HAL open science

Sur les espaces mesures singuliers I - Etude metrique-mesuree

Mikael Pichot

▶ To cite this version:

Mikael Pichot. Sur les espaces mesures singuliers I - Etude metrique-mesuree. 2004. hal-00003558

HAL Id: hal-00003558
https://hal.science/hal-00003558v1

Preprint submitted on 13 Dec 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00003558, version 1 - 13 Dec 2004

SUR LES ESPACES MESURÉS SINGULIERS
I - Étude métrique-mesurée[1]

Mikaël Pichot

Novembre 2004

—

Abstract

Recall Jones-Schmidt theorem that an ergodic measured equivalence relation is strongly ergodic if and only if it has no nontrivial amenable quotient. We give two new characterizations of strong ergodicity, in terms of metric-measured spaces. The first one identifies strong ergodicity with the concentration property as defined, in this (foliation) setting, by Gromov [22]. The second one characterize the existence of nontrivial amenable quotients in terms of "Følner sequences" in graphings naturally associated to (the leaf space of) the equivalence relation.

We also present a formalization of the concept of quasi-periodicity, based on (noncommutative) measure theory. The "singular measured spaces" appearing in the title refer to the leaf spaces of measured equivalence relations.

Table des matières

1. Introduction **2**

2. Relations d'équivalence mesurées **9**

3. Espaces singuliers **12**

4. Structures quasi-périodiques et représentations **18**

5. Ergodicité forte **25**

6. Concentration **28**

7. Inégalités isopérimétriques **32**

[1]2000 Mathematics Subject Classification. Primary 37A20 ; Secondary 50C25

The author was partially supported by a JSPS Fellowship for European Researchers.

1. Introduction

L'importance fondamentale des structures transverses de feuilletages a été mise en avant au milieu des années 1950 par les travaux d'André Haefliger ([23] par exemple, voir l'exposé historique [24]). Ces structures, définies sur les variétés transverses et invariantes par holonomie, reflètent des propriétés de *l'espace des feuilles* du feuilletage considéré.

Il est bien connu que l'espace des feuilles en lui-même est, le plus souvent, « singulier ». Ainsi en est-il des exemples les plus simples, dont les feuilletages linéaires du tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ de dimension 2, par droites de pente irrationnelle (feuilletages de Kronecker). Néanmoins, une analyse non triviale de ces espaces reste possible. Elle a été initiée à la fin des années 1970 par A. Connes dans [7]. De façon générale, le concept d'*espace singulier* traduit l'existence sur de nombreux espaces quotients *a priori* non standard, en particulier sur l'espace des feuilles d'un feuilletage ou d'une lamination, de structures canoniques non triviales et intrinsèques. Ces structures, de même que pour les espaces classiques, peuvent être de natures diverses, e.g. mesurée, topologique, différentielle, métrique.

Cette étude concerne la *théorie de la mesure des espaces singuliers*. Elle est divisée en deux parties. La première partie (le présent article) traite de la notion d'*ergodicité forte*, en relation avec les *structures métriques-mesurées* naturellement associées aux espaces singuliers. La seconde partie [37] traite de la *propriété T de Kazhdan* pour les espaces mesurés singuliers.

—

Les *relations d'équivalence* interviennent par nature même dans l'étude des espaces quotients. Elles en constituent, par définition, des *désingularisations*. Désingulariser un espace singulier en un espace usuel a pour avantage immédiat d'en permettre l'étude à l'aide d'outils mathématiques standard. D'une certaine mesure, ce point de vue rapproche les espaces singuliers des variétés : une désingularisation est l'analogue d'une carte en géométrie différentielle, son rôle est de (sur)paramétrer convenablement l'espace quotient. Une structure singulière sur un ensemble consiste, ainsi, en la donnée d'un « système de désingularisations compatibles » de cet ensemble. La théorie de la mesure des espaces singuliers repose alors sur la notion de *relation d'équivalence mesurée*, fondée dans [14].

Soit X un espace borélien standard. Une relation d'équivalence *à classes dénombrables* sur X est *borélienne* si son graphe $R \subset X \times X$ est réunion d'une famille dénombrable d'isomorphismes partiels boréliens de X. Lorsque X est muni d'une mesure de probabilité sans atome μ et que ces isomorphismes partiels *préservent la classe de* μ, on dit que R est une *relation d'équivalence mesurée* (cf. §2.). Par exemple, une action α d'un groupe dénombrable par automorphismes boréliens de (X, μ)

définit une relation d'équivalence borélienne sur X (la partition en orbites), et cette relation est mesurée si μ est *quasi-invariante* par α. Plusieurs travaux importants de différents auteurs, notamment Adams, Furman, Gaboriau, Hjorth, Kechris, Monod, Popa, Shalom, ont récemment contribué à un développement significatif de la théorie.

Deux relations d'équivalence mesurées R_1 sur (X_1, μ_1) et R_2 sur (X_2, μ_2) désingularisent un même espace mesuré singulier si et seulement si elles sont *stablement isomorphes*, au sens où il existe un isomorphisme borélien non singulier $\rho : X_1' \to X_2'$ entre deux parties boréliennes non négligeables $X_1' \subset X_1$ et $X_2' \subset X_2$ tel que $x \sim_{R_1} y \iff \rho(x) \sim_{R_2} \rho(y)$ pour $x, y \in X_1'$.

Nous dirons d'une propriété de relation d'équivalence mesurée, invariante par isomorphisme stable, qu'elle est une *propriété de l'espace mesuré singulier* des orbites de cette relation.

L'*ergodicité* et l'*ergodicité forte* sont des propriétés d'espaces mesurés singuliers. L'ergodicité est une notion dynamique classique. Une relation d'équivalence mesurée sur X est *ergodique* si tout borélien *saturé* est négligeable ou de complémentaire négligeable, i.e. si X ne contient pas de boréliens invariants non triviaux. L'ergodicité forte, également de nature dynamique, a été introduite par Connes-Weiss [12] et Schmidt [41]. Une action borélienne α d'un groupe dénombrable Γ quasi-préservant une mesure de probabilité μ sur X est *fortement ergodique* si elle ne possède pas de parties boréliennes asymptotiquement invariantes non triviales. Rappelons que, suivant [11, 41, 12, 42], une suite $A_n \subset X$ de parties boréliennes est dite *asymptotiquement invariante* sous l'action α si

$$\mu(\alpha(\gamma)A_n \Delta A_n) \to_n 0$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$, et qu'elle est dite *non triviale* s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\delta \leqslant \mu(A_n) \leqslant 1 - \delta.$$

On vérifie que l'existence de suites asymptotiquement invariantes non triviales ne dépend effectivement que de l'espace singulier des orbites de l'action α.

La notion d'ergodicité forte a permis à Connes-Weiss [12] de caractériser les groupes de Kazhdan dénombrables par leurs actions ergodiques *préservant une mesure de probabilité* (que l'on appellera ergodique de type II_1). Schmidt [42] et Losert-Rindler [32] ont ensuite caractérisé les groupes moyennables, dans le même esprit. Les résultats sont les suivants :

1. K. Schmidt [41] a observé que toute action ergodique de type II_1 d'un groupe de Kazhdan est fortement ergodique.
2. Un groupe qui possède pas la propriété T possède au moins une action ergodique de type II_1 non fortement ergodique [12].
3. Un groupe est moyennable si et seulement s'il ne possède pas d'action ergodique de type II_1 qui soit fortement ergodique [32, 42].

Citons également un théorème particulièrement remarquable, le *théorème de Jones-Schmidt*, montrant qu'une relation d'équivalence mesurée (à classes dénombrables) ergodique est fortement ergodique si et seulement si elle ne possède pas de quotient moyennable non trivial (cf. [28]).

L'article récent G. Hjorth et A. Kechris [26, App. 1] contient une présentation détaillée de la notion d'ergodicité forte pour les relations d'équivalence mesurées.

—

Avant d'énoncer nos résultats, décrivons la nature des structures métriques-mesurées associées aux espaces singuliers.

Au niveau intuitif, la situation est la suivante. Considérons un complexe simplicial Y, au sens usuel du terme, non compact, mais satisfaisant à certaines propriétés de *quasi-périodicité*. On peut alors légitimement espérer associer, à chaque partie borélienne quasi-périodique de Y, un nombre réel positif représentant le *covolume* de cette partie, de valeur proportionelle à sa « densité » dans Y. Dans le cas périodique, i.e. lorsque Y est muni d'une action cocompacte d'un groupe discret, la donnée d'une mesure sur l'espace quotient détermine une telle densité. La co-existence d'un covolume et d'une métrique (de la métrique simpliciale par exemple) définit alors sur Y une structure *d'espace métrique-mesuré*. De façon similaire, *les espaces métriques-mesurés associés aux espaces singuliers sont des espaces métriques quasi-périodiques, munis d'un covolume.*

Soit M une variété et F un feuilletage *minimal* sur M (i.e. toutes les feuilles sont denses). Il est relativement clair que la fonction indicatrice d'un voisinage ouvert d'un point de M est, en restriction à chaque feuille de F, une fonction « quasi-périodique » définie sur cette feuille. Si F est *ergodique*, la même observation est valable, non seulement pour les voisinages ouverts, mais aussi pour la fonction indicatrice de toute partie borélienne non négligeable ; celle-ci définit une fonction quasi-périodique en restriction à une feuille générique de F. Ces observations sont bien connues. Elles peuvent être illustrées plus précisément, par exemple, par les théorèmes de Ghys [20] et Cantwell-Conlon [4] sur la topologie des feuilles d'une feuilletage de dimension 2. Il est également intéressant de noter, réciproquement, qu'un espace métrique possédant certaines propriétés de quasi-périodicité peut parfois être plongé dans une lamination minimale, ou ergodique, de façon interessante ; pour un exemple concret d'une telle construction, nous renvoyons le lecteur à l'étude des quasi-cristaux telle qu'exposée dans [3] par exemple.

Le point de vue que nous adoptons dans cet article est de considérer que chaque espace singulier, par exemple l'espace $Q = M/F$ des feuilles de F, est un concept (une notion) de quasi-périodicité — nous nous intéressons uniquement ici aux *aspects mesurés* du concept de quasi-périodicité et de sa formalisation (i.e. au cas *ergodique*).

Considérons l'exemple le plus simple, celui des *graphes quasi-périodiques associés à un espace mesuré singulier* Q (que l'on appellera *graphes* Q*-périodiques*) :

•) Soit R une relation d'équivalence mesurée sur (X, μ). Soit $K \subset R$ une partie borélienne symétrique de R. On dit que K est un *graphage* de R si pour tous points équivalents $x, y \in X$, il existe un nombre fini $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ de points de X tels que $(x_i, x_{i+1}) \in K$. En suspendant K au-dessus de X, i.e. en attachant pour tout $(x, y) \in K$ une arête $\simeq [0, 1]$ entre x et y, on obtient alors une « lamination » Σ_K dont les feuilles sont des graphes, et dont X est une transversale totale. Soulignons que les orbites de R sont connexes dans Σ_K. Connes, Feldman, et Weiss [10] ont pour la première fois considéré les parties boréliennes $K \subset R$ comme des familles mesurables de graphes sur les orbites de R ; la notion de graphage au sens présenté ici (i.e. lorsque les orbites sont connexes) a été introduite par Levitt (cf. [17]). (voir §2.)

•) À une relation d'équivalence mesurée R sur X et un graphage K de R, on associe le *graphe quasi-périodique* $\tilde{\Sigma}_K$ dont, par définition, les sommets sont les points de $R \subset X \times X$, et les arêtes sont les couples $((x, y), (x, z))$ de points de R tels que $(y, z) \in K$. Soit Q un espace singulier. On dit que $\tilde{\Sigma}_K$ est *un graphe* Q*-périodique* lorsque Q est l'espace de ses feuilles (i.e. $Q = X/R$).

La relation entre $\tilde{\Sigma}_K$ et Σ_K est simple : Σ_K est le quotient du graphe quasi-périodique $\tilde{\Sigma}_K$ par la relation de quasi-périodicité ($\Sigma_K = \tilde{\Sigma}_K/R$). Ces définitions s'étendent bien sûr en dimension supérieure. Les complexes simpliciaux Q-périodiques ont été introduits par D. Gaboriau dans [18] sous le nom de R-complexe simplicial (cf. §4.). Plus généralement, de nombreuses catégories d'espaces métriques séparables contiennent de façon naturelle des espaces quasi-périodiques en un sens analogue (en particulier les variétés riemanniennes).

La *structure métrique-mesurée* sur Σ_K est par définition donnée par la métrique simpliciale d sur chaque feuille et par la mesure transverse μ définie sur les boréliens de X. Cette structure se revèle à $\tilde{\Sigma}_K$ qui est l'exemple fondamental d'espace métrique-mesuré quasi-périodique associé à Q. Le support du covolume ainsi défini sur $\tilde{\Sigma}_K$ est constitué de boréliens *quasi-périodiques* (de sommets, i.e. inclus dans R).

Notons que la métrique simpliciale sur $\tilde{\Sigma}_K$ peut prendre la valeur $+\infty$ (deux points sont à distance infinie si et seulement s'ils ne sont pas sur une même feuille) : les complexes simpliciaux quasi-périodiques associés aux espaces mesurés singuliers sont des espaces métriques-mesurés au sens où l'a défini M. Gromov dans [22] (dans le cadre des feuilletages, où la métrique est longitudinale et la mesure, la mesure de Lebesgue sur la variété).

Ce paragraphe peut être résumé par les diagrammes suivants.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \Sigma = \tilde{\Sigma}/\Gamma \arrow[dl, "p"] \\
Q = \{\star\} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \Sigma = \tilde{\Sigma}/R \arrow[dl, "p"] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

Sur le digramme de gauche, $\tilde{\Sigma}$ est un complexe simplicial usuel muni d'une action libre cocompacte de d'un groupe discret Γ. Il s'agit du cas périodique. Sur le diagramme de droite $\tilde{\Sigma}$ est un complexe simplicial quasi-périodique au sens ci-dessus muni d'une action libre d'une relation d'équivalence R. Il s'agit du cas quasi-périodique. L'hypothèse de cocompacité est remplacée dans le cas quasi-périodique par la définition suivante.

