



**HAL**  
open science

# Lambda -mu calcul et dualité, appel par nom et appel par valeur

Jérôme Rocheteau

► **To cite this version:**

Jérôme Rocheteau. Lambda -mu calcul et dualité, appel par nom et appel par valeur. 2002. hal-00003547

**HAL Id: hal-00003547**

**<https://hal.science/hal-00003547>**

Preprint submitted on 13 Dec 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# $\lambda\mu$ -calcul et dualité : appel par nom et appel par valeur

Jérôme ROCHETEAU

## Résumé

L'extension à la logique classique de la correspondance de Curry-Howard permet d'envisager deux réductions déterministes qui correspondent, pour la première, à une réduction avec appel par nom et, pour la seconde, à une réduction avec appel par valeur. On étudie cette dualité, d'une part à travers le  $\lambda\mu$ -calcul dont les réductions reposent sur la distinction fonction/argument de la déduction naturelle, et d'autre part à travers le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul dont les réductions reposent sur une symétrie gauche/droite du calcul des séquents. On montre des théorèmes de simulation entre le  $\lambda\mu$ -calcul et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul qui respectent le mécanisme d'évaluation (cbn/cbv).

## Introduction

Les systèmes clés de la logique classique en théorie de la démonstration sont les systèmes NK et LK de Gentzen. La différence entre ces systèmes est qu'on effectue, dans NK, uniquement des opérations dans le conséquent tandis que dans LK on effectue des opérations dans le conséquent et dans l'antécédent. Ces deux systèmes ont chacun un  $\lambda$ -calcul associé. Il s'agit du  $\lambda\mu$ -calcul pour NK et du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul pour LK. La formation des termes du  $\lambda\mu$ -calcul correspond aux règles de déduction dans NK et les règles de réduction du  $\lambda\mu$ -calcul correspondent à la normalisation dans NK. Le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul, lui aussi, peut être vu comme une *décoration* de LK par des termes. La formation de ces termes correspond aux règles de démonstration dans LK et ces règles de réduction correspondent à la normalisation dans LK. NK et LK sont équivalents du point de vue des théorèmes déductibles dans ces deux systèmes. Il existe un isomorphisme entre les démonstrations dans NK et les dérivations du  $\lambda\mu$ -calcul typé (cf. [3]) et il existe un isomorphisme entre les démonstrations dans LK et les dérivations du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul typé (cf. [1]). Il reste à montrer l'équivalence entre le  $\lambda\mu$ -calcul non typé et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul non typé. Curien et Herbelin ont montré que le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul non typé simule le  $\lambda\mu$ -calcul non typé. On prolonge leur travail afin de montrer que le  $\lambda\mu$ -calcul simule en retour le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul.

On ne travaille pas d'emblée au niveau des calculs typés, on étudie, dans un premier temps, ces calculs dans le cas non typé et pour un mécanisme d'évaluation non dirigé, étudie qu'on étend, dans un second temps, toujours aux cas non typés mais pour des mécanismes d'évaluation en appel par nom et en appel par valeur ; et, dans un troisième temps, on aborde les calculs typés.

Ces deux mécanismes d'évaluation ont pour but de rendre déterministes les  $\lambda\mu$  et  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calculs qui ne le sont pas. L'évaluation en appel par nom consiste en quelque sorte, dans les  $\lambda$ -calculs de la forme de la déduction naturelle, à appliquer une fonction évaluée à un argument. L'évaluation en appel par valeur consiste, quant à elle, à appliquer une fonction évaluée à un argument lui-même évalué. Ces repères de fonction et d'argument disparaissent pour des  $\lambda$ -calculs du style du calcul des séquents qui se basent sur une symétrie gauche/droite. On montre l'équivalence calculatoire entre les  $\lambda\mu$  et  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calculs non typés et non dirigés, ainsi que pour leurs mécanismes d'évaluation cbn/cbv.

Dans la section 1, on expose le  $\lambda\mu$ -calcul défini par Parigot dans [3] – ainsi que ses projections cbn/cbv, la projection cbn étudiée par Parigot, la projection cbv suggérée par Parigot et reprise par Currien et Herbelin – auquel on ajoute les  $\lambda\mu$ -contextes afin de faciliter la comparaison avec le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul de Currien et Herbelin (cf. [1]) qu'on présente section 2 (les projections cbn/cbv étant aussi définies dans [1]). La section 3 est consacrée à la définition des traductions entre le  $\lambda\mu$ -calcul et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul. On reprend la traduction du  $\lambda\mu$ -calcul dans le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul due à Currien et Herbelin et on définit une traduction du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul dans le  $\lambda\mu$ -calcul. On montre, dans la section 4, que les compositions des traductions sont l'identité sur leurs domaines respectifs (en réalité on montre qu'elle le sont à *peu de choses près*). On termine, dans

la section 5, par des théorèmes de simulation dans le cas d'évaluation non dirigée dont on déduit facilement les cas restreints cbn et cbv.

## 1 Le $\lambda\mu$ -calcul

Le  $\lambda\mu$ -calcul a été défini dans [3] pour étendre la correspondance de Curry-Howard à la logique classique. Le  $\lambda\mu$ -calcul correspond au système de déduction naturelle NK. On présente le  $\lambda\mu$ -calcul non typé – le langage des termes et les règles de réduction – et on définit les réductions cbn/cbv. Le système de typage pour le système des types simples est ensuite exposé. La nouveauté consiste dans la définition des  $\lambda\mu$ -contextes et des règles de typage pour ces contextes. On introduit cet objet dans le but d'étudier la traduction de LK vers NK à travers un langage de termes et les contextes permettent d'exprimer à quoi correspondent les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnements au sein du  $\lambda\mu$ -calcul.

### 1.1 Le $\lambda\mu$ -calcul non typé

**Définition 1 (la  $\lambda\mu$ -syntaxe).** Soient un ensemble de  $\lambda$ -variables  $\{x, y, z, \dots\}$ , un ensemble de  $\mu$ -variables  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  et les symboles  $\lambda, \mu, (, ), [$  et  $]$ . On définit trois catégories d'objets syntaxiques, les  $\lambda\mu$ -termes, les  $\lambda\mu$ -valeurs et  $\lambda\mu$ -les commandes :

$$t ::= V \mid (t)t \mid \mu\alpha.c \quad V ::= x \mid \lambda x.t \quad c ::= [\alpha]t$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont des lieurs. On considère les  $\lambda\mu$ -termes à renommage des variables liées près.

**Définition 2 (les  $\lambda\mu$ -réductions).** On présente les règles de réduction du  $\lambda\mu$ -calcul qui correspondent à la normalisation dans NK :

$$\begin{aligned} (\lambda x.u)v &\rightarrow_{\beta}^1 u[x \leftarrow v] \\ (\mu\alpha.c)t &\rightarrow_{\mu}^1 \mu\alpha.c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t] \\ (t)\mu\alpha.c &\rightarrow_{\mu'}^1 \mu\alpha.c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u] \\ [\beta]\mu\alpha.c &\rightarrow_{\rho}^1 c[\alpha \leftarrow \beta] \\ \mu\alpha.[\alpha]t &\rightarrow_{\theta}^1 t \text{ si } \alpha \text{ n'est pas libre dans } t. \end{aligned}$$

Parmi ces réductions, on distingue les réductions linéaires qui correspondent dans NK à des coupures-axiomes. Les  $\rho$  et  $\theta$ -réductions sont linéaires car elles correspondent à l'identité dans NK. La  $\beta$ -réduction –  $(\lambda x.u)y$  – dont l'argument est une variable correspond à une coupure-axiome. La  $\beta$ -réduction –  $(\lambda x.u)v$  – dont la variable  $x$  n'a qu'une seule occurrence libre dans le terme  $u$  est elle-même linéaire. On désigne par  $\rightsquigarrow_{\gamma}^1$  une étape de réduction linéaire, par  $\rightsquigarrow_{\gamma}$  la clôture reflexive et transitive de  $\rightsquigarrow_{\gamma}^1$  et par  $\rightsquigarrow$  la réunion des  $\rightsquigarrow_{\gamma}$ , pour  $\gamma = \beta, \rho, \theta$ . On désigne par  $\rightarrow_{\gamma}$  la clôture reflexive et transitive de  $\rightarrow_{\gamma}^1$  pour  $\gamma = \beta, \mu, \mu', \rho, \theta$ . On désigne par  $\rightarrow$  (resp.  $\rightsquigarrow$ ) la réunion des réductions (resp. des réductions linéaires).

Ce système de réduction n'est pas déterministe parce qu'il existe des paires critiques non confluentes :  $(\lambda x.t)\mu\alpha.c$  et  $(\mu\beta.c')\mu\alpha.c$ . Par exemple,

$$(\mu\delta.[\alpha]x)\mu\delta.[\beta]y \rightarrow_{\mu}^1 \mu\delta.[\alpha]x$$

et

$$(\mu\delta.[\alpha]x)\mu\delta.[\beta]y \rightarrow_{\mu'}^1 \mu\delta.[\beta]y$$

or ce sont deux formes normales distinctes.

**Définition 3 ( $\lambda\mu$ -réduction avec appel par nom).** On appelle  $\lambda\mu$ -réduction avec appel par nom, ou  $\lambda\mu$ -cbn, la réduction  $\rightarrow_n = \rightarrow \setminus \rightarrow_{\mu'}$ . Cette réduction est déterministe : la première paire critique  $(\lambda x.t)\mu\alpha.c$  se réduit en  $t[x \leftarrow \mu\alpha.c]$  et la seconde  $(\mu\beta.c')\mu\alpha.c$  se réduit en  $\mu\beta.c'[[\beta]u \leftarrow [\beta](u)\mu\alpha.c]$  parce qu'on n'effectue aucune  $\mu'$ -réduction. La réduction  $\rightarrow_n$  est confluente (cf. [3]).

**Définition 4** ( $\lambda\mu$ -réduction avec appel par valeur). On définit deux restrictions des  $\beta$  et  $\mu$ -réductions :

$$\begin{aligned} (\lambda x.t)V &\rightarrow_{\beta_V}^1 t[x \leftarrow V] \\ (\mu\alpha.c)V &\rightarrow_{\mu_V}^1 \mu\alpha.c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)V] \end{aligned}$$

On appelle  $\lambda\mu$ -réduction avec appel par valeur, ou  $\lambda\mu$ -cbv, la réduction  $\rightarrow_v = \rightarrow_{\beta_V} \cup \rightarrow_{\mu_V} \cup \rightarrow_{\mu'} \cup \rightarrow_{\rho} \cup \rightarrow_{\theta}$ . Cette réduction est déterministe : la première paire critique  $(\lambda x.t)\mu\alpha.c$  se réduit en  $\mu\alpha.c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](\lambda x.t)u]$  et la seconde  $(\mu\beta.c')\mu\alpha.c$  se réduit en  $\mu\alpha.c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](\mu\beta.c')u]$  parce que  $\mu\alpha.c$  n'est pas une valeur. Cette définition de la réduction cbv correspond à la normalisation des preuves dans NK. Mais il y a une autre façon de définir la  $\lambda\mu$ -cbv, celle de Ong et Stewart dans [2]. Leur définition de la  $\mu$ -réduction ne subit pas de restriction, c'est la  $\mu'$  qu'on restreint aux cas où le terme en position de fonction est une valeur :

$$(V)\mu\alpha.c \rightarrow_{\mu'_V}^1 \mu\alpha.c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](V)u]$$

Ainsi, la  $\lambda\mu$ -cbv de Ong et Stewart est  $\rightarrow_{\beta_V} \cup \rightarrow_{\mu} \cup \rightarrow_{\mu'_V}$ . Ces deux définitions ne conduisent pas aux mêmes formes normales. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la paire  $(\mu\delta.c)\mu\delta.c'$ , avec  $\delta \notin c$  et  $\delta \notin c'$ , qui se réduit en cbv par la première définition en  $\mu\delta.c'$  et par la seconde en  $\mu\delta.c$ . La réduction  $\rightarrow_v$  définie par Ong et Stewart est confluente (cf. [2]). La propriété de Church-Rosser n'est, quant à elle, pas prouvée pour la  $\lambda\mu$ -cbv telle qu'on l'a définie. Cependant, comme on prolonge l'article de Curien et Herbelin qui se base la première définition de la  $\lambda\mu$ -cbv, on réutilise cette définition.

## 1.2 Le $\lambda\mu$ -calcul simplement typé

Si l'on se contente d'un système de types simples, c'est qu'il est, d'une part, intéressant en lui-même et qu'il est, d'autre part, aisé d'envisager des extensions avec la quantification du premier ou du deuxième ordre puisque les traductions sont définies dans le cas pur.

