HAL open science

Itération et fractales dynamiques

Joel Merker

To cite this version:

Joel Merker. Itération et fractales dynamiques. 2002. hal-00003413

HAL Id: hal-00003413

https://hal.science/hal-00003413

Preprint submitted on 29 Nov 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ITÉRATION ET FRACTALES DYNAMIQUES

JOËL MERKER

Résumé. L'ensemble de Mandelbrot appartient à cette catégorie d'objets mathématiques qui, comme la suite des nombres entiers, constituent un réservoir inépuisable de richesse géométrique et de complexité calculatoire. Sa définition comme espace des paramètres pour les propriétés dynamiques d'une application quadratique cache une ontologie fractale imprévisible, ornée de volutes esthétiques séduisantes mais aussi dotée de structures mathématiques universelles. Dans cet article philosophico-mathématique, je souhaite argumenter du caractère éminemment constructif des propriétés qualitatives des systèmes dynamiques holomorphes et insister sur les interconnexions profondes avec la théorie des nombres réels.

Table des matières :

§1. Introduction ..... **1.**
§2. Paradoxes de la liberté dimensionnelle ..... **2.**
§3. Nombres réels et infini dynamique ..... **5.**
§4. Dynamique des applications rationnelles sur l'espace projectif ... **9.**
§5. Enjeux de la conjecture d'hyperbolicité dense ..... **12.**

§1. Introduction

De manière plus qu'inattendue, fractales et objets lisses entrent aujourd'hui en compétition sur la scène des Sciences de la Nature. Du modèle d'Ising à la transition vers la turbulence en passant par la Relativité d'échelle et les intégrales de Feynmann, quelques physiciens contemporains tentent depuis plus d'une vingtaine d'années d'élaborer une pensée nouvelle, non classique, en prenant pour point de départ l'idée que la géométrie sous-jacente à certains phénomènes réels implique des structures complexes, arborescentes, imprévisibles, en un mot, des objets fractals. À l'échelle de l'histoire des sciences, cet intérêt est exceptionnellement récent.

De telles entreprises continuent d'ailleurs de heurter une intuition scientifique classique, familiarisée depuis des siècles avec la métaphysique du différentiable, c'est-à-dire avec une saisie homogène et confortable de l'infinitésimal. En tout cas, l'intuition différentielle des mathématiciens du dix-huitième et du dix-neuvième siècle ne pourrait qu'être hallucinée si, en voyageant dans le temps, elle découvrait combien sont complexes les figures fractales du plan qui sont engendrées de manière dynamique. Quelquefois, la pensée philosophique s'étonne et elle

Date: 2004-11-29.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 00A30, 30D05.
Key words and phrases. Ensembles fractals, Dynamique holomorphe, Ensemble de Mandelbrot, Hyperbolicité.

hésite encore à admettre que la géométrie de l'espace-temps puisse réellement accueillir une expansion dimensionnelle qui devient si incontrôlable à des niveaux microscopiques, comme c'est le cas pour l'ensemble de Mandelbrot. Au-delà, mû spontanément par une métaphysique du fondement, l'esprit s'interrogera sur le statut des objets fractals dans l'architecture des mathématiques : faut-il réserver à la géométrie lisse une position principielle ou au contraire, est-il possible (voire nécessaire) de fonder le différentiable sur le non-différentiable, qui l'englobe et le dépasse largement ?

Dans cet article très modeste, je n'aurai pas les moyens scientifiques ou philosophiques d'aborder de telles questions qui montrent combien le dilemme de Zénon d'Élée reste gravé dans la pensée du monde physique. Depuis quelques millénaires, continu et discontinu oscillent dans une indécision persistante, comme le font le problème de la constante cosmologique, le problème de la stabilité du système solaire et le problème de l'harmonisation entre relativité générale et mécanique quantique. Tout au plus souhaiterais-je construire et communiquer ici quelques figures de l'étonnement que l'on peut ressentir devant la complexité des fractales, ce nouveau type ontologique qui fut aussi présent qu'absent dans l'histoire des sciences, et qui abuse des libertés purement spatiales du plan pour déployer des figures inattendues de l'infini.