Définition. *On dit qu'un complexe simplicial Q-périodique est* uniformément localement fini (u.l.f.) *si le nombre de simplexes attachés en chacun de ses sommets est uniformément fini.*

—

L'étude des espaces métriques-mesurés est en premier lieu concernée par la question de la concentration de la mesure. Notre premier résultat établit un lien direct entre ergodicité forte et concentration.

La plus simple des notions de quasi-périodicité (non périodique) obtenue à l'aide des espaces mesurés singuliers est *l'hyperfinitude*. Considérons par exemple une *droite quasi-périodique* Σ, i.e. $\Sigma = \Sigma_K$ est associé au graphe $K \subset X \times X$ d'un automorphisme partiel φ de (X, μ) agissant essentiellement librement (automorphisme apériodique) en préservant la mesure μ. L'espace singulier $Q = X/\langle\varphi\rangle$ est hyperfini (ce qui signifie que la relation d'équivalence R_φ des orbites de φ est réunion *croissante* de sous-relations à *orbites finies*). On peut alors vérifier la propriété suivante. Étant donnés un nombre fini de parties boréliennes quasi-périodiques de Σ de covolume suffisament petit, on peut écarter (pour la métrique simpliciale) chacune de ces parties les unes des autres sans toutefois en modifier les covolumes respectifs. En effet, le *lemme de Rokhlin* montre qu'il existe pour tout n une famille finie $\Omega_1, \dots \Omega_n$ de boréliens disjoints de X tels que $\varphi(\Omega_i) = \Omega_{i+1}$ et $\mu(X \setminus \amalg \Omega_i) \leqslant \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \to_n 0$. Il est alors élémentaire de construire deux (ou plusieurs) suites (A_n) et (B_n) de mesure (convergeant vers) $1/4$ (ou $c > 0$ assez petit), formées de réunions de certaines des parties Ω_i, et telles que la distance entre A_n et B_n converge vers $+\infty$.

Définition ([22]). *On dit qu'un espace métrique-mesuré* (Σ, d, μ) *est* concentré *s'il existe une fonction* $c :]0,1]^2 \to \mathbf{R}_+$*, telle que pour tous boréliens non négligeables* $A, B \subset \Sigma$*, on a*

$$d(A,B) \leqslant c(\mu(A), \mu(B)).$$

Nous dirons d'une propriété d'espace singulier ergodique qu'elle est un *paramètre de quasi-périodicité*. Le résultat qui suit (cf. §6.) montre que la concentration des graphes Q-périodiques un paramètre de quasi-périodicité (l'hypothèse « de type fini » figurant dans ce théorème est comparable à celle utilisée en théorie des groupes et reflète l'existence de suffisamment de complexes simpliciaux Q-périodiques u.l.f.).

Théorème 1. *Soit* Q *un espace singulier ergodique de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes,*

i. Il existe un graphe Q*-périodique u.l.f. concentré,*

ii. Tout graphe Q*-périodique u.l.f. est concentré.*

On dira dans ce cas que l'espace singulier Q est concentré.

Observation. Ce théorème s'étend à d'autres espaces métriques séparables que les graphes. Rappelons que la structure métrique-mesurée considérée pour les graphes est donnée par le couple (distance simpliciale, covolume) ; le support du covolume est de dimension 0 au sens où il néglige les boréliens (non quasi-périodiques ou) non portés par les sommets. Il est néanmoins clair que, si ces graphes sont concentrés, alors les complexes simpliciaux Q-périodiques u.l.f., munis par exemple d'un covolume porté sur les simplexes de dimension i, sont également concentrés ; il en résulte aussi, en adaptant les techniques de triangulation des variétés au cas quasi-périodique (cf. [25]), que les variétés Q-périodiques sont également concentrées, où l'on remplace l'hypothèse u.l.f. par l'hypothèse « à géométrie bornée ». (cf [38])

Nous montrons au paragraphe 6. le théorème suivant.

Théorème 2. *Un espace singulier ergodique de type fini est concentré si et seulement s'il est fortement ergodique.*

Le point de vue de la concentration de la mesure pour les relations d'équivalence, et notamment une version *quantitative* de la propriété de concentration des espaces quasi-périodiques associés à un espace singulier, sont susceptibles de donner de nouveaux invariants pour les relations fortement ergodiques. Rappelons que, dans le cas périodique, la propriété de concentration est un phénomène trivial au niveau qualitatif (tous les espaces sont concentrés car compacts), mais que des phénomènes remarquables apparaissent au niveau quantitatif (e.g. concentration normal ou exponentielle). Il semble

donc intéressant de mener une « systématique » de la concentration pour les relations d'équivalence mesurées. Cette étude est en projet.

—

La *classification des relations d'équivalence moyennables* (mesurées à classes dénombrables) a été achevée en 1981 suite à la démonstration par Connes, Feldman et Weiss du théorème suivant. *Toute relation d'équivalence mesurée moyennable peut être engendrée par une seule transformation de l'espace.* Les auteurs montrent l'équivalence de plusieurs définitions du concept de moyennabilité pour les relations d'équivalences mesurées, et obtiennent notamment une caractérisation des relations moyennables en terme de suites de Følner présentes dans les structures de graphes mesurables sur les orbites de la relation (cf. [10]). Nous définissons au paragraphe 7., étant donné un graphe quasi-périodique $\tilde{\Sigma}$, la notion de *suites de Følner évanescentes* dans $\tilde{\Sigma}$. Il s'agit d'une reformulation géométrique de la notion dynamique de *I-suites* considérée par Schmidt dans [42] pour des actions de groupes dénombrables préservant une mesure de probabilité.

Définition. *Soit $\tilde{\Sigma}$ un graphe Q-périodique u.l.f. muni de sa structure métrique-mesurée $(\tilde{d}, \tilde{\mu})$ =(métrique simpliciale, 0-covolume) décrite ci-dessus. Étant donnée une partie borélienne $A \subset \tilde{\Sigma}$, on note $\partial_K A$ l'ensemble des points de $\tilde{\Sigma} \backslash A$ à distance $\leqslant 1$ de A dans $\tilde{\Sigma}$. On dit qu'une suite (A_n) de parties boréliennes non négligeables de $\tilde{\Sigma}$ est une* suite de Følner évanescente *s'il existe une suite (ε_n) de nombres réels convergeant vers 0 telles que*

$$\tilde{\mu}(A_n) \to 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mu}(\partial_K A_n) \leqslant \varepsilon_n \tilde{\mu}(A_n).$$

Inspirés par [10], nous montrons le théorème suivant.

Théorème 3. *Un espace singulier ergodique de type fini Q possède un quotient moyennable si et seulement si tout graphe Q-périodique uniformément localement fini possède des suites de Følner évanescentes.*

Ce théorème également s'étend à d'autres espaces métriques-mesurés que les graphes.

—

Je remercie Damien Gaboriau pour son aide constante au cours de l'élaboration de ce travail.

Je dois également beaucoup à Étienne Ghys, ainsi qu'aux excellentes conditions de travail dont on bénéficie au sein de l'UMPA.

Je remercie Yann Ollivier pour sa lecture critique du manuscrit. Je remercie Damien Gaboriau pour ses lectures, du manuscrit et des nombreuses versions antérieures, qui auront permis d'améliorer considérablement ce texte.

2. Relations d'équivalence mesurées

Soit X un espace borélien standard. Rappelons qu'il s'agit d'un espace polonais (topologique séparable admettant une métrique complète) muni de sa structure borélienne. On dit qu'une relation d'équivalence R sur X est *borélienne* si son graphe $R \subset X \times X$ est une partie borélienne.

Les relations d'équivalence *à classes dénombrables* jouent un rôle privilégié dans la théorie. Un résultat bien connu de Feldman-Moore montre qu'une telle relation est borélienne si et seulement si on peut munir *mesurablement* chacune de ses orbites d'une structure de graphe complet. Plus précisément, il existe une partition dénombrable

$$R = \amalg_{i \in \mathbf{N}} \mathrm{graph}(\varphi_i) \subset X \times X$$

de toute relation borélienne R, à classe dénombrables, en graphes d'isomorphismes partiels $\varphi_i : A_i \xrightarrow{\simeq} B_i$ entre deux boréliens A_i et B_i de X (cf. [14]) ; on *construit* ainsi entre deux points équivalents quelconques x et y de X une unique arête orientée $x \xrightarrow{\varphi_i} y$ [17, 18] (ce qui, d'un point de vue algébrique, revient à postuler l'existence d'un espace classifiant pour R).

Exemples. i. Une action $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(X)$ d'un groupe dénombrable Γ, par isomorphismes boréliens, définit sur X une relation d'équivalence borélienne R_α à classes dénombrables, donnée par la partition de X en les orbites de α. Le résultat de Feldman-Moore ci-dessus peut s'interprêter en disant que toute relation d'équivalence à classes dénombrables est la partition en orbites d'une action mesurable de groupe discret (en choisissant une partition de cette relation par des isomorphismes partiels d'ordre 2 étendus à X).

ii. Un feuilletage sur une variété la partitionne en feuilles et définit ainsi une relation d'équivalence borélienne. En restreignant cette relation à une transversale T, on obtient une relation d'équivalence à classes dénombrables (dont le graphe $R \subset T \times T$ est partitionné par des applications d'holonomie).

iii. Une source importante de relations d'équivalence provient, par leur nature même, des problèmes de classifications. On se contentera ici d'évoquer un exemple, l'espace des groupes de type fini, étudié dans [5]. L'espace X considéré est l'espace topologique compact des groupes marqués (l'espace des quotients d'un groupe libre), sur lequel on étudie (par exemple) la relation d'isomorphisme. Il s'agit d'une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables.

Soit R une relation d'équivalence borélienne sur X. On appelle *isomorphisme partiel (intérieur) de* R un isomorphisme partiel $\varphi : A \to B$ entre deux boréliens de X tel

que $\varphi(x) \sim x$ pour tout $x \in A$. L'ensemble des isomorphismes partiels de R se note $[[R]]$. Le groupe des automorphismes intérieurs d'une relation d'équivalence se note $[R]$, ou $\mathrm{Int}(R)$, et s'appelle le *groupe plein*. Il est ainsi constitué des isomorphismes $X \to X$ dont le graphe est inclus dans $R \subset X \times X$. Il s'agit bien sûr d'un invariant d'isomorphisme au sens suivant.

Définition. *Deux relations d'équivalence boréliennes R et R' sur X et X' sont* isomorphes *s'il existe un isomorphisme borélien $\rho : X \to X'$ tel que $x \sim y$ si et seulement si $\rho(x) \sim' \rho(y)$ pour tout $x, y \in X$. On dit que R et R' sont* stablement isomorphes *s'il existe deux parties boréliennes $\Omega \subset X$ et $\Omega' \subset X'$ rencontrant respectivement toutes les classes de R et R', telles que les relations restreintes $R_{|\Omega}$ et $R'_{|\Omega'}$ soient isomorphes.*

Exemple. Un feuilletage et sa restriction à une transversale totale définissent deux relations d'équivalence stablement isomorphes.

La théorie des relations d'équivalence dans le cadre borélien est principalement développée en logique (cf. [27] par exemple). Dans la suite de ce texte (et dans [37]), nous supposerons toujours la présence additionnelle d'une *mesure quasi-invariante*, dans la tradition de [14] (et de Murray-von Neumann) — on identifie alors deux relations d'équivalence ayant *presque* les mêmes orbites.

Plus précisément, soit (X, μ) un espace de probabilité, i.e. un espace borélien standard muni d'une mesure borélienne de probabilité sans atome. On dit qu'une relation d'équivalence borélienne *à classes dénombrables* sur X est une *relation d'équivalence mesurée* si la mesure μ est *quasi-invariante* au sens où tout borélien négligeable a un saturé négligeable (notons que le saturé d'un borélien, i.e. la réunion des classes intersectant ce borélien, est borélien). Le théorème célèbre suivant, par exemple, constitue une question encore ouverte dans le cadre borélien (avec une hypothèse convenable d'irréductibilité remplaçant l'ergodicité).

Théorème 4 (Connes-Feldman-Weiss [10]). *Soit R une relation d'équivalence ergodique moyennable sur (X, μ). Il existe un isomorphisme borélien T de l'espace X préservant la classe de μ tel que $x \sim_R y \iff y = T^n(x)$ pour presque tous $x, y \in X$.*

Rappelons qu'une relation d'équivalence mesurée est dite *ergodique* si les parties boréliennes invariantes (i.e. saturées) sont négligeables ou co-négligeables. La notion de moyennabilité intervenant dans le théorème a été définie par Zimmer. Toute action d'un groupe discret moyennable préservant la classe de μ définie une relation d'équivalence mesurée moyennable au sens de Zimmer. Rappelons également qu'une relation d'équivalence est engendrée par un seul automorphisme de X si et seulement si elle est *hyperfinie*, i.e. si elle s'écrit comme réunion dénombrable croissante de relations d'équivalence mesurées à classes finies (Dye). Le théorème de Connes-Feldman-Weiss est la conclusion d'une série de travaux, dont ceux d'Ornstein-Weiss

sur la généralisation du lemme de Rokhlin aux groupes moyennables et le théorème selon lequel une action ergodique d'un groupe moyennable, préservant une mesure de probabilité, est hyperfinie [35].

Définition. *Deux relations d'équivalence mesurées R et R' sur (X, μ) et (X', μ') sont* isomorphes *(resp.* stablement isomorphes*) s'il existe deux boréliens $\Omega \subset X$ et $\Omega' \subset X'$ de mesure totale (resp. dont les saturés sont de mesure totale) et un isomorphisme de relations d'équivalence boréliennes entre $R_{|\Omega}$ et $R_{|\Omega'}$, qui est non singulier au sens où il envoie la classe de μ sur la classe de μ'.*

Nous renvoyons à [33, 7, 39] pour l'extension de ces notions aux relations d'équivalence à classes non nécessairement dénombrables.