**Définition 5** (les  $\lambda\mu$ -types simples). On considère un ensemble de variables de types  $\{X, Y, Z, \dots\}$ . Les types simples sont :  $A ::= X \mid A \rightarrow A$ .

**Définition 6** (les  $\lambda\mu$ -séquents). On définit deux formes de séquents :

$$\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad c : (\Gamma \vdash \Delta)$$

où  $t$  est un terme,  $c$  une commande,  $A$  un type,  $\Gamma$  est une application de domaine fini des  $\lambda$ -variables dans les types et  $\Delta$  est une application de domaine fini des  $\mu$ -variables dans les types.

**Définition 7** (le  $\lambda\mu$ -calcul simplement typé). Les règles de typage pour le  $\lambda\mu$ -calcul simplement typé sont :

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash t : B \mid \Delta}{\Gamma \setminus \{x : A\} \vdash \lambda x.t : A \rightarrow B \mid \Delta} \quad \frac{x : A \vdash x : A \mid \quad \Gamma \vdash u : A \rightarrow B \mid \Delta \quad \Gamma' \vdash v : A \mid \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash (u)v : B \mid \Delta, \Delta'} \quad (*) \\ \frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta}{[\alpha]t : (\Gamma \vdash \Delta, \alpha : A)} \quad (*) \quad \frac{c : (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma \vdash \mu\alpha.c : A \mid \Delta \setminus \{\alpha : A\}} \end{array}$$

La restriction (\*) impose que les contextes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  (resp.  $\Delta$  et  $\Delta'$ ) soient compatibles, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \text{dom}(\Gamma) \cap \text{dom}(\Gamma')$ ,  $\Gamma(x) = \Gamma'(x)$  (resp. pour tout  $\alpha \in \text{dom}(\Delta) \cap \text{dom}(\Delta')$ ,  $\Delta(\alpha) = \Delta'(\alpha)$ ). On définit alors  $\Gamma, \Gamma'$  comme l'union des applications.

Si l'on oublie les  $\lambda\mu$ -termes dans les règles de typage, le système obtenu correspond à NK. À titre d'exemple, on présente une dérivation de la loi de Peirce dans NK et dans le système des types simples :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{A \vdash B, A}}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow A}}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A, A}}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A}}{\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{x : A \vdash x : A} \\
\frac{}{[\alpha]x : (x : A \vdash \alpha : A)} \\
\frac{}{x : A \vdash \mu\delta.[\alpha]x : B \mid \alpha : A} \\
\frac{}{y : (A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash y : (A \rightarrow B) \rightarrow A \mid \quad \vdash \lambda x.\mu\delta.[\alpha]x : A \rightarrow B \mid \alpha : A} \\
\frac{}{y : (A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash (y)\lambda x.\mu\delta.[\alpha]x : A \mid \alpha : A} \\
\frac{}{[\alpha](y)\lambda x.\mu\delta.[\alpha]x : (y : (A \rightarrow B) \rightarrow A) \vdash \alpha : A} \\
\frac{}{y : (A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash \mu\alpha.[\alpha](y)\lambda x.\mu\delta.[\alpha]x : A \mid} \\
\frac{}{\vdash \lambda y.\mu\alpha.[\alpha](y)\lambda x.\mu\delta.[\alpha]x : ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \mid}
\end{array}$$

### 1.3 Les $\lambda\mu$ -contextes

On introduit les  $\lambda\mu$ -contextes pour permettre de relier les  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -environnements à une catégorie syntaxique du  $\lambda\mu$ -calcul. On donne aussi des règles de typage de ces  $\lambda\mu$ -contextes pour étendre ce rapport des calculs purs aux calculs typés. Ceux-ci correspondent aux calculs que l'on peut faire dans l'antécédant des  $\lambda\mu$  et  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -calculs typés. Ainsi, si les  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -environnements appartiennent naturellement à la syntaxe du  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -calcul, les  $\lambda\mu$ -contextes ne sont pas nécessaires au  $\lambda\mu$ -calcul. C'est pourquoi on les présente séparément des  $\lambda\mu$ -termes et commandes.

**Définition 8 ( $\lambda\mu$ -contextes).** On définit les  $\lambda\mu$ -contextes,  $h ::= [\alpha]\{\} \mid [\beta](t)\{\} \mid h\{\{\}t\}$ .

**Définition 9.** Soient  $h$  un  $\lambda\mu$ -contexte et  $t$  un  $\lambda\mu$ -terme. On définit la  $\lambda\mu$ -commande  $h\{t\}$  :

$$h\{t\} = \begin{cases} [\alpha]t & \text{si } h = [\alpha]\{\} \\ [\beta](u)t & \text{si } h = [\beta](u)\{\} \\ h'\{\{t\}u\} & \text{si } h = h'\{\{\}u\} \end{cases}$$

**Définition 10 (séquents pour les  $\lambda\mu$ -contextes).** On définit une nouvelle forme de séquent pour les  $\lambda\mu$ -contextes :  $\Gamma \mid h : A \vdash \Delta$  où  $h$  est un  $\lambda\mu$ -contexte,  $\Gamma$  une application de domaine fini des  $\lambda$ -variables dans les types et où  $\Delta$  est une application de domaine fini des  $\mu$ -variables dans les types.

**Définition 11 (règles de typage pour les  $\lambda\mu$ -contextes).** On définit des règles de typage pour les  $\lambda\mu$ -contextes :

$$\frac{}{\mid [\alpha]\{\} : A \vdash \alpha : A} \quad \frac{\Gamma \vdash t : (A \rightarrow B) \mid \Delta}{\Gamma \mid [\beta](t)\{\} : A \vdash \Delta, \beta : B} (*) \quad \frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid h : B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \mid h\{\{\}t\} : (A \rightarrow B) \vdash \Delta, \Delta'} (*)$$

La condition (\*) est la même que pour les règles de typage du  $\lambda\mu$ -calcul simplement typé, c'est-à-dire que les applications  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  (resp.  $\Delta$  et  $\Delta'$ ) doivent être compatibles (cf. définition 7).

**Lemme 1.** On a, dans le  $\lambda\mu$ -calcul simplement typé, la règle dérivable :

$$\frac{\Gamma \vdash t : B \mid \Delta \quad \Gamma' \mid h : A \vdash \Delta'}{h\{t\} : (\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta')}$$

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $h$ .

– si  $h = [\alpha]\{\}$  alors  $h\{t\} = [\alpha]t$ , et

$$\frac{\Gamma \vdash t : B \mid \Delta}{[\alpha]t : (\Gamma \vdash \Delta, \alpha : A)}$$

– si  $h = [\beta](u)\{\}$  alors  $h\{t\} = [\beta](u)t$ , et

$$\frac{\Gamma \vdash u : (A \rightarrow B) \mid \Delta \quad \Gamma' \vdash t : A \mid \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash (u)t : B \mid \Delta, \Delta'} \\
\frac{}{[\beta](u)t : (\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', \beta : B)}$$

– si  $h = h'\{\{\}u\}$  alors  $h\{t\} = h'\{\{t\}u\}$  et

$$\frac{\Gamma \vdash t : (A \rightarrow B) \mid \Delta \quad \Gamma' \vdash u : A \mid \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash (t)u : B \mid \Delta, \Delta'} \quad \frac{}{\Gamma'' \mid h' : B \vdash \Delta''} \text{hyp. rec.} \\
\frac{}{h'\{\{t\}u\} : (\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta, \Delta', \Delta'')}$$

## 2 Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul

Le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul a été défini dans [1] afin de compléter l'étude des relations entre NK et LK au sein d'un langage de termes. En effet, le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul est à LK ce que le  $\lambda\mu$ -calcul est à NK. Les réductions du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul correspondent à la normalisation dans LK. En revanche, pour définir ce que sont les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -réductions avec appel par nom et avec appel par valeur, il faut restreindre la syntaxe du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul. C'est ce qu'on fait avec le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_T$ -calcul et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_Q$ -calcul, le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_T$ -calcul permettant de définir la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -réduction par nom et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_Q$ -calcul permettant de définir la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -réduction par valeur. On définit ensuite le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{TQ}$ -calcul afin d'avoir un unique calcul non typé qui soit indépendant de l'évaluation cbn ou cbv. Enfin, on expose le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul simplement typé.

### 2.1 Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul non typé

**Définition 12 (la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -syntaxe).** Soient un ensemble de  $\lambda$ -variables  $\{x, y, z, \dots\}$ , un ensemble de  $\mu$ -variables  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  et les symboles  $\lambda, \mu, \tilde{\mu}, \cdot, |, \langle \text{ et } \rangle$ . On définit quatre catégories d'objets syntaxiques, les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -termes, les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -valeurs, les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -commandes et les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnements :

$$t ::= V \mid \mu\alpha.c \quad V ::= x \mid \lambda x.t \quad c ::= \langle t \mid e \rangle \quad e ::= \alpha \mid t \cdot e \mid \tilde{\mu}x.c$$

$\lambda, \mu$  et  $\tilde{\mu}$  sont des lieurs. On considère les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -termes, les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -valeurs et les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnements à renommage des variables liées près.

**Définition 13 (les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -réductions).** Les règles de réduction qui correspondent aux règles de normalisation dans LK sont :

$$\begin{aligned} \langle \lambda x.u \mid v \cdot e \rangle &\rightarrow_{\beta}^1 \langle v \mid \tilde{\mu}x.\langle u \mid e \rangle \rangle \\ \langle \mu\alpha.c \mid e \rangle &\rightarrow_{\mu}^1 c[\alpha \leftarrow e] \\ \langle t \mid \tilde{\mu}x.c \rangle &\rightarrow_{\tilde{\mu}}^1 c[x \leftarrow t] \\ \mu\alpha.\langle t \mid \alpha \rangle &\rightarrow_{\theta}^1 t \text{ si } \alpha \text{ n'est pas libre dans } t \end{aligned}$$

On distingue, là encore, des réductions linéaires qui correspondent à une coupure-axiome dans LK – c'est le cas de la  $\beta$ -réduction, de la  $\mu$ -réduction à partir de  $\langle \mu\alpha.c \mid \beta \rangle$ , de la  $\tilde{\mu}$ -réduction à partir de  $\langle y \mid \tilde{\mu}x.c \rangle$ , et des  $\beta, \mu$  et  $\tilde{\mu}$ -réductions dans lequel la variable liée n'a qu'une seule occurrence libre. La  $\theta$ -réduction est elle aussi linéaire parce qu'elle correspond dans LK à l'identité. On désigne par  $\rightsquigarrow_{\gamma}^1$  une étape de réduction linéaire, par  $\rightsquigarrow_{\gamma}$  la clôture reflexive et transitive de  $\rightsquigarrow_{\gamma}^1$ , pour  $\gamma = \beta, \mu, \tilde{\mu}, \theta$  et par  $\rightsquigarrow$  la réunion des réductions linéaires. On désigne par  $\rightarrow_{\gamma}$  la clôture reflexive et transitive de  $\rightsquigarrow_{\gamma}^1$ , pour  $\gamma = \beta, \mu, \tilde{\mu}, \theta$  et par  $\rightarrow$  la réunion des réductions.

Ce système de réduction n'est pas déterministe parce qu'il existe des paires critiques :  $\langle \mu\alpha.c \mid \tilde{\mu}x.c' \rangle$  dont les réductions ne sont pas confluentes. Par exemple, la paire  $\langle \mu\alpha.\langle x \mid y \cdot \alpha \rangle \mid \tilde{\mu}x.\langle z \mid x \cdot \beta \rangle \rangle$  se réduit par  $\mu$  en  $\langle x \mid y \cdot \tilde{\mu}x.\langle z \mid x \cdot \beta \rangle \rangle$  mais elle se réduit par  $\tilde{\mu}$  en  $\langle z \mid \mu\alpha.\langle x \mid y \cdot \alpha \rangle \cdot \beta \rangle$  qui sont deux formes normales différentes.