§2. Paradoxes de la liberté dimensionnelle

2.1. Tératologie analytique du non-différentiable. Dans un premier moment de donation, le droit et le courbe sont engendrés par le tracé continu d'un geste physique en mouvement, celui d'un crayon sur un support papier, par exemple. C'est pourquoi l'histoire de l'analyse fourmille de paradoxes intuitifs qui ont miné ses fondements mêmes. Dans la première moitié du dix-neuvième siècle, les géomètres avaient la conviction tenace qu'il est impossible qu'une courbe ne possède pas de tangente en un nombre infini de points qui se rapprochent d'un point donné : un tel désordre aurait nécessairement dû briser la tenue de la courbe au point limite. Ici, comme toujours en mathématiques, l'enjeu d'une conviction se mesure à l'ouverture cachée des concepts [1]. Le grand Joseph Fourier traçait lui-même des courbes constantes par morceaux, que nous interprétons aujourd'hui comme discontinues, en marquant consciencieusement des traits verticaux qui relient les valeurs aux points de saut du graphe. Au temps de Dirichlet et de Riemann (le "miracle allemand" de la pensée mathématique), le discontinu s'offrait enfin comme une virtualité autonome, c'est-à-dire en vérité comme une notion purement en question et riche de potentialités à peine entrevues. Mais l'aspect résolument cinématique du mouvement générateur de courbes comme *traces d'un passage* interdit une saisie abstraite des libertés géométriques inhérentes à l'engendrement fractal. N'est-il pas évidemment impossible de tracer une courbe fractale avec la pointe d'un crayon, non seulement parce qu'elle "chahute" à toute échelle, infectée par un bruit que ne nivellent pas les agrandissements à la loupe, mais encore parce qu'elle est généralement de longueur infinie ? L'être mathématique ne transcende jamais vraiment ses conditions originaires de donation. À vrai dire, l'intuition géométrique des années 1800–1830 n'était pas si

fausse, puisque l'on sait depuis les travaux de Jordan, Lipschitz et Lebesgue que toute courbe rectifiable ou lipschitzienne est presque partout différentiable.

Les premières tentatives de construction d'un objet partout non lisse sont purement analytiques. Inspiré par les travaux de sa thèse d'habilitation de 1854, Riemann avait exhibé vers 1860 la somme de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

qui converge normalement vers une fonction continue $f(x)$ de la variable $x \in \mathbb{R}$ (dont la valeur absolue ne dépasse pas $\pi^2/6$ d'après un théorème remarquable d'Euler) mais dont la série dérivée terme à terme ne converge évidemment pas. Riemann aurait affirmé oralement que f n'est (vraisemblablement) dérivable en aucun point, mais aucune preuve écrite ne nous est connue [2].

En 1872, Weierstrass réalise pleinement cette idée de série infiniment oscillante qui est partout génératrice d'irrégularités. L'exemple est célèbre : il s'agit de la fonction continue

$$\sum_{n\geq 0} b^n \cos(a^n \pi x),$$

où les constantes réelles a et b satisfont $0 < b < 1$ pour assurer la normalité de la convergence et où $ab > 1 + 3\pi/2$ pour faire diverger la dérivée. Weirstrass établit l'inexistence d'une dérivée *en tout point de la droite réelle*. Bien sûr la condition sur le produit ab n'est pas optimale, et c'est Hardy qui en 1916 montra que la condition $ab > 1$ suffit.

D'autres exemples similaires peuvent être inventés, mais ils se placeront toujours sur un plan analytique : une superposition infinie décroissante de fréquences lisses plus oscillantes que leur amplitude construit le désordre souhaité ; l'esprit de rigueur est alors satisfait par l'exhibition de ces contre-exemples. Mais l'absence de lien intuitif direct entre ces séries pathologiques et les courbes du plan "tracées" selon un procédé géométrique est peut-être la cause des fortes réticences qui se sont manifestées tout d'abord à l'égard de ce type de fonctions non-différentiables, pure abstraction vide de sens. Hermite et Poincaré leur reprochaient cette monstruosité logique et *ad hoc* que les mathématiques authentiques, soucieuses d'applications et de vérité, devraient éviter. On sait que l'émergence de la théorie des ensembles et la réinterprétation d'une courbe comme graphe

1. L'aspect expérimental et visuel du chaos offre un exemple récent parmi d'autres de conviction intuitive préformelle que le raisonnement rigoureux n'absorbe pas complètement. Par exemple, il est bien connu que l'attracteur de Lorenz et l'attracteur de Hénon font partie des exemples paradigmatiques de systèmes chaotiques. Or on n'insiste pas assez sur le fait que les raisonnements mathématiques ne confirment pas complètement les intuitions expérimentales. Au pire, il se pourrait qu'une (très longue) orbite périodique sous-tende le comportement des itérés sur l'attracteur de Lorenz. Récemment, W. Tucker a démontré qu'il n'en est rien, voir à ce sujet M. Viana, *What's new on Lorenz's strange attractor*, The Mathematical Intelligencer, **22** (2000), no.3, 6–19. À ma connaissance, le cas de l'attracteur de Hénon est encore ouvert.

2. *Cf.* J.-L. Chabert, *Un demi-siècle de fractales*, Historia Mathematica, **17** (1990), 339–365. En 1970, un *undergraduate student* de Serge Lang mis au défi par cette célèbre question ouverte démontra, en utilisant des techniques élémentaires, que la série de Riemann admet comme dérivée la valeur $-1/2$ aux points de la forme $(2p+1)\pi/(2q+1)$, où p et q sont des entiers, et n'est dérivable en aucun autre point. Voir J. Gerver, *The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of* π, Amer. J. Math. **92** (1970), 33–55 ; **93**, 33-41.

d'une correspondance ponctuelle *arbitraire* entre une variable sur l'abscisse et sa valeur sur l'ordonnée devaient faciliter de nouvelles conditions d'appréhension intuitive. Néanmoins la thématisation de la complexité ensembliste des fonctions continues les plus générales devait en rester longtemps au niveau des concepts de l'Analyse.