Une relation d'équivalence mesurée ergodique peut être de type II ou de type III, selon qu'il existe ou non une mesure σ-finie invariante dans la classe de μ. Une mesure quasi-invariante σ-finie μ est dite *invariante pour* R si pour une partition $R = \mathrm{II}_i \mathrm{graph}(\varphi_i)$ en graphes d'isomorphismes partiels, on a $\mu(\varphi_i(\Omega)) = \mu(\Omega)$ pour tout Ω inclus dans le domaine de φ_i. Vérifier que cette définition est indépendante de la partition choisie constitue un exercice typique de la théorie géométrique des relations d'équivalence mesurées, nous renvoyons à [17] pour de nombreuses illustrations de cette technique (découpage des domaines). Lorsqu'il existe une mesure de probabilité invariante dans la classe de μ, on dit que R est de type II_1. Ces définitions s'étendent aux relations non ergodiques.

Remarque. La notion d'isomorphisme décrite ci-dessus (« l'équivalence orbitale »), ainsi que la répartition en types, ont été introduites par Murray et von Neumann au cours de leurs travaux sur les algèbres d'opérateurs (1936-1943). L'algèbre de von Neumann associée à une action libre d'un groupe dénombrable sur (X, μ) ne dépend que (de la relation d'équivalence mesurée formée) des orbites de cette action.

Concluons cette section par des faits standard.

Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ). La mesure μ s'étend canoniquement à R en une mesure $\mathfrak{h}$ définie par

$$\mathfrak{h}(K) = \int_X \#K^x d\mu(x)$$

où $K \subset R$ est une partie borélienne et $K^x = \{(x, y) \in K \cap R\}$ (mesure de décompte horizontal). L'image $\mathfrak{h}^{-1}$ de $\mathfrak{h}$ par l'inversion $^{-1} : R \to R$ définie par $(x, y)^{-1} = (y, x)$ est équivalente à $\mathfrak{h}$ et on obtient un homomorphisme borélien δ de R (vu comme groupoïde mesurable) dans $]0, \infty[$, i.e. une application mesurable vérifiant

$$\delta(x, z) = \delta(x, y)\delta(y, z)$$

pour tous x, y, z équivalents, en posant

$$d\mathfrak{h}(x,y) = \delta(x,y) d\mathfrak{h}^{-1}(x,y)$$

(dérivée au sens de Radon-Nikodym). Notons que $\mathfrak{h}^{-1}$ est la mesure de décompte vertical définie par $\mathfrak{h}^{-1}(K) = \int_X \#K_y d\mu(y)$ où $K_y = \{(x,y) \in K \cap R\}$. (cf. [14])

Nous dirons qu'une partie borélienne $K \subset R$ est *symétrique* si $K = K^{-1}$. Une partie borélienne symétrique $K \subset R$ définit une distance $d_K : R \to [0, \infty]$ sur les orbites de R associant à $(x,y) \in R$ le plus petit entier n pour lequel il existe une suite $x_0 = x$, $x_1, \ldots x_{n-1}$, $x_n = y$ telle que $(x_i, x_{i+1}) \in K$. On dit que K est un *graphage de* R si $d(x,y) < \infty$ pour presque tout $(x,y) \in R$ (on supposera toujours dans la suite qu'un graphage est une partie *symétrique* de R, i.e. qu'il est non orienté). Cela revient à dire que $R = \cup_n K^n$ à un négligeable près, où K^n est l'ensemble des couples $(x,y) \in R$ tels que $d(x,y) \leqslant n$, ou encore que presque toutes les orbites sont connexes pour la structure simpliciale obtenue en « collant » une arête entre deux points x et y de X si et seulement si $(x,y) \in K$. Un graphage peut être étiqueté par une famille dénombrable de lettres Φ, i.e. on peut choisir une famille dénombrable Φ d'isomorphismes partiels de R, de sorte que $K = \cup_{\varphi \in \Phi} \mathrm{graph}(\varphi)$, où l'étiquettage est bijectif si cette réunion est disjointe (on peut bien sûr supposer alors que Φ est symétrique au sens où $\varphi \in \Phi \Longleftrightarrow \varphi^{-1} \in \Phi$). On appellera également Φ un *graphage* de R (cette définition a été introduite par Levitt en relation avec la notion de *coût* pour les relations d'équivalence mesurées de type II_1, cf. [17]). Si les éléments de Φ partitionnent K, la structure simpliciale associée à K coincide avec la structure obtenue par le procédé standard de suspension de Φ au-dessus de X. (cf. [14, 17, 18])

Nous dirons qu'une partie borélienne symétrique $K \subset R$ est u.l.f. (uniformément localement finie) si $\#K^x$ et $\#K_y$ sont uniformément finis sur X, et qu'elle est u.l.b. (uniformément localement bornée), relativement à μ, si elle est u.l.f. et si $|\delta|_K = \sup_{(x,y)\in K} |\delta(x,y)|$ est fini. Toute partie u.l.f. $K \subset R$ peut être partitionnée en un nombre fini d'isomorphismes partiels de R ; toute partie u.l.b. $K \subset R$ peut être partitionné en un nombre fini d'isomorphismes partiels $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de R tels que les fonctions $d(\varphi_{i*}\mu)/d\mu$ soient uniformément bornées. Nous dirons qu'une relation d'équivalence mesurée est *de type fini* si elle possède un graphage u.l.f., i.e. si elle peut être engendrée par un nombre fini d'isomorphismes partiels. (cf. [14, 10] et notamment [10, Lemma 3])

3. Espaces singuliers

Soit Q un ensemble.

Définition. *On appelle* désingularisation *(borélienne) de Q la donnée d'un espace borélien standard X et d'une application surjective* définissable $p : X \to Q$.

Nous dirons qu'une application $p : X \to Q$ est *définissable* si

$$R_p = \{(x, y) \in X \times X \mid p(x) = p(y)\}$$

est une partie borélienne de $X \times X$ (i.e. R_p est une relation d'équivalence borélienne).

Exemple. Soit M une variété et F un feuilletage de M. L'application

$$p : M \to M/F$$

définie par $x \mapsto \ell$ où ℓ est l'unique feuille contenant x, est une désingularisation de l'espace M/F des feuilles de F.

Définition. *On dit que deux désingularisations $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q$ sont* équivalentes *(au sens borélien) s'il existe deux applications boréliennes $\varphi : X \to X'$ et $\varphi' : X' \to X$ telles que $p'\varphi = p$ et $p\varphi' = p'$.*

On vérifie immédiatement qu'on obtient ainsi une relation d'équivalence sur les désingularisations.

Exemple. Considérons une lamination L sur un espace topologique X et notons $p : X \to X/L$ la désingularisation naturelle. Soit $T \subset X$ une transversale totale de L. Notons $p' = p_{|T} : T \to X/L$ la désingularisation associée. Alors p et p' sont équivalente. En effet $p = p'r$ où r est une rétraction mesurable $X \to T$, obtenue par exemple en fixant une famille mesurable de métriques le long des feuilles et en associant (mesurablement) à $x \in X$ l'un des points de T le plus proche de x.

Définition. *On appelle* structure singulière *(borélienne) sur Q la donnée d'une classe d'équivalence de désingularisations. Un* espace singulier *(borélien) est un ensemble muni d'une structure singulière.*

En pratique, l'espace singulier ainsi qu'une ou plusieurs de ses désingularisations apparaissent souvent de façon naturelle. Citons simplement ici,
– l'espace des groupes de type fini (cf. [5]),
– l'espace des immeubles de type $\tilde{A}_2$ (cf. [37, 1, 2]).
De nombreux exemples supplémentaires figurent dans [8, 9].

Soit Q un espace singulier.

On supposera toujours que Q admet une désingularisation discrète au sens suivant.

Définition. *On dit qu'une désingularisation $p : X \to Q$ de Q est* discrète *si les fibres de p sont dénombrables.*

(On renvoie à [15, 39] pour des résultats généraux concernant l'existence de désingularisations discrètes « presque sûrement surjectives ».)

Lemme 5. *Les relations d'équivalence boréliennes R_p et $R_{p'}$ associées à deux désingularisations discrètes (équivalentes) $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q$ de Q sont stablement isomorphes.*

Démonstration. Soit $\varphi : X \to X'$ une application borélienne telle que $p'\varphi = p$. En particulier $x \sim_p y$ si et seulement si $\varphi(x) \sim_{p'} \varphi(y)$. L'image $X'_1 \subset X'$ de φ est une partie borélienne de X' et on peut choisir une section borélienne $s : X'_1 \to X$ de φ (φ étant à fibres dénombrables). Il est clair que $\varphi : X_1 \to X'_1$ réalise un isomorphisme entre les restrictions de R_p et $R_{p'}$ respectivement à l'image X_1 de s et à X'_1. Notons que X_1 rencontre toutes les classes de R_p, et comme p est surjective et vérifie $p'\varphi = p$, il en est de même de X'_1 relativement à $R_{p'}$. En particulier R_p et $R_{p'}$ sont stablement orbitalement équivalentes. ■

Remarque. Ce lemme reprend le fait bien connu que les restrictions d'une relation d'équivalence à deux boréliens rencontrant toutes les orbites sont stablement isomorphes. Ici R_p et $R_{p'}$ sont les restrictions de R_q à X et X', où R_q est associée à la désingularisation discrète $q = p \amalg p' : X \amalg X' \to Q$. Observons que l'isomorphisme partiel construit ici est intérieur, en ce sens qu'il fixe l'espace singulier Q.

Définition. *Soit Q et Q' deux espaces singuliers. On appelle* application définissable de Q vers Q' *une application $\rho : Q \to Q'$ telle qu'il existe une application borélienne $\overline{\rho} : X \to X'$, où $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q'$ sont deux désingularisations de Q et Q', vérifiant $\rho p = p'\overline{\rho}$. On dira que $\overline{\rho}$ désingularise ρ.*

Exemple. Un automorphisme extérieur d'une relation d'équivalence borélienne induit une application bijective (bi-)définissable de l'espace singulier associé.

Lemme 6. *Soit $\rho : Q \to Q'$ une application définissable. Il existe une application désingularisante $\overline{\rho} : X \to X'$ de ρ entre X et X', où $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q'$ sont deux désingularisations discrètes données de Q de Q'.*

Démonstration. Ceci résulte immédiatement du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p_X"'] & Y \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[d, "p"] & Y' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "p'"'] & X' \arrow[dl, "p_{X'}"] \\
& Q \arrow[r, "\rho"] & Q' &
\end{tikzcd}$$

où $X \to Q$ et $X' \to Q'$ sont des désingularisations discrètes respectivement de Q et Q', et $\tilde{\rho} : Y \to Y'$ une application désingularisante de ρ. Il suffit en effet de poser $\overline{\rho} = \varphi' \tilde{\rho} \varphi : X \to X'$. ■

On note $\mathrm{Def}(Q)$ l'ensemble des bijections définissables de Q.

Corollaire 7. $\mathrm{Def}(Q)$ *est un groupe (groupe des automorphismes de Q).*

Démonstration. Observons tout d'abord que si ρ est bijective, on peut choisir une application désingularisante $\overline{\rho} : X \to X'$ entre deux désingularisations discrètes, qui soit un isomorphisme de relations d'équivalence boréliennes (cf. la preuve du lemme 5). Par suite $\mathrm{Def}(Q)$ est stable par inversion. Par ailleurs si $\overline{\rho} : X_1 \to X_2$ et $\overline{\rho}' : X_1' \to X_2'$ sont deux désingularisations bijectives de ρ et ρ', alors il existe un borélien $A \subset X_2$ et un borélien $B \subset X_1'$, et un isomorphisme $\varphi : A \to B$ entre les relations $R_{p_2|A}$ et $R_{p_1'|B}$. Alors $\overline{\rho}' \varphi \overline{\rho} : \overline{\rho}^{-1}(A) \to \overline{\rho}'(B)$ est une désingularisation de $\rho'\rho$, et $\mathrm{Def}(Q)$ est stable par produit. ■

Mesure transverse sur Q. On dira que deux désingularisations $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q$ de Q sont *conjuguées* s'il existe une bijection borélienne φ de X sur X' telle que $p'\varphi = p$. On note T la famille des ensembles boréliens X lorsque $X \to Q$ parcourt les désingularisations discrètes de Q. Il est clair que T est stable par réunion disjointe (dénombrable). On appelle *mesure transverse (invariante) sur Q* la donnée d'une application

$$\Lambda : \mathcal{B}(T) \to [0, \infty]$$

définie sur les boréliens d'éléments de T et satisfaisant aux propriétés suivantes :

- σ-additivité, i.e. $\Lambda(\amalg \Omega_i) = \sum \Lambda(\Omega_i)$ pour toute partie borélienne $\Omega_i \subset X_i$, où $(p_i : X_i \to Q)_i$ est une famille (au plus dénombrable) de désingularisations.
- invariance, i.e. $\Lambda(X) = \Lambda(X')$ si X et X' sont deux désingularisations conjuguées.

Parties négligeables de Q. On appelle borélien de Q la projection d'un borélien par une désingularisation discrète $X \to Q$. La tribu $\mathcal{B}(Q)$ obtenue sur Q coïncide donc avec la tribu des boréliens saturés de X et ne dépend pas de la désingularisation discrète choisie. La donnée d'une mesure invariante Λ sur Q permet de définir sans ambigüité la notion de partie négligeable $N \subset Q$. On notera $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(Q)$ la famille des boréliens négligeables de Q relatifs à Λ. On appelera *espace mesuré singulier* la donnée d'un espace singulier Q et d'une famille de boréliens négligeables $\mathcal{N}$ associée à une mesure transverse invariante Λ.