#### 2.1.1 Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_T$ -calcul

**Définition 14 (la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_T$ -syntaxe).** La syntaxe du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_T$ -calcul est celle du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul où on a défini des piles de termes  $E$  et dont on a restreint la formation des environnements :

$$t ::= V \mid \mu\alpha.c \quad V ::= x \mid \lambda x.t \quad c ::= \langle t \mid e \rangle \quad e ::= \tilde{\mu}x.c \mid E \quad E ::= \alpha \mid t \cdot E$$

**Définition 15 ( $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -réduction avec appel par nom).** On restreint l'application de la  $\mu$ -réduction aux piles de termes :

$$\langle \mu\alpha.c \mid E \rangle \rightarrow_{\mu}^1 c[\alpha \leftarrow E]$$

On appelle  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -réduction avec appel par nom, ou  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbn, la réduction  $\rightarrow_n = \rightarrow$  dont on a restreint l'application de la  $\mu$ -réduction de cette manière. Cette réduction est déterministe : la paire critique  $\langle \mu\alpha.c \mid \tilde{\mu}x.c' \rangle$  se réduit en  $c'[x \leftarrow \mu\alpha.c]$  parce que la  $\mu$ -réduction ne s'effectue pas,  $\tilde{\mu}x.c'$  n'étant pas une pile de termes. La réduction  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbn est confluente (cf. [1]).

La  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_T$ -syntaxe est stable par  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbn.

### 2.1.2 Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_Q$ -calcul

**Définition 16 (la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_Q$ -syntaxe).** La syntaxe du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_T$ -calcul est celle du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul où on a restreint la formation des environnements de la forme  $u \cdot e$  à des valeurs :

$$t ::= V \mid \mu\alpha.c \quad V ::= x \mid \lambda x.t \quad c ::= \langle t \mid e \rangle \quad e ::= \alpha \mid V \cdot e \mid \tilde{\mu}x.c$$

**Définition 17 ( $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -réduction avec appel par valeur).** On restreint l'application de la  $\tilde{\mu}$ -réduction aux valeurs :

$$\langle V \mid \tilde{\mu}x.c \rangle \rightarrow_{\tilde{\mu}}^1 c[\alpha \leftarrow V]$$

On appelle  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -réduction avec appel par valeur, ou  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbv, la réduction  $\rightarrow_v = \rightarrow$  dont on a restreint l'application de la  $\tilde{\mu}$ -réduction de cette manière. Cette réduction est déterministe : la paire critique  $\langle \mu\alpha.c \mid \tilde{\mu}x.c' \rangle$  se réduit en  $c[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}x.c']$  parce que la  $\tilde{\mu}$ -réduction ne s'effectue pas,  $\mu\alpha.c$  n'étant pas une valeur. La réduction  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbv est confluente (cf. [1]).

La  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_Q$ -syntaxe est stable par  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbv.

### 2.1.3 Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{TQ}$ -calcul

**Définition 18 (la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{TQ}$ -syntaxe).** La syntaxe du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{TQ}$ -calcul est l'intersection des syntaxes du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_T$  et  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_Q$ -calcul où  $E$  est une pile de valeurs :

$$t ::= V \mid \mu\alpha.c \quad V ::= x \mid \lambda x.t \quad c ::= \langle t \mid e \rangle \quad e ::= \tilde{\mu}x.c \mid E \quad E ::= \alpha \mid V \cdot E$$

Il faut remarquer cependant que cette syntaxe n'est pas stable par réduction. En effet, la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{TQ}$ -commande  $\langle \mu\alpha.c \mid \tilde{\mu}x.\langle t \mid x \cdot \beta \rangle \rangle$  se réduit par  $\tilde{\mu}$  en  $\langle t \mid \mu\alpha.c \cdot \beta \rangle$  qui n'est pas une  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{TQ}$ -commande.

## 2.2 Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul simplement typé

**Définition 19 (les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -types).** On considère un ensemble de variables de type  $\{X, Y, Z, \dots\}$ . Les types simples sont :  $A ::= X \mid A \rightarrow A$ .

**Définition 20 (les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -séquents).** Les séquents se présentent sous trois formes :

$$\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma \mid e : A \vdash \Delta \quad c : (\Gamma \vdash \Delta)$$

où  $t$  est un terme,  $e$  est un environnement,  $c$  une commande,  $A$  un type,  $\Gamma$  est une application de domaine fini des  $\lambda$ -variables dans les types et  $\Delta$  est une application de domaine fini des  $\mu$ -variables dans les types.

**Définition 21 (le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul simplement typé).** Les règles de typage pour le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul simplement typé sont :

$$\frac{}{x : A \vdash x : A \mid} \quad \frac{}{\mid \alpha : A \vdash \alpha : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : B \mid \Delta}{\Gamma \setminus \{x : A\} \vdash \lambda x.t : A \rightarrow B \mid \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid e : B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \mid t \cdot e : A \rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} (*)$$

$$\frac{c : (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma \vdash \mu\alpha.c : A \mid \Delta \setminus \{\alpha : A\}} \quad \frac{c : (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma \setminus \{x : A\} \mid \tilde{\mu}x.c : A \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid e : A \vdash \Delta'}{\langle t \mid e \rangle : (\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta')} (*)$$

La restriction (\*) impose que les contextes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  (resp.  $\Delta$  et  $\Delta'$ ) soient compatibles, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \text{dom}(\Gamma) \cap \text{dom}(\Gamma')$ ,  $\Gamma(x) = \Gamma'(x)$  (resp. pour tout  $\alpha \in \text{dom}(\Delta) \cap \text{dom}(\Delta')$ ,  $\Delta(\alpha) = \Delta'(\alpha)$ ).





(\*) On impose que la  $\lambda$ -variable  $y$  et la  $\mu$ -variable  $\beta$  ne soient pas libres dans  $u^\dagger$ , ni dans  $v^\dagger$ . De même, on impose avec la condition (\*\*) que la  $\lambda$ -variable  $y$  ne soit pas libre dans  $t^\dagger$ .

La traduction de l'application de  $u$  à  $v$  peut surprendre. Il semblerait, en effet, plus naturel de traduire  $((u)v)^\dagger$  par  $\mu\beta.\langle u^\dagger \mid v^\dagger \cdot \beta \rangle$  – terme qui correspond à la traduction dans LK de la règle d'élimination de l'implication dans NK :

$$\left( \frac{\Gamma \vdash u : (A \rightarrow B) \mid \Delta \quad \Gamma' \vdash v : A \mid \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash (u)v : B \mid \Delta, \Delta'} \right)^\dagger = \frac{\Gamma \vdash u^\dagger : (A \rightarrow B) \mid \Delta \quad \frac{\Gamma' \vdash v^\dagger : A \mid \Delta' \quad \overline{\mid \beta : B \vdash \beta : B}}{\Gamma' \mid v^\dagger \cdot \beta : (A \rightarrow B) \vdash \beta : B, \Delta'}}{\frac{\langle u^\dagger \mid v^\dagger \cdot \beta \rangle : (\Gamma, \Gamma' \vdash \beta : B, \Delta, \Delta')}{\Gamma, \Gamma' \vdash \mu\beta.\langle u^\dagger \mid v^\dagger \cdot \beta \rangle : B \mid \Delta, \Delta}}$$

Cette traduction n'est cependant pas compatible avec la réduction avec appel par valeur. En effet, si on avait opté pour la traduction  $\mu\beta.\langle u^\dagger \mid v^\dagger \cdot \beta \rangle$  de  $(u)v$ , on n'aurait, en particulier, pas pu prouver que  $v^\dagger \cdot \beta$  était un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -environnement. Par ailleurs, si l'on avait opté pour une définition de la  $\lambda\mu$ -cbv de Ong et Stewart (cf. [2]), il aurait fallu traduire  $((u)v)^\dagger$  par  $\mu\beta.\langle u^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle v^\dagger \mid \tilde{\mu}x.\langle y \mid x \cdot \beta \rangle \rangle \rangle$ .

**Lemme 2.** Quels que soient le  $\lambda\mu$ -terme  $t$  et la  $\lambda\mu$ -commande  $c$ ,  $t^\dagger$  est un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -terme et  $c^\dagger$  est une  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -commande.

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $t$  et  $c$ .

- si  $t = x$  alors  $t^\dagger$  est une  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -valeur, et  $t$  est un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -terme.
- si  $t = \lambda x.v$  alors  $t^\dagger = \lambda x.v^\dagger$ . Par hypothèse d'induction,  $v^\dagger$  est un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -terme donc  $t^\dagger$  est un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -terme.
- si  $t = (u)v$  alors  $t^\dagger = \mu\beta.\langle v^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle u^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle$ . Par hypothèse d'induction,  $u^\dagger$  et  $v^\dagger$  sont des  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -termes.  $\beta \in E$  et  $y \in V$ , donc  $y \cdot \beta \in E$ . Par conséquent  $\tilde{\mu}x.\langle u^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle$  est un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -environnement et  $((u)v)^\dagger$  est un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -terme.
- si  $t = \mu\alpha.c$  alors  $t^\dagger = \mu\alpha.c^\dagger$ , par hypothèse d'induction,  $c^\dagger$  est une  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -commande, donc  $t^\dagger$  est un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -terme.
- si  $c = [\alpha]t$  alors  $c^\dagger = \langle t^\dagger \mid \alpha \rangle$ . Par hypothèse d'induction,  $t^\dagger$  est un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -terme et  $\alpha \in E$ , donc  $c^\dagger$  est une  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -commande.

**Lemme 3.** Quels que soient le  $\lambda\mu$ -terme  $t$  et la  $\lambda\mu$ -commande  $c$ , les variables libres de  $t$  sont celles de  $t^\dagger$  et les variables libres de  $c^\dagger$  sont celles de  $c$ .

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $t$ .

- si  $t = x$  alors  $t^\dagger = x$  et  $x$  est la seule variable libre de  $t$  et de  $t^\dagger$ .
- si  $t = \lambda x.v$  alors  $t^\dagger = \lambda x.v^\dagger$ . Par hypothèse d'induction, les variables libres de  $v$  et de  $v^\dagger$  sont les mêmes, et les variables de  $t$  et de  $t^\dagger$  sont celles de  $v$  moins  $x$ .
- si  $t = (u)v$  alors les variables libres de  $t$  sont celles de  $u$  et de  $v$ . Par hypothèse d'induction,  $u$  et  $u^\dagger$  (resp.  $v$  et  $v^\dagger$ ) ont les mêmes variables libres. Les variables libres de  $((u)v)^\dagger$  sont celles de  $u^\dagger$  et de  $v^\dagger$  moins  $y$  et  $\beta$ . Mais  $y$  et  $\beta$  ne sont pas des variables libres de  $u^\dagger$  et  $v^\dagger$  par la définition 22. Par conséquent,  $(u)v$  et  $((u)v)^\dagger$  ont les mêmes variables libres.
- si  $t = \mu\alpha.c$  alors les variables libres de  $t$  sont celles de  $c$  moins  $\alpha$ .  $t^\dagger = \mu\alpha.c^\dagger$ . Par hypothèse d'induction,  $c$  et  $c^\dagger$  ont les mêmes variables libres et les variables libres de  $t^\dagger$  sont celles de  $c^\dagger$  moins  $\alpha$ , c'est-à-dire les variables libres de  $c$ .
- si  $c = [\alpha]t$  alors les variables libres de  $c$  sont celles de  $t$  plus  $\alpha$ . Par hypothèse d'induction,  $t$  et  $t^\dagger$  ont les mêmes variables libres.  $t^\dagger = \langle t^\dagger \mid \alpha \rangle$ , les variables libres de  $c^\dagger$  sont celles de  $c^\dagger$  plus  $\alpha$ .

**Lemme 4 (compatibilité de la traduction avec le typage).** Quels que soient le  $\lambda\mu$ -terme, la  $\lambda\mu$ -commande  $c$ , si  $\Gamma \vdash t : A \mid \Delta$  (resp.  $c : (\Gamma \vdash \Delta)$ ) alors  $\Gamma \vdash t^\dagger : A \mid \Delta$  (resp.  $c^\dagger : (\Gamma \vdash \Delta)$ ).

*Démonstration.* On raisonne par induction sur la hauteur des dérivations.