2.2. Itérations géométriques. Dans un troisième moment de donation, le pathologique s'offre directement à l'intuition par un procédé d'engendrement constructif et uniforme. L'exemple du flocon de neige de von Koch (1904) n'est pas devenu célèbre par hasard, car l'idée est simple : il s'agit d'engendrer une courbe par brisure indéfinie de lissité. Contrairement aux séries trigonométriques qui superposent des fonctions analytiques lisses, les cassures apparaissent ici à chaque étape finie. Avec la constance d'une chirurgie constructive qui progresse jusqu'à l'infinitésimal, tout segment de droite est creusé en son centre pour recevoir comme greffe un nouvel épi intempestif. Miraculeusement, le procédé converge en un sens et en un seul : le sens "$\mathcal{C}^0$" (continu), c'est-à-dire que la suite des flocons finis parvient à se stabiliser en un compact ressemblant à une courbe, quoique légèrement plus "gras" qu'une "vraie" courbe lisse. Mais la présence de segments anguleux finis à chaque étape est faite à dessein pour rendre folle une droite candidate à la tangence en un point quelconque : la pente des cordes infimes entre deux points très rapprochés oscille en effet sans se stabiliser ; il n'y a pas convergence au sens $\mathcal{C}^1$.

De nombreux mathématiciens ont approfondi l'idée élémentaire de Von Koch. La variation la plus simple consiste à remplacer l'épi du flocon par n'importe quelle ligne brisée affine par morceau qu'on renormalise à une échelle plus petite et que l'on greffe et regreffe à l'infini. La dimension de Hausdorff dépend seulement des propriétés morphologiques du générateur. Ici, le fractal est engendré pour lui-même par chirurgie et par cassure irréfrénée de segments. Le contrôle géométrique qui s'exerce sur eux à étapes finies se maintient jusqu'à l'aboutissement des procédés constructifs. Toutes les propriétés métrico-topologiques se déduisent en effet d'une analyse quantitative de chaque itération[3]. On pressent combien toute la richesse collatérale du plan ne peut être complètement explorée par ces procédés qui en restent à la déformation d'objets unidimensionnels.

2.3. Le théorème de l'invariance du domaine. On le sait : les exemples pathologiques de courbe et de correspondance biunivoque entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ (d'après Cantor, Peano, Moore et Hilbert) remirent sérieusement en cause la foi intuitive des géomètres en l'idée de dimension. L'argument de Cantor consistant à distribuer les décimales d'un nombre $x \in [0,1]$ alternativement dans deux boîtes $y \in [0,1]$ et $z \in [0,1]$ est terriblement simple. Il suffit de quelques lemmes naturels de théorie des cardinaux pour corriger cette correspondance surjective en une correspondance qui soit vraiment biunivoque. Ainsi, les libertés de mise en correspondance ensemblistes sans contrainte topologique particulière sont immenses. De même, la version "courbe remplissant un carré" de cette correspondance paradoxale, due à Peano et explicitée géométriquement par Moore et par Hilbert, sollicitait violemment l'interprétation de la notion de dimension. Un autre exemple dû à Osgood (1903) exhibe une courbe de Jordan d'aire extérieure positive. En

3. Voir à ce sujet C. Tricot, *Curves and fractal dimension*, Springer Verlag, New York, 1995.

définitive, les libertés de déformation d'un segment dans le plan, même continues, sont terriblement ouvertes car l'espace lié à la codimension offre autant d'échappatoires transversales dans l'infiniment petit.

Heureusement pour la géométrie tout entière, le théorème de l'invariance du domaine, dû à Brouwer, a rétabli une harmonie attendue : le fait que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ soient homéomorphes si et seulement si $n = m$ constitue une sorte de condition *sine qua non* d'auto-cohérence de la géométrie différentielle. Par là se précisent les structures d'un champ conceptuel et surtout *la finesse de l'encastrement dialectique des notions* : *tout dans le raisonnement de Brouwer compte*, puisque sans inverse continu ou sans bijectivité, il existe de nombreuses correspondances à la Cantor-Peano. Conceptuellement, le théorème de l'invariance du domaine constitue une sorte de miracle limite, puisque l'on peut construire des courbes de Jordan de dimension arbitrairement proche de deux et même égale à deux, qui remplissent "presque" un ouvert du plan [4].

Dans le labyrinthe des problèmes ouverts et des paradoxes fondateurs, le destin des mathématiques ne peut être que la poursuite d'argumentations sophistiquées qu'encadrent la technicité nécessaire et la variabilité des hypothèses. La notion intuitive de continuité géométrique, faussement simple, cache donc un champ de recherches terriblement ouvert.