Définition. *On dit que deux espaces mesurés singuliers $(Q_1, \mathcal{N}_1)$ et $(Q_2, \mathcal{N}_2)$ sont* isomorphes *s'il existe deux parties négligeables $N_1 \subset Q_1$ et $N_2 \subset Q_2$ telles que les espaces mesurés singuliers $Q_1 \backslash N_1$ et $Q_2 \backslash N_2$ sont* strictement isomorphes *au sens où il existe une bijection définissable non singulière ρ entre les deux (i.e. N est négligeable si et seulement si $\rho(N)$ est négligeable).*

Ainsi deux désingularisations discrètes d'espaces mesurés singuliers isomorphes sont stablement isomorphes en tant que relations d'équivalence mesurées. Nous dirons d'une propriété de relation d'équivalence mesurée, invariante par isomorphisme stable, qu'elle est une *propriété de l'espace singulier des orbites de cette relation.*

L'ensemble des applications définissables non singulières de Q, bijectives en restriction au complémetaire d'une partie négligeable, forme un groupe (en effet la composition $\varphi_2 \circ \varphi_1$ d'applications φ_1 et φ_2, bijectives en dehors de N_1 et N_2 respectivement, est bijective en restriction au borélien $\varphi_1^{-1}(\varphi_1(X \backslash N_1) \cap X \backslash N_2)$, dont le complémentaire est négligeable). On note $\mathrm{Def}(Q, \mathcal{N})$ le quotient de ce groupe obtenu en identifiant deux applications coïncidant presque sûrement.

On dit que $(Q, \mathcal{N})$ est *ergodique* si toute partie borélienne de Q est négligeable ou de complémentaire négligeable. Notons que dans le cas ergodique $\mathcal{B}(T)$ coïncide avec T aux parties négligeables près. Suivant le point de vue évoqué en introduction, une propriété d'un espace singulier ergodique Q est une propriété de la notion de quasi-périodicité choisie. On dira ainsi qu'une telle propriété est un *paramètre de quasi-périodicité* (et qu'un invariant d'isomorphisme est une *constante de quasi-périodicité*).

Soit $(Q, \mathcal{N})$ un espace mesuré singulier ergodique. Il existe sur Q au plus une (à constante multiplicative près) mesure transverse invariante σ-finie Λ définissant $\mathcal{N}$. De plus, suivant les valeurs que peut prendre Λ, $(Q, \mathcal{N})$ peut être de l'un des trois types suivants :

- type I : $\mathrm{Im}\,\Lambda = \{0, \lambda, 2\lambda, \ldots, \infty\} = \lambda \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, où $\lambda > 0$,
- type II : $\mathrm{Im}\,\Lambda = [0, \infty]$,
- type III : $\mathrm{Im}\,\Lambda = \{0, \infty\}$,

où, pour les espaces de type III, toute mesure transverse invariante Λ est triviale (ne contient aucune information autre que $\mathcal{N}$). Il existe à isomorphisme près une unique désingularisation discrète proprement infinie de Q ; plus précisément, les désingularisations discrètes d'un espace de type III sont toutes conjuguées, et les désingularisations discrètes d'un espace de type II sont classifiées (à conjugaison près) par leur mesure transverse. Les définitions précédentes s'étendent de façon naturelle au cas non ergodique, et tout espace mesuré singulier admet une décomposition $Q = Q_{\mathrm{I}} \amalg Q_{\mathrm{II}} \amalg Q_{\mathrm{III}}$ en composantes de chaque type, unique aux parties négligeables près. Ces résultats sont de Murray et von Neumann.

Convention. Au cours de ce texte, il n'est question que d'espaces singuliers munis d'une famille $\mathcal{N}$ de boréliens négligeables (i.e. d'espaces mesurés singuliers), et on omettra désormais de préciser cet ensemble dans les notations. On omettra également l'adjectif « mesuré » pour qualifier les espaces singuliers.

Considérons un espace singulier ergodique $Q = (Q, \mathcal{N})$ et notons $\mathrm{Def}(Q) = \mathrm{Def}(Q, \mathcal{N})$ son groupe d'automorphismes. Supposons que Q soit de type II et fixons une mesure transverse invariante σ-finie Λ.

Lemme 8. *Considérons $\rho \in \mathrm{Def}(Q)$. Il existe un unique nombre $\lambda \in]0,\infty[$ tel que, pour tout isomorphisme désingularisant $\overline{\rho} : X \to X'$ entre deux désingularisations discrètes, on a $\Lambda(\overline{\rho}(\Omega)) = \lambda\Lambda(\Omega)$ pour tout borélien $\Omega \subset X$.*

Démonstration. Quitte à remplacer Q par $Q\backslash N$, où $N \subset Q$ est négligeable, on peut supposer que ρ est bijective. Considérons deux désingularisations bijectives $\rho_1 : X_1 \to X_1'$ et $\rho_2 : X_2 \to X_2'$ de ρ, où $p_i : X_i \to Q$ et $p_i' : X_i' \to Q$ sont des désingularisations discrètes de Q ($i = 1, 2$). La mesure transverse invariante Λ étant unique à un facteur multiplicatif près, il existe deux nombres λ_1 et λ_2 tels que $\Lambda(\rho_i(\Omega)) = \lambda_i\Lambda(\Omega)$ pour tout borélien $\Omega \subset X_i$. Par définition il existe deux applications $\varphi : X_1 \to X_2$ et, respectivement, $\varphi' : X_1' \to X_2'$ telles que $p_2\varphi = p_1$ et $p_2'\varphi' = p_1'$. D'après le lemme 5, φ et, respectivement, φ', sont en restriction à des boréliens non négligeables $A \subset X_1$ et $A' \subset X_1'$, des isomorphismes entre les relations restreintes $R_{p_1|A}$ et $R_{p_2|B}$, et, respectivement, $R_{p_1'|A'}$ et $R_{p_2'|B'}$, où $B = \varphi(A)$ et $B' = \varphi(A')$. Notons que φ préserve la mesure Λ (invariance de Λ par conjugaison). De plus, en conjuguant chacune des équivalences stables par des isomorphismes partiels intérieurs, on peut supposer que $A = X_1$ ou $B = X_2$ (resp. $A' = X_1'$ ou $B' = X_2'$). Supposons par exemple $A = X_1$ et $B' = X_2$. On a alors $\rho_1 \circ \varphi^{-1} = \varphi'^{-1} \circ \rho_2$ sur le borélien non négligeable $\varphi(X_1) \subset X_2$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2$. ∎

L'application $\mathrm{mod}_{\Lambda} : \mathrm{Def}(Q) \to \mathbf{R}_+^*$ qui à ρ associe λ est un morphisme de groupes. On note $\mathrm{Def}_\Lambda(Q)$ son noyau et $F_\Lambda(Q) \subset \mathbf{R}_+^*$ son image (groupe fondamental de Q). On a donc une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{Def}_\Lambda(Q) \longrightarrow \mathrm{Def}(Q) \xrightarrow{\mathrm{mod}_{\Lambda}} F_\Lambda(Q) \longrightarrow 1.$$

Notons que $F(Q) = F_\Lambda(Q)$ ne dépend à multiplication par un scalaire strictement positif près que de la classe d'isomorphisme de Q.

Le groupe fondamental d'un espace singulier hyperfini est $\mathbf{R}_+^*$. Damien Gaboriau a donné de nombreux exemples d'espaces singuliers à groupe fondamental trivial en faisant usage des nombres de Betti L^2 pour les relations d'équivalence [18] (ou alternativement du coût). Le r-ième nombre de Betti L^2 de (Q, Λ) est le nombre réel positif

$$\beta_r(Q, \Lambda) = \Lambda(X) \cdot \beta_r(R_p, \Lambda_1),$$

où $p : X \to Q$ est une désingularisation discrète de type II_1 (i.e. telle que $\Lambda(X) < \infty$), $\Lambda_1 = \Lambda/\Lambda(X)$ est la mesure de probabilité sur X associée à Λ, et $\beta_r(R_p, \Lambda_1)$ est le r-ième nombre de Betti de la relation d'équivalence R_p, défini dans [18] (observons que $\beta_r(Q, \Lambda)$ ne dépend pas de la désingularisation discrète choisie, cf. [18, Corollaire 5.5]). Les nombres $\beta_r(R_p) = \beta_r(R_p, \mu)$, où $\mu = \Lambda_1$ est l'unique mesure de probabilité invariante par R_p, sont invariants par isomorphisme de relation d'équivalence mesurée. Par suite, si les relations d'équivalence mesurées R_p et R_p' associées à deux désingularisations discrètes $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q$ de Q sont isomorphes, et que $\beta_r(Q, \Lambda) \neq 0$

pour un indice r, alors $\Lambda(X) = \Lambda(X')$, et $F(Q)$ est trivial. (La suite des nombres de Betti L^2 à multiplication par un scalaire strictement positif près est une constante de quasi-périodicité au sens ci-dessus.)

Proposition 9. *Si $p : X \to Q$ est une désingularisation de Q, on a alors*

$$\mathrm{Def}_\Lambda(Q) \simeq \mathrm{Out}(R_p) = \mathrm{Aut}(R_p)/\mathrm{Int}(R_p).$$

Démonstration. Il est facile de voir que l'application p induit un morphisme $\mathrm{Aut}(R_p) \to \mathrm{Def}_\Lambda(Q)$ de noyau $\mathrm{Int}(R_p)$. Ce morphisme est surjectif. En effet soit $\rho : Q \to Q$ une bijection préservant Λ. Il existe une bijection désingularisante $\overline{\rho} : \Omega \to \Omega$, où Ω est une partie borélienne de X. On peut alors étendre $\overline{\rho}$ à X en considérant des expressions de la forme $\psi_i \overline{\rho} \phi_i$ où $\phi_i : \Omega_i \to \Omega$ et $\psi_i : \Omega \to \Omega_i$ sont des isomorphismes partiels (intérieurs) de R_p et $X = \Omega \amalg \Omega_i$ est une partition bien choisie. ∎

Terminons par une définition.

Définition. *On dira qu'un espace singulier Q est* de type fini *si toute désingularisation discrète est de type fini, i.e. possède un graphage u.l.f. (uniformément localement fini).*

Notons qu'un espace singulier est de type fini si et seulement si toute désingularisation discrète peut être engendrée par un nombre fini d'isomorphismes partiels.

Références. La notion d'équivalence orbitale stable a été introduite par Mackey [33]. Elle a depuis été étudiée des deux points de vue borélien et mesuré ; cf. [27] et [16, 18] pour des références récentes. La considération d'espaces quotients singuliers et de désingularisations a été initiée par Connes dans [7]. Nous renvoyons également à [6], par exemple, pour d'autres développements.

4. Structures quasi-périodiques et représentations

Notre but dans ce paragraphe est de présenter les notions de représentation hilbertienne et de structure simpliciale associées à une relation d'équivalence mesurée, suivant [7] et [18]. Comme annoncé en introduction, nous en profitons pour analyser le concept de quasi-périodicité, et notamment sa formalisation à l'aide de la théorie de la mesure. Une structure quasi-périodique sur un espace est dans ce formalisme une représentation de relation d'équivalence satisfaisant à des propriétés de type « fidélité ». La possibilité nous est offerte de commencer par une description générale de la situation, en termes de catégories et foncteurs, isolant celles des représentations qui sont susceptibles de conduire aux structures quasi-périodiques. Cette description est uniquement destinée

à fixer les idées et reste informelle. Une fois ce contexte général précisé, nous pourrons nous pencher plus attentivement sur les cas particuliers des complexes simpliciaux et des espaces de Hilbert.

I - Le cadre général. Nous suivrons bien entendu le principe de base, de ne considérer que des structures que l'on peut « contruire effectivement » (i.e. sans recourir à l'axiome du choix). Nous les appelerons « définissables » dans ce paragraphe. La signification exacte de ce terme ne sera précisée qu'au paragraphe suivant, concernant les cas particuliers. On le remplacera alors par le terme « mesurables » pour éviter toute ambiguïté.

Fixons une catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont des ensembles.

Soit R une relation d'équivalence (ou un groupoïde) borélienne sur un espace X, considérée comme une petite catégorie dont les objets sont les points de X et les morphismes les éléments de R. On appelle *représentation de R dans $\mathcal{C}$* la donnée d'un foncteur *définissable* $F : R \to \mathcal{C}$ (que l'on supposera contravariant).

Lorsque R est une relation d'équivalence mesurée, on appelera encore représentation de R la donnée d'un foncteur F dont les lois de composition ont lieu *presque sûrement* (i.e. F est une représentation d'une relation $R_{|X'}$ où $X' \subset X$ est un borélien de complémentaire négligeable).

Soit Q un espace singulier et $p : X \to Q$ une désingularisation discrète. On note $R = R_p$ la relation d'équivalence mesurée associée. Une représentation F de R induit une action (encore notée F) de R sur l'ensemble

$$F(X) = \amalg_{x \in X} F(x).$$

On considère pour chaque $q \in Q$ l'ensemble quotient

$$\underline{F}(q) = \amalg_{x \in p^{-1}(q)} F(x)/\sim,$$

obtenu en identifiant $F(y)$ et $F(x)$ par $F(x, y)$, comme un objet de $\mathcal{C}$. On obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d] & O(\mathcal{C}) \arrow[d] \\ Q \arrow[r, "\underline{F}"] & O(\mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

où $\underline{F}$ est une application définissable de Q dans les objets $O(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$.

Un exemple. Prenons pour $\mathcal{C}$ la droite réelle $\mathbf{R}$ (sans morphisme), pour laquelle la notion de foncteur définissable (i.e. mesurable) $F : R \to \mathbf{R}$ est claire. Tout foncteur mesurable est, par ergodicité, presque sûrement constant, et l'espace $\underline{F}(Q)$ est, à un négligeable près, un nombre réel usuel. Cet exemple concerne plus généralement toute catégorie dont les objets sont des points, i.e. lorsqu'on choisit pour $\mathcal{C}$ un espace topologique séparable sans morphisme : un point ne possède pas de notion intéressante de quasi-périodicité (au sens suivant).

