $\delta \times Y'$.*

D'abord on considère les morphismes d'entrelacement (standard) entre induites dépendant d'un paramètre $s \in \mathbb{C}$,

$$M(s) : (\delta')^*|\,|^s \times \delta \times Y' \to \delta'|\,|^{-s} \times \delta \times Y';$$

$$M'(s) : (\delta')^*|\,|^s \times Y' \to \delta'|\,|^{-s} \times Y'.$$

On normalise $M'(s)$ de sorte que l'opérateur normalisé, $N'(s)$, soit holomorphe non nul en $s = 0$. A ce moment là, en utilisant les normalisations de Langlands pour les groupes linéaires, on normalise $M(s)$ de façon à ce que $M(s)$ s'écrive comme composé de l'opérateur, $N_{(\delta')^*\times\delta}(s)$ qui échange $(\delta')^*|\,|^s \times \delta$ en $\delta \times (\delta')^*|\,|^s$ puis $N'(s)$ puis l'opérateur $N_{\delta\times\delta'}(-s)$ qui échange $\delta \times \delta'|\,|^{-s}$ en $\delta'|\,|^{-s} \times \delta$. Les opérateurs dans les groupes linéaires sont holomorphes en $s = 0$ et bijectifs grâce à l'hypothèse d'irréductibilité faite.

On vérifie que $(\delta')^* \times Y'$ a Y pour unique quotient irréductible car ces quotients irréductibles sont les sous-modules irréductibles de l'induite $\delta' \times Y'$ (on utilise le fait que la représentation duale d'une représentation irréductible d'un groupe classique tel que considéré ici est la représentation de départ tordue éventuellement par un automorphisme extérieur venant du groupe des similitudes). De plus comme $Jac_{a',\cdots,b'}\delta' \times Y'$ est irréductible, Y intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient dans cette induite. La non nullité de $M'(0)$ entraîne alors que son image est exactement Y. Ainsi $N(s)$ est défini en $s = 0$ et a une image qui est isomorphe à $\delta \times Y$. On note $N(0)$ l'opérateur ainsi défini ; on n'a pas le choix $N(s)$ est le produit de l'opérateur d'entrelacement standard par une fonction méromorphe de s. On filtre $\delta \times Y'$ par des sous-représentations V_i pour i parcourant un intervalle de $\mathbb{N}$, filtration croissante de tel sorte que les sous-quotients soient irréductibles. Ainsi, pour tout i, $N(0)$ induit une application de $(\delta')^* \times V_i$ dans $\delta' \times V_i$ et par passage au quotient, si l'on note θ_i le sous-quotient irréductible de cette filtration au cran i, une application de $(\delta')^* \times \theta_i$ dans $\delta' \times \theta_i$. On vérifie que $\delta' \times \theta_i$ a un unique sous-module irréductible et qu'il intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient de l'induite : en effet, puisque θ_i est un sous-quotient de $\delta \times Y'$, pour tout $x \in [a', b']$, $Jac_{x,\cdots,b'}\theta_i$ est un sous-quotient de $Jac_{x,\cdots,b'}(\delta \times Y)$ et vaut donc 0. Comme ici, $-b' \notin [a', b']$, cela entraîne que $Jac_{a',\cdots,b'}(\delta' \times \theta_i) = \theta_i$. D'où les assertions et cela entraîne aussi que $\tilde{\theta}_i$ est l'unique quotient irréductible de $(\delta')^* \times \theta_i$. Ainsi l'image de $N(0)(\delta')^* \times \theta_i$ est soit 0 soit l'unique sous-module irréductible de $\delta' \times \theta_i$ que nous noterons $\tilde{\theta}_i$. Ainsi l'image de l'application de départ $N(0)$, admet une filtration dont les sous-quotients sont certains des $\tilde{\theta}_i$ précédemment définis. Comme on sait, a priori, que l'image est isomorphe à $\delta \times Y$, tous les $\tilde{\theta}_i$ doivent intervenir (il suffit par exemple de comparer les modules de Jacquet $Jac_{a',\cdots,b'}$). La bijection du lemme est l'inverse de l'application $\theta_i \mapsto \tilde{\theta}_i$. Cela termine la preuve du lemme.

5.6.6 Première réduction

On suppose ici que $Jord(\psi)$ contient 2 quadruplets (ρ, A, B, ζ) et (ρ', A', B', ζ'). Dans cette partie on démontre 4.1 par récurrence sous cette hypothèse. C'est le cas où $\rho' = \rho$ qui est le plus difficile et pour éviter les fautes de frappe, on suppose donc que $\rho' = \rho$. Il n'y a aucune difficulté dans la démonstration qui va suivre, uniquement un problème de notations. On reprend d'abord les notations, pour $C' \in]B', A']$, où $\epsilon'_0 = \epsilon(\rho, A', B', \zeta)$

$$\delta_{C'} :=< \rho|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta' C'} > .$$

On note ψ'', ϵ'' le couple qui se déduit de ψ, ϵ en enlevant à la fois $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0$ et $(\rho, A', B', \zeta', \epsilon'_0$. On remarque que l'hypothèse que $\psi \circ \Delta$ est discret assure que si $A > A'$ alors $[B', -A'] \subset [-B, B]$ alors que si $A' > A$ l'inverse se produit, $[B, -A] \subset [-B', B']$. On pose $\delta =< \rho| \,|^{\zeta B}, \cdots, \rho| \,|^{-\zeta A} >$ et pour C' comme ci-dessus :

$$\delta'_{C'} :=< \rho| \,|^{\zeta'(C'+1)}, \cdots, \rho| \,|^{\zeta' A'}.$$

On sait grâce à 4.4 que l'on peut appliquer par récurrence que l'on a :

$$Jac_{\zeta'(B'+2),\cdots\zeta' C'}\pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B, \zeta, \zeta_0), (\rho, A', B'+2, \zeta', \epsilon'_0)) =$$
$$< \delta'_{C'}, \pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0), (\rho, A'-1, B'+1, \zeta', \epsilon'_0)). \tag{1}$$

La preuve, dans son esprit, est simple : on utilise (ρ, A', B', ζ') pour donner la définition de $\pi(\psi, \epsilon)$; cette définition fait intervenir des $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ pour les quels (ρ, A, B, ζ) est un bloc de Jordan ; on applique alors 4.1 par récurrence à ces représentations. Puis ensuite on "fait commuter" pour revenir en arrière. Précisément :

$$\pi(\psi, \epsilon) = \oplus_{C' \in]B', A']}(-1)^{A'-C'}\delta_{C'} \times < \delta'_{C'}, \pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0), (\rho, A'-1, B'+1, \zeta', \epsilon'_0))$$

$$\oplus_{\eta'=\pm}(-1)^{[(A'-B'+1)/2]}(\eta')^{A'-B'+1}(\epsilon'_0)^{A'-B'}\pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0), (\rho, A', B'+1, \zeta', \eta'), (\rho, B', B', \zeta', \eta'\epsilon'_0)).$$

On applique donc 4.1 par récurrence en utilisant (ρ, A, B, ζ) et $\pi(\psi, \epsilon)$ est donc la somme des termes suivants :

$$\oplus_{C' \in]B', A']}(-1)^{A'-C'}\delta_{C'} \times < \delta'_{C'}, < \delta, \pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0)(\rho, A'-1, B'+1, \zeta', \epsilon'_0)) >> \tag{2}$$

$$\oplus_{C' \in]B', A']; \eta=\pm}(-1)^{A'-C'}\delta_{C'} \times < \delta'_{C'}, \pi(\psi'', \epsilon'', \cup_{C \in [B,A]}(\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\eta), (\rho, A'-1, B'+1, \zeta', \epsilon'_0)) > \tag{3}$$

$$\oplus_{\eta'=\pm}(-1)^{[(A'-B'+1)/2]}(\eta')^{A'-B'+1}(\epsilon'_0)^{A'-B'}$$
$$< \delta, \pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0), (\rho, A', B'+1, \zeta', \eta'), (\rho, B', B', \zeta', \eta'\epsilon'_0)) > \tag{4}$$

$$\oplus_{\eta'=\pm, \eta=\pm}(-1)^{[(A'-B'+1)/2]}(\eta')^{A'-B'+1}(\epsilon'_0)^{A'-B'}$$
$$\pi(\psi'', \epsilon'', \cup_{C \in [B,A]}(\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\eta), (\rho, A', B'+1, \zeta', \eta'), (\rho, B', B', \zeta', \eta'\epsilon'_0)). \tag{5}$$

Les termes (3) et (5) donnent immédiatement :

$$\oplus_{\eta=\pm}\pi(\psi'', \epsilon'', \cup_{C \in [B,A]}(\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\eta), (\rho, A', B', \zeta', \epsilon'_0)).$$