§3. Nombres réels et infini dynamique

3.1. Déformations infinitésimales dans l'infini non dénombrable. En vérité, les possibilités de déformer un objet qui est *a priori* de dimension un (comme l'est le segment [0,1]) dans un ouvert du plan sont infiniment plus riches que ne le suppose une intuition habituée à une forme de donation du droit ou du courbe qui soit purement en acte et originaire. Mais dans le royaume du non-différentiable, la donation est obligatoirement constructive ; l'acte n'intervient jamais qu'après un passage à la limite parfaitement contrôlé. Il en va de même pour la construction abstraite des nombres réels comme complétion topologique des nombres rationnels, par exemple par le procédé des suites de Cauchy : en vérité, très peu des propriétés concrètes des nombres réels sont acquises par ce procédé idéal, n'en déplaise à Cantor [5]. Il est vrai que dans leur pratique journalière, analystes et géomètres différentiels appréhendent les réels comme une donnée de base, fondation formelle de la théorie. Néanmoins, ce ne peut être que dans le mouvement d'exploration conceptuelle de l'infiniment petit que peuvent se manifestent les propriétés fines des réels. Les systèmes dynamiques offrent alors un champ privilégié pour une ontologie fractale non artificielle. Dans ce domaine, il existe en effet un lien très fort entre l'infini constructif d'un nombre et les propriétés qualitatives d'un système dynamique : *tout, dans l'extrême richesse géométrico-topologique des systèmes dynamiques se situe dans un rapport absolument assumé à l'infini non dénombrable des nombres réels.*

4. Dans cette remarque intuitive, on admet implicitement que la dimension non entière de Hausdorff interpole fidèlement les objets qui sont "intermédiaires" entre les courbes lisses et les ouverts du plan. On peut facilement objecter que toutes les vraies difficultés se concentrent en vérité sur les courbes dont l'image est de dimension de Hausdorff égale à deux, *i.e.* dans un pseudo-interstice sans épaisseur sur l'échelle de Hausdorff qui cache peut-être toute une hiérarchie nouvelle d'ensembles complexes.

5. Paradoxe bien connu, très peu de nombres sont explicitement reconnus comme transcendants, notamment parmi les nombres "remarquables" qui, comme π, e, $\zeta(3)$, γ, $\Gamma(1/4)$, *etc.*,

3.2. Linéarisation de germes de fonctions holomorphes. Voici l'exemple le plus canonique qui puisse illustrer cette affirmation : il s'agit du problème de la linéarisation d'un germe de fonction holomorphe en un point fixe.

Soit $f(z) := \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ une fonction holomorphe quelconque s'annulant à l'origine, définie par une série entière qui converge normalement sur un disque centré en 0, où λ est un nombre complexe non nul. Lorsque le module de λ est différent de 1, il est facile de voir qu'il existe un changement de coordonnée holomorphe au voisinage de l'origine de la forme $w = \varphi(z)$ tel que la fonction s'écrive λw dans ces coordonnées, c'est-à-dire plus précisément, tel que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(w) = \lambda w$. Ce résultat a été démontré par Kœnigs en 1884 et ne fait vraiment pas apparaître les propriétés fines du nombre complexe λ. Le fait que $|\lambda| \neq 0{,}1$ permet un contrôle évident de la croissance des inverses des termes $|\lambda^n - \lambda|$ qui apparaissent naturellement dans l'unique série formelle ϕ qui est solution de l'équation fonctionnelle $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$. Il en va tout autrement lorsque le module de λ est égal à un. Dans ce cas, on peut écrire λ sous la forme $\lambda = e^{2\pi i\xi}$, avec ξ réel. Le problème de linéarisation de f qui consiste à déterminer s'il existe un changement de coordonnées tel que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(w) = \lambda w$ devient alors absolument non trivial, à cause du comportement des inverses des termes $|\lambda^n - \lambda|$, dits "petits diviseurs", qui peuvent faire diverger l'unique série formelle solution de $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$.

Il est facile de voir que lorsque $\xi = p/q$ est *rationnel*, la fonction f n'est pas linéarisable, sauf dans le cas spécial où f composée q fois avec elle-même est l'identité.

3.3. Le cas indifférent rationnel. En revanche, le cas où ξ est irrationnel constitue un champ problématique extraordinairement riche qui ouvre sur un faisceau de propriétés insoupçonnées des nombres réels. De telles propriétés doivent être découvertes pour elles-mêmes et doivent se révéler être en adéquation complète avec le problème de linéarisation. En 1912, au congrès international des mathématiciens, Kasner conjectura que la linéarisation est toujours possible, mais cinq années plus tard, Pfeiffer avait trouvé une classe de contre-exemples transcendants[6]. Deux ans plus tard, en 1919, Julia affirma que la linéarisation n'est jamais possible si f est une application rationnelle (*voir* §4.1 *infra*), mais sa preuve était erronée. En 1927, le mathématicien allemand Cremer publia un théorème court, simple et lumineux de non-linéarisabilité : il existe un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de première catégorie du cercle unité (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts denses, ensemble qui est non vide et même partout dense d'après Baire) ayant la propriété suivante. Si z_0 est un point fixe de multiplicateur $\lambda \in \mathcal{T}$ d'une fonction rationnelle R arbitraire de degré supérieur d ou égal à deux (*cf.* §4.1), alors il existe une suite infinie de points périodiques convergeant vers z_0, donc R