On appelle *élément Q-périodique de $\mathcal{C}$* le R-espace constitué par l'image

$$F(X)$$

d'un foncteur F de R dans $\mathcal{C}$, *lorsque que l'action de R sur $F(X)$ admet un domaine fondamental définissable* au sens où il existe une partie définissable

$$D = \amalg_{x \in X} D_x \subset F(X)$$

qui rencontre chaque orbite exactement une fois. En d'autres termes on a

$$F(x) = \amalg_{y \sim x} F(x, y) D_y.$$

pour presque tout $x \in X$.

À un élément Q-périodique de $\mathcal{C}$ est associée la *lamination* $\underline{F}(Q) = F(X)/R_p$ obtenue en considérant l'espace quotient de $F(X)$ par l'action de R_p via F.

Commentaires. 1. - Ainsi, bien qu'un espace singulier soit un ensemble au sens usuel du terme, ses points contiennent *a priori* trop d'informations pour être véritablement considérés comme des points. La structure singulière sur cet ensemble détermine des relations entre chacun de ses points, et ces relations prennent ensuite effet lorsque l'on substitue à chacun d'eux un élément d'une catégorie fixée par la procédure ci-dessus.

2. - On comprend facilement le terme « quasi-périodique » lorsque le domaine fondamental D est *localement trivial*, au sens où il admet une partition dénombrable $D = \amalg_i (X_i \times D_i)$, où $X_i \subset X$ est une partie définissable non négligeable : par ergodicité presque toute feuille de cette lamination contient pour tout i une infinité de copie de D_i « uniformément réparties » (chaque partie D_i apparaissant avec une certaine « proportion » dans le cadre mesuré). Dans le cas général, il y a une « dépendance définissable » entre deux parties D_x et D_y pour x et y dans une même feuille. Le cas non ergodique concerne le mélange de différents concepts de quasi-périodicité.

3. - La définition de domaine fondamental donnée ici nécessitera d'être adaptée à chaque catégorie particulière. Par exemple, pour la catégorie des complexes simpliciaux, on supposera que chaque partie D_x est simpliciale.

4. - La lamination associée à un élément Q-périodique de $\mathcal{C}$ s'identifie de façon définisssable au domaine fondamental D. Le choix d'une section définissable du fibré $D \to X$ détermine alors un plongement transverse de X de cette lamination.

5. - On reprend essentiellement ici des techniques introduites par A. Connes dans [7]. Rappelons qu'il est construit dans [7], à l'aide de ces techniques, une théorie de l'intégration (transverse) « en présence d'un groupoïde mesuré ». Celle-ci permet d'intégrer des « fonctions positives » définies sur l'espace Q des orbites de ce groupoïde, où une fonction positive est une application qui à une orbite $q \in Q$ associe un espace mesuré standard (Y_q, α_q), où α_q est une mesure positive sur Y_q. Décrire la mesurabilité d'une telle application conduit naturellement à la notion de foncteur mesurable du groupoïde vers les espaces mesurés. L'intégration d'une telle fonction s'effectue à l'aide d'une mesure transverse quasi-invariante, associée à un cocycle δ défini sur le groupoïde (son module).

II - Exemples de catégories. Définissons plus précisément la notion de mesurabilité pour les catégories suivantes :
- ensembles dénombrables/bijections,
- espaces boréliens standard/isomorphismes mesurables,
- complexes simpliciaux/isomorphismes simpliciaux,
- espace de Hilbert/opérateurs unitaires.

Soit Q un espace mesuré singulier.

1 - La catégorie des ensembles dénombrables ou des boréliens standard. Commençons par un exemple simple. Soit $p : X \to Q$ une désingularisation discrète de Q. Le foncteur naturel $F : X \to R_p$, qui à $x \in X$ associe $R_p^x = \{(x, y)\} \subset R_p$ et à (x, y) l'application évidente $R_p^y \to R_p^x$, est mesurable et définit l'ensemble dénombrable Q-périodique R_p. La lamination associée est l'espace $X = R_p/R_p$ et on a $\underline{F} = p^{-1}$.

Plus généralement soit R une relation d'équivalence mesurée et $F : R \to \mathcal{C}$ une représentation de R dans la catégorie des espaces boréliens standard et des isomorphismes mesurables (ou des ensembles dénombrables et des bijections). On définit la mesurabilité de F de la façon suivante (cf. [7]). Soit $\tilde{\Omega}$ la réunion disjointe

$$\tilde{\Omega} = \amalg_{x \in X} F(x).$$

On dit que F est *mesurable* si $\tilde{\Omega}$ possède une structure d'espace borélien standard compatible avec les restrictions aux fibres définie par la projection naturelle $\tilde{p} : \tilde{\Omega} \to X$, telle que $\tilde{p}$ et l'application $R * \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}$ définie par

$$(x, y) * a \mapsto F(x, y)a$$

soient mesurables (où $R * \tilde{\Omega}$ est le produit fibré de R et $\tilde{\Omega}$, i.e. l'ensemble des couples $((x, y), a)$ tels que $\tilde{p}(a) = y$, cf. [18] par exemple). La notion de domaine fondamental *borélien* $D \subset \tilde{\Omega}$ est claire (D est une partie borélienne rencontrant exactement une fois chaque orbite) et il en résulte une notion d'espace borélien standard Q-périodique (cf. ci-dessus). À chaque espace borélien standard Q-périodique est associée une lamination

sur l'espace $\Omega = \underline{F}(Q)$ (standard) muni de la désingularisation $p : \Omega \to Q$ obtenue par passage au quotient de l'application $\tilde{p} : \tilde{\Omega} \to X$ par les actions naturelles de R.

2 - La catégorie des complexes simpliciaux. Soit $p : \Sigma \to Q$ une désingularisation de Q. On dit que Σ est *une désingularisation simpliciale de* Q si pour tout $x \in \Sigma$ la classe $\Sigma_x \subset \Sigma$ de x est munie d'une structure simpliciale connexe, i.e. d'une partition $\Sigma_x = \amalg_{i \geqslant 0} \Sigma_x^{(i)}$ en simplexes non orientés de dimension i (satisfaisant aux conditions usuelles de compatibilité), telle que les parties $\Sigma^{(i)} \subset \Sigma$ constituées des simplexes de dimension i soient boréliennes.

Soit R une relation d'équivalence mesurée. On dit qu'un foncteur F de R dans la catégorie des (réalisations géométriques de) complexes simpliciaux (non orientés) est *mesurable* s'il est mesurable en tant que foncteur à valeurs dans les espaces boréliens standard, et si les parties $\tilde{\Omega}^{(i)} \subset \tilde{\Omega} = F(X)$ constituées des simplexes de dimension i sont boréliennes. On dit que F admet un domaine fondamental borélien si, de même que ci-dessus, il existe une partie borélien $D \subset \tilde{\Omega}$ rencontrant exactement une fois chaque orbite ; la notion de complexe simplicial Q-périodique en résulte. Elle coïncide (à réalisation géométrique près) avec la notion de R-complexe simplicial définie par D. Gaboriau dans [18].

On associe à une désingularisation simpliciale de Q un complexe simplicial Q-périodique de la façon suivante. Fixons une désingularisation simpliciale $p : \Sigma \to Q$ de Q. Notons $X = \Sigma^{(0)}$ la lamination des sommets et $p^{(0)} : X \to Q$ la désingularisation discrète associée. Soit $R = R_{p^{(0)}} = \tilde{\Sigma} \cap X \times X$, où $\tilde{\Sigma} = \Sigma_p \subset \Sigma \times \Sigma$ est la relation d'équivalence associée à p. Il est facile de voir que le foncteur F de R dans $\tilde{\Sigma}_X = (X \times \Sigma) \cap \tilde{\Sigma} \subset \tilde{\Sigma}$ qui à $x \in X$ associe le complexe $\tilde{\Sigma}_x \subset \tilde{\Sigma}_X$ et à $(x, y) \in R$ l'isomorphisme naturel $\tilde{\Sigma}_y \to \tilde{\Sigma}_x$ est mesurable. De plus la donnée d'une section mesurable de la projection sur la seconde coordonnée $\tilde{\Sigma}_X \subset X \times \Sigma \to \Sigma$ (à fibres dénombrables) détermine un domaine fondamental borélien et, choisissant convenablement cette section, on définit ainsi un domaine fondamental (borélien) simplicial. Réciproquement à un complexe simplicial Q-périodique, donné par un foncteur F, on associe la désingularisation simpliciale $\Sigma = F(X)/R \to Q$ obtenue en considérant F comme un foncteur à valeurs dans la catégorie des espaces boréliens standard, où la partition borélienne $\Sigma = \amalg_{i \geqslant 0} \Sigma^{(i)}$ est donnée par la projection naturelle (à fibres dénombrables) de $F(X)^{(i)}$ dans Σ. Les deux opérations décrites dans ce paragraphe sont inverse l'une de l'autre, identifiant ainsi la catégorie des désingularisations simpliciales de Q à celle des complexes simpliciaux Q-périodiques.

Remarques. i. Un complexe simplicial quasi-périodique est nécessairement localement trivial (au sens défini au paragraphe I) du fait qu'il ne possède qu'un nombre dénombrable de géométries locales possibles.

ii. Le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\tilde{\Sigma})$ d'un complexe simplicial quasi-périodique $\tilde{\Sigma}$ est formé des bijections boréliennes de $\Sigma = \tilde{\Sigma}/R$, non singulières et définies à un négligeable près, qui respectent la structure simpliciale longitudinale. Le sous-groupe distingué $\mathrm{Int}(\tilde{\Sigma})$ est formé des éléments de $\mathrm{Aut}(\tilde{\Sigma})$ qui fixent l'espace singulier quotient. Notons que $\mathrm{Out}(\tilde{\Sigma}) = \mathrm{Aut}(\tilde{\Sigma})/\mathrm{Int}(\tilde{\Sigma})$ différe en général de $\mathrm{Out}(R)$.

iii. Étant donné un complexe simplicial Q-périodique $\tilde{\Sigma}$, la famille des boréliens standard Q-périodiques inclus dans $\tilde{\Sigma}$ forme une sous-tribu de la tribu borélienne de $\tilde{\Sigma}$. La donnée d'une mesure quasi-invariante μ sur $X = \Sigma^{(0)}$ et d'un système de Haar s sur $\tilde{\Sigma}$ (i.e. un champ invariant $(s^x)_{x\in X}$ de mesures sur $\tilde{\Sigma}$ telle que la mesure s^x soit portée par le complexe simplicial $\tilde{\Sigma}_x \subset \tilde{\Sigma}$) détermine une mesure $\mathfrak{h}_\mu^{(s)}$ sur cette tribu (cf. [7, 18]).

Complexe quasi-périodique universel. Il existe un unique (à isomorphisme près) complexe simplicial Q-périodique, contenant une copie isométrique de tout autre complexe simplicial Q-périodique [18].

On dit qu'un complexe simplicial Q-périodique est un *arbre Q-périodique* si presque toute ses classes sont des arbres, et qu'un espace singulier Q est *arborable* s'il existe un arbre Q-périodique. De même on définit ainsi les notions de dimension, p-connexité, etc., d'un complexe simplicial quasi-périodique (cf. [17, 18]).

3 - La catégorie des espaces de Hilbert. Rappelons enfin la notion de foncteur mesurable à valeurs dans la catégorie hilbertienne ([7]).

Soit X un espace borélien standard et R une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables sur X. Soit H un champ mesurable d'espaces hilbertiens de base X (cf. [13]).

Une *représentation unitaire de R sur H* est la donnée d'une famille d'opérateurs unitaires

$$\pi(x, y) : H_y \to H_x,$$

$(x, y) \in R$, satisfaisant aux conditions de composition et de mesurabilité suivantes :
- $\pi(x, x) = \mathrm{Id}$ et $\pi(x, z) = \pi(x, y)\pi(y, z)$ pour tout $x \sim y \sim z$.
- les coefficients

$$(x, y) \mapsto \langle \pi(x, y)\xi_y | \eta_x \rangle_x$$

  sont mesurables pour tous champs de vecteurs mesurables $\xi, \eta : X \to H$.

Exemples. Représentation triviale de R. La représentation triviale de R est la famille $(x, y) \mapsto 1 \in \boldsymbol{S}^1 \subset \mathbf{C}$ opérant sur le champ constant $H = X \times \mathbf{C}$ de fibre $\mathbf{C}$ (cf. [37]).

Représentation régulière de R. On considère le champ d'espaces de Hilbert $H : x \mapsto \ell^2(R^x, \mathfrak{h}^x)$ qui à tout point $x \in X$ associe l'espace des fonctions de carré intégrable sur la classe d'équivalence de x pour la mesure de décompte horizontal $\mathfrak{h}^x$. Comme $\mathfrak{h}^x = \mathfrak{h}^y$ pour tout $(x, y) \in R$, les espaces $\ell^2(R^y, \mathfrak{h}^y)$ et $\ell^2(R^x, \mathfrak{h}^x)$ sont naturellement identifiés par un opérateur unitaire $\pi(x, y)$; explicitement,

$$\pi(x, y) : \ell^2(R^y) \to \ell^2(R^x)$$

est défini par $\pi(x, y)f(x, z) = f(y, z)$.

Intégration d'une représentation. Soit π une représentation unitaire de R sur un champ d'espaces de Hilbert H de base X. Soit μ une mesure de probabilité quasi-invariante sur X. Considérons l'espace de Hilbert $L^2(X, H)$ des sections de H de carré intégrable pour μ. On définit pour tout sous-groupe dénombrable $\Gamma \subset [R]$ du groupe plein de R une représentation unitaire $\overline{\pi}$ sur $L^2(X, H)$ par la formule

$$\overline{\pi}(\gamma)\xi : x \mapsto \pi(x, \gamma^{-1}x)\xi_{\gamma^{-1}x}\sqrt{\delta(x, \gamma^{-1}x)}$$

où δ est le module de μ.

Considérons deux représentations π et π' d'une relation d'équivalence mesurée R. On appelle *opérateur d'entrelacement* entre π et π' la donnée d'un champ mesurable essentiellement borné d'opérateurs $(T_x)_{x\in X}$ tels que

$$T_x\pi(x, y) = \pi'(x, y)T_y$$

pour tout $(x, y) \in R$.