- dans le cas d'une variable de terme :

$$\left( \frac{}{x : A \vdash x : A \mid} \right)^\dagger = \frac{}{x : A \vdash x : A \mid}$$

– dans le cas d'une  $\lambda$ -abstraction :

$$\left( \frac{\Gamma \vdash t : B \mid \Delta}{\Gamma \setminus \{x : A\} \vdash \lambda x.t : A \rightarrow B \mid \Delta} \right)^\dagger = \frac{\Gamma \vdash t^\dagger : B \mid \Delta}{\Gamma \setminus \{x : A\} \vdash \lambda x.t^\dagger : A \rightarrow B \mid \Delta}$$

– dans le cas d'une application :

$$\left( \frac{\Gamma \vdash u : A \rightarrow B \mid \Delta \quad \Gamma' \vdash v : A \mid \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash (u)v : B \mid \Delta, \Delta'} \right)^\dagger = \frac{\Gamma \vdash u^\dagger : A \rightarrow B \mid \Delta \quad \frac{\frac{y : A \vdash y : A \mid \quad \mid \beta : B \vdash \beta : B}{y : A \mid y \cdot \beta : (A \rightarrow B) \vdash \beta : B}}{\langle u^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle : (\Gamma, y : A \vdash \Delta, \beta : B)}}{\frac{\Gamma' \vdash v^\dagger : A \mid \Delta' \quad \frac{\langle v^\dagger \mid \tilde{\mu}y. \langle u^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle : (\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', \beta : B)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \mu\beta. \langle v^\dagger \mid \tilde{\mu}y. \langle u^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle : B \mid \Delta, \Delta'}}$$

– dans le cas d'une commande :

$$\left( \frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta}{[\alpha]t : (\Gamma \vdash \Delta, \alpha : A)} \right)^\dagger = \frac{\Gamma \vdash t^\dagger : A \mid \Delta \quad \mid \alpha : A \vdash \alpha : A}{\langle t^\dagger \mid \alpha \rangle : (\Gamma \vdash \Delta, \alpha : A)}$$

– dans le cas d'une  $\mu$ -abstraction :

$$\left( \frac{c : (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma \vdash \mu\alpha.c : A \mid \Delta \setminus \{\alpha : A\}} \right)^\dagger = \frac{c^\dagger : (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma \vdash \mu\alpha.c^\dagger : A \mid \Delta \setminus \{\alpha : A\}}$$

– dans le cas d'un contexte de la forme  $[\alpha]\{\}$  :

$$\left( \frac{\quad}{\mid [\alpha]\{\} : A \vdash \alpha : A} \right)^\dagger = \frac{\quad}{\mid \alpha : A \vdash \alpha : A}$$

– dans le cas d'un contexte de la forme  $[\beta]^\dagger t\{\}$  :

$$\left( \frac{\Gamma \vdash t : (A \rightarrow B) \mid \Delta}{\Gamma \mid [\beta]^\dagger(t)\{\} : A \vdash \Delta, \beta : B} \right)^\dagger = \frac{\Gamma \vdash t^\dagger : (A \rightarrow B) \mid \Delta \quad \frac{\frac{y : A \vdash y : A \mid \quad \mid \beta : B \vdash \beta : B}{y : A \mid y \cdot \beta : (A \rightarrow B) \vdash \beta : B}}{\langle t^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle : (\Gamma, y : A \vdash \Delta, \beta : B)}}{\Gamma \mid \tilde{\mu}y. \langle t^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle : A \vdash \Delta, \beta : B}$$

– dans le cas d'un contexte de la forme  $h\{\{\}\}t\{\}$  :

$$\left( \frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid h : B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \mid h\{\{\}\}t\{\} : (A \rightarrow B) \vdash \Delta, \Delta'} \right)^\dagger = \frac{\Gamma \vdash t^\dagger : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid h^\dagger : B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \mid t^\dagger \cdot h^\dagger : (A \rightarrow B) \vdash \Delta, \Delta'}$$

### 3.2 La traduction du $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul dans le $\lambda\mu$ -calcul

**Définition 23 (traduction du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul dans le  $\lambda\mu$ -calcul).** On définit une application qui associe à un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -terme  $t$  un  $\lambda\mu$ -terme  $t^\circ$ , qui associe à une  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -commande  $c$  une  $\lambda\mu$ -commande  $c^\circ$  et qui associe à un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnement  $e$  un  $\lambda\mu$ -contexte  $e^\circ$  :

$$t^\circ = \begin{cases} x & \text{si } t = x \\ \lambda x.u^\circ & \text{si } t = \lambda x.u \\ \mu\alpha.c^\circ & \text{si } t = \mu\alpha.c \end{cases}$$

$$c^\circ = \langle t \mid e \rangle^\circ = e^\circ\{t^\circ\}$$

$$e^\circ = \begin{cases} [\alpha]\{\} & \text{si } e = \alpha \\ f^\circ\{\{\}\}t^\circ & \text{si } e = t \cdot f \\ [\beta](\lambda x.\mu\delta.c^\circ)\{\} & \text{si } e = \tilde{\mu}x.c \text{ (*)} \end{cases}$$

(\*) On impose que la  $\mu$ -variable  $\delta$  ne soit pas libre dans  $c^\circ$ .

**Définition 24 (les  $\tilde{\mu}$ -variables).** Soient  $t$  un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -terme,  $c$  une  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -commande et  $e$  un  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnement. On définit les  $\tilde{\mu}$ -variables de  $t^\circ$ ,  $c^\circ$  et  $e^\circ$  par induction sur  $t$ ,  $c$  et  $e$  :

- si  $t = x$  alors  $t^\circ$  n'a pas de  $\tilde{\mu}$ -variable.
- si  $t = \lambda x.u$  alors les  $\tilde{\mu}$ -variables de  $t^\circ$  sont celles de  $u^\circ$ .

- si  $t = \mu\alpha.c$  alors les  $\tilde{\mu}$ -variables de  $t^\circ$  sont celles de  $c^\circ$ .
- si  $c = \langle t \mid e \rangle$  alors les  $\tilde{\mu}$ -variables de  $c^\circ$  sont celles de  $t^\circ$  et de  $e^\circ$ .
- si  $e = \alpha$  alors  $e^\circ$  n'a pas de  $\tilde{\mu}$ -variables.
- si  $e = u \cdot f$  alors les  $\tilde{\mu}$ -variables de  $e^\circ$  sont celles de  $u^\circ$  et de  $f^\circ$ .
- si  $e = \tilde{\mu}x.c$  alors les  $\tilde{\mu}$ -variables de  $e^\circ = [\beta](\lambda x.\mu\delta.c^\circ)\{\}$  sont celles de  $c^\circ$  plus  $\beta$ .

**Lemme 5.** Quels que soient le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -terme  $t$ , la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -commande  $c$  et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnement  $e$ , les variables libres de  $t$  (resp.  $c$  et  $e$ ) sont celles de  $t^\circ$  (resp.  $c^\circ$  et  $e^\circ$ ) moins les  $\tilde{\mu}$ -variables de  $t^\circ$  (resp. de  $c^\circ$  et  $e^\circ$ ).

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $t$ ,  $c$  et  $e$ .

- si  $t = x$  alors  $t^\circ = x$  et  $x$  est la seule variable de  $t$  et de  $t^\circ$ .
- si  $t = \lambda x.v$  alors  $t^\circ = \lambda x.v^\circ$ . Par hypothèse d'induction,  $v$  a les mêmes variables libres que  $v^\circ$  moins ses  $\tilde{\mu}$ -variables. Les variables libres de  $t^\circ$  sont celles de  $v^\circ$  moins  $x$ , c'est-à-dire que  $t$  a les mêmes variables libres que  $t^\circ$  moins ses  $\tilde{\mu}$ -variables.
- si  $t = \mu\alpha.c$  alors  $t^\circ = \mu\alpha.c^\circ$ . Par hypothèse d'induction,  $c$  a les mêmes variables libres que  $c^\circ$  moins ses  $\tilde{\mu}$ -variables. Les variables libres de  $t^\circ$  sont celles de  $c^\circ$  moins  $\alpha$ , c'est-à-dire que  $t$  a les mêmes variables libres que  $t^\circ$  moins ses  $\tilde{\mu}$ -variables.
- si  $c = \langle t \mid e \rangle$  alors  $c^\circ = e^\circ\{t^\circ\}$ . Par hypothèse d'induction,  $t$  et  $e$  ont les mêmes variables libres que  $t^\circ$  et  $e^\circ$  moins leurs  $\tilde{\mu}$ -variables, c'est-à-dire que  $c$  a les mêmes variables libres que  $c^\circ$  moins ses  $\tilde{\mu}$ -variables.
- si  $e = \alpha$  alors  $e^\circ = [\alpha]\{\}$  et  $\alpha$  est la seule variable libre de  $e$  et de  $e^\circ$ .
- si  $e = u \cdot f$  alors  $e^\circ = f^\circ\{\{\}\}u^\circ$ . Par hypothèse d'induction,  $u$  et  $f$  ont les mêmes variables libres que  $u^\circ$  et  $f^\circ$  moins leurs  $\tilde{\mu}$ -variables, c'est-à-dire que  $e$  a les mêmes variables libres que  $e^\circ$  moins ses  $\tilde{\mu}$ -variables.
- si  $e = \tilde{\mu}x.c$  alors  $e^\circ = [\beta](\lambda x.\mu\delta.c^\circ)\{\}$ . Par hypothèse d'induction,  $c^\circ$  a les mêmes variables libres que  $c$  moins ses  $\tilde{\mu}$ -variables. Les variables libres de  $e$  sont celles de  $c$  moins  $x$ . Les variables libres de  $e^\circ$  sont celles de  $c^\circ$  moins  $x$  et plus  $\beta$ .  $\beta$  est une  $\tilde{\mu}$ -variable libre de  $c^\circ$ , Par conséquent, les variables libres de  $e$  sont celles de  $e^\circ$  moins ses  $\tilde{\mu}$ -variables.

L'introduction des  $\tilde{\mu}$ -variables dans la traduction  $()^\circ$  est nécessaire si on veut respecter la  $\lambda\mu$ -syntaxe. Si on ajoutait la constante de type  $\perp$ , on ne distinguerait pas les  $\lambda\mu$ -commandes des  $\lambda\mu$ -termes. Par conséquent, on traduirait  $\tilde{\mu}x.c$  par  $(\lambda x.c^\circ)\{\}$  parce que  $c^\circ$  serait un  $\lambda\mu$ -terme de type  $\perp$ , et on pourrait se passer des  $\tilde{\mu}$ -variables.

**Lemme 6 (compatibilité de la traduction avec le typage).** Quels que soient le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -terme  $t$ , la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -commande  $c$  et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnement  $e$ , si  $\Gamma \vdash t : A \mid \Delta$  (resp.  $c : (\Gamma \vdash \Delta)$  et  $\Gamma \mid e : A \vdash \Delta$ ) alors  $\Gamma \vdash t^\circ : A \mid \Delta$  (resp.  $c^\circ : (\Gamma \vdash \Delta)$  et  $\Gamma \mid e^\circ : A \vdash \Delta$ ).

*Démonstration.* On raisonne par induction sur la hauteur des dérivations.

- dans le cas d'une variable de terme : 
$$\left( \frac{}{x : A \vdash x : A \mid} \right)^\circ = \frac{}{x : A \vdash x : A \mid}$$
- dans le cas d'une  $\lambda$ -abstraction : 
$$\left( \frac{\Gamma \vdash t : B \mid \Delta}{\Gamma \setminus \{x : A\} \vdash \lambda x.t : A \rightarrow B \mid \Delta} \right)^\circ = \frac{\Gamma \vdash t^\circ : B \mid \Delta}{\Gamma \setminus \{x : A\} \vdash \lambda x.t^\circ : A \rightarrow B \mid \Delta}$$
- dans le cas d'une  $\mu$ -abstraction : 
$$\left( \frac{c : (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma \vdash \mu\alpha.c : A \mid \Delta \setminus \{\alpha : A\}} \right)^\circ = \frac{c^\circ : (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma \vdash \mu\alpha.c^\circ : A \mid \Delta \setminus \{\alpha : A\}}$$
- dans le cas d'une commande : 
$$\left( \frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid e : A \vdash \Delta'}{\langle t \mid e \rangle : (\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta')} \right)^\circ = \frac{\Gamma \vdash t^\circ : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid e^\circ : A \vdash \Delta'}{e^\circ\{t^\circ\} : (\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta')} \text{ lemme 1}$$
- dans le cas d'une variable de pile : 
$$\left( \frac{}{\mid \alpha : A \vdash \alpha : A} \right)^\circ = \frac{}{\mid [\alpha]\{\} : A \vdash \alpha : A}$$
- dans le cas d'une pile : 
$$\left( \frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid e : B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \mid t \cdot e : A \rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \right)^\circ = \frac{\Gamma \vdash t^\circ : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid e^\circ : B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \mid e^\circ\{\{\}\}t^\circ : A \rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'}$$
- dans le cas d'une  $\tilde{\mu}$ -abstraction :

$$\left( \frac{c : (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma \setminus \{x : A\} \mid \tilde{\mu}x.c : A \vdash \Delta} \right)^o = \frac{\frac{c^o : (\Gamma \vdash \Delta)}{\Gamma \vdash \mu\delta.c^o : B \mid \Delta}}{\Gamma \setminus \{x : A\} \vdash \lambda x.\mu\delta.c^o : (A \rightarrow B)}}{\Gamma \setminus \{x : A\} \mid [\beta](\lambda x.\mu\delta.c^o)\{\} : A \vdash \Delta, \beta : B}$$

## 4 Les compositions des traductions

On aurait souhaité que la composition  $()^{\dagger o}$  des traductions soit l'identité sur le  $\lambda\mu$ -calcul et réciproquement que l'application  $()^{o\dagger}$  soit l'identité sur le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul. Le problème réside dans le fait que certains termes qui existent dans l'un des langages n'existent pas dans l'autre. C'est le cas de l'application en  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul et de la  $\tilde{\mu}$ -abstraction en  $\lambda\mu$ -calcul. Leurs traductions présentent alors des formes expansées. On montre cependant que les traductions sont l'identité sur leur domaine respectif mais à des réductions linéaires près.