apparaissent explicitement "dans la nature". Voici un paradoxe dynamico-probabiliste encore plus frappant. Grâce à des arguments standard de théorie de la mesure, on démontre facilement que pour presque tout nombre réel $x > 1$, la suite des puissances de x modulo un est équirépartie dans le segment [0,1], mais on n'est même pas capable d'exhiber *un seul* nombre concret ayant cette propriété. Supplice de Tantale, s'il en est, puisque le plus simple des demi-entiers supérieur à 1, le nombre 3/2, semble faire l'affaire, d'après de simples expériences numériques qu'il est exagérément facile d'implémenter sur un calculateur de poche – à tel point d'ailleurs que n'importe quel mathématicien désœuvré pourrait avoir le courage de faire les calculs *à la main* comme le faisaient Euler et ses contemporains. Mais cependant, personne n'a encore confirmé ce résultat par une preuve rigoureuse.

n'est pas linéarisable en z_0. Les multiplicateurs λ de Cremer satisfont la condition analytique

$$\limsup_{q\to\infty} \frac{\ln\ln(|\lambda^{n-1}-1|^{-1})}{n} > \ln d,$$

qui signifie clairement que les "petits dénominateurs" $|\lambda^n - \lambda|$ tendent vers zéro extrêment vite, en fonction de d.

À l'inverse, Siegel démontra en 1942 le premier résultat positif de linéarisation : si ξ est un nombre *diophantien*, alors *tout* germe holomorphe $f(z) = e^{2\pi i\xi} z + a_2 z^2 + \cdots$ est localement linéarisable. Est *diophantien* un nombre réel ξ tel qu'il existe deux constantes positives ε et χ telles que tout nombre rationnel p/q approxime relativement "mal" le nombre ξ :

$$|\xi - p/q| \ > \ \varepsilon/q^{\chi}.$$

L'ensemble des nombres diophantiens est de mesure pleine sur la droite réelle. Il est facile de voir que tout nombre algébrique de degré d est diophantien avec $\chi = d$. En 1955, Roth raffina ce résultat : tout nombre algébrique est diophantien avec $\chi > 2$ arbitrairement proche de 2. En particulier, le théorème de Siegel montrait que tout germe de multiplicateur $e^{2\pi i\xi}$ avec ξ irrationnel algébrique est linéarisable.

Ces résultats ont été raffinés par Bryuno, Yoccoz et Perez-Marco. La condition d'être diophantien appelait naturellement une exploration du développement en fraction continue des nombres irrationnels ξ. En vérité, seul le développement en fraction continue d'un nombre réel possède un caractère canonique : tous les développements de type binaire, sexagésimal, décimal, hexadécimal, ou en base $b > 1$ quelconque n'ont aucun caractère invariant. Ainsi, pour une analyse plus précise des conditions qui assurent la linéarisabilité d'un germe, il faut scruter les réduites p_n/q_n de ξ.

3.4. Conditions arithmético-analytiques. En utilisant le fait que les réduites constituent des meilleures approximations rationnelles de ξ, on démontre qu'il existe des constantes $0 < c_1 < c_2 < \infty$ telles que

$$c_1/q_{n+1} \ \leq \ |\lambda^{q_n} - 1| \ \leq \ c_2/q_{n+1}.$$

Ces inégalités expriment que les petits diviseurs se comportent tout simplement comme les dénominateurs des réduites de ξ. Alors la condition de Siegel s'exprime simplement par

$$\sup_{n\geq 1} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} \ < \ \infty.$$

En 1972, Bryuno raffina considérablement le théorème de Siegel : tout germe holomorphe de multiplicateur ξ satisfaisant

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} \ < \ \infty$$

est linéarisable. Réciproquement, Yoccoz démontra en 1987 que si cette série diverge, alors le polynôme quadratique $e^{2\pi i\xi} z + z^2$ a la propriété que tout voisinage de l'origine possède une infinité d'orbites périodiques ; il n'est donc pas linéarisable. La condition arithmético-analytique de Bryuno est donc nécessaire

6. *Cf.* J. Milnor, *Dynamics in one complex variable. Introductory lectures.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999.

et suffisante pour la linéarisabilité d'un germe quadratique $\lambda z + z^2$. En 1990, Perez-Marco montra que la condition de croissance plus forte

$$\sum_{n\geq 1} \ln\ln(q_{n+1})/q_n \ < \ \infty$$

implique que tout germe *non linéarisable* de multiplicateur $e^{2\pi i\xi}$ possède une suite infinie d'orbites périodiques convergeant vers l'origine. Néanmoins, il existe beaucoup de germes non linéarisables qui ne possèdent pas d'orbites périodiques s'accumulant en 0.