Espaces de Hilbert quasi-périodiques. Nous n'utiliserons pas et ne définirons pas cette notion dans cet article. Il sera naturel de dire qu'une représentation hilbertienne possède domaine fondamental si l'action obtenue par restriction au fibré en sphère unité en possède un, en un sens à préciser. L'exemple fondamental est celui de la représentation régulière associée à une désingularisation discrète $X \to Q$ d'un espace singulier Q. La lamination associée est donnée par $[x] \to \ell^2([x])$ qui à une classe $[x] \in Q$ associe l'espace des fonctions de carré intégrable définies sur cette classe. Pour des considérations récentes sur la dynamique des groupes dénombrables de transformations unitaires sur la sphère unité d'un espace de Hilbert, nous renvoyons à [36] par exemple.

III - Quelques commentaires.

Périodicité. L'espace singulier définissant les structures périodiques est le point (l'espace singulier ergodique de type I). Les désingularisations associées proviennent d'actions (propres) de groupes localement compacts : il est nécessaire ici d'étudier les groupes désingularisants sans se restreindre aux seules relations d'equivalence. Notons qu'il est également possible de mener une telle étude pour les espaces singuliers non triviaux, où l'on étudie des groupoïdes désingularisants [7]. Pour les besoins cet article, cependant, les relations d'équivalence suffisent.

Périodicité et quasi-périodicité. Soit Γ un groupe dénombrable et Y un Γ-complexe simplicial cocompact (ainsi Y est un complexe simplicial périodique). On peut munir Y d'une structure quasi-périodique de la façon suivante. Soit α une action ergodique de Γ sur un espace de probabilité (X, μ) et $R = R_\alpha$ la relation d'équivalence associée. L'action diagonale de Γ sur $X \times Y$ détermine une lamination

$$\Sigma = (X \times Y)/\Gamma,$$

qui est une désingularisation simpliciale de $Q = X/R$. On dira que le complexe simplicial Q-périodique $\tilde{\Sigma}$ associé à Σ *définit une structure Q-périodique sur Y*. (cf. [18, §3.4])

Faisons une constatation simple, extraite de [21, §5.33], illustrant cette idée. Désignons par $\mathbf{R}$ la droite réelle. Tout recouvrement périodique, disons $\mathbf{Z}$-invariant (où $\mathbf{Z}$ agit par translation), de cette droite par des intervalles de longueur n a multiplicité au moins n. Par ailleurs, on peut construire un recouvrement quasi-périodique (défini par exemple via un feuilletage irrationnel du tore) de $\mathbf{R}$ par des intervalles de longueur n, avec multiplicité au plus 2.

D'autres catégories. Nous étudierons prochainement, en collaboration avec S. Vassout, la notion de variété riemannienne quasi-périodique en relation avec la signature L^2. Plus généralement, toute catégorie d'espaces métriques séparables (espaces CAT(0),...) est *a priori* naturellement sujette à quasi-périodicité.

Notons aussi que certains espaces fonctionnels peuvent également jouir de propriétés de quasi-périodicité. Par exemple, si $p : X \to Q$ est une désingularisation discrète de Q, le fibré mesurable $x \mapsto \ell^\infty([x])$, où $[x]$ désigne la classe de $x \in X$, définit « l'espace ℓ^∞ quasi-périodique »

$$[x] \mapsto \ell^\infty([x]).$$

Cet espace est muni d'une structure d'algèbre (effectuer les opérations classe par classe) et la norme donnée par le supremum essentiel des normes ℓ^∞ en fait une algèbre de von Neumann (il s'agit bien sûr de $L^\infty(X)$). De même, si $[x] \mapsto \ell^2([x])$ est l'espace de Hilbert quasi-périodique associé à la représentation régulière de R_p, l'espace quasi-périodique

$$[x] \mapsto B(\ell^2([x]))$$

des opérateurs bornés sur $\ell^2([x])$ (où $[x] \mapsto q_{[x]}$ est mesurable au sens où les fonctions $x \mapsto \langle q_{[x]}\xi_x \mid \eta_x\rangle$ sont mesurables pour toutes sections mesurables ξ, η de $\amalg_{x\in X}\ell^2([x])$) est une algèbre et le supremum essentiel en fait une algèbre de von Neumann, qui contient $L^\infty(X)$, agissant par multiplication (il s'agit de l'algèbre de von Neumann de la relation d'équivalence R_p). Nous renvoyons ici à [8, I.4.γ].

5. Ergodicité forte

Soit (X, μ) un espace de probabilité. Fixons une famille dénombrable Φ d'isomorphismes partiels de X préservant la classe de μ et considérons le pseudo-groupe $\Gamma = \langle\Phi\rangle$ engendré par Φ. On dit qu'une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ de parties boréliennes de X est *asymptotiquement invariante* sous l'action de Γ si pour tout Φ-mot m de domaine $D \subset X$, on a

$$\mu(m(A_n \cap D)\backslash A_n) \to_n 0.$$

La notion de suite asymptotiquement invariante est classique et s'énonce traditionellement en terme d'actions de groupe. Si $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(X, \mu)$ est un groupe agissant

en préservant la classe de μ, on dit qu'une suite (A_n) de parties boréliennes de X est *asymptotiquement invariante* sous l'action de Γ si

$$\mu(\alpha(\gamma)A_n \Delta A_n) \to_n 0$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Il est facile de voir que les deux définitions données ci-dessus lorsque Φ est constitué d'isomorphismes de X coïncident (voir également le lemme 10). Une suite asymptotiquement invariante (A_n) est dite *non triviale* s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\delta \leqslant \mu(A_n) \leqslant 1 - \delta.$$

Rappelons également qu'une suite (A_n) est asymptotiquement invariante étant donnée une action α d'un groupe Γ si et seulement si

$$\mu(\varphi A_n \Delta A_n) \to_n 0.$$

pour tout $\varphi \in [R_\alpha]$ et l'existence de suites asymptotiquement invariantes non triviales ne dépend donc que de la relation d'équivalence $R = R_\alpha$ associée à l'action de Γ. On dit alors qu'une relation d'équivalence ergodique R est *fortement ergodique* si toute suite asymptotiquement invariante sous l'action de $[R]$ est triviale (cf. [11, 41, 12, 42, 28]). On vérifie facilement que cette propriété ne dépend que de la classe de μ.

Lemme 10. *Soit $\Gamma = \langle \Phi \rangle$ un pseudo-groupe d'isomorphismes partiels agissant ergodiquement sur (X, μ). L'existence de suites asymptotiquement invariantes non triviales sous l'action de Γ est invariante par équivalence orbitale stable, i.e. est une propriété de l'espace singulier $Q = X/\Gamma$ des orbites de Γ sur X.*

Démonstration. Montrons d'abord que l'invariance asymptotique sous l'action de Γ équivaut à l'invariance asymptotique sous l'action du groupe plein $[\Phi]$ de la relation d'équivalence R engendrée par Φ (cf. [28, 26]). Fixons une suite (A_n) asymptotiquement invariante sous l'action de Γ. Soient $\varphi \in [\Phi]$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Soient $m_1, \ldots, m_k$ une famille finie de Φ-mots et $\Omega_1, \ldots \Omega_k$ une famille finie de boréliens disjoints tel que $m_i(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \Omega_i$ et $\mu(\varphi A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon/2$, où $A_\varepsilon = X \setminus \amalg \Omega_i$. Alors

$$\varphi A_n \setminus A_n = \amalg_1^k \, (m_i(A_n \cap \Omega_i) \setminus A_n) \amalg \varphi A_\varepsilon \setminus A_n \subset \cup_1^k \, (m_i(A_n \cap D_i) \setminus A_n) \cup \varphi A_\varepsilon \setminus A_n$$

où D_i est le domaine de m_i. Pour tout n suffisament grand on a par hypothèse $\mu(m_i(A_n \cap D_i) \setminus A_n) \leqslant \varepsilon/2k$. Donc $\mu(\varphi A_n \setminus A_n) \to 0$. Ainsi

$$\mu(\varphi A_n \Delta A_n) \to 0,$$

car $A_n \setminus \varphi A_n = \varphi(\varphi^{-1} A_n \setminus A_n)$, et (A_n) est asymptotiquement invariante pour $[\Phi]$.

Réciproquement soit $m : D \to D'$ un Φ-mot. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ une famille d'isomorphismes partiels de domaines respectifs $D_1, \ldots, D_k$ disjoints tels que $m(x) = \varphi_i(x)$ pour tout $x \in D_i$, et tels que $\mu(\varphi_i(D_i) \cap D_i) = 0$. On peut supposer $\mu(m(D_\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est un nombre réel fixé et $D_\varepsilon = D \setminus \amalg D_i$ [14]. Alors

$$m(A_n \cap D) \setminus A_n = \amalg_1^k \, (\varphi_i(A_n \cap D_i) \setminus A_n) \amalg m(D_\varepsilon) \setminus A_n \subset \cup_1^k \, \overline{\varphi}_i(A_n) \setminus A_n \cup m(D_\varepsilon) \setminus A_n$$

où $\overline{\varphi}_i$ est l'extension de φ_i à X en un isomorphisme d'ordre 2 coincidant avec l'identité sur $X \setminus (D_i \cup \varphi_i(D_i))$. Ainsi $\mu(m(A_n \cap D) \setminus A_n) \to 0$, donc (A_n) est asymptotiquement invariante pour $\Gamma = \langle \Phi \rangle$.

Montrons l'invariance par équivalence orbitale stable. Soit $Y \subset X$ un borélien non trivial rencontrant toutes les orbites de R. Soit $A_n \subset Y$ une suite asymptotiquement invariante non triviale pour $R_{|Y}$. Considérons un graphage Φ de $R_{|Y}$ et une famille Ψ d'isomorphismes partiels $X \setminus Y \to Y$ de R dont les domaines forment une partition de $X \setminus Y$. Alors $\tilde{\Phi} = \Phi \cup \Psi$ est un graphage de R et la suite (A'_n) des saturés de A_n par Ψ est $\tilde{\Phi}$-asymptotiquement invariante et non triviale (il suffit de vérifier l'invariance asymptotique sur les générateurs d'un graphage).

Réciproquement, soit (A_n) une suite asymptotiquement invariante non triviale pour R. Notons qu'il suffit de montrer qu'il existe un borélien $Y_0 \subset Y$ rencontrant toutes les orbites de R contenant des suites asymptotiquement invariantes pour $R_{|Y_0}$. Considérons un borélien $Y_0 \subset Y$ rencontrant toutes les orbites de R pour lequel il existe une partition $X \setminus Y_0 = \amalg_{i \geqslant 1} Y_i$ en domaines Y_i d'isomorphismes partiels $Y_i \simeq Y_0$. Notons que comme (A_n) est asymptotiquement invariante, on a

$$\mu(A_n \cap Y_i) \to_n 0 \Longleftrightarrow \mu(A_n \cap Y_j) \to_n 0$$

pour tous $i, j \geqslant 0$ fixés. Ainsi $(A_n \cap Y_0)_n$ définit une suite non triviale de $R_{|Y_0}$, au sens où l'on peut trouver une sous-suite (A'_m) de $(A_n \cap Y_0)_n$ dont la mesure converge vers un nombre réel non nul distinct de $\mu(Y_0)$. Cette suite est asymptotiquement invariante car si φ est un isomorphisme de $R_{|Y_0}$, il s'étend par l'identité en un isomorphisme de R, et

$$\varphi(A'_m) \Delta A'_m = \varphi(A_m) \Delta A_m.$$

■

Définition. *Soit Q un espace singulier ergodique. On dit que Q est* fortement ergodique *si toute suite asymptotiquement invariante d'une désingularisation discrète est triviale.*

Théorème 11 (Jones-Schmidt [28]). *Soit Q un espace singulier ergodique. On a l'alternative suivante :*

- *soit Q possède un quotient moyennable ergodique non trivial,*
- *soit Q est fortement ergodique.*

Rappelons la définition suivante, qui s'adapte immédiatement aux espaces singuliers.

Définition. *Soit R, resp. $\underline{R}$, une relation d'équivalence mesurée ergodique sur un espace de probabilité (X, μ), resp. $(\underline{X}, \underline{\mu})$. On dit que $\underline{R}$* est un quotient de *R s'il existe une application borélienne surjective non singulière $p : X \to \underline{X}$ tel que $p^{(1)}(R) = \underline{R}$, où $p^{(1)}(x, y) = (p(x), p(y))$.*

Nous renvoyons pour l'exposé des résultats connus concernant l'ergodicité forte, et notamment pour une démonstration du théorème de Jones-Schmidt, à l'article récent de G. Hjorth et A. Kechris [26, App. 1].

6. Concentration

Ce paragraphe est essentiellement inspiré de l'observation suivante de Gromov, extraite de [22],

"If X is foliated (i.e. partitioned) into the orbits of an amenable *group G acting on X, then the resulting d on X is, essentially, never concentrated. But if G has property T, then it is concentrated."*

Soit un espace métrique-mesuré (X, d, μ) au sens de Gromov [22], où l'on permet que $d(x, y) = \infty$. Plus précisément X est un espace borélien standard, μ est une mesure de probabilité sans atome sur X, et d est une application borélienne satisfaisant aux axiomes traditionnels d'une distance, excepté que ses valeurs parcourent $[0, \infty]$. De plus, on suppose que, si $R = R_d \subset X \times X$ désigne la relation d'équivalence borélienne des couples (x, y) de points à distance finie, la mesure μ est *quasi-invariante* relativement à R.

Exemple. Considérons un feuilletage lisse sur une variété compacte. La donnée d'un champ mesurable de métriques sur chaque feuille détermine un espace métrique-mesuré, où on pose

$$d(x, y) = d_\ell(x, y)$$

si x, y sont sur une même feuille ℓ et $d(x, y) = \infty$ sinon. Notons que la probabilité pour la classe de Lebesgue que deux points soient à distance finie est nulle. Ici R est la relation d'équivalence sous-jacente au groupoïde d'holonomie (partition en feuilles).