Le point est donc de montrer que dans (2) et (4) on peut faire sortir $< \delta, ?$. On montre que pour $C' \in]B', A']$:

$$< \delta'_{C'}, < \delta, \pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0), (\rho, A'-1, B'+1, \zeta', \epsilon'_0)) >>=$$
$$< \delta, < \delta'_{C'}, \pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0), (\rho, A'-1, B'+1, \zeta', \epsilon'_0)) >> .$$

Cela résulte de 5.6.1 en tenant compte du fait que les hypothèses de ce lemme sont satisfaites, pour l'inclusion entre les segments, on l'a dit ci-dessus et pour la nullité des modules de Jacquet, on l'a prouvé en 3.4. On pose :

$$Y_{C'} :=< \delta'_{C'}, \pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0), (\rho, A'-1, B'+1, \zeta', \epsilon'_0)) > .$$

On veut encore que l'ensemble des sous-quotients irréductibles de $\delta_{C'} \times < \delta, Y_{C'} >$ coïncide avec l'ensemble des sous-quotient de la forme $< \delta, Z >$, où Z est un sous-quotient irréductible de $\delta_{C'} \times Y_{C'}$. C'est l'objet du lemme technique 5.6.5 dont la démonstration est reportée à la fin du papier ; le couple δ, δ' de loc.cite est ici le couple $\delta_{C'}, \delta$, donc le segment $[a, b]$ de loc.cite est ici $[\zeta' B', -\zeta' C']$, le segment $[a', b']$ de loc.cite est ici $[\zeta B, -\zeta A]$ et Y' de loc.cite est $Y_{C'}$. La nullité de $Jac_{x,\cdots,-\zeta A}Y_{C'}$ pour tout $x \in [\zeta B, -\zeta A]$ résulte immédiatement de 3.4 ; les autres hypothèses sur les segments et leurs extrémités sont immédiates à vérifier.

En regroupant maintenant (2) et (4), on obtient directement

$$< \delta, \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0), (\rho, A', B', \zeta', \epsilon'_0) > .$$

Ceci termine la preuve.

5.7 deuxième réduction

On suppose donc maintenant que pour tout $(\rho', A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$, $A' = B4$ sauf pour un quadruplet, encore noté (ρ, A, B, ζ).

Ici on suppose qu'il existe un tel C' tel que $(\rho, C', C', \zeta', \epsilon'_0) \in Jord(\psi, \epsilon)$ pour des signes convenables mais que $C' \geq 1$ et $(\rho, C'-1, C'-1) \notin Jord(\psi \circ \Delta)$.

On note $\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}$ l'analogue de ψ, ϵ quand on remplace C' en $C'-1$ sans changer ζ', ϵ'. Pour $C \in]B, A]$, on reprend la notation X_C et pour $\eta = \pm$ la notation X_η de 5.1.

On vérifie alors aisément en utilisant 5.6.5 que $Jac_{\zeta' C'}$ induit une bijection entre l'ensemble des sous-quotients irréductibles de X_C pour tout $C \in]B, A]$ et l'ensemble analogue quand on remplace ψ, ϵ par $\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}$. Ceci est aussi vrai pour les représentations X_η avec $\eta = \pm$ intervenant dans la définition de $\pi(\psi, \epsilon)$. Ainsi on vérifie que

$$\pi(\psi, \epsilon) =< \rho|\,|^{\zeta' C'}, \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}) >,$$

donc en particulier $\pi(\psi, \epsilon)$ est une somme de représentations irréductibles. On applique 4.1 à $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ (ici encore $\epsilon_0 = \epsilon(\rho, A, B, \zeta)$ et $\delta =< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} >$ d'où $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}) =$

$$< \delta, \pi(\tilde{\psi}', \tilde{\epsilon}', (\rho, A-1, B+1, \epsilon_0)) \tag{1}$$

$$\oplus_{\eta=\pm} \pi(\tilde{\psi}', \tilde{\epsilon}', \cup_{C \in [A,B]} (\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\eta)). \tag{2}$$

Pour conclure on utilise l'échange des socles (5.6.1) appliqué à δ comme ci-dessus et $\delta' = \rho|\,|^{\zeta' C'}$. On obtient donc

$$(1) =< \delta, < \rho|\,|^{\zeta' C'}, \pi(\tilde{\psi}', \tilde{\epsilon}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0) >>$$

Mais $< \rho|\,|^{\zeta' C'}, \pi(\tilde{\psi}', \tilde{\epsilon}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0) >= \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0))$. De même :

$$< \rho|\,|^{\zeta' C'}, \pi(\tilde{\psi}', \tilde{\epsilon}', \cup_{C \in [A,B]} (\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\eta)) >= \pi(\psi', \epsilon', \cup_{C \in [A,B]} (\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\eta))$$

pour tout $\eta = \pm$ possible. D'où 4.1 sous ces hypothèses.

5.8 Troisième réduction

Il nous reste donc à voir le cas où $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0)$ est l'unique élément de $Jord(\psi, \epsilon)$ tel que $A > B$ et où pour tout demi-entier $C' \in [1, B-1]$, si $(\rho, C', C', \zeta') \in Jord(\psi)$, alors il existe un signe ζ'' tel que $(\rho, C'-1, C'-1, \zeta'') \in Jord(\psi)$. On a réglé en 5.4 où ϵ alterne sur tous ces blocs de Jordan. On a donc à régler le cas où il existe C' tel que $(\rho, C', C', \zeta') \in Jord(\psi)$ et $(\rho, C'-1, C'-1, \zeta'') \in Jord(\psi)$, le caractère ϵ prenant la même valeur sur ces 2 blocs. En fixant C' minimal avec cette propriété; on peut imposer que $\zeta'' = \zeta'$ car la définition de $\pi(\psi, \epsilon)$ ne dépend pas de ζ'' car le signe est alterné sur les blocs plus petit ou egaux à $C'-1$ en commençant par -1 si C' est un demi-entier non entier. On fixe donc C', ζ', ϵ'_0 la valeur de ϵ sur (ρ, C', C', ζ'). On va ramener ce cas à un dernier cas qui sera traité dans le paragraphe suivant.

On pose $\pi_\pm(\psi, \epsilon) := \pi(\psi, \epsilon) \oplus \pi(\psi, \epsilon_-)$ où (ψ, ϵ_-) se déduit de ψ, ϵ en changeant simplement ϵ sur les 2 blocs (ρ, C', C', ζ') et $(\rho, C'-1, C'-1, \zeta')$ en son opposé. On note $\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}$ le couple qui se déduit de ψ, ϵ en enlevant les 2 blocs (ρ, C', C', ζ') et $(\rho, C'-1, C'-1, \zeta')$. On revient à la définition de $\pi(\psi, \epsilon)$ et $\pi(\psi, \epsilon_-)$. On pose ici $\tilde{\delta} :=< \rho|\,|^{\zeta' C'}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta'(C'-1)} >$.

Et on montre en utilisant 6 et 5.6.5 que $\pi_\pm(\psi, \epsilon)$ est l'ensemble des constitutants de $\tilde{\delta} times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ vérifiant $Jac_{\rho|\,|^{\zeta' C'}} \neq 0$.

On applique 4.1 par récurrence à $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ d'où, en posant $\delta :=< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots \rho|\,|^{-\zeta A} >$:

$$\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}) =< \delta, \pi(\tilde{\psi}', \tilde{\epsilon}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0)) > \oplus_{\eta=\pm} \pi(\tilde{\psi}', \tilde{\epsilon}', \cup_{C \in [A,B]} (\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\eta)).$$

On applique encore 5.6.5 en prenant pour le couple (δ, δ') de loc. cite $(\tilde{\delta}, \delta)$ et cela nous donne une bijection entre les sous-quotients irréductibles de $\tilde{\delta} \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ et ceux de $\tilde{\delta} \times \pi(\tilde{\psi}', \tilde{\epsilon}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0))$ cette bijection étant donnée par $< \delta, ? >$. Cette bijection est compatible à l'opération $Jac_{\zeta' C'}$. On en déduit alors avec des notations que l'on espère évidente que :

$$\pi_\pm(\psi, \epsilon) =< \delta, \pi_\pm(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0) > \tag{1}$$

$$\oplus_\eta \pi_\pm(\psi', \epsilon', \cup_{C \in [B,A]} (\rho, C, C, \zeta, (-1)^{[C]}\eta)). \tag{2}$$

Il faut revenir de $\pi_\pm(\psi, \epsilon)$ à $\pi(\psi, \epsilon)$, c'est-à-dire qu'il faut d'abord démontrer qu'il n'y a pas de simplification entre les composants irréductibles de $\pi(\psi, \epsilon)$ et ceux de $\pi(\psi, \epsilon_-)$ et ensuite il faut séparer les composants

respectifs de façon compatible à (1) et (2) ci-dessus. On peut le faire en utilisant les modules de Jacquet dans les 2 cas que l'on va détailler ci-dessous et il restera un cas à traiter par d'autres méthodes.