3.5. Résumé. En définitive, le problème de linéarisation fait apparaître une palette de conditions de type arithmétique ou analytique sur les multiplicateurs qui sont autant de manières d'explorer les nombres réels. Néanmoins, malgré l'ampleur de ces travaux, on observera qu'il n'existe pour l'instant pas de condition nécessaire et suffisante qui caractérise la linéarisabilité d'un germe de fonction holomorphe arbitraire.

Dans l'appréhension analytique, l'être fractal ne s'offre que par un jeu libre de constructions géométriques qui sont autant de fenêtres sur l'univers immense du continu pur. Sans que cela soit évident au premier abord, le problème de linéarisation implique des concepts dynamiques profonds et cache une ontologie fractale réelle.

3.6. Vers l'être fractal dynamique. En effet, les objets fractals de type *dynamique*, qui naissent de l'itération autonome d'une application différentiable ou qui apparaissent comme ensembles limite de groupes kleiniens sont équipés d'une ontologie problématique beaucoup plus riche. Leur dimension de Hausdorff, leur connexité globale ou locale ainsi que leurs propriétés combinatoires ne procèdent plus en général d'une analyse élémentaire des conditions de constructions de base, mais sont purement problématiques et font l'objet d'une étude mathématique poussée, de nombreuses conjectures et théorèmes partiels, qui témoignent tous de l'ouverture et de l'inconnu. Par le biais de questions générales, le passage à l'être est prétexte à l'émergence de nouveaux objets. Par exemple, l'itération d'une application unimodale du segment [0,1] (c'est-à-dire ne possédant qu'un point critique non dégénéré) implique des phénomènes inattendus. Dans ce cas précis, certaines constantes ont un caractère d'universalité étonnant. Dans la cascade de doublement de période découverte par Feigenbaum et Coulet-Tresser, les rapports sucessifs procèdent asymptotiquement comme une série géométrique de raison égale à une constante approximativement égale à $\delta = 4{,}6692....$ On retrouve cette constante dans de nombreux phénomènes physiques, notamment dans l'étude de la turbulence, en chimie, en optique quantique, *etc.*, y compris en dimension supérieure à un, ce qui est remarquable. De plus, le rapport des divisions de branches est lui aussi universel et tend vers la constante 2,5029...[7].

Plus encore, les applications rationnelles de la sphère de Riemann fournissent de fantastiques exemples d'objets fractals engendrés sans contrôle artificiel et sans contrainte d'unidimensionnalité. Pour ces fractals, la recette est simple : à travers une infinité dénombrable d'itérations, le devenir de chaque point appartenant à la sphère compte et peut s'avérer imprévisible. Place est offerte aux irisations et colorations du plan, aux dentelles ponctuelles inextricables et aux îles de givre inattendues. Parmi l'infinité non dénombrable des points qui

constituent l'espace projectif complexe, beaucoup voient leur devenir dépendre explicitement de leur être en totalité, c'est-à-dire de leur développement décimal complet, ou mieux de leur développement en fraction continue. Même si rien ne nous autorise vraiment à considérer *tous* les nombres réels (et par là même, *tous* les nombres complexes) comme des êtres donnés en acte, il faut bien admettre que le devenir de chaque point peut dépendre explicitement de *tout* son développement décimal (ou de *tout* son développement en fraction continue), *vu comme totalité en acte*. Les sous-ensembles qui supportent la dynamique chaotique sont presque toujours de purs fractals qui sont d'une très grande richesse et d'une très grande variabilité par rapport aux paramètres.

§4. Dynamique des applications rationnelles sur l'espace projectif

4.1. Définitions et propriétés fondamentales. Les itérées d'une application *rationnelle* $R : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ induisent un système dynamique sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Une telle fraction peut s'écrire comme un quotient

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_d\, z^d + \cdots + a_1\, z + a_0}{b_d\, z^d + \cdots + b_1\, z + b_0}$$

de deux polynômes premiers entre eux, dont l'un au moins est de degré d. Cet entier d coïncide avec le nombre de préimages $R^{-1}(z)$ d'un point générique z de $\widehat{\mathbb{C}}$. Plus précisément, l'application R induit un revêtement ramifié de degré d de la sphère $\widehat{\mathbb{C}}$ sur elle-même.

Le problème fondamental de la dynamique est de comprendre le comportement des itérés d'ordre élevé $R^{\circ n}(z) = (R \circ \cdots \circ R)(z)$ lorsque z parcourt la sphère de Riemann. Il s'agit de décrire phénoménologiquement le devenir de (presque) tous les points z de $\widehat{\mathbb{C}}$[8]. Même si de nombreux concepts dynamiques ont été inventés, ce problème demeure largement ouvert en toute généralité.