Exemple. Soit R une relation d'équivalence mesurée. Un graphage K de R définit naturellement une métrique d_K sur les orbites (distance simpliciale).

Étant donnés deux parties boréliennes $A, B \subset X$ on note

$$d(A,B) = \inf_{x\in A}{}^{\mu} \inf_{y\in B} d(x,y)$$

où le symbole « $\inf^{\mu}$ » désigne l'infimum essentiel relativement à μ (et le symbole « inf » l'infimum usuel).

Définition ([22]). *On dit que (X,d,μ) est* concentré *s'il existe une fonction $c :]0,1]^2 \to \mathbf{R}_+$, telle que pour tous boréliens non négligeables $A, B \subset X$, on a*

$$d(A,B) \leqslant c(\mu(A), \mu(B)).$$

On vérifie facilement que cette définition est équivalente la suivante : pour tout $\delta > 0$ il existe une constante r_δ telle que pour tous boréliens $A, B \subset X$, on a

$$\mu(A),\ \mu(B) \geqslant \delta \Longrightarrow d(A,B) \leqslant r_\delta.$$

Notons que la fonction $c(\delta,\delta') = \sup\{d(A,B) \mid \mu(A) = \delta,\ \mu(B) = \delta'\}$ est décroissante à δ fixé.

Remarque. La définition qualitative donnée ci-dessus est insuffisante pour obtenir, comme dans la situation classique, des résultats sur la concentration des fonctions 1-lipschitziennes (voir aussi [37, thm. 4]).

Observons que les espaces métriques-mesurés concentrés sont en particulier ergodiques, au sens où R est ergodique relativement à μ ou, de façon équivalente, au sens suivant.

Définition. *Soit (X,d,μ) un espace métrique-mesuré au sens ci-dessus. On dit que d est* ergodique *(relativement à μ) si pour toutes parties boréliennes $A, B \subset X$ non négligeables, on a $d(A,B) < \infty$.*

Théorème 12. *Soit (X,μ) un espace borélien standard et Φ une famille finie d'isomorphismes partiels (préservant la classe de μ et) induisant une métrique ergodique $d = d_\Phi$ sur X. Alors X est concentré si et seulement s'il ne contient pas de boréliens asymptotiquement invariants non triviaux sous l'action du pseudo-groupe $\Gamma = \langle\Phi\rangle$.*

Démonstration. Soit (A_n) une suite asymptotiquement invariante telle que

$$\delta \leqslant \mu(A_n) \leqslant 1 - \delta.$$

Supposons en raisonnant par l'absurde que l'espace X soit concentré et considérons un entier $r = r_{\delta/2}$ telle que si $\mu(A), \mu(B) \geqslant \delta/2$ alors $d(A,B) \leqslant r$. Soit $F = \{m^1, m^2, \ldots, m^f\}$ la famille finie des Φ-mots de longueur $\leqslant r$. Notons $B_n = X \backslash A_n$

et fixons un mot $m^i \in F$, de domaine D^i. Soit (D^i_n) la suite de boréliens définis par $D^i_n = \{x \in D^i \cap A_n |\, m^i(x) \in B_n\}$. Par définition de A_n on a

$$\mu(m^i(A_n \cap D^i) \backslash A_n) \to 0,$$

i.e., $\mu(m^i(D^i_n)) \to 0$, et il existe un entier N_i suffisament grand pour que pour $n \geqslant N_i$,

$$B^{m_i}_n = B_n \backslash m^i(D^i_n)$$

soit de mesure $\geqslant \delta - \frac{\delta}{2f}$. Choisissons $N = \max_i N_i$ et considérons le borélien $C_N = \cap_i B^{m^i}_N$, de mesure $\geqslant \delta/2$. On a

$$\mu(m(A_N \cap D) \cap C_N) = 0$$

pour tout mot $m \in F$ de domaine D. En d'autres termes $d(A_N, C_N) > r$, contrairement à l'hypothèse.

Réciproquement supposons que X ne soit pas concentré et construisons une suite asymptotiquement invariante. Soit (A_n), (B_n) deux suites de boréliens de taille $\geqslant \delta$ tels que

$$d(A_n, B_n) \geqslant n + 1.$$

Ainsi la « boule » de centre A_n et de rayon n est disjointe de B_n ; on supposera que B_n coïncide avec le complémentaire de cette boule. Construisons une suite de fonctions

$$\pi_n \in L^\infty(X, \mu)$$

de la façon suivante. Sur A_n (resp. B_n), on pose $\pi_n = 1$ (resp. 0). Sur la sphère de centre A_n et de rayon $i = 1 \ldots n$, on pose $\pi_n = 1 - 1/i$. Soit m un Φ-mot de domaine D et de longueur l. Il est clair que pour presque tout $x \in D$ on a

$$|\pi_n(m(x)) - \pi_n(x)| \leqslant \frac{l}{n}.$$

Plus généralement pour tout automorphisme partiel $\varphi \in [[R]]$ tel que

$$|\varphi| = \int_{D'} d(\varphi^{-1}x, x) d\mu(x) < \infty$$

où D' est l'image de φ, on a

$$\begin{aligned} ||(\pi_n \circ \varphi^{-1} - \pi_n)_{|D'}||_1 &= \int_{D'} |\pi_n(\varphi^{-1}x) - \pi_n(x)| d\mu(x) \\ &\leqslant \int_{D'} \frac{d(\varphi^{-1}x, x)}{n} d\mu(x) = \frac{|\varphi|}{n} \to_n 0. \end{aligned}$$

Notons $A^\alpha_n = \{\pi_n \geqslant \alpha\}$. On a pour tout $x \in D'$,

$$|\pi_n(\varphi^{-1}x) - \pi_n(x)| = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} \chi_{\varphi(A^{1-i/n}_n \cap D) \,\Delta\, (A^{1-i/n}_n \cap D')}(x),$$

où D est le domaine de φ. Donc

$$||(\pi_n \circ \varphi^{-1} - \pi_n)_{|D'}||_1 = \int_0^1 \mu(\varphi(A_n^\alpha \cap D)\Delta(A_n^\alpha \cap D'))d\alpha.$$

Il en résulte, quitte à extraire une sous-suite, que

$$\mu(\varphi(A_n^\alpha \cap D)\backslash A_n^\alpha) \to 0$$

pour presque tout α.

Par définition $|\varphi| = \mu(D')$ pour tout isomorphisme partiel $\varphi \in \Phi$ d'image D'. Comme Φ est de cardinal fini, on obtient ainsi par extractions successives une sous-suite (A_m) de (A_n) telle que $\mu(\varphi(A_m^\alpha \cap D)\backslash A_m^\alpha) \to 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$ et presque tout α. Comme il suffit de vérifier l'invariance asymptotique sur un système générateur de R, presque toute suite (A_m^α) est asymptotiquement invariante sous l'action de $\Gamma = \langle \Phi \rangle$. De plus, elles sont non triviales pour $\alpha > 0$, et le théorème en résulte. ■

Remarque. Le théorème précédent est clairement faux lorsque la métrique d_Φ n'est pas de type fini (on peut alors choisir pour Φ une partition de R en isomorphismes partiels). Dans ce cas, il est facile d'adapter la démonstration ci-dessus pour établir le résultat suivant. Étant donnée une famille dénombrable Φ d'isomorphismes partiels de X préservant la classe de la mesure μ, *l'action sur X du pseudo-groupe engendré par Φ contient une suite asymptotiquement invariante non triviale si et seulement si pour toute métrique de type fini $d \geqslant d_\Phi$, l'espace métrique-mesuré (X, μ, d) n'est pas concentré.*

Soit R une relation d'équivalence mesurée de type fini. On dit que R est *concentrée* si pour tout graphage fini Φ de R l'espace métrique-mesuré (X, d_Φ, μ) est concentré. Notons que si R n'est pas concentré, alors aucun des espaces (X, d_Φ, μ) associé à un graphage fini Φ ne l'est ; la propriété de concentration est ainsi indépendante de la métrique (de type fini) choisie sur l'espace ambiant. On dit qu'un espace singulier ergodique de type fini est *concentré* si toute désingularisation discrète l'est.

Théorème 13. *Soit Q un espace singulier ergodique de type fini. Alors Q est fortement ergodique si et seulement s'il est concentré.*

Rappelons que d'après le résultat de Schmidt-Connes-Weiss (cf. [41, 12]), un groupe dénombrable possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si toutes ses actions ergodiques de type II_1 sont fortement ergodiques.

Corollaire 14. *Soit Γ un groupe de type fini. Alors Γ possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si toutes ses actions ergodiques de type II_1 sont concentrées.*

Nous renvoyons le lecteur à [22] pour un éventail d'idées sur la concentration. On dit classiquement qu'un espace concentré est, en général, un espace « de grande dimension ». On retrouve dans le contexte quasi-périodique ce type phénomène. Par exemple, les shifts de Bernouilli (non moyennables), i.e. $\{0,1\}^\Gamma$ où Γ agit par translation, sont concentrés (cf. [32, 28, 26]).

7. Inégalités isopérimétriques

Soit R une relation d'équivalence mesurée de type fini sur un espace de probabilité (X,μ). Soit K un graphage u.l.f. de R.

Définition. *On dit que K possède des* suites de Følner évanescentes *(vanishing Følner sequences) relativement à μ s'il existe une suite (A_n) de boréliens non négligeables de X et une suite (ε_n) de nombres réels convergeant vers 0 telles que*

$$\mu(A_n) \to 0 \qquad \text{et} \qquad \mu(\partial_K A_n) \leqslant \varepsilon_n \mu(A_n).$$

Remarque. L'existence de telles suites de Følner est une propriété de K et non de R ; le résultat principal de ce paragraphe caractérise les relations d'équivalence dont tout graphage contient des suites de Følner évanescentes, dans l'esprit de [10, page 443] (cf. également [30]). Notons que dans la définition précédente les composantes connexes de A_n (relativement à la structure simpliciale) n'ont pas de raison d'être finies (c'est là une différence essentielle avec les suites de Følner de [10]). La notion de suites de Følner évanescentes est une reformulation géométrique de la notion dynamique de *I-suites* considérée dans [29, 42, 40], lorsque μ est une mesure de probabilité *invariante.*

Exemple. Soit R une relation d'équivalence de type II_1. Soit $A \subset X$ un borélien de mesure $1/4$. Considérons un graphage borné K_A de $R_{|A}$, une partition infinie $A_1^1, A_2^1, \ldots$ de A et une partition

$$\{A_i^j\}_{i\geqslant 1,\ 2\leqslant j\leqslant n_i}$$

de $X\backslash A$ de sorte que $\mu(A_i) = \mu(A_i^j)$ et que $n_i \to_i \infty$. En choisissant des isomorphismes partiels $A_i^j \to A_i^{j+1}$, il est facile de compléter K_A en un graphage borné K de R. Ce graphage contient des suites de Følner évanescentes. X peut cependant être fortement ergodique, si par exemple R possède la propriété T de Kazhdan.

Exemple. Schmidt [42] a construit un *arbre* quasi-périodique de type II_1 et de valence 6, à la fois concentré et contenant des suites de Følner au sens ci-dessus. Nous avons vu dans l'exemple précédent que tout espace singulier possède un graphe quasi-périodique contenant des suites de Følner. Hjorth et Kechris [26] ont montré que pour tout espace singulier obtenu par action mélangeante de type II_1 du groupe libre à deux générateurs, on peut construire un arbre quasi-périodique de valence 4 contenant des suites de

Følner. Rappelons que le groupe libre à deux générateurs permet de définir une infinité non dénombrable de notions de quasi-périodicité distinctes, en vertu d'un théorème récent de Gaboriau-Popa [19].

Théorème 15. *Soit R une relation d'équivalence ergodique de type fini préservant une mesure de probabilité μ. Alors R possède un quotient moyennable si et seulement si chacun de ses graphages u.l.f. contient des suites de Følner évanescentes.*

Démonstration. D'après le théorème de Jones-Schmidt, nous devons montrer qu'une relation d'équivalence II_1 de type fini est fortement ergodique si et seulement si l'un de ses graphages u.l.f. ne contient pas de suites de Følner évanescentes.

Soit R une relation d'équivalence II_1 de type fini. Supposons que tout graphage u.l.f. de R contient des suites de Følner évanescentes et construisons une suite asymptotiquement invariante non triviale. Soit K un graphage u.l.f. de R et $\varepsilon > 0$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des boréliens A de X tels que

$$\mu(\partial_K A) \leqslant \varepsilon\mu(A)$$

et

$$\mu(A) \leqslant c,$$

où $c \in]0,1[$ est fixé. Étant donnés A et B dans $\mathcal{E}$ on pose

$$A \leqslant B \text{ si } A \subset B \quad \text{et} \quad \mu(\partial_K A' \backslash A) \leqslant \varepsilon\mu(A'),$$

où $A' = B\backslash A$ et l'inclusion $A \subset B$ a lieu à une partie négligeable près. Ceci définit un ordre partiel sur $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{E}'$ un sous-ensemble totalement ordonné et $A_n \in \mathcal{E}'$ une suite telle que $\sup_n \mu(A_n) = \sup_{A\in\mathcal{E}'} \mu(A)$. Posons $A_\infty = \cup_n A_n$ et $A'_i = A_i \backslash A_{i-1}$. Alors

$$\mu(\partial_K A_\infty) = \lim_n \mu(\partial_K A_n \backslash A_\infty) \leqslant \varepsilon \lim_n \mu(A_n) = \varepsilon\mu(A_\infty),$$

et, si $A \in \mathcal{E}'$, on a

$$\mu(\partial_K A'_\infty \backslash A) = \lim_n \mu(\partial_K A'_n \backslash A_\infty) \leqslant \varepsilon \lim \mu(A'_n) = \varepsilon\mu(A'_\infty)$$

où $A'_\infty = A_\infty \backslash A$ et $A'_n = A_n \backslash A$. Ainsi $\mathcal{E}$ est inductif. Soit $A \in \mathcal{E}$ un élément maximal (lemme de Zorn). Supposons par l'absurde que $\delta = c - \mu(A) > 0$ et notons $K' = X\backslash A \times X\backslash A \cap K$.