On suppose ici que $C' \geq 3/2$. Alors le caractère ϵ_- vérifie

$$\epsilon_-(\rho, C'-2, C'-2, \zeta') = \epsilon(\rho, C'-2, C'-2, \zeta') = -\epsilon(\rho, C'-1, C'-1, \zeta') = \epsilon_-(\rho, C'-1, C'-1, \zeta').$$

On applique 5.6.5 aux couples $(\delta =< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} >, \delta' = \rho|\,|^{\zeta'(C'-1)})$, pour tout $C \in]B, C]$ fixé et à la représentation

$$Y = Jac_{\zeta'(B+1),\cdots,\zeta C}\pi(\psi', \epsilon'_-, (\rho, A-1, B+1, \zeta, \epsilon_0)), Y' = Jac_{\zeta'(C'-1)}Y.$$

Et on montre ainsi que tous les constituants irréductibles de $\pi(\psi, \epsilon_-)$ vérifient $Jac_{\zeta'(C'-1)} \neq 0$. Par contre on a directement que tous les constituants irréductibles de $\pi(\psi, \epsilon)$ vérifient $Jac_{\zeta'(C'-1)} = 0$ (c'est vrai pour tous les termes de la définitions de $\pi(\psi, \epsilon)$. Ainsi $Jac_{\zeta'(C'-1)}$ permet de faire la séparation annoncée.

Supposons maintenant que $C' \leq 1$, c'est-à-dire $C' = 1$. On peut encore utiliser les modules de Jacquet si $(\rho, 2, 2, \zeta'') \in Jord(\psi)$ avec ζ'' un signe convenable ; en effet si $\zeta'' = \zeta'$, on utilise $Jac_{\zeta'2}$ tandis que si $\zeta'' = -\zeta'$, on utilise $Jac_{-\zeta'2,-\zeta'1}$, c'est-à-dire que dans la démonstration ci-dessus, on remplace $\zeta'(C'-1)$ soit par $\zeta'(C'+1)$ soit par $-\zeta'(C'+1), -\zeta'C'$.

5.8.1 Dernier cas

Il reste exactement un cas qui n'est pas réglé par les réductions précédentes : $(\rho, A, B, \zeta, \epsilon_0)$ est l'unique élément de $Jord(\psi)$ vérifiant $A > B$ de plus $B > 1$ et pour tout $C < B$ et tout signe ζ_C, $(\rho, C, C, \zeta_C) \notin Jord(\psi)$ sauf exactement si $C = 0$ et $C = 1$ (pour un bon choix de ζ_C. On peut alors prendre $\zeta_0 = \zeta_1 =: \zeta'$. Et ϵ prend la même valeur sur (ρ, C, C, ζ') pour $C = 0, 1$ et on note ϵ'_0 cette valeur.

La méthode est ici du même ordre que dans 5.4 mais il y a quelques petits changements ! On fixe $\tilde{\pi}$ un constituant irréductible de $\pi(\psi, \epsilon)$.

Pour D un entier avec $D \leq A$ et pour λ un signe, on reprend la notation $\tilde{\psi}_D, \tilde{\epsilon}_{D,\lambda}$ de loc. cite.

Lemme : *(i) Il existe δ et ζ ainsi qu'un ensemble totalement ordonné, $\mathcal{E}$ d'entiers tous de valeur absolue inférieure ou égale à A tels que :*

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}_D, \tilde{\epsilon}_{D,\lambda}). \tag{1}$$

(ii)Soit $\mathcal{E}$ comme en (i) et supposons que cet ensemble contient $-\zeta A$. Alors $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\tilde{\pi} \neq 0$.

Pour (i) on applique d'abord 5.3.3 d'où t_1 et un signe λ_1 ; ensuite comme ϵ prend la même valeur sur $(\rho, 0, 0, \zeta')$ et $(\rho, 1, 1, \zeta')$, on peut enlever ces 2 blocs ; on se retrouve avec une représentation élémentaire mais dont les premiers blocs sont $\cup_{C\in[B,A-2t_1]}(\rho, C, C, \zeta, (-1)^C\lambda_1)$. On peut encore appliquer 6 pour passer de $\cup_{C\in[B,A-2t_1]}$ à $\cup_C \in [0, A-2t_1-B]$. C'est-à-dire que $D = A-2t_1-B$ convient avec $\lambda = (-1)^B\lambda_1$.

On remplace ensuite sous-quotient en sous-module (quitte à changer les signes et l'ordre des éléments de $\mathcal{E}$ en utilisant 6 (propriété 4).

Pour (ii), l'hypothèse assure qu'il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que $[x_0, -\zeta A]$ soit un segment et $Jac_{x_0,\cdots,-\zeta A}\tilde{\pi} \neq 0$ (cf 1.2). Ici x_0 vaut soit ζB et (ii) est démontré soit $x_0 = \zeta'1$. Supposons donc que $x_0 = \zeta'1$; pour $C \in]B, A]$, on calcul $Jac_{\zeta'1,\cdots,-\zeta A}X_C$ où :

$$X_C =< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta C}\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)).$$

On note ψ'', ϵ'' le couple qui se déduit de ψ', ϵ' en enlevant les 2 blocs $(\rho, C, C, \zeta', \epsilon'_0)$ pour $C = 0, 1$ et on a une inclusion (cf. 6 et par exemple 4.2 que l'on peut utiliser par récurrence pour l'étendre au cas non élémentaire)

$$\pi(\psi', \epsilon', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) \hookrightarrow < \rho|\,|^{\zeta'1}, \rho > \times \pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)).$$

D'où $X_C \hookrightarrow < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times < \rho|\,|^{\zeta'1}, \rho > \times Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta C}\pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))$. On calcule $Jac_{\zeta'1,\cdots,-\zeta A}$ de l'induite ci-dessus. On obtient :

si $\zeta' = -\zeta$, $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times \rho \times Jac_{-\zeta 2,\cdots,-\zeta A}Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta C}\pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))$.

si $\zeta' = \zeta$, $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times Jac_{-\zeta 1,\cdots,-\zeta A}Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta C}\pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0))$.

Mais une non nullité de ces termes force, $Jac_{-\zeta y}Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta C}\pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) \neq 0$ pour $y = 2$ ou 1 d'où encore $Jac_{-\zeta y}\pi(\psi'', \epsilon'', (\rho, A, B+2, \zeta, \epsilon_0)) \neq 0$ ce qui est impossible car $-\zeta y \neq \zeta(B+2)$. Cela termine la preuve du lemme.

Soit $\mathcal{E}, D, \lambda$ satisfaisant au (1) du lemme précédent. Quitte à réordonner $\mathcal{E}$, on écrit $\mathcal{E}$ comme union de segments croissants avec les propriétés de 5.4.3 et en notant $\sigma_{\mathcal{E}}$ la représentation associée par Zelevinski à cette union, (1) devient une inclusion :

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \sigma_{\mathcal{E}} \times \pi(\psi_D, \epsilon_{D,\lambda}). \tag{2}$$

Ecrivons donc $\mathcal{E}$ sous la forme $\cup_{i\in[1,v]}[x_i, y_i]$ où v est un entier convenable ; les segment sont par hypothèse croissants si $\zeta = +$ et décroissant si $\zeta = -$. Pour fixer les idées, on va donc supposer que $\zeta = +$. On impose alors, comme on en a le droit que $x_1 \geq \cdots \geq x_v$. On peut reprendre les arguments de 5.4.3 ; s'il existe $i \in [1, v]$ tel que pour tout $j < i$, $x_j \neq x_i - 1$, alors $Jac_{x_i}\tilde{\pi} \neq 0$. Mais ici cela prouve uniquement que pour un tel i, $x_i = B$ ou $x_i = \zeta' 1$. Ceci s'applique évidemment pour x_1.

Supposons que $\mathcal{E}$ comme ci-dessus a aussi la propriété d'avoir un nombre d'éléments positifs minimal et qu'il ne contient pas $-A$. On va trouver les formes particulières que peuvent avoir $\mathcal{E}$. On doit encore avoir $\mathcal{E} \cup -\mathcal{E} \cup_{x\in[0,D]} [-x, x] = \cup_{x\in[B,A]}[-x, x] \cup [-1, 1] \cup \{0\}$. Ceci se récrit

$$\mathcal{E} \cup -\mathcal{E} = \cup_{x\in[D+1,A]}[-x, x] - \cup_{x\in]1,B[}[-x, x].$$

On montre comme en **** que sous ces hypothèses, pour tout $i \in [1, v]$ tel que $y_i > 0$ alors il existe $j > i$ avec $y_j = y_i - 1$ sauf éventuellement pour la plus petite valeur de $y_i > 0$ qui est nécessairement alors $D + 1$.