Toute application rationnelle de degré $d \geq 2$ mélange des aspects fortement dilatants avec des aspects fortement contractants[9]. En effet, l'itéré n-ième $R^{\circ n}$ étant de degré d^n, la formule de changement de variable donne $\int_{\widehat{\mathbb{C}}} |(R^n)'|^2\, d\omega = d^n \to \infty$ après normalisation du volume $\int_{\widehat{\mathbb{C}}} d\omega = 1$, où ω est la forme de Fubini-Study du projectif $\widehat{\mathbb{C}}$ et $' = d/dz$ la différentiation. Par ailleurs, R possède exactement $2d-2$ points critiques au voisinage desquels R se comporte comme l'application $z \mapsto z^k$ près de l'origine. C'est la tension entre ces deux aspects contradictoires qui est responsable de la complexité des applications rationnelles, et tout particulièrement de la complexité fractale des sous-ensembles de $\widehat{\mathbb{C}}$, dits de Julia, sur lesquels la dynamique est chaotique.

---

7. P. Cvitanovic, *Universality in chaos*, Adam Hilger Ltd, 1984.

8. "*Main goal of dynamics*: Study asymptotic behavior of *almost any* parameter value in *representative* finite-parameter families of dynamical systems". M. Lyubich, *The Quadratic Family as a Qualitatively Solvable Model of Chaos*, Notices of the AMS, **47**, no.9, 2000, 1042–1052.

9. Les propriétés dynamiques de R sont rappelées ci-dessous sans aucune démonstration. Je renvoie donc aux célèbres Lecture Notes de John Milnor, *Dynamics in one complex variable. Introductory lectures.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999, ainsi qu'à la présentation conceptuelle éclairante de Curtis T. McMullen, *Frontiers in complex dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) **31** (1994), no.2, 155–172.

Pour toute application rationnelle fixée, la sphère se décompose en effet en deux sous-ensembles, l'ensemble de Fatou[10] F_R, un ouvert sur lequel les itérés de R convergent (normalement) vers une application holomorphe, et son complémentaire, l'ensemble de Julia J_R, sur lequel la dynamique est *chaotique* :

$$\widehat{\mathbb{C}} = F_R \cup J_R, \qquad F_R \cap J_R = \emptyset.$$

Pour le polynôme $R := z^2 + c$, où $c \in \mathbb{C}$ est un paramètre, on a la dichotomie suivante : ou bien son ensemble de Julia est connexe, ou bien il est parfait et totalement discontinu. Ce qui est remarquable dans cet exemple, c'est que le procédé d'excision que Cantor avait inventé pour engendrer son fameux ensemble triadique ("qui n'est pas condensé dans l'étendue d'un intervalle si petit qu'il soit") se trouve illustré d'une façon dynamique totalement originale, non cantonnée à la dimension un, avec de tels ensembles fractals disposé dans le plan d'une infinité de manières différentes.

Voici une autre définition (équivalente) de l'ensemble de Julia qui fait l'économie de la notion de familles normales et du théorème de Montel. Tout d'abord, un point *fixe* de R est un point $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $R(z_0) = z_0$. Un point *périodique* est un point fixe d'un itéré de R. Sa *période* est le plus petit entier k tel que $R^{\circ k}(z_0) = z_0$. L'ensemble $\{z_0, R(z_0), \ldots, R^{k-1}(z)\}$ est un *cycle*. Le nombre $\lambda := (R^{\circ k})'(z_j)$ est le même en tout point $z_j = R^{\circ j-1}(z_0)$ du cycle (il est égal au produit $R'(z_0)R'(z_1)\cdots R'(z_{k-1})$) et il est appelé *valeur propre* du cycle. Le cycle est dit

- ☐ *Attractif* si $|\lambda| < 1$.
- ☐ *Répulsif* si $|\lambda| > 1$.
- ☐ *Indifférent rationnel* si $\lambda = \exp(2i\pi p/q)$ avec p et q entiers, $q \neq 0$.
- ☐ *Indifférent irrationnel* si $\lambda = \exp(2i\pi\xi)$ avec ξ réel non rationnel.

Alors (par une nouvelle définition équivalente), l'ensemble de Julia est la fermeture de l'ensemble des cycles répulsifs. Cet ensemble jouit des propriétés suivantes :

(1) L'ensemble de Julia J_R est toujours non vide et non dénombrable.

(2) Les applications $R^{\circ j}$, $j \geq 2$, ont même ensemble de Julia que R.

(3) J_R est complètement invariant par R, c'est-à-dire $R(J_R) = J_R = R^{-1}(J_R)$.

(4) Pour tout point $z \in J_R$, l'orbite inverse $\{R^{\circ -j}(z) : j \in \mathbb{N}\}$ est dense dans J_R.

(5) Tout cycle attractif attire au moins un point critique de R. Il s'ensuit que R possède au plus $2d - 2$ cycles attractifs.

(6) Le bassin d'attraction complet d'un cycle attractif C de R est contenu dans F_R et son bord ∂C est contenu dans J_R.