Complétons K' en un graphage u.l.f. K'' de $R_{|X\backslash A}$, et choisir une famille finie d'isomorphismes partiels $\varphi_i : A \to X\backslash A$ de R dont les domaines partitionnent A. Alors

$$\overline{K} = K'' \cup_i (\mathrm{graph}\varphi_i \cup \mathrm{graph}\varphi_i^{-1})$$

est un graphage u.l.f. de R.

Soit $A_n \subset X$ une suite de Følner évanescentes pour $\overline{K}$. Posons $A'_n = A_n \cap X \backslash A$. Par définition de $\overline{K}$ on a $\mu(A'_n) > 0$ pour tout n suffisament grand. Soient

$$\begin{array}{rcl} B_n^1 & = & \{x \in A_n \cap A |\ \varphi_i(x) \notin A'_n \cup \partial_{K''} A'_n\}, \\ B_n^2 & = & \{x \in A_n \cap A |\ \varphi_i(x) \in \partial_{K''} A'_n\}, \\ B_n^3 & = & \{x \in A_n \cap A |\ \varphi_i(x) \in A'_n\}. \end{array}$$

On a

$$\mu(\partial_{\overline{K}} A_n) \geqslant \mu(\partial_{\overline{K}} B_n^1) + \mu(\partial_{K''} A'_n).$$

Par ailleurs $\overline{K}$ étant u.l.b. (rappelons que μ est invariante), il existe une constante $C = C(\overline{K})$ telle que

$$\mu(B_n^1) \leqslant C\mu(\partial_{\overline{K}} B_n^1), \quad \mu(B_n^2) \leqslant C\mu(\partial_{K''} A'_n), \quad \text{et} \quad \mu(B_n^3) \leqslant C\mu(A'_n).$$

Par suite pour tout ε' il existe n tel que

$$\mu(\partial_{\overline{K}} B_n^1) + \mu(\partial_{K''} A'_n) \leqslant \varepsilon'(\mu(B_n^1) + \mu(B_n^2) + \mu(B_n^3) + \mu(A'_n)),$$

donc

$$(1 - \varepsilon' C)\mu(\partial_{K''} A'_n) \leqslant (\varepsilon' C - 1)\mu(\partial_{\overline{K}} B_n^1) + \varepsilon'(1 + C)\mu(A'_n),$$

et si ε' vérifie

$$\varepsilon' C < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon'(1 + C)}{1 - \varepsilon' C} \leqslant \varepsilon,$$

on obtient un entier n tel que que $0 < \mu(A'_n) < \delta$ et

$$\mu(\partial_{K''} A'_n) \leqslant \varepsilon\mu(A'_n).$$

Alors

$$\mu(\partial_K A'_n \backslash A) = \mu(\partial_{K'} A'_n) \leqslant \varepsilon\mu(A'_n)$$

donc $A < A \amalg A'_n$. Enfin,

$$\mu(\partial_K(A \amalg A'_n)) = \mu(\partial_K A \backslash A'_n) + \mu(\partial_K A'_n \backslash A) \leqslant \varepsilon\mu(A) + \varepsilon\mu(A'_n) = \varepsilon\mu(A \amalg A'_n),$$

donc $A \amalg A'_n \in \mathcal{E}$, d'où une contradiction. Ainsi on peut trouver une famille $A_n \subset X$ de borélien tels que $\mu(A_n) = c$ et $\mu(\partial_K A_n) \leqslant 1/n$; il en résulte, en partionnant K en un nombre fini d'isomorphismes partiels, que R contient des suites asymptotiquement invariantes (de mesure c).

Réciproquement supposons que R ne soit pas fortement ergodique et montrons que tout graphage u.l.f. K contient des suites de Følner évanescentes. (Nous nous inspirons ici d'un argument classique, cf. [29, 42, 40, 26].) Soit K un graphage u.l.f. de R. Pour tout nombre réel $0 < \delta < 1$ il existe un suite asymptotiquement invariante A_k^δ telle que $\mu(A_k^\delta) = \delta$ (cf. [28]). Soit n fixé et $\delta = 1/n$. K étant u.l.f., on peut le partionner en

une famille finie F d'isomorphismes partiels. Soit $k = k(n)$ un entier suffisament grand pour que

$$\sum_{\varphi \in F} \mu(\varphi(A_k^\delta \cap D_\varphi) \backslash A_k^\delta) \leqslant \frac{1}{n^2},$$

où D_φ est le domaine de φ. On pose $A'_n = A^\delta_{k(n)}$. Alors

$$\mu(A'_n) \to 0 \quad \text{et} \quad \mu(\partial_K A'_n) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A'_n).$$

■

Remarque. Il existe des relations relativement simples entre concentration et inégalités isopérimétriques dans le cadre standard [31]. Le résultat précédent est de nature différente, notamment en ce qu'il concerne seulement des inégalités isopérimétriques *évanescentes.*

Énonçons dès maintenant le corollaire suivant (cf. [37]).

Corollaire 16. *Soit Q un espace singulier ergodique ayant la propriété T de Kazhdan. Il existe un graphe Q-périodique u.l.f. ne contenant pas de suites de Følner évanescentes.*

Démonstration. Ayant la propriété T, un tel espace est de type II, et admet, de plus, une désingularisation discrète II_1 de type fini. Il existe alors un graphage u.l.f. de cette désingularisation ne contenant pas de suites de Følner évanescentes, en vertu du théorème ci-dessus. ■

Théorème 17. *Soit Q un espace singulier ergodique de type fini. Alors Q possède un quotient moyennable si et seulement si tout graphe Q-périodique u.l.f. contient des suites de Følner évanescentes (relativement à une mesure de probabilité dont la classe est déterminée par Q).*

Démonstration. Le fait que tout graphage u.l.f. contient des suites de Følner lorsque Q possède un quotient moyennable résulte sans changement de la démonstration ci-dessus. Ainsi, il reste seulement à montrer que, lorsque Q est de type III et tel que tout graphe Q-périodique symétrique u.l.f. contienne des suites de Følner évanescentes, il existe une désingularisation discrète de Q admettant des suites asymptotiquement invariantes non triviales. Considérons un graphage u.l.f. K d'une désingularisation discrète R de Q. Soit $\varepsilon > 0$. Reprenons la démonstration du théorème précédent. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des boréliens A de X tels que

$$\mu(\partial_K A) \leqslant \varepsilon \mu(A)$$

et

$$\mu(A) \leqslant c$$

où $c \in]0,1[$. Avec la même relation d'ordre $\mathcal{E}$ est inductif. Soit $A \in \mathcal{E}$ un élément maximal. Supposons que $\delta = c - \mu(A) > 0$ et notons $K' = X\backslash A \times X\backslash A \cap K$. On peut compléter K' en un graphage u.l.f. $\overline{K}$ de $R_{|X\backslash A}$. Soit $A'_n \subset X$ une suite de Følner évanescentes pour $\overline{K}$ (relativement à la mesure $\mu/\mu(X\backslash A)$). Soit un entier n tel que que $0 < \mu(A'_n) < \delta$ et

$$\mu(\partial_{K'} A'_n) \leqslant \mu(\partial_{\overline{K}} A'_n) \leqslant \varepsilon\mu(A'_n).$$

Alors

$$\mu(\partial_K A'_n \backslash A) = \mu(\partial_{K'} A'_n) \leqslant \varepsilon\mu(A'_n)$$

donc $A < A \amalg A'_n \in \mathcal{E}$, d'où une contradiction. Ainsi on peut trouver une famille $A_n \subset X$ de borélien tels que $\mu(A_n) = c$ et $\mu(\partial_K A_n) \leqslant 1/n$; il en résulte, en partitionnant K en un nombre fini d'isomorphismes partiels, que R contient des suites asymptotiquement invariantes. ■

Variation. Une démonstration similaire établit, dans l'esprit de [10], qu'une relation d'équivalence ergodique R possède un quotient moyennable si et seulement si chacun de ses sous-graphes symétriques u.l.b. (i.e. dont les dérivées de Radon-Nikodym sont bornées mais qui n'engendrent pas nécéssairement R) possède des suites de Følner évanescentes.

Références

[1] Barré S., Pichot M., « Trivialité du groupe d'automorphismes d'un immeuble triangulaire générique », en préparation.

[2] Barré S., Pichot M., en préparation.

[3] Bellissard J., « The noncommutative geometry of aperiodic solids », Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory, Villa de Leyva, 2001, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 86-156, *2003*.

[4] Cantwell J., Conlon L., « Generic leaves », Comment. Math. Helv., 73, 306-336, *1998*.

[5] Champetier C., « L'espace des groupes de type fini », Topology 39, no. 4, 657–680, *2000*.

[6] Connes A., « Une classification des facteurs de type III », Ann. Sci. École Normale Sup. 4ème Série, 6 fasc 2, 133-252, *1973*.

[7] Connes A., « Sur la théorie non commutative de l'intégration », Algèbres d'opérateurs, Lecture Notes in Math., 725, 19-143, *1979*.

[8] Connes A., « Non commutative geometry », Academic Press, Inc., San Diego, CA, *1994*.

[9] Connes A., « On the foundation of noncommutative geometry », Notes de la conférence NCGOA, Nashville, *2004*.

[10] Connes A., Feldman J., Weiss B., « An amenable equivalence relation is generated by a single transformation », Ergod. Th. & Dynam. Sys., 1, 431-450, *1981*.

[11] Connes A., Krieger W., « Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and approximate finiteness », J. Functional Analysis, 24, 336-352, *1977*.

[12] Connes A., Weiss B., « Property T and asymptotically invariant sequences », Israel J. Math. 37, no. 3, 209–210, *1980*.

[13] Dixmier J., « Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann) », Gauthier-Villars Éditeurs, Paris, *1969*. Deuxième édition, revue et augmentée, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXV.

[14] Feldman J., Moore C., « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I,II », Trans. Amer. Math. Soc., 234(2), 289-359, *1977*.

[15] Feldman J., Hahn P., Moore C.C., « Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups », Adv. in Math., 28, 186-230, *1978*.

[16] Furman A., « Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices », Ann. of Math. (2) 150, no. 3, 1059–1081, *1999*.

[17] Gaboriau D., « Coût des relations d'équivalence et des groupes », Invent. Math. 139, no. 1, 41–98, *2000*.

[18] Gaboriau D., « Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes », Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 95, 93–150, *2002*.

[19] Gaboriau D., Popa S., « An uncountable family of non orbit equivalent actions of F_n », prépublication, *2004*.

[20] Ghys É., « Topologie des feuilles génériques », Ann. of Math., 141, 387-422, *1995*.

[21] Gromov M., « Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces », Birkhaüser Boston Inc., *1999*.

[22] Gromov M., « Spaces and questions », Geom. Funct. Anal., Special Volume (Tel Aviv, 1999), Part I, 118-161, *2000*.

[23] Haefliger A., « Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes », Comment. Math. Helv., 32, 248-329, *1958*.

[24] Haefliger A., « Naissance des feuilletages, d'Ehresmann-Reeb à Novikov », prépublication.

[25] Heitsch J. L., Lazarov C., « Homotopy invariance of foliation Betti numbers », Invent. Math. 104, no. 2, 321–347, *1991*.

[26] Hjorth G., Kechris A.S., « Rigidity theorems for actions of product groups and countable Borel equivalence relations », prépublication, *2002*.

[27] Jackson S., Kechris A.S., Louveau, A. « Countable borel equivalence relations », J. Math. Log., 2, no. 1, 1–80, *2002*.

[28] Jones V.F.R., Schmidt K., « Asymptotically invariant sequences and approximate finiteness », Amer. J. Math., 109, 91-114, *1987*.

[29] del Junco A., Rosenblatt J., « Conterexample in ergodic theory and number theory », Math. Ann., 245, 185-197, *1979*.

[30] Kaimanovich V.A., « Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities », C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., 325, 999-1004, *1997*.

[31] Ledoux M., « The concentration of measure phenomenon », Mathematical Surveys and Monographs, 89. American Mathematical Society, Providence, RI, *2001*.

[32] Losert V., Rindler H., « Almost invariant sets », Bull. London Math. Soc. 13, no. 2, 145–148 *1981*.

[33] Mackey G.W., « Ergodic theory and virtual groups », Math. Ann., 166, 187-207, *1966*.

[34] Moore C.C., « Ergodic theory and von Neumann algebras », In Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980), 179-226, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., *1982*.

[35] Ornstein D., Weiss B., « Ergodic theory of amenable group action I. The Rohlin lemma », Bull. Amer. Math. Soc., 2(1), 161–164, *1980*.

[36] Pestov V. G., « Amenable representations and dynamics of the unit sphere in an infinite-dimensional Hilbert space », Geom. Funct. Anal., 10, no. 5, 1171–1201, *2000*.

[37] Pichot M., « Sur les espaces mesurés singuliers II », en préparation.

[38] Pichot M., « Quasi-périodicité et théorie de la mesure », Thèse, en préparation.

[39] Ramsay A., « Topologies on measured groupoids », J. Funct. Anal., 47, 314-343, *1982*.

[40] Rosenblatt J., « Uniqueness of invariant means for measure preserving transformations », Trans. Amer. Math. Soc., 265, 623-636, *1981*.

[41] Schmidt K., « Asymptotically invariant sequences and an action of $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ on the 2-sphere », Israel J. Math., 37, 193-208, *1980*

[42] Schmidt K., « Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group action », Erg. Th. and Dyn Systems, 1, 233-236, *1981*.

[43] Zimmer R., « Ergodic theory and semi-simple groups », Birkhäuser Verlag, Basel,*1984*.

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées,
Unité Mixte de Recherche CNRS 5669
46, allée d'Italie,
69364 Lyon Cedex 07, France.
mpichot@umpa.ens-lyon.fr, pichot@ms.u-tokyo.ac.jp.