De plus, on a avec la notation t_1 de 5.3.3,

$$A - D = 2t_1 + B. \tag{**}$$

Premier cas : supposons que $x_1 = \zeta' 1$; alors pour tout $i \geq 1$, $x_i \neq B$. Comme on a $Jac_{x_1,x_1}\tilde{\pi} = 0$ grâce à 5.2, on a d'après ce qui précède pour tout $i \in [1, v[$, $x_i = x_{i+1} + 1$. Comme dans 5.4.3, on vérifie alors que nécessairement $y_1 \geq \cdots \geq y_v$. On récrit $\mathcal{E}$ sous forme de tableau comme en loc.cite ; toutefois ici le nombre de colonnes est ici $A - \zeta' 1 + 1$. On note w le nombre de colonnes et on réutilise la notation $z_1, \cdots, z_w$ pour les éléments en bout de chaque colonne.

Si $\zeta' = -$, la première colonne est $[-1, z_1]$ la deuxième $[0, z_2]$ et les autres de la forme $[a, z_{a+2}]$ avec $a \in [1, A]$ et l'égalité sur $\mathcal{E} \cup -\mathcal{E}$ devient :

$$[1, A] \cup_{i\in[1,w];z_i\leq 0} \{-z_i\} \cup]1, B[= [D + 1, A] \cup_{i\in[1,w];z_i>0} \{z_i - 1\}.$$

D'après ce que l'on a vu $\cup_{i\in[1,w];z_i>0}\{z_i - 1\}$ est un intervalle éventuellement vide (c'est clair si on écrit $\mathcal{E}$ sous forme de tableau) dont la plus grande extrémité ne peut être que D. Cela prouve que l'ensemble de droite n'a pas de multiplicité.'Comme $z_1 \in [-1, -A[$ l'ensemble de gauche a de la multiplicité, ce qui donne une contradiction.

Si $\zeta' = +$, cela se traduit par :

$$[1, A] \cup_{i\in[1,w];z_i\leq 0} \{-z_i\} \cup]1, B[= [D + 1, A] \cup_{i\in[1,w];z_i>0} \{z_i - 1\}.$$

L'argument donné ci-dessus est toujours valable pour savoir qu'il n'y a pas de multiplicité dans l'ensemble de droite. Ainsi $B = 2$ et $\cup_{i\in[1,w];z_i\geq 0}\{-z_i\}$ a au plus 1 terme $\{0\}$. Donc le nombre de lignes du tableau est au plus 2 ; or d'après (**) il est d'au moins 2 lignes, c'est à dire que le tableau a exactement 2 lignes et que $t_1 = 0$ puisque $B = 2$. On conclut alors que $\tilde{\pi}$ est nécessairement l'une des représentations complémentaires de 4.1.

Deuxième cas, $x_1 = B$: supposons d'abord que $B > 2$. La première ligne de $\mathcal{E}$ est $[B, A]$ et on peut calculer le Jac suivant cette ligne ; c'est un calcul qui a été fait en 4.4, cela revient à remplacer dans chaque terme définissant $\pi(\psi, \epsilon)$, le couple (A, B) par le couple $(A - 1, B - 1)$. Ainsi on se ramène facilement au cas où $B = 2$. L'intérêt est que, sous cette hypothèse,

$$\mathcal{E} \cup -\mathcal{E} = [D + 1, A].$$

Supposons d'abord que $\mathcal{E}$ peut encore s'écrire sous forme de tableau dont les lignes sont des segments croissants et les colonnes des segments décroissants ; c'est ce dernier point qui n'est pas automatique :

$$\begin{array}{ccccc} B & \cdots & \cdots & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2t_1+B} & \cdots & \cdots & \cdots & D+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_v & \cdots & y_v & & \end{array}$$

Ici $x_{2t_1+B} = B - 2t_1 - B + 1 = -2t_1 + 1$. On cherche à démontrer que $t_1 = 0$. Et on a encore $[B = 2, A] \cup_{i;z_i\leq 0} \{-z_i\} = [D+1, A] \cup_{i;z_i>0} \{z_i - 1\}$ et l'ensemble de droite n'a pas de multiplicité. Ainsi $x_v \geq -1$ et $1 - 2t_1 \geq -1$ c'est-à-dire $t_1 = 0$ ou 1. Et on veut démontrer que $t_1 = 0$. Il reste donc à éliminer le cas où $t_1 = 1$; supposons donc que $t_1 = 1$ alors $x_v = x_{2t_1+2} = -1$, le tableau représentant $\mathcal{E}$ est rectangulaire avec 4 lignes. Comme le bout de chaque ligne est supérieur ou égal à $D+1$, $Jac_x\sigma^*_{\mathcal{E}} = 0$ pour tout $x > -(D+1)$. Supposons que $\zeta' 1 > -(D+1)$, on a d'une part avec 5.6.5 appliqué comme dans les réductions ci-dessus que $Jac_{\zeta' 1}\tilde{\pi} \neq 0$ et d'autre part avec l'inclusion $\tilde{\pi} \hookrightarrow \sigma_{\mathcal{E}} \times \pi(\tilde{\psi}_D, \tilde{\epsilon}_{D,\lambda})$et ce qui précède $Jac_{\zeta' 1}\pi(\tilde{\psi}_D, \tilde{\epsilon}_{D,\lambda} \neq 0$ ce qui est exclu. On peut quand même

avoir $\zeta' 1 \leq -(D+1)$ ce qui est en fait $\zeta' = -$ et $D = 0$ mais puisque $Jac_{-1}\tilde{\pi} \neq 0$, il faudrait que l'inclusion ci-dessus se factorise en $\tilde{\pi} \hookrightarrow \rho|\,|^{-1} \times Y$, où Y est un sous-quotient irréductible de $\times_{x \in \mathcal{E}-\{-1\}} \rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}_D, \tilde{\epsilon}_{D,\lambda})$. On remarque que $\mathcal{E}$ est en fait très particulier sous nos hypothèses car nécéssairement $A = D+2t_1+2 = 0+2+2 = 4$ et $B = 2$. D'où

$$\mathcal{E}' := \mathcal{E} - \{-1\} := \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & \end{array}$$

Quitte à changer l'ordre dans $\mathcal{E}'$ et des signes, on écrit Y comme sous-module de $\times_{x \in \mathcal{E}'} \rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}_D, \tilde{\epsilon}_{D,\lambda})$ et un $\mathcal{E}$ qui convient est donc $\{-1\} \cup \mathcal{E}'$. Par minimalité du nombre d'éléments positif dans notre $\mathcal{E}$ de départ, $\mathcal{E}'$ ne peut être constitué que d'éléments positifs ou nul. Donc -1 a été changé en 1 et $\sigma'_{\mathcal{E}} \hookrightarrow \rho|\,| \times \sigma''$ pour σ'' une représentation bien choisi et comme l'induite $\rho|\,|^{-1} \times \rho|\,|$ est irréductible, on a une inclusion :

$$\tilde{\pi} \hookrightarrow \rho|\,| \times \pi'',$$

pour une représentation π'' convenable, ce qui entraîne $Jac_1\tilde{\pi} \neq 0$; ceci est contradictoire avec 3.2 puisque $\zeta' = -1$ ici.

On en est donc revenu au cas où $\mathcal{E}$ ne s'écrit pas comme tableau comme précédemment. On vérifie que $\mathcal{E}$ s'écrit comme union d'un tableau :

$$\mathcal{T} = \begin{array}{ccccc} 2 & \cdots & \cdots & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2t_1+2} & \cdots & \cdots & \cdots & D+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_v & \cdots & y_v & & \end{array}$$

avec l'ensemble $\{\zeta' 1, 0\}$. On a encore en considérant $\mathcal{E} \cup -\mathcal{E}$ mais en appelant ici z_i les derniers éléments de chaque colonne de $\mathcal{T}$:

$$\{0,1\} \cup [2,A] \cup_{i;z_i \leq 0} \{-z_i\} = [D+1, A] \cup_{i;z_i>0} \{z_i - 1\}.$$

Et toujours le fait que l'ensemble de droite n'ayant pas de multiplicité, celui de gauche ne peut en avoir. Donc ici l'ensemble $\{i; z_i \leq 0\}$ est nécessairement vide. Cela force $x_{2t_1+2} \geq 1$ d'où, par un calcul déjà fait $t_1 = 0$. Ce qui est ce que l'on cherche.

6 Rappels

6.1 Les séries discrètes et hypothèses

Dans le cas des séries discrètes on a démontré en [12] et [13] les résultats suivants que je vais rappelé ci-dessous. Soit ψ, ϵ un couple formé d'un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ avec les propriétés d'algébricité usuelles dans ${}^LG$ tel que $Cent_{{}^LG}(\psi)$ soit fini et ϵ un caractère de $Cent_{{}^LG}\psi$ dans ± 1 tel que la restriction de ϵ au centre de ${}^LG$ soit $\sharp$ (cf. 1.1). En plongeant ${}^LG$ dans un GL par son application naturelle, on décompose ψ en somme de représentation irréductible de la forme $\rho \otimes \sigma_a$ où ρ est une représentation irréductible de W_F, nécessairement autoduale et σ_a est une représentation irréductible de $SL(2,\mathbb{C})$ nécessairement uniquement déterminé par sa dimension, notée a en indice ; la parité de a est uniquement déterminée par ρ. C'est de l'algèbre linéaire. On note $Jord(\psi) := \{(\rho, a)\}$ pour (ρ, a) apparaissant dans la décomposition ci-dessus ; le caractère ϵ s'identifie alors naturellement à une application de $Jord(\psi)$ dans $\{\pm 1\}$. A un tel couple ψ, ϵ on associe un couple de même type mais cuspidale, c'est ce qui correspond à ce que l'on a appelé en loc.cit. le support cuspdial partiel. Une façon de le construire, sans utiliser de récurrence, peut se faire ainsi.