### 4.1 La composition des traductions à partir du $\lambda\mu$ -calcul

La démonstration que l'application  $()^{\dagger o}$  est l'identité sur le  $\lambda\mu$ -calcul est directe :

**Théorème 1 (composition des traductions à partir du  $\lambda\mu$ -calcul).**

Quels que soient le  $\lambda\mu$ -terme  $t$  et la  $\lambda\mu$ -commande  $c$ ,  $t^{\dagger o} \rightsquigarrow t$  et  $c^{\dagger o} \rightsquigarrow c$ .

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $t$  et  $c$ .

- si  $t = x$  alors  $x^{\dagger o} = x^o = x$
- si  $t = \lambda x.u$  alors  $(\lambda x.u)^{\dagger o} = (\lambda x.u^{\dagger})^o = \lambda x.u^{\dagger o} \rightsquigarrow \lambda x.u$  par hypothèse d'induction
- si  $t = (u)v$  alors

$$\begin{aligned} ((u)v)^{\dagger o} &= (\mu\beta.\langle v^{\dagger} \mid \tilde{\mu}y.\langle u^{\dagger} \mid y \cdot \beta \rangle \rangle)^o && \text{par la définition 22} \\ &= \mu\beta.[\gamma](\lambda y.\mu\delta.[\beta](u^{\dagger o})y)v^{\dagger o} && \text{par la définition 23} \\ &\rightsquigarrow \mu\beta.[\gamma](\lambda y.\mu\delta.[\beta](u)y)v && \text{par hypothèse d'induction} \\ &\rightsquigarrow_{\beta}^1 \mu\beta.[\gamma]\mu\delta.[\beta](u)v \\ &\rightsquigarrow_{\rho}^1 \mu\beta.[\beta](u)v \\ &\rightsquigarrow_{\theta}^1 (u)v \end{aligned}$$

- si  $t = \mu\alpha.c$  alors  $(\mu\alpha.c)^{\dagger o} = (\mu\alpha.c^{\dagger})^o = \mu\alpha.c^{\dagger o} \rightsquigarrow \mu\alpha.c$  par hypothèse d'induction
- $c^{\dagger o} = ([\alpha]t)^{\dagger o} = (\langle t^{\dagger} \mid \alpha \rangle)^o = [\alpha]t^{\dagger o} \rightsquigarrow [\alpha]t$  par hypothèse d'induction.

### 4.2 La composition des traductions à partir du $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul

En revanche, en ce qui concerne l'application  $()^{o\dagger}$ , on démontre, au préalable, deux lemmes.

**Lemme 7.** Quels que soient l'entier  $n \geq 0$ , les  $\lambda\mu$ -termes  $t_0, t_1, \dots, t_n$  et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnement  $e$ ,

$$\langle \langle (t_0)t_1 \dots t_n \rangle^{\dagger} \mid e \rangle \rightsquigarrow \langle t_0^{\dagger} \mid t_1^{\dagger} \cdot \dots \cdot t_n^{\dagger} \cdot e \rangle.$$

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ . C'est immédiat pour  $n = 0$ .

- pour  $n + 1$  :

$$\begin{aligned} \langle \langle (t_0)t_1 \dots t_n t_{n+1} \rangle^{\dagger} \mid e \rangle &= \langle \mu\beta.\langle t_{n+1}^{\dagger} \mid \tilde{\mu}y.\langle \langle (t_0)t_1 \dots t_n \rangle^{\dagger} \mid y \cdot \beta \rangle \rangle \mid e \rangle && \text{par la définition 22} \\ &\rightsquigarrow_{\mu}^1 \langle t_{n+1}^{\dagger} \mid \tilde{\mu}y.\langle \langle (t_0)t_1 \dots t_n \rangle^{\dagger} \mid y \cdot e \rangle \rangle \\ &\rightsquigarrow_{\tilde{\mu}}^1 \langle \langle (t_0)t_1 \dots t_n \rangle^{\dagger} \mid t_{n+1}^{\dagger} \cdot e \rangle \\ &\rightsquigarrow \langle t_0^{\dagger} \mid t_1^{\dagger} \cdot \dots \cdot t_n^{\dagger} \cdot t_{n+1}^{\dagger} \cdot e \rangle && \text{par hypothèse de réc.} \end{aligned}$$

**Lemme 8.** Quels que soient le  $\lambda\mu$ -terme  $u$  et le  $\lambda\mu$ -contexte  $h$ ,  $(h\{u\})^\dagger \rightsquigarrow \langle u^\dagger \mid h^\dagger \rangle$ .

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $h$ .

– si  $h = [\alpha]\{\}$  alors  $\langle u^\dagger \mid h^\dagger \rangle = \langle u^\dagger \mid \alpha \rangle$  et

$$\begin{aligned} (h\{u\})^\dagger &= ([\alpha]u)^\dagger \\ &= \langle u^\dagger \mid \alpha \rangle \quad \text{par la définition 22} \end{aligned}$$

– si  $h = [\beta](t)\{\}$  alors  $\langle u^\dagger \mid h^\dagger \rangle = \langle u^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle$  et

$$\begin{aligned} (h\{u\})^\dagger &= ([\beta](t)u)^\dagger \\ &= \langle \mu\gamma.\langle u^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \gamma \rangle \rangle \mid \beta \rangle \quad \text{par la définition 22} \\ &\rightsquigarrow_{\mu}^1 \langle u^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle \end{aligned}$$

– si  $h = h'\{\{\}\}t\}$  alors  $\langle u^\dagger \mid h^\dagger \rangle = \langle u^\dagger \mid t^\dagger \cdot h'^\dagger \rangle$  et

$$\begin{aligned} (h\{u\})^\dagger &= (h'\{(u)t\})^\dagger \quad \text{par la définition 9} \\ &\rightsquigarrow \langle ((u)t)^\dagger \mid h'^\dagger \rangle \quad \text{par hypothèse d'induction} \\ &\rightsquigarrow \langle u^\dagger \mid t^\dagger \cdot h'^\dagger \rangle \quad \text{par le lemme 7} \end{aligned}$$

**Théorème 2 (composition des traductions à partir du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul).** Quels que soient le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -terme  $t$ , la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -commande  $c$  et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnement  $e$ ,

$$t^{\circ\dagger} \rightsquigarrow t, \quad c^{\circ\dagger} \rightsquigarrow c \quad \text{et} \quad e^{\circ\dagger} \rightsquigarrow e$$

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $t$ ,  $c$  et  $e$ .

- si  $t = x$  alors  $x^{\circ\dagger} = x^\dagger = x$
- si  $t = \lambda x.u$  alors  $t^{\circ\dagger} = (\lambda x.u)^{\circ\dagger} = (\lambda x.u^{\circ\dagger})^\dagger = \lambda x.u^{\circ\dagger} \rightsquigarrow \lambda x.u$  par hypothèse d'induction
- si  $t = \mu\alpha.c$  alors  $t^{\circ\dagger} = (\mu\alpha.c)^{\circ\dagger} = (\mu\alpha.c^{\circ\dagger})^\dagger = \mu\alpha.c^{\circ\dagger} \rightsquigarrow \mu\alpha.c$  par hypothèse d'induction
- $c^{\circ\dagger} = (\langle t \mid e \rangle)^{\circ\dagger} = (e^{\circ\dagger}\{t^{\circ\dagger}\})^\dagger \rightsquigarrow \langle t^{\circ\dagger} \mid e^{\circ\dagger} \rangle$  par le lemme 8  $\rightsquigarrow \langle t \mid e \rangle$  par hypothèse d'induction
- si  $e = \alpha$  alors  $e^{\circ\dagger} = (\alpha)^{\circ\dagger} = ([\alpha]\{\})^\dagger = \alpha$
- si  $e = u \cdot f$  alors  $e^{\circ\dagger} = (u \cdot f)^{\circ\dagger} = (f^{\circ\dagger}\{\{\}\}u^{\circ\dagger})^\dagger = u^{\circ\dagger} \cdot f^{\circ\dagger} \rightsquigarrow u \cdot f$  par hypothèse d'induction
- si  $e = \tilde{\mu}x.c$  alors

$$\begin{aligned} e^{\circ\dagger} &= (\tilde{\mu}x.c)^{\circ\dagger} \\ &= ([\beta](\lambda x.\mu\beta.c^{\circ\dagger})\{\})^\dagger \quad \text{par la définition 23} \\ &= \tilde{\mu}y.\langle \lambda x.\mu\beta.c^{\circ\dagger} \mid y \cdot \beta \rangle \quad \text{par la définition 22} \\ &\rightsquigarrow \tilde{\mu}y.\langle \lambda x.\mu\beta.c \mid y \cdot \beta \rangle \quad \text{par hypothèse d'induction} \\ &\rightsquigarrow_{\beta}^1 \tilde{\mu}y.\langle y \mid \tilde{\mu}x.\langle \mu\beta.c \mid \beta \rangle \rangle \\ &\rightsquigarrow_{\mu}^1 \tilde{\mu}y.\langle \mu\beta.c[x \leftarrow y] \mid \beta \rangle \\ &\rightsquigarrow_{\mu}^1 \tilde{\mu}y.c[x \leftarrow y] \\ &= \tilde{\mu}x.c \end{aligned}$$

La traduction  $()^{\circ\dagger}$  envoie tout terme  $t$  du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul dans le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -calcul. C'est pourquoi cette traduction n'est pas l'identité sur le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul. En contre partie, il existe pour tout terme  $t$  du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul un terme expansé linéairement, dans le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{\text{TQ}}$ -calcul.

## 5 Les simulations

Le point crucial de cette étude est de montrer que les  $\lambda\mu$  et  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calculs sont équivalents d'un point de vue calculatoire. On cherche donc à prouver des théorèmes de simulation. L'idée est de les démontrer dans le cas non typé et non dirigé de telle sorte qu'on obtienne ces mêmes théorèmes pour les projections  $\text{cbn}/\text{cbv}$  quasi immédiatement.

## 5.1 La simulation du $\lambda\mu$ -calcul par le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul

Avant d'attaquer le théorème de simulation du  $\lambda\mu$ -calcul par le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul, on montre des lemmes qui établissent ce qu'est le traduit du substitué par rapport au substitué du traduit, et ce pour les  $\beta$ ,  $\mu$  et  $\mu'$ -substitutions et pour la traduction  $()^\dagger$ .

**Lemme 9.** Pour tous  $\lambda\mu$ -termes  $t$ ,  $u$  et pour toute  $\lambda\mu$ -commande  $c$ ,

$$(t[x \leftarrow u])^\dagger = t^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] \text{ et } (c[x \leftarrow u])^\dagger = c^\dagger[x \leftarrow u^\dagger]$$

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $t$  et  $c$ .