On construit d'abord un couple ψ_0, ϵ_0 relatif à un groupe de même type que G mais de rang éventuellement plus petit tel que $Jord(\psi_0)$ se déduise de $Jord(\psi)$ en enlevant des blocs (ρ_i, a_i) pour $i \in [1,t]$ tous distincts où t est un entier pair éventuellement 0 soumis aux conditions ci-dessous, ϵ_0 est la restriction de ϵ aux blocs restant ; les conditions sont que pour tout $i \in [1, t/2]$,

$\rho_{2i-1} = \rho_{2i}$, $\epsilon(\rho, a_{2i-1}) = \epsilon(\rho, a_{2i})$, $a_{2i} < a_{2i-1}$ (on accepte $a_{2i} = 0$ au plus une fois en posant $\epsilon(\rho, a_{2i}) = +$ mais il faut alors que a_{2i-1} soit pair) et pour tout $b \in]a_{2i}, a_{2i-1}[$ tel que $(\rho_{2i-1}, b) \in Jord(\psi)$, $\exists j < i$ tel que $\rho_{2j-1} = \rho_{2i-1}$ et $b = a_{2j}$ ou a_{2j-1}.

On remarque que ψ_0, ϵ_0 n'est pas uniquement déterminé par ψ, ϵ. Mais on fait un tel choix en supposant que $|Jord(\psi_0)|$ est minimal. Pour ρ une représentation autoduale de W_F, on note $Jord_\rho(\psi_0) := \{a \in \mathbb{N}; (\rho, a) \in Jord(\psi_0)$ et on pose $\delta_\rho := |Jord_\rho(\psi_0)|$ et η_ρ la parité de tout élément de $Jord_\rho(\psi_0)$, c'est-à-dire $\eta_\rho = 0$ si

ces nombres sont pairs et 1 sinon. On note encore ϵ_ρ la valeur de ϵ_0 sur l'élément minimal de $Jord_\rho(\psi_0)$; par construction ce nombre vaut -1 si $\eta_\rho = 0$ mais n'est pas connu a priori si $\eta_\rho = 1$. Il est facile de vérifier que les données δ_ρ et ϵ_ρ sont elles uniquement déterminées par ψ, ϵ.

On pose alors, a priori, $\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp}$ le couple relatif à un groupe de même type que G mais de rang éventuellement plus petit, tel que $Jord(\psi_{cusp}) := \{(\rho, \alpha); \alpha \leq \delta_\rho, \alpha \equiv \eta_\rho[2]\}$, où ρ parcourt l'ensemble des représentations autoduales de W_F tel que $\delta_\rho \neq 0$ et où, pour tout $(\rho, \alpha) \in Jord(\psi_{cusp})$, $\epsilon_{cusp}(\rho, \alpha) := (-1)^{(\alpha+\eta_\rho)/2+1}\epsilon_\rho$. On note G_{cusp} le groupe correspondant.

Le couple $\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp}$ est uniquement déterminé par ψ, ϵ et est sa donnée cuspidal.

On suppose qu'il existe une représentation cuspidale π_{cusp} de G_{cusp} avec la propriété suivante pour toute représentation autoduale ρ de W_F identifiée à une représentation de ρ cuspidale autoduale de $GL(d_\rho)$ (ce qui définit d_ρ) par la correspondance de Langlands ([6],[7]) et pour tout entier f tel que $f \equiv \eta_\rho[2]$ l'induite $St(\rho, f) \times \pi_{cusp}$ est irréductible si et seulement si $(\rho, f) \in Jord(\psi_{cusp})$; ici $St(\rho, f)$ est la représentation de Steinberg qui est plus généralement notée $< \rho|\,|^{-(f-1)/2}, \cdots, \rho|\,|^{(f-1)/2} >$ dans ce papier.

Avec cette hypothèse, on a montré en [9] que π_{cusp} avait les bonnes propriétés de réductibilité supposées en [12] et [13]. On peut donc utiliser les résultats de ces papiers ; on a montré qu'il existe une unique série discrète $\pi(\psi, \epsilon)$ (irréductible) telle que pour tout ρ comme ci-dessus et pour tout f aussi comme ci-dessus l'induite $St(\rho, f) \times \pi(\psi, \epsilon)$ est irréductible si et seulement si $(\rho, f) \in Jord(\psi)$; de plus pour ρ comme ci-dessus et pour tout couple $(a > a_-)$ d'entiers consécutifs dans $Jord_\rho(\psi)$,

$\epsilon(\rho, a) = \epsilon(\rho, a_-) \Leftrightarrow Jac_{(a-1)/2,\cdots,(a_-+1)/2}\pi(\psi, \epsilon) \neq 0$

et le support cuspidal partiel de $\pi(\psi, \epsilon)$ est π_{cusp} ce qui veut dire qu'il existe une représentation σ d'un groupe linéaire de rang $1/2$ la différence des rangs de G et G_{cusp} tel que $\pi(\psi, \epsilon)$ soit un sous-quotient de l'induite $\sigma \times \pi_{cusp}$. L'existence est dans [13] et l'unicité dans [12].

6.2 Paquets associés à des morphismes élémentaires

Fixons encore ψ, ϵ comme ci-dessus d'où $\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp}$ et on fait l'hypothèse clé. Donnons-nous aussi une application de $Jord(\psi)$ dans $\{\pm\}$; cela permet de définir un morphisme de $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ dans ${}^LG$ de telle sorte que la décomposition de ce morphisme en représentations irréductibles (comme plus haut) est somme des produits tensoriels $\rho \otimes \sigma_a \otimes \sigma_b$ où $(\rho, sup(a, b))$ parcourt $Jord(\psi)$, $inf(a, b) = 1$ et $sup(a, b) = a$ si $\zeta = +$ et b si $\zeta = -$. On note ψ_ζ ce morphisme et ϵ s'identifie encore naturellement à un caractère de $Cent_{{}^LG}\psi_\zeta$ dans $\{\pm 1\}$. Donc ici

$$\psi = \psi_\zeta \circ \Delta. \qquad (*)$$

Dans [11], on a associé une représentation irréductible $\pi(\psi_\zeta, \epsilon)$ à un tel couple. On en a donné 2 définitions ; celle qui donne le plus de propriété est une définition dans le groupe de Grothendieck qui généralise la formule d'Aubert [2] et Schneider-Stuhler [15] pour l'involution généralisant celle de Zelevinski dans le cas des groupes linéaires. Pour l'expliquer, nous avons besoin de la notation suivante : soit a un demi-entier positif, ρ comme ci-dessus et π une représentation de G ; soit P un sous-groupe parabolique de G donc de la forme $\times_{d\in\mathcal{D}}GL(d) \times G(m)$ où $\mathcal{D}$ est un ensemble d'entiers. On note $res_{P,\rho,\leq a}(\pi)$ la projection de la restriction de π le long du radical unipotent de P sur le support cuspidal pour $\times_{d\in\mathcal{D}}Gl(d)$ formé de représentation du type $\times_{z\in\mathbb{R}}\rho^z$ mais où tous les z qui apparaissent vérifient $|z| \leq a$. On définit de même $res_{P,\rho,<a}$ en imposant l'inégalité stricte. On pose alors

$$inv_{\rho,\leq a} = \sum_P (-1)^{rg_G - rg_P} ind_P^G(res_{P,\rho,\leq a}\pi),$$

c'est une application dans le groupe de Grothendieck des représentations lisses de type fini de G. On définit de façon analogue $inv_{\rho,<a}$ en remplaçant l'inégalité large par l'inégalité stricte. Et alors :

$$\pi(\psi_\zeta, \epsilon) = \Bigg(\prod_{\substack{(\rho, a) \in Jord(\psi); \\ \zeta(\rho, a) = -}} inv_{\rho,<a} \circ inv_{\rho,\leq a} \Bigg)(\pi(\psi, \epsilon)).$$

L'ordre dans lequel on effectue ces applications n'a pas d'importance. Il n'est pas clair du tout sur cette définition que $\pi(\psi_\zeta, \epsilon)$ est irréductible mais c'est un des résultats de [11]. En fait on montre que cette définition est la même que la définition suivante qui se fait par induction :

pour toute représentation ρ fixée, on note $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ l'entier minimum, quand il existe, vérifiant

$(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) \in Jord(\psi)$,

soit $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2) \notin Jord(\psi)$,

soit $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2) \in Jord(\psi)$ (en acceptant éventuellement $a_{\rho,\psi,\epsilon} = 2$ et vérifie

$$\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) = \epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2).$$

On a alors les propriétés suivantes ; dire que $(\psi, \epsilon) \neq (\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ est exactement équivalent à dire qu'il existe ρ tel que $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ existe. Fixons un tel ρ.

propriété 1 : alors $\pi(\psi_\zeta, \epsilon)$ ne dépend pas de la valeur de ζ sur les blocs $(\rho, a) \in Jord(\psi)$ tel que $a < a_{\rho,\psi,\epsilon}$. On pose $\zeta_{\rho,\psi,\epsilon}$ la valeur de ζ sur $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$;

propriété 2 : supposons que $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2) \notin Jord(\psi)$, alors on note ψ', ϵ' le couple qui se déduit de ψ, ϵ en changeant simplement le bloc $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$ en $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2)$. Alors l'induite :

$$\rho|\,|^{\zeta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi'_\zeta, \epsilon')$$

a un unique sous-module irréductible qui est précisément $\pi(\psi_\zeta, \epsilon)$; ceci est aussi vrai si $a_{\rho,\psi,\epsilon} = 2$ avec nécessairement $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) = +$;

propriété 3 : supposons que $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2) \in Jord(\psi)$ avec $a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2 \neq 0$. On note ψ', ϵ' le couple qui se déduit de ψ, ϵ en enlevant les 2 blocs $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$ et $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2)$. L'induite :

$$< \rho|\,|^{\zeta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2} > \times \pi(\psi'_\zeta, \epsilon')$$

a exactement 2 sous-modules irréductibles et $\pi(\psi_\zeta, \epsilon)$ est l'un des deux. Le choix est précisé en [11], il y a une part d'arbitraire et nous n'avons pas forcément fait le meilleur choix. Mais cela n'a aucun importance pour ce que nous faisons.

propriété 4 : soit $\mathcal{E}$ un ensemble de demi-entiers tels que pour tout $x \in \mathcal{E}$, $|x| < (a_{\rho,\psi,\epsilon} - 1)/2$. Alors pour tout sous-quotient irréductible, $\tilde{\pi}$ de l'induite $\times_{x\in\mathcal{E}}\rho|\,|^x \times \pi(\psi_\zeta, \epsilon)$, il existe un ensemble $\mathcal{E}'$ totalement ordonné de demi-entiers vérifiant :

$$\{\mathcal{E}\} \cup \{-\mathcal{E}\} = \{\mathcal{E}'\} \cup \{-\mathcal{E}'\}$$

et une inclusion : $\tilde{\pi} \hookrightarrow \times_{x\in\mathcal{E}'}\rho|\,|^x \times \pi(\psi_\zeta, \epsilon)$.

On remarque que les propriétés 1, 2 et 3 permettent de définir $\pi(\psi_\zeta, \epsilon)$ par induction et le travail [11] consiste justement à prouver que cette définition et celle donnée dans le groupe de Grothendieck coïncident.

propriété 5 : soit $x \in \mathbb{R}$; on suppose que $Jac_x\pi(\psi_\zeta, \epsilon) \neq 0$, alors il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $(\rho, a) \in Jord(\psi)$ et $x = \zeta_{(\rho,a)}(a-1)/2$. Réciproquement si $(\rho, a) \in Jord(\psi)$ et $(\rho, a-2) \notin Jord(\psi)$ alors $Jac_{\zeta_{(\rho,a)}(a-1)/2}\pi(\psi_\zeta, \epsilon) \neq 0$.

propriété 6 : fixons ρ comme ci-dessus et $a > a_-$ des entiers consécutifs de $Jord_\rho(\psi)$; on suppose ici que $\zeta(\rho, a) = \zeta(\rho, a_-)$ alors

$$Jac_{\zeta(a-1)/2,\cdots,\zeta(a_-+1)/2}\pi(\psi_\zeta, \epsilon) \neq 0 \Leftrightarrow \epsilon(\rho, a) = \epsilon(\rho, a_-).$$

L'analogue de la propriété 6 pour les séries discrètes est essentiellement la définition de la paramétrisation (cf [12]) ; en utilisant la formule dans le groupe de Grothendieck définissant $\pi(\psi_\zeta, \epsilon)$ on obtient la propriété écrite mais elle est faible puisqu'il faut supposer au départ que $\zeta(\rho, a) = \zeta(\rho, a_-)$. Sans cette hypothèse, on a quand même une propriété des modules de Jacquet qui distingue le cas $\epsilon(\rho, a) = \epsilon(\rho, a_-)$ mais c'est plus compliqué ; on l'écrit simplement dans le cas que nous utiliserons. On suppose que $Jord_\rho(\psi)$ contient $1, 3$ et 5 et que $\zeta := \zeta(\rho, 1) = \zeta(\rho, 3) \neq \zeta(\rho, 5)$ et $\epsilon(\rho, 1) = \epsilon(\rho, 3)$. Alors $\epsilon(\rho, 3) = \epsilon(\rho, 5)$ si et seulement si $Jac_{-\zeta 2,-\zeta 1}\pi(\psi_\zeta, \epsilon) \neq 0$.

6.3 Propriété d'induction

Ici on revient à ψ, ϵ non nécessairement élémentaire, c'est-à-dire comme dans tout ce travail.

Proposition : *Soit (ψ, ϵ) et soit b un entier. Soit aussi $\zeta = \pm$; on suppose que $(\rho, b) \notin Jord(\psi \circ \Delta)$ et que $\psi \circ \Delta$ est discret. L'induite $< \rho|\,|^{\zeta(b-1)/2}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(b-1)/2} > \times \pi(\psi, \epsilon)$ est semi-simple de longueur 2 fois la longueur de $\pi(\psi, \epsilon)$.*

On la fait pour les séries discrètes en [12], mais il faut bien tenir compte du fait que le point clé est alors le cas cuspidale où en fait on admet le résultat dans les hypothèses de base. On en déduit le cas de ψ élémentaire : si $a_{\rho,\psi,\epsilon} > b$, on l'a démontré dans [11] et on en déduit le cas général par récurrence en échangeant socle et induction comme ci-dessous ; on ne fait pas les détails. Supposons donc qu'il existe $(\rho, a, b) \in Jord(\psi)$ tel que $inf(a, b) \geq 2$. On suppose pour simplifier que $a \geq b$. On démontre l'assertion par récurrence. On sait (4.1) que $\pi(\psi, \epsilon)$ est la somme des sous-modules irréductibles inclus dans $< \rho|\,|^{(a-b)/2}, \cdots, \rho|\,|^{-(a+b)/2+1} > \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, a, b-2, \epsilon(\rho, a, b)))$ et de représentation $\pi(\psi'', \epsilon'')$ pour un bon choix de morphismes ψ'', ϵ'' auxquels on peut appliquer la récurrence.

On pose $\sigma :=< \rho|\,|^{\zeta(b-1)/2}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(b-1)/2} >$. On sait que $\pi(\psi', \epsilon', (\rho, a, b-2, \epsilon(\rho, a, b))$ est semi-simple ; on note Y' l'un de ses sous-modules irréductibles et Y l'unique sous-module irréductible inclus dans l'induite

$$< \rho|\,|^{(a-b)/2}, \cdots, \rho|\,|^{(a+b)/2-1} > \times Y'.$$

Ce qui reste à démontrer est que $\sigma \times Y$ est semi-simple de longueur 2. On applique le lemme technique, 5.6.5, à $\sigma \times Y$ avec $\delta = \sigma$ et $\delta' =< \rho|\,|^{(a-b)/2}, \cdots, \rho|\,|^{-(a+b)/2+1} >$; pour cela on vérifie que $\delta \times \delta'$ et $\delta \times (\delta')^*$ sont irréductibles. Si $\zeta = +$, cela résulte de Zelevinski car les segments correspondant ne sont pas liés. Si $\zeta = -$, δ correspond à un segment qui n'a pas la même croissance que celui qui correspond à δ' ; il faut donc un autre argument. On a soit $\beta < (a-b+1)$ soit $\beta > a+b-1$. Dans le premier cas, pour tout $x \in [(\beta-1)/2, -(\beta-1)/2]$, le segment réduit à x n'est pas lié au segment correspondant à δ' ni à celui correspondant à $(\delta')^*$. Dans le deuxième cas, pour tout $y \in [(a-b)/2, -(a+b)/2-1] \cup [-(a-b)/2, (a+b)/2-1]$, le segment réduit à y n'est pas lié à $[-(\beta-1)/2, (\beta-1)/2]$. Cela suffit largement pour avoir l'irréductibilité ; en effet on veut que l'opérateur d'entrelacement (normalisé à la Langlands) $\delta \times \delta' \to \delta' \times \delta$ soit un isomorphisme. Mais on le décompose en opérateurs élémentaires qui eux sont nécessairement des isomorphismes par irréductibilité.