- si  $t = x$  alors  $t^\dagger = x$ ,  $t^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] = u^\dagger$  et  $(t[x \leftarrow u])^\dagger = u^\dagger$
- si  $t = y \neq x$  alors  $t^\dagger = y$ ,  $t^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] = y$  et  $(t[x \leftarrow u])^\dagger = y^\dagger = y$
- si  $t = \lambda y.v$  alors  $t^\dagger = \lambda y.v^\dagger$ ,  $t^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] = \lambda y.v^\dagger[x \leftarrow u^\dagger]$  et

$$\begin{aligned} (t[x \leftarrow u])^\dagger &= \lambda y.(v[x \leftarrow u])^\dagger && \text{par la définition 22} \\ &= \lambda y.v^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] && \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $t = (v)w$  alors  $t^\dagger = \mu\beta.\langle w^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle v^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle$ ,

$$t^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] = \mu\beta.\langle w^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] \mid \tilde{\mu}y.\langle v^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] \mid y \cdot \beta \rangle \rangle$$

et

$$\begin{aligned} (t[x \leftarrow u])^\dagger &= ((v[x \leftarrow u])w[x \leftarrow u])^\dagger \\ &= \mu\beta.\langle (w[x \leftarrow u])^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle (v[x \leftarrow u])^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle && \text{par la définition 22} \\ &= \mu\beta.\langle w^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] \mid \tilde{\mu}y.\langle v^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] \mid y \cdot \beta \rangle \rangle && \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $t = \mu\alpha.c$  alors  $t^\dagger = \mu\alpha.c^\dagger$ ,  $t^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] = \mu\alpha.c^\dagger[x \leftarrow u^\dagger]$  et

$$\begin{aligned} (t[x \leftarrow u])^\dagger &= \mu\alpha.(c[x \leftarrow u])^\dagger && \text{par la définition 22} \\ &= \mu\alpha.c^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] && \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $c = [\alpha]t$  alors  $c^\dagger = \langle t^\dagger \mid \alpha \rangle$ ,  $c^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] = \langle t^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] \mid \alpha \rangle$  et

$$\begin{aligned} (c[x \leftarrow u])^\dagger &= ([\alpha]t[x \leftarrow u])^\dagger \\ &= \langle (t[x \leftarrow u])^\dagger \mid \alpha \rangle && \text{par la définition 22} \\ &= \langle t^\dagger[x \leftarrow u^\dagger] \mid \alpha \rangle && \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

**Lemme 10.** Pour tous  $\lambda\mu$ -termes  $t$ ,  $v$  et pour toute  $\lambda\mu$ -commande  $c$ ,

$$(v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \rightsquigarrow v^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] \text{ et } (c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \rightsquigarrow c^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha]$$

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $v$  et  $c$ .

- si  $v = x$  alors  $v^\dagger = x$ ,  $v^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] = x$  et  $(v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger = x^\dagger = x$
- si  $v = \lambda x.w$  alors  $v^\dagger = \lambda x.w^\dagger$ ,  $v^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] = \lambda x.w^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha]$  et

$$\begin{aligned} (v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger &= \lambda x.(w[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \\ &\rightsquigarrow \lambda x.w^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] && \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $v = (a)b$  alors  $v^\dagger = \mu\beta.\langle b^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle a^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle$ ,

$$v^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] = \mu\beta.\langle b^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] \mid \tilde{\mu}y.\langle a^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] \mid y \cdot \beta \rangle \rangle$$

et

$$\begin{aligned} (v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger &= ((a[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])b[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \\ &= \mu\beta.\langle (b[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle (a[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle && \text{déf. 22} \\ &\rightsquigarrow \mu\beta.\langle b^\dagger[[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha]] \mid \tilde{\mu}y.\langle a^\dagger[[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha]] \mid y \cdot \beta \rangle \rangle && \text{hyp. rec.} \end{aligned}$$

- si  $v = \mu\beta.c$  alors  $v^\dagger = \mu\beta.c^\dagger$ ,  $v^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] = \mu\beta.c^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha]$  et

$$\begin{aligned} (v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger &= \mu\beta.(c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \\ &\rightsquigarrow \mu\beta.c^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $c = [\alpha]w$  alors  $c^\dagger = \langle w^\dagger \mid \alpha \rangle$ ,  $c^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] = \langle w^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] \mid t^\dagger \cdot \alpha \rangle$  et

$$\begin{aligned} (c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger &= ([\alpha](w[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t)t)^\dagger \\ &= \langle ((w[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t)t)^\dagger \mid \alpha \rangle \quad \text{par la définition 22} \\ &\rightsquigarrow \langle w[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t]^\dagger \mid t^\dagger \cdot \alpha \rangle \quad \text{par le lemme 7} \\ &\rightsquigarrow \langle w^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] \mid t^\dagger \cdot \alpha \rangle \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $c = [\beta]w$  alors  $c^\dagger = \langle w^\dagger \mid \beta \rangle$ ,  $c^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] = \langle w^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] \mid \beta \rangle$  et

$$\begin{aligned} (c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger &= [\beta](w[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \\ &= \langle (w[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \mid \beta \rangle \quad \text{par la définition 22} \\ &\rightsquigarrow \langle w^\dagger[\alpha \leftarrow t^\dagger \cdot \alpha] \mid \beta \rangle \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

**Lemme 11.** Pour tout  $\lambda\mu$ -terme  $t, v$  et pour toute  $\lambda\mu$ -commande  $c$ ,

$$(v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \rightsquigarrow v^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \text{ et } (c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \rightsquigarrow c^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle]$$

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $v$  et  $c$ .

- si  $v = x$  alors  $v^\dagger = x$ ,  $v^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] = x$  et  $v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u] = x^\dagger = x$

- si  $v = \lambda x.w$  alors  $v^\dagger = \lambda x.w^\dagger$ ,  $v^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] = \lambda x.w^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle]$  et

$$\begin{aligned} (v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger &= \lambda x.(w[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \\ &\rightsquigarrow \lambda x.w^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $v = (a)b$  alors  $v^\dagger = \mu\beta\langle b^\dagger \mid \tilde{\mu}z.\langle a^\dagger \mid z \cdot \beta \rangle \rangle$ ,

$$v^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] = \mu\beta\langle b^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \mid \tilde{\mu}z.\langle a^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \mid z \cdot \beta \rangle \rangle$$

et

$$\begin{aligned} (v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger &= ((a[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])b[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](u)t])^\dagger \\ &= \mu\beta.\langle (b[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \mid \tilde{\mu}z.\langle (a[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \mid z \cdot \beta \rangle \rangle \quad \text{déf. 22} \\ &\rightsquigarrow \mu\beta\langle b^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \mid \tilde{\mu}z.\langle a^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \mid z \cdot \beta \rangle \rangle \quad \text{hyp. rec.} \end{aligned}$$

- si  $v = \mu\beta.c$  alors  $v^\dagger = \mu\beta.c^\dagger$ ,  $v^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] = \mu\beta.c^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle]$  et

$$\begin{aligned} (v[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger &= \mu\beta.(c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \\ &\rightsquigarrow \mu\beta.c^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $c = [\alpha]w$  alors  $c^\dagger = \langle w^\dagger \mid \alpha \rangle$ ,  $c^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] = \langle w^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \mid \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle \rangle$ , et

$$\begin{aligned} (c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger &= ([\alpha](t)w[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \\ &= \langle \mu\beta.\langle (w[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \mid \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \beta \rangle \rangle \mid \alpha \rangle \quad \text{par la définition 22} \\ &\rightsquigarrow_{\mu}^1 \langle w^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \mid \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle \rangle \quad \text{hyp. rec.} \end{aligned}$$

- si  $c = [\beta]w$  alors  $c^\dagger = \langle w^\dagger \mid \beta \rangle$ ,  $c^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] = \langle w^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \mid \beta \rangle$  et

$$\begin{aligned} (c[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger &= [\beta](w[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \\ &= \langle (w[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](t)u])^\dagger \mid \beta \rangle \quad \text{par la définition 22} \\ &\rightsquigarrow \langle w^\dagger[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle t^\dagger \mid y \cdot \alpha \rangle] \mid \beta \rangle \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

**Théorème 3 (simulation du  $\lambda\mu$ -calcul par la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul).**

Quels que soient  $\gamma$  et le  $\lambda\mu$ -terme  $t$ , si  $t \rightarrow_{\gamma}^1 t'$  alors il existe  $u$  tel que  $t^{\dagger} \rightarrow u$  et  $t'^{\dagger} \rightsquigarrow u$

*Démonstration.* On raisonne par cas sur les  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\mu'$ ,  $\rho$  et  $\theta$ -réductions

- si  $t = (\lambda x.u)v$  alors  $t' = u[x \leftarrow v]$ ,  $t'^{\dagger} = (u[x \leftarrow v])^{\dagger} = u^{\dagger}[x \leftarrow v^{\dagger}]$  et

$$\begin{aligned} t^{\dagger} &= \mu\beta.\langle v^{\dagger} \mid \tilde{\mu}y.\langle \lambda x.u^{\dagger} \mid y \cdot \beta \rangle \rangle \\ &\rightsquigarrow_{\beta}^1 \mu\beta.\langle v^{\dagger} \mid \tilde{\mu}y.\langle y \mid \tilde{\mu}x.\langle u^{\dagger} \mid \beta \rangle \rangle \quad (1) \\ &\rightsquigarrow_{\tilde{\mu}}^1 \mu\beta.\langle v^{\dagger} \mid \tilde{\mu}y.\langle u^{\dagger}[x \leftarrow y] \mid \beta \rangle \rangle \\ &\rightarrow_{\tilde{\mu}}^1 \mu\beta.\langle u^{\dagger}[x \leftarrow v^{\dagger}] \mid \beta \rangle \\ &\rightsquigarrow_{\theta}^1 u^{\dagger}[x \leftarrow v^{\dagger}] \end{aligned}$$

- si  $t = (\mu\alpha.c)v$  alors  $t' = \mu\alpha.c[[\alpha]w \leftarrow [\alpha](w)v]$ ,  $t'^{\dagger} \rightsquigarrow \mu\alpha.c^{\dagger}[\alpha \leftarrow v^{\dagger} \cdot \alpha]$  par le lemme 10 et

$$\begin{aligned} t^{\dagger} &= \mu\beta.\langle v^{\dagger} \mid \tilde{\mu}y.\langle \mu\alpha.c^{\dagger} \mid y \cdot \beta \rangle \rangle \\ &\rightsquigarrow_{\tilde{\mu}}^1 \mu\beta.\langle \mu\alpha.c^{\dagger} \mid v^{\dagger} \cdot \beta \rangle \\ &\rightarrow_{\mu}^1 \mu\beta.c^{\dagger}[\alpha \leftarrow v^{\dagger} \cdot \beta] \quad (2) \\ &= \mu\alpha.c^{\dagger}[\alpha \leftarrow v^{\dagger} \cdot \alpha] \end{aligned}$$

- si  $t = v(\mu\alpha.c)$  alors  $t' = \mu\alpha.c[[\alpha]w \leftarrow [\alpha](v)w]$ ,  $t'^{\dagger} \rightsquigarrow \mu\alpha.c^{\dagger}[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle v^{\dagger} \mid y \cdot \alpha \rangle]$  par le lemme 11 et

$$\begin{aligned} t^{\dagger} &= \mu\beta.\langle \mu\alpha.c^{\dagger} \mid \tilde{\mu}y.\langle v^{\dagger} \mid y \cdot \beta \rangle \rangle \\ &\rightarrow_{\mu}^1 \mu\beta.c^{\dagger}[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle v^{\dagger} \mid y \cdot \beta \rangle] \quad (3) \\ &= \mu\alpha.c^{\dagger}[\alpha \leftarrow \tilde{\mu}y.\langle v^{\dagger} \mid y \cdot \alpha \rangle] \end{aligned}$$

- si  $t = [\beta]\mu\alpha.c$  alors  $t' = c[\alpha \leftarrow \beta]$ ,  $t'^{\dagger} = c^{\dagger}[\alpha \leftarrow \beta]$  et  $t^{\dagger} = \langle \mu\alpha.c^{\dagger} \mid \beta \rangle \rightsquigarrow_{\mu}^1 c^{\dagger}[\alpha \leftarrow \beta] = (c[\alpha \leftarrow \beta])^{\dagger}$

- si  $t = \mu\alpha.[\alpha]u$  et si  $\alpha$  n'est pas libre dans  $u$  alors  $t' = u$ ,  $t'^{\dagger} = u^{\dagger}$  et  $t^{\dagger} = \mu\alpha.\langle u^{\dagger} \mid \alpha \rangle \rightsquigarrow_{\theta}^1 u^{\dagger}$  parce que  $\alpha$  n'est pas libre dans  $u^{\dagger}$  (cf. lemme 3).

**Théorème 4 (simulation de la réduction avec appel par nom).**

Quel que soit le  $\lambda\mu$ -terme  $t$ , si  $t \rightarrow_n^1 t'$  alors il existe  $u$  tel que  $t^{\dagger} \rightarrow u$  et  $t'^{\dagger} \rightsquigarrow u$

*Démonstration.* On raisonne par cas sur les  $\beta$  et  $\mu$ -réductions. La  $\beta$ -réduction en cbn du  $\lambda\mu$ -calcul est simulée par une  $\tilde{\mu}$ -réduction du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul en cbn (cf. (1)). La  $\mu$ -réduction du  $\lambda\mu$ -calcul est simulée par une  $\mu$ -réduction du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul correcte en cbn, parce qu'elle est la seule réduction possible dans la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -commande  $\langle \mu\alpha.c^{\dagger} \mid v^{\dagger} \cdot \beta \rangle$ .