Les autres hypothèses sont satisfaites. Ainsi on sait que l'ensemble des sous-quotients irréductibles de $\sigma \times Y$ sont en bijection avec l'ensemble des sous-quotients irréductibles de $\sigma \times Y'$. Par récurrence, on admet que cette représentation est semi-simple. Il est facile de voir qu'elle est alors de longueur au plus 2 et en fait elle est de longueur au moins 2 car il faut que $\sigma \times \pi(\psi', \epsilon', (\rho, a, b-2, \epsilon(\rho, a, b))$ double sa longueur. Ainsi $\sigma \times Y$ a exactement 2 sous-quotients irréductibles. Les sous-quotients, Y'_i pour $i = 1, 2$ de $\sigma \times Y'$ étant des sous-modules, ils vérifient $Jac_{\zeta(\beta-1)/2, \cdots -\zeta(\beta-1)/2} Y'_i \neq 0$. On note Y_i pour $i = 1, 2$, le sous-quotient de $\sigma \times Y$ qui correspond à Y'_i par $Jac_{(a-b)/2, \cdots, -(a+b)/2}$ et nécessairement $Jac_{\zeta(\beta-1)/2, \cdots, -\zeta(\beta-1)/2} Y_i \neq 0$. Ainsi $Y_i \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta(\beta-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{-\zeta(\beta-1)/2} \times Y$ et il existe un sous-quotient σ' de $\rho|\,|^{\zeta(\beta-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{-\zeta(\beta-1)/2}$ tel que $Y_i \hookrightarrow \sigma' \times Y$. On vérifie que $\sigma' \simeq \sigma$; pour cela il suffit de montrer que nécessairement $Jac_{\rho|\,|^{\zeta(\beta-1)/2}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(\beta-1)/2}} \sigma' \neq 0$. Or s'il n'en est pas ainsi, il existe nécessairement $x \in]\zeta(\beta-1)/2, -\zeta(\beta-1)/2]$ tel que $Jac_{x, \cdots, -\zeta(\beta-1)/2} \sigma' \neq 0$; mais comme Y_i est un sous-quotient de $\sigma \times Y$, cela entraîne que $Jac_{x, \cdots, -\zeta(\beta-1)/2} Y \neq 0$. Or ceci est exclu par 3.4. D'où le résultat cherché.

6.3.1 Irréductibilité

On fixe ψ, ϵ comme dans tout ce travail ainsi qu'une représentation cuspidale irréductible ρ. On suppose encore ici que $\psi \circ \Delta$ est discret.

Proposition : *Soit x un demi-entier strictement positif. On suppose que $(\rho, 2x-1) \notin Jord(\psi \circ \Delta)$. Alors la représentation induite $\rho|\,|^x \times \pi(\psi, \epsilon)$ est semi-simple de même longueur que $\pi(\psi, \epsilon)$.*

La proposition est équivalente à dire que pour X une sous-représentation irréductible de $\pi(\psi, \epsilon)$ l'induite $\rho|\,|^x \times X$ est irréductible. Ceci se démontre par récurrence comme ci-dessus.

7 Définition de $\pi(\psi, \epsilon)$ dans le cas général.

Soit ici un morphisme $\psi : W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ dans ${}^LG$ et on ne suppose ici que le fait que ψ est discret c'est-à-dire que $Cent_{{}^LG}\psi$ est un groupe fini. La décomposition de ψ en représentation irréductible donne toujours un ensemble $Jord(\psi)$; si on écrit cet ensemble en terme de représentations cela donne un ensemble de triplet (ρ, a, b) avec une condition de parité reliant ρ et $a+b$. Il est plus commode de poser $A = (a+b)/2 - 1$ et $B = (a-b)/2$ en notant ζ le signe de $a-b$ étant entendu qu'un nombre nul est positif. Ainsi $Jord(\psi)$ est vu comme un ensemble de quadruplet (ρ, A, B, ζ) pour ρ une représentation irréductible autodual de W_F, ζ un signe, A, B des demi-entiers tels que $A - B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ avec la condition que A est entier non demi-entier précisément si ρ est de même type que ${}^LG$ (le type étant symplectique ou orthogonal) et $\zeta = +$ si $B = 0$.

Fixons ρ et définissons $Jord_\rho(\psi)$ comme l'ensemble des quadruplets (ρ, A, B, ζ) avec ce ρ. On ordonne totalement $Jord_\rho(\psi)$ par : $(\rho, A', B', \zeta') > (\rho, A, B, \zeta)$ si ces 2 quadruplets sont distincts et

soit $B' > B$; soit $B' = B$ mais $A' > A$; soit $B' = B, A' = A$ mais $\zeta' = +$ d'où $\zeta = -$.

Soit G' un groupe de même type que G mais de rang plus grand et soit ψ' un morphisme de même type que ψ mais relativement à G'. On dit que ψ' domine ψ si pour tout ρ, il existe une bijection entre $Jord_\rho(\psi')$ et $Jord_\rho(\psi)$, bijection qui préserve l'ordre, ce qui la détermine totalement et on la note $b_{\psi', \psi}$ et on demande qu'elle vérifie, pour tout (ρ, A', B', ζ') dans $Jord_\rho(\psi')$, en posant (ρ, A, B, ζ) sont image par $b_{\psi', \psi}$, $\zeta' = \zeta$, $A' - A = B' - B \geq 0$.

Fixons ψ' dominant ψ et $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ avec (ρ, A', B', ζ) son image inverse par $b_{\psi',\psi}$; on définit $\mathcal{E}_{(\rho,A,B,\zeta}$ comme l'ensemble totalement ordonné réunion des segments $\cup_{\ell\in[1,A'-A]}[B'-\ell+1, A'-\ell+1]$, ensemble qui est vide si $A' = A$. On définit alors $Jac_{(\rho,A',B',\zeta)\mapsto(\rho,A,B,\zeta)} := Jac_{x\in\mathcal{E}_{\rho,A,B,\zeta}}$.

Quitte à supposer le rang de G' suffisamment grand, on peut aisément construire de tels ψ' dominant ψ et on peut en plus imposer que $\psi' \circ \Delta$ soit discret. Grâce à $b_{\psi',\psi}$, on identifie les groupes $Cent_{^LG}(\psi)$ et $Cent_{^LG'}(\psi')$ ainsi que leurs groupes de caractères. Ainsi pour ϵ un caractère de $Cent_{^LG}(\psi)$ on sait définir $\pi(\psi', \epsilon)$. Et on pose, avec les notations précédentes :

Définition : $\pi(\psi, \epsilon)_{\psi'} := \prod_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} Jac_{(\rho,A',B',\zeta)\mapsto(\rho,A,B,\zeta)})\pi(\psi', \epsilon)$, *où dans le produit les* $(\rho, A, B\zeta)$ *sont rangés dans l'ordre croissant.*

Propriété : $\pi(\psi, \epsilon)_{\psi'}$ *ne dépend pas du choix de* ψ' *dominant* ψ *et tel que* $\psi' \circ \Delta$ *est discret.*

Cela résulte de 4.4 ; en effet fixons ψ' et ψ'' dominant ψ. On peut construire $\tilde{\psi}$ dominant à la fois ψ' et ψ'' et a fortiori ψ. Il suffit de démontrer que $\pi(\psi, \epsilon)_{\tilde{\psi}} = \pi(\psi, \epsilon)_{\psi'}$ et une égalité analogue pour ψ''. Par symétrie, il suffit de le démontrer pour ψ'. On descend de $\tilde{\psi}$ vers ψ' en appliquant progressivement les $Jac_{(\rho,\tilde{A},\tilde{B},\zeta)\mapsto(\rho,A',B',\zeta)}$ en commençant par les quadruplets les plus petits et donc de proche en proche on est ramené à démontrer $\pi(\psi, \epsilon)_{\tilde{\psi}} = \pi(\psi, \epsilon)_{\psi'}$ quand $\tilde{\psi}$ et ψ' sont tels qu'il existe un unique quadruplet $(\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0) \in Jord(\tilde{\psi}$ tel que $(\rho, A'_0 - 1, B'_0 - 1, \zeta'_0) \in Jord(\psi')$ et

$$Jord(\tilde{\psi}) - (\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0) = Jord(\psi') - (\rho, A'_0 - 1, B'_0 - 1, \zeta'_0).$$

On note $(\rho, A_0, B_0, \zeta_0)$ l'image de ces quadruplets par les bijections ; elles ont nécessairement la même image. Le premier point est de vérifier que

$$\prod_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} Jac_{(\rho,A',B',\zeta)\in Jord(\tilde{\psi})\mapsto(\rho,A,B,\zeta)} =$$

$$\prod_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} Jac_{(\rho,A',B',\zeta)\in Jord(\psi')\mapsto(\rho,A,B,\zeta)})Jac_{\zeta'_0B'_0,\cdots,\zeta'_0A'_0}.$$

En effet les ensembles $(\rho, A', B', \zeta) \mapsto (\rho, A, B, \zeta)$ sont les mêmes pour $\tilde{\psi}$ et ψ' sauf exactement quand $(\rho, A', B', \zeta) = (\rho, A'_0, B'_0, \zeta'_0)$ où par définition

$$Jac_{(\rho,A'_0,B'_0,\zeta'_0)\mapsto(\rho,A_0,B_0,\zeta'_0)} = Jac_{(\rho,A'_0-1,B'_0-1,\zeta'_0)\mapsto(\rho,A_0,B_0,\zeta'_0)}Jac_{\zeta'_0B'_0,\cdots,\zeta'_0A'_0}.$$

Il faut ensuite vérifier que $Jac_{\zeta'_0B'_0,\cdots,\zeta'_0A'_0}$ commute au-dessus des $Jac_{(\rho,A',B',\zeta)\mapsto(\rho,A,B,\zeta)}$ pour tout $(\rho, A', B', \zeta) \in Jord(\psi')$ strictement plus petit que $(\rho, A'_0-1, B'_0-1, \zeta'_0)$. Or, par hypothèse $\psi' \circ \Delta$ est discret donc $B'_0 - 1 > B'$, seule possibilité dans la définition de l'ordre et l'hypothèse $\psi' \circ \Delta$ discret renforce encore en $B'_0 - 1 > A'$. Soit x un élément de l'ensemble $(\rho, A', B', \zeta) \mapsto (\rho, A, B, \zeta)$ et pour tout élément $y \in [\zeta'_0B'_0, \zeta'_0A'_0]$, on a sûrement $|x| \leq A' < B'_0 - 1 < |y| - 1$. D'où la commutation annoncée (cf 1.2).

Les hypothèses de 4.4 pour $\tilde{\psi}, \epsilon$ et le quadruplet $(\rho, A'_0, B'_0\zeta'_0)$ sont précisément satisfaites car ψ' est le ψ_- de loc.cit. et par hypothèse est tel que $\psi' \circ \Delta$ est discret. Donc on a

$$Jac_{\zeta'_0B'_0,\cdots,\zeta'_0A'_0}\pi(\tilde{\psi}, \epsilon) = \pi(\psi', \epsilon)$$

et

$$\pi(\psi, \epsilon)_{\tilde{\psi}} = \prod_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} Jac_{(\rho,A',B',\zeta)\in Jord(\tilde{\psi})\mapsto(\rho,A,B,\zeta)}\pi(\tilde{\psi}, \epsilon) =$$

$$\prod_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} Jac_{(\rho,A',B',\zeta)\in Jord(\psi')\mapsto(\rho,A,B,\zeta)}Jac_{\zeta'_0B'_0,\cdots,\zeta'_0A'_0}\pi(\tilde{\psi}, \epsilon) =$$

$$\prod_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} Jac_{(\rho,A',B',\zeta)\in Jord(\psi')\mapsto(\rho,A,B,\zeta)}\pi(\psi', \epsilon)$$

ce qui est le résultat cherché $\pi(\psi, \epsilon)_{\psi'}$.

Définition : *on pose* $\pi(\psi, \epsilon) = \pi(\psi, \epsilon)_{\psi'}$.

Propriété : *Supposons que pour au moins un* ψ' *dominant* ψ *vérifiant* $\psi' \circ \Delta$ *est discret, on ait*

$$\sum_{\epsilon} \epsilon\big(1_{W_F} \times 1_{SL(2,\mathbb{C})} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\big)\pi(\psi', \epsilon)$$

est une distribution stable, il en est alors de même pour

$$\sum_{\epsilon} \epsilon\big(1_{W_F} \times 1_{SL(2,\mathbb{C})} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\big)\pi(\psi,\epsilon),$$

la somme porte sur tous les caractères ϵ du groupe $Cent_{^LG}\psi$.

Cela est conséquence du fait que nos $Jac...$ préserve la stabilité.

Remarquons que pour $G = SO(2n+1)$ si la restriction de ψ à W_F se factorise par le Frobenius, toutes nos hypothèses sont satisfaites grâce à [9] qui montre que les constructions de Lusztig des séries discrètes ont bien les propriétés que nous voulons et à [14]

Remarquons aussi que dans certains cas $\pi(\psi,\epsilon)$ peut être 0 ; par exemple considérons, $G = SO(9,F)$, déployé, le morphisme ψ tel que ψ est trivial sur W_F et (Rep_a est par définition la représentation irréductible de dimension a de $SL(2,\mathbb{C})$)

$$\psi = tr_{W_F} \otimes Rep_4 \otimes tr_{SL(2,\mathbb{C})} \oplus tr_{W_F} \otimes Rep_2 \otimes tr_{SL(2,\mathbb{C})} \oplus tr_{W_F} \otimes tr_{SL(2,\mathbb{C})} \otimes Rep_2.$$

En d'autres termes ψ est élémentaire et

$$Jord(\psi) = \{(tr_{W_F}, 3/2, 3/2, +), (tr_{W_F}, 1/2, 1/2, +), (tr_{W_F}, 1/2, 1/2, -)\}.$$

Notons ψ' le morphisme qui vérifient :

$$\psi = tr_{W_F} \otimes Rep_6 \otimes tr_{SL(2,\mathbb{C})} \oplus tr_{W_F} \otimes Rep_4 \otimes tr_{SL(2,\mathbb{C})} \oplus tr_{W_F} \otimes tr_{SL(2,\mathbb{C})} \otimes Rep_2.$$

On a $Jord(\psi') = \{(tr_{W_F}, 5/2, 5/2, +), (tr_{W_F}, 3/2, 3/2, +), (tr_{W_F}, 1/2, 1/2, -)\}$. Considérons le morphisme de $Jord(\psi)$ dans ± 1 qui correpond dans l'ordre aux signes $(-,+,-)$. On sait que $\pi(\psi',\epsilon)$ est cuspidal, donc, avec nos définitions $\pi(\psi,\epsilon) = 0$. Un calcul que j'ai fait avec Waldspurger prouve que c'est bien ce dont on a besoin pour avoir les propriétés d'endoscopie. C'est d'ailleurs cet exemple qui a motivé la définition.

Références

[1] Arthur J. : *Unipotent automorphic representations : conjectures* in Orbites unipotentes et représentations II, Astérisque 171-172, 1989, pp. 13-72

[2] Aubert A.-M. : *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique,* TAMS, 347, 1995, pp. 2179-2189 avec l'erratum publié dans TAMS, 348, 1996, pp. 4687-4690

[3] : Bernstein I. N., Zelevinsky A. V. : *Induced Representations of Reductive p-adic groups 1* Ann de l'ENS, 10, 1977, pp. 147-185

[4] Debacker S., Reeder M. : *Depth-zero supercuspidal L-packets and their stability* prépublication 2004

[5] Gan W.T., Gurevich N. : *Non-tempered Arthur Packets of G_2*à paraître dans le volume en l'honneur de S.Rallis

[6] Harris, M. ; Taylor, R. : *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties,*Annals of Math Studies, 151, Princeton Univ. Press, 2001

[7] Henniart, G. : *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL_n sur un corps p-adique,*Invent. Math., 139, 2000, pp. 439-455

[8] Kazhdan D., Varshavsky Y. : *On endoscopic decomposition of certain depth zero representations* prépublication 2004

[9] Mœglin C. : *Points de réductibilité pour les induites de cuspidales,* Journal of Algebra 268, Number 1 (October 1, 2003 issue).

[10] Mœglin C. : *Stabilité en Niveau 0, pour les Groupes Orthogonaux Impairs p-Adiques,* à paraître à documenta

[11] Moeglin C. : *Sur certains paquets d'Arthur et involution d'Aubert-Schneider-Stuhler généralisée,* prépublication 2004, http ://www.math.jussieu.fr/moeglin

[12] Mœglin C. : *Classification des séries discrètes : paramètre de Langlands et exhaustivité,*JEMS, 4, 143-200, 2002

[13] Mœglin C., Tadic M. : *Construction of discrete series for classical p-adic groups,* journal de l'AMS, volume 15, 2002, pp 715-786

[14] Mœglin C., Waldspurger J.-L. : *Paquets stables de représentations tempérées et de rréduction unipotente pour* $SO(2n+1)$, Inventiones, 152, 461-623, 2003

[15] Schneider M., Stuhler U. : *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building* Publ. Math. IHES 85, 1997, pp. 97-191

[16] Waldspurger J.-L. : *Transfert de L-paquets de SO(2n+1) à GL(2n) tordu* en cours de rédaction

[17] : Zelevinsky A. V. : *Induced Representations of Reductive p-adic groups II* Ann de l'ENS, 13, 1980, pp. 165-210