**Théorème 5 (simulation de la réduction avec appel par valeur).**

Quel que soit le  $\lambda\mu$ -terme  $t$ , si  $t \rightarrow_v^1 t'$  alors il existe  $u$  tel que  $t^{\dagger} \rightarrow u$  et  $t'^{\dagger} \rightsquigarrow u$

*Démonstration.* On raisonne par cas sur les  $\beta$ ,  $\mu$  et  $\mu'$ -réductions. La  $\beta$ -réduction du  $\lambda\mu$ -calcul en cbv s'effectue si  $v$  est une valeur. Cette réduction est simulée par une  $\tilde{\mu}$ -réduction du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul (cf. (2)) parce que  $v^{\dagger}$  n'est pas de la forme  $\mu\alpha.c$  et donc qu'aucune  $\mu$ -réduction du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul ne peut s'effectuer. La  $\mu$ -réduction en cbv du  $\lambda\mu$ -calcul est simulée par une  $\mu$ -réduction en cbv du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul. Enfin, la  $\mu'$ -réduction du  $\lambda\mu$ -calcul est simulée par une  $\mu$ -réduction en cbv du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul (cf. (3)).

Ce théorème justifie la traduction  $((u)v)^{\dagger}$  par  $\mu\beta.\langle v^{\dagger} \mid \tilde{\mu}y.\langle u^{\dagger} \mid y \cdot \beta \rangle \rangle$ . La traduction  $\mu\beta.\langle u^{\dagger} \mid v^{\dagger} \cdot \beta \rangle$  n'aurait pas permis d'obtenir la simulation en cbv du  $\lambda\mu$ -calcul par le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul. Si  $u$  est un  $\lambda\mu$ -terme de la forme  $\mu\alpha.c$  et si  $v$  est un  $\lambda\mu$ -terme de la forme  $\mu\beta.c'$  alors aucune  $\tilde{\mu}$ -réduction n'aurait pu s'effectuer. Seule la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -réduction  $\mu$  réduit  $\mu\beta.\langle \mu\alpha.c^{\dagger} \mid \mu\beta.c'^{\dagger} \cdot \beta \rangle$  en  $c^{\dagger}[\alpha \leftarrow \mu\beta.c'^{\dagger} \cdot \alpha]$  là où, en  $\lambda\mu$ -calcul, c'est la commande  $c'$  qui absorbe le terme  $\mu\alpha.c$ .



## 5.2 La simulation du $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul par le $\lambda\mu$ -calcul

On montre par des lemmes ce qu'est le substitué du traduit par rapport au traduit du substitué pour les  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$ -substitutions et pour la traduction  $()^o$ .

**Lemme 12.** Quels que soient les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -termes  $t, u$ , la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -commande  $c$  et le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnement  $e$ ,

$$(t[x \leftarrow u])^o = t^o[x \leftarrow u^o] \text{ et } (c[x \leftarrow u])^o = c^o[x \leftarrow u^o] \text{ et } (e[x \leftarrow u])^o = e^o[x \leftarrow u^o].$$

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $t, c$  et  $e$ .

- si  $t = x$  alors  $t^o = x$ ,  $t^o[x \leftarrow u^o] = u^o$  et  $(t[x \leftarrow u])^o = u^o$
- si  $t = y$  alors  $t^o = y$ ,  $t^o[x \leftarrow u^o] = y$  et  $(t[x \leftarrow u])^o = y$
- si  $t = \lambda y.v$  alors  $t^o = \lambda y.v^o$ ,  $t^o[x \leftarrow u^o] = \lambda y.v^o[x \leftarrow u^o]$  et

$$\begin{aligned} (t[x \leftarrow u])^o &= \lambda y.(v[x \leftarrow u])^o \\ &= \lambda y.v^o[x \leftarrow u^o] \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $t = \mu\alpha.c$  alors  $t^o = \mu\alpha.c^o$ ,  $t^o[x \leftarrow u^o] = \mu\alpha.c^o[x \leftarrow u^o]$  et

$$\begin{aligned} (t[x \leftarrow u])^o &= \mu\alpha.(c[x \leftarrow u])^o \\ &= \mu\alpha.c^o[x \leftarrow u^o]. \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- $c = \langle t \mid e \rangle$ ,  $c^o = e^o\{t^o\}$ ,  $c^o[x \leftarrow u^o] = e^o[x \leftarrow u^o]\{t^o[x \leftarrow u^o]\}$  et

$$\begin{aligned} (c[x \leftarrow u])^o &= (\langle t[x \leftarrow u] \mid e[x \leftarrow u] \rangle)^o \\ &= (e[x \leftarrow u])^o\{(t[x \leftarrow u])^o\} \quad \text{par la définition 23} \\ &= e^o[x \leftarrow u^o]\{t^o[x \leftarrow u^o]\} \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $e = \alpha$  alors  $e^o = [\alpha]\{\}$ ,  $e^o[x \leftarrow u^o] = [\alpha]\{\}$ , et

$$\begin{aligned} (e[x \leftarrow u])^o &= e^o \\ &= [\alpha]\{\} \quad \text{par la définition 23} \end{aligned}$$

- si  $e = t \cdot f$  alors  $e^o = f^o\{(\{\})t^o\}$ ,  $e^o[x \leftarrow u^o] = f^o[x \leftarrow u^o]\{(\{\})t^o[x \leftarrow u^o]\}$ , et

$$\begin{aligned} (e[x \leftarrow u])^o &= (t[x \leftarrow u] \cdot f[x \leftarrow u])^o \\ &= (f[x \leftarrow u])^o\{(t[x \leftarrow u])^o\} \quad \text{par la définition 23} \\ &= e^o[x \leftarrow u^o]\{(\{\})t^o[x \leftarrow u^o]\} \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $e = \tilde{\mu}y.c$  alors  $e^o = [\beta](\lambda y.\mu\beta.c^o)\{\}$ ,  $e^o[x \leftarrow u^o] = [\beta](\lambda y.\mu\beta.c^o[x \leftarrow u^o])\{\}$ , et

$$\begin{aligned} (e[x \leftarrow u])^o &= (\tilde{\mu}y.c[x \leftarrow u])^o \\ &= [\beta](\lambda y.\mu\beta.(c[x \leftarrow u])^o)\{\} \quad \text{par la définition 23} \\ &= [\beta](\lambda y.\mu\beta.c^o[x \leftarrow u^o])\{\} \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

**Lemme 13.** Quels que soient le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -terme  $t$ , la  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -commande  $c$  et les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnements  $e$  et  $f$ ,

$$\begin{aligned} (t[\alpha \leftarrow f])^o &= t^o[[\alpha]u \leftarrow f^o\{u\}], \quad (c[\alpha \leftarrow f])^o = c^o[[\alpha]u \leftarrow f^o\{u\}] \\ &\text{et } (e[\alpha \leftarrow f])^o = e^o[[\alpha]u \leftarrow f^o\{u\}]. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $t, c$  et  $e$ .

- si  $t = x$  alors  $t^o = x$ ,  $t^o[[\alpha]u \leftarrow f^o\{u\}] = x$  et  $(t[\alpha \leftarrow f])^o = x^o = x$
- si  $t = \lambda x.v$  alors  $t^o = \lambda x.v^o$ ,  $t^o[[\alpha]u \leftarrow f^o\{u\}] = \lambda x.v^o[[\alpha]u \leftarrow f^o\{u\}]$  et

$$\begin{aligned} (t[\alpha \leftarrow f])^o &= \lambda x.(v[\alpha \leftarrow f])^o \\ &= \lambda x.v^o[[\alpha]u \leftarrow f^o\{u\}] \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $t = \mu\beta.c$  alors  $t^\circ = \mu\beta.c^\circ$ ,  $t^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}] = \mu\beta.c^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}]$  et

$$\begin{aligned} (t[\alpha \leftarrow f])^\circ &= \mu\beta.(c[\alpha \leftarrow f])^\circ \\ &= \mu\beta.c^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}] \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

-  $c = \langle t \mid e \rangle$ ,  $c^\circ = e^\circ\{t^\circ\}$ ,  $c^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}] = e^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}]\{t^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}]\}$  et

$$\begin{aligned} (c[\alpha \leftarrow f])^\circ &= (\langle t[\alpha \leftarrow f] \mid e[\alpha \leftarrow f] \rangle)^\circ \\ &= (e[\alpha \leftarrow f])^\circ\{(t[\alpha \leftarrow f])^\circ\} \quad \text{par la définition 23} \\ &= e^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}]\{t^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}]\} \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

- si  $e = \alpha$  alors  $e^\circ = [\alpha]\{\}$ ,  $e^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}] = f^\circ$  et  $(e[\alpha \leftarrow f])^\circ = f^\circ$

- si  $e = \beta$  alors  $e^\circ = [\beta]\{\}$ ,  $e^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}] = e^\circ$  et  $(e[\alpha \leftarrow f])^\circ = e^\circ$

- si  $e = t \cdot g$  alors  $e^\circ = g^\circ\{(\{\})t^\circ\}$ ,  $e^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}] = g^\circ\{(\{\})t^\circ\}[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}]$  et

$$\begin{aligned} (e[\alpha \leftarrow f])^\circ &= (t[\alpha \leftarrow f] \cdot g[\alpha \leftarrow f])^\circ \\ &= (g[\alpha \leftarrow f])^\circ\{(\{\})t^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}]\} \quad \text{par la définition 23} \\ &= g^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}]\{(\{\})t^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}]\} \quad \text{par hypothèse d'induction} \\ &= g^\circ\{(\{\})t^\circ\}[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}] \end{aligned}$$

- si  $e = \bar{\mu}x.c$  alors  $c^\circ = [\beta](\lambda x.\mu\beta.c^\circ)\{\}$ ,  $c^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}] = [\beta](\lambda x.\mu\beta.c^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}])\{\}$  et

$$\begin{aligned} (e[\alpha \leftarrow f])^\circ &= (\bar{\mu}x.c[\alpha \leftarrow f])^\circ \\ &= [\beta](\lambda x.\mu\beta.(c[\alpha \leftarrow f])^\circ)\{\} \quad \text{par la définition 23} \\ &= [\beta](\lambda x.\mu\beta.c^\circ[[\alpha]u \leftarrow f^\circ\{u\}])\{\} \quad \text{par hypothèse d'induction} \end{aligned}$$

On n'a pas la simulation pour la  $\beta$ -réduction pour le  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -calcul. En effet, la  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -commande  $\langle \lambda x.u \mid v \cdot e \rangle$  se réduit (linéairement) par  $\beta$  à la  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -commande  $\langle v \mid \bar{\mu}x.\langle u \mid e \rangle \rangle$ . Or, la traduction de la commande initiale est  $(\langle \lambda x.u \mid v \cdot e \rangle)^\circ = e^\circ\{(\lambda x.u^\circ)v^\circ\}$ . La simulation de la  $\beta$ -réduction donnerait la  $\lambda\mu$ -commande  $e^\circ\{u^\circ[x \leftarrow v^\circ]\}$  tandis que la traduction de la commande finale par  $\beta$  du  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -calcul est  $[\beta](\lambda x.\mu\delta.e^\circ\{u^\circ\})v^\circ$ . Néanmoins, on remarque que  $[\beta](\lambda x.\mu\delta.e^\circ\{u^\circ\})v^\circ$  se réduit par  $\beta$  et  $\rho$  à  $e^\circ\{u^\circ[x \leftarrow v^\circ]\}$ . C'est pourquoi on va considérer une  $\rightarrow_{\beta'}^1$ -réduction qui est la succession de  $\rightarrow_{\beta}^1$  et de  $\rightarrow_{\rho}^1$  et qui préserve les mécanismes d'évaluation (cbn/cbv). En effet,  $\beta'$  est une  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -cbn parce qu'on effectue une  $\bar{\mu}$ -réduction. De même,  $\beta'$  est une  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -cbv parce qu'en cbv,  $v$  ne peut pas être de la forme  $\mu\beta.c$  et que, par conséquent, seule la  $\bar{\mu}$ -réduction peut s'effectuer. Ainsi, la succession d'une  $\beta$ -réduction par une  $\bar{\mu}$ -réduction est justifiée en cbn comme en cbv.

### Théorème 6 (simulation du $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -calcul par le $\lambda\mu$ -calcul).

Quels que soient  $\gamma$  et le  $\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$ -terme  $t$ , si  $t \rightarrow_{\gamma}^1 t'$  alors il existe  $u$  tel que  $t^\circ \rightarrow u \rightsquigarrow t'^\circ$ .

*Démonstration.* On raisonne par cas sur les  $\beta'$ ,  $\mu$ ,  $\bar{\mu}$  et  $\theta$ -réductions.

- si  $t = \langle \lambda x.u \mid v \cdot e \rangle$  alors  $t' = \langle u[x \leftarrow v] \mid e \rangle$ ,  $t'^\circ = e^\circ\{(u[x \leftarrow v])^\circ\} = e^\circ\{u^\circ[x \leftarrow v^\circ]\}$  par le lemme 12 et

$$\begin{aligned} t^\circ &= (v \cdot e)^\circ\{\lambda x.u^\circ\} \\ &= e^\circ\{(\{\})v^\circ\}\{\lambda x.u^\circ\} \quad \text{par définition 23} \\ &= e^\circ\{(\lambda x.u^\circ)v^\circ\} \\ &\xrightarrow{\beta} e^\circ\{u^\circ[x \leftarrow v^\circ]\} \quad (1) \end{aligned}$$

- si  $t = \langle \mu\alpha.c \mid e \rangle$  alors  $t' = c[\alpha \leftarrow e]$ ,  $t'^\circ = (c[\alpha \leftarrow e])^\circ = c^\circ[[\alpha]u \leftarrow e^\circ\{u\}]$  par le lemme 13 et  $t^\circ = e^\circ\{\mu\alpha.c^\circ\}$ . On montre par induction sur  $e$  que  $e^\circ\{\mu\alpha.c^\circ\} \rightarrow c^\circ[[\alpha]u \leftarrow e^\circ\{u\}]$ .

- si  $e = \beta$  alors

$$\begin{aligned} e^\circ\{\mu\alpha.c^\circ\} &= [\beta]\mu\alpha.c^\circ \\ &= [\beta]\mu\alpha.c^\circ \\ &\rightsquigarrow_{\rho}^1 c^\circ[\alpha \leftarrow \beta] \quad (2) \\ &= (c[\alpha \leftarrow \beta])^\circ \end{aligned}$$

– si  $e = u \cdot f$  alors  $c^\circ[[\alpha]v \leftarrow (u \cdot f)^\circ\{v\}] = c^\circ[[\alpha]v \leftarrow f^\circ\{(v)u^\circ\}]$  par la définition 23 et

$$\begin{aligned}
e^\circ\{\mu\alpha.c^\circ\} &= (u \cdot f)^\circ\{\mu\alpha.c^\circ\} \\
&= f^\circ\{(\{v\})u^\circ\}\{\mu\alpha.c^\circ\} \\
&= f^\circ\{(\mu\alpha.c^\circ)u^\circ\} \\
&\xrightarrow{1_\mu} f^\circ\{\mu\alpha.c^\circ[[\alpha]v \leftarrow [\alpha](v)u^\circ]\} \quad (3) \\
&\rightarrow c^\circ[[\alpha]v \leftarrow [\alpha](v)u^\circ][[\alpha]v \leftarrow f^\circ\{v\}] \quad \text{par hypothèse d'induction} \\
&= c^\circ[[\alpha]v \leftarrow f^\circ\{(v)u^\circ\}]
\end{aligned}$$

– si  $e = \tilde{\mu}x.c'$  alors  $c^\circ[[\alpha]u \leftarrow (\tilde{\mu}x.c')^\circ\{u\}] = c^\circ[[\alpha]u \leftarrow [\beta](\lambda x.\mu\delta.c'^\circ)u]$  par la définition 23 et

$$\begin{aligned}
e^\circ\{\mu\alpha.c^\circ\} &= [\beta](\lambda x.\mu\delta.c'^\circ)\mu\alpha.c^\circ \\
&\xrightarrow{1_\mu} [\beta]\mu\alpha.c^\circ[[\alpha]u \leftarrow [\alpha](\lambda x.\mu\delta.c'^\circ)u] \quad (4) \\
&\sim_{\rho}^1 c^\circ[[\alpha]u \leftarrow [\beta](\lambda x.\mu\delta.c'^\circ)u]
\end{aligned}$$

– si  $t = \langle u \mid \tilde{\mu}x.c \rangle$  alors  $t' = c[x \leftarrow u]$ ,  $t'^\circ = (c[x \leftarrow u])^\circ = c^\circ[x \leftarrow u^\circ]$  par le lemme 9 et

$$\begin{aligned}
t^\circ &= (\tilde{\mu}x.c)^\circ\{u^\circ\} \quad \text{par la définition 23} \\
&= [\beta](\lambda x.\mu\beta.c^\circ)u^\circ \quad \text{par la définition 23} \\
&\xrightarrow{1_\beta} [\beta]\mu\beta.c^\circ[x \leftarrow u^\circ] \quad (5) \\
&\sim_{\rho}^1 c^\circ[x \leftarrow u^\circ]
\end{aligned}$$

– si  $t = \mu\alpha.\langle u \mid \alpha \rangle$  et si  $\alpha$  n'est pas libre dans  $u$  alors  $t' = u$ ,  $t'^\circ = u^\circ$  et  $t^\circ = \mu\alpha.[\alpha]u^\circ \sim_{\theta}^1 u^\circ$  parce que  $\alpha$  n'est pas une  $\tilde{\mu}$ -variable de  $t^\circ$  par le lemme 5 et donc n'est pas libre dans  $u^\circ$ .

### **Théorème 7 (simulation de la réduction avec appel par nom).**

Quel que soit le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -terme  $t$ , si  $t \xrightarrow{1_n} t'$  alors  $t^\dagger \rightarrow_n t'^\dagger$

*Démonstration.* On raisonne par cas sur les  $\beta'$ ,  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$ -réductions. La  $\beta'$ -réduction en cbn est simulée par une  $\beta$ -réduction en cbn du  $\lambda\mu$ -calcul (cf. (1)). Pour la  $\mu$ -réduction en cbn du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul, l'environnement  $e$  de la commande  $\langle \mu\alpha.c \mid e \rangle$  n'est pas de la forme  $\tilde{\mu}x.c'$ . Par conséquent, on ne considère que les cas (2) et (3) de la simulation et pas le cas (4). Dans le cas (2) où  $e = \beta$ , la  $\mu$ -réduction est simulée par une  $\rho$ -réduction dans le  $\lambda\mu$ -calcul. Dans le cas (3) où  $e = u \cdot f$ , la  $\mu$ -réduction du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul en cbn est simulée par une  $\mu$ -réduction du  $\lambda\mu$ -calcul en cbn. Enfin, la  $\tilde{\mu}$ -réduction en cbn est simulée par la  $\lambda\mu$ -réduction  $\beta$  (cf. (5)).

### **Théorème 8 (simulation de la réduction avec appel par valeur).**

Quel que soit le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -terme  $t$ , si  $t \xrightarrow{1_v} t'$  alors  $t^\dagger \rightarrow_v t'^\dagger$

*Démonstration.* On raisonne par cas sur les  $\beta'$ ,  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$ -réductions. La  $\beta'$ -réduction est simulée par une  $\beta$ -réduction du  $\lambda\mu$ -calcul. On rappelle que les  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -environnements en cbv sont de la forme  $V \cdot e$ , ce qui exclut dans le cas (1) où  $v$  soit de la forme  $\mu\alpha.c$  : seule la  $\beta$ -réduction s'effectue dans ce cas. La  $\mu$ -réduction du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul en cbv est simulée, premièrement, par une  $\rho$ -réduction si  $e = \beta$ , deuxièmement, par une  $\mu$ -réduction en cbv du  $\lambda\mu$ -calcul (cf. (3)) parce que si  $e = u \cdot f$  alors  $u$  est une valeur et donc, il n'y a pas de  $\mu'$ -réduction possible ; et troisièmement, si  $e = \tilde{\mu}x.c$  (cf. (4)), la  $\mu$ -réduction en cbv du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul est simulée par une  $\mu'$ -réduction du  $\lambda\mu$ -calcul. Enfin, la  $\tilde{\mu}$ -réduction en cbv est limitée au cas où  $u$  est une valeur. Elle est simulée par la  $\lambda\mu$ -réduction  $\beta$  (cf. (5)), ce qui ne pose pas de problème parce qu'il n'y a pas de  $\mu'$ -réduction possible.

## **Conclusion**

Le fait d'avoir essentiellement travaillé au niveau des  $\lambda$ -calculs non typés et pour des mécanismes d'évaluation non déterministes nous a permis de montrer, d'une part l'équivalence calculatoire entre les

$\lambda\mu$  et  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calculs, dans le cas non typé et non dirigé (cf. les théorèmes 3 et 6) mais aussi, et à peu de frais, on a pu étendre ces résultats aux cas non typés et dirigés que sont les évaluations en appel par nom et en appel par valeur (cf. théorème 4 pour la simulation du  $\lambda\mu$ -cbn par le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbn, théorème 5 pour la simulation du  $\lambda\mu$ -cbv par le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbv, théorème 7 pour la simulation du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbn par le  $\lambda\mu$ -cbn et théorème 8 pour la simulation du  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -cbv par le  $\lambda\mu$ -cbv); et enfin on étend aisément ces résultats au cas typé une fois les lemmes de compatibilité des traductions avec le typage démontrés (cf. lemme 4 pour la compatibilité de la traduction  $()^\dagger$  avec le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul typé et lemme 6 pour la compatibilité de la traduction  $()^\circ$  avec le système de types du  $\lambda\mu$ -calcul).

Ayant prolongé les travaux de Curien et Herbelin dans [1], on peut compléter une partie de leur tableau final :

NK	$\lambda\mu$	nd	$\leftrightarrow$	$\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$	LK
NK	$\lambda\mu$	cbn	$\leftrightarrow$	$\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$	LK
NK	$\lambda\mu$	cbv	$\leftrightarrow$	$\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$	LK

Différentes extensions de ce travail sont possibles. La première serait de vérifier que notre  $\lambda\mu$ -cbv est confluent. La seconde serait de montrer qu'avec la définition de la réduction  $\lambda\mu$ -cbv due à Ong et Stewart dans [2] on obtient les mêmes résultats de simulation en modifiant un tant soit peu la traduction  $()^\dagger$ . Un autre prolongement serait d'étendre le système des types, dans un premier temps, à  $\perp$  parce que son introduction ne modifie que légèrement les langages de termes (et de même pour la quantification), que ce soit pour le  $\lambda\mu$ -calcul ou pour le  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul; et dans un second temps à  $\wedge$  et  $\vee$  qui, en revanche, nécessitent l'introduction de nouvelles constructions syntaxiques. Enfin, il serait intéressant d'étudier les traductions CPS des  $\lambda\mu$  et  $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul typés de la logique classique dans le  $\lambda$ -calcul typé de la logique intuitionniste afin de les comparer.

## Références

- [1] Pierre-Louis Curien and Hugo Herbelin. The duality of computation. In *Proceedings of the International Conference on Functional Programming*, September 2000.
- [2] Luke Ong and Charles Stewart. A Curry-Howard foundation for functional computation with control. In *Proceedings of the 24<sup>th</sup> Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 215–227. Association for Computing Machinery, ACM Press, January 1997.
- [3] Michel Parigot.  $\lambda\mu$ -calculus : an algorithmic interpretation of classical natural deduction. In *Proceedings of International Conference on Logic Programming and Automated Deduction*, volume 624 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 190–201. Springer, 1992.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le <math>\lambda\mu</math>-calcul</b>	<b>2</b>
1.1	Le $\lambda\mu$ -calcul non typé . . . . .	2
1.2	Le $\lambda\mu$ -calcul simplement typé . . . . .	3
1.3	Les $\lambda\mu$ -contextes . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Le <math>\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}</math>-calcul</b>	<b>5</b>
2.1	Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul non typé . . . . .	5
2.1.1	Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_T$ -calcul . . . . .	5
2.1.2	Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_Q$ -calcul . . . . .	6
2.1.3	Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}_{TQ}$ -calcul . . . . .	6
2.2	Le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul simplement typé . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Les traductions</b>	<b>7</b>
3.1	La traduction du $\lambda\mu$ -calcul dans le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul . . . . .	7
3.2	La traduction du $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul dans le $\lambda\mu$ -calcul . . . . .	9

<b>4</b>	<b>Les compositions des traductions</b>	<b>11</b>
4.1	La composition des traductions à partir du $\lambda\mu$ -calcul . . . . .	11
4.2	La composition des traductions à partir du $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Les simulations</b>	<b>12</b>
5.1	La simulation du $\lambda\mu$ -calcul par le $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul . . . . .	13
5.2	La simulation du $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ -calcul par le $\lambda\mu$ -calcul . . . . .	16