4.2. Pourquoi les ensembles de Julia sont des ensembles fractals. Trois explications intuitives peuvent être apportées. Premièrement, lorsque l'on regarde des petites perturbations de l'application carré $z \mapsto z^2$ de la forme $z \mapsto z^2 + \varepsilon$, avec ε proche de zéro, l'ensemble de Julia J_ε subit une déformation continue avec naissance d'une structure fractale pour tout $\varepsilon \neq 0$. Pour $\varepsilon = 0$, la sphère $\widehat{\mathbb{C}}$ se partage en trois composantes, les deux domaines D et $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{D}$, où D est le disque unité $\{|z| < 1\}$ et le cercle unité bD. Sur ces deux domaines, les itérés convergent vers les deux points fixes superattractifs 0 et ∞. L'ensemble de Julia de z^2 est

donc le cercle unité, ensemble invariant sur lequel la dynamique induite, dite de doublement de l'angle, est hyperbolique. De tels ensembles de Julia lisses sont tout à fait exceptionnels. Les produits de Blaschke admettent aussi le cercle unité comme ensemble de Julia lisse et même algébrique réel. Ce sont les produits finis de fractions de la forme $\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, où $|\alpha| < 1$. Pour ε proche de zéro, J_ε demeure topologiquement une courbe de Jordan, mais de plus en plus irrégulière. En utilisant le formalisme thermodynamique, Ruelle a en effet estimé la dimension de Hausdorff de J_ε : elle se comporte comme $1 + \frac{|\varepsilon|^2}{4\ln 2} + \mathrm{O}(|\varepsilon|^3)$. On démontre généralement que si l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle hyperbolique R est connexe et possède une tangente en au moins un point, alors R est un produit de Blaschke et par conséquent, J_R est le cercle unité[11].

Deuxièmement, le théorème de linéarisation de Kœnigs montre pourquoi les ensembles de Julia apparaissent parfois comme des structures en spirales emboîtées à l'infini les unes dans les autres. Supposons en effet que R possède un point fixe répulsif z_0 de multiplicateur λ qui n'est pas réel. Après changement affine de carte projective et linéarisation, on peut supposer d'après Kœnigs que $R(z) = \lambda\, z$ au voisinage de l'origine. Comme l'ensemble de Julia J_R est parfait et totalement invariant, il existe un point z_1 proche de $0 \in J_R$ dont les préimages $z_n := R^{\circ -n}(z_1) = \lambda^{-n}\, z_1$ tendent vers zéro, en se distribuant le long d'une spirale logarithmique, puisque λ n'est pas réel. Comme l'ensemble des préimages de z_0 est dense dans J_R, les structures spiralées se répandent à toute échelle. En particulier, un tel ensemble de Julia ne peut pas être une variété lisse.

4.3. Géométrie auto-similaire. Les ensembles de Julia possèdent beaucoup d'auto-similarité : pour tout point $z \in J_R$ avec $R'(z) \neq 0$, l'application R induit un isomorphisme conforme d'un voisinage de z dans J_R sur un voisinage de $R(z)$ dans J_R. De plus, pour toute application R de degré $d \geq 2$, et tout ouvert U rencontrant J_R, l'image $f^{\circ n}(U \cap J_R)$ est égal à J_R tout entier pour n assez grand : les itérés de l'application f agissent comme un zoom sur l'ensemble de Julia.

4.4. Rigidité des structures analytiques et souplesse des objets lisses. La rigidité des applications holomorphes se manifeste par exemple dans un résultat de Mane, Sad et Sullivan d'après lequel l'ensemble des applications rationnelles qui sont structurellement stables est un *ouvert dense*. Rappelons que la notion de stabilité structurelle fut élaborée dans les années 1930 par l'école russe, notamment par Andronov et Pontryagin qui introduisirent à dessein le terme de *systèmes grossiers* pour caractériser des systèmes dynamiques possédant un comportement phénoménologique stable par perturbations, le seul qui puisse posséder un sens dans le domaine de l'expérience où les données sont

11. F. Berteloot et V. Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours spécialisés, Soc. Math. France, Vol. 7, 2001, Chap. 5.

11. Classiquement, la "préhistoire" de la dynamique holomorphe date des travaux de Koenigs (1884) consacrés à des questions d'équations fonctionnelles que l'on peut interpréter géométriquement en termes de linéarisation de germes de fonctions holomorphes. Dans un mémoire de 1906, Fatou observe que les domaines maximaux de linéarisation n'ont pas un bord délimité par des courbes analytiques, et qu'ils sont souvent des ensembles parfaits, partout discontinus, aujourd'hui appelés *ensembles de Cantor*. Une série de mémoires de Fatou et Julia dans les années 1917–1920 contient la plupart des résultats fondamentaux concernant la partition de $\widehat{\mathbb{C}}$ en ces deux sous-ensembles F_R et J_R. Pour l'élaboration de ses Lectures Notes qui ont circulé dès 1991, John Milnor a puisé directement dans ces sources originales du début du siècle dernier.

toujours approximatives. Smale démontra en 1965 que dans l'espace des difféomorphismes d'un 3-tore, la stabilité structurelle n'est pas une propriété dense. Ce phénomène vaut même pour la dimension deux. Pour des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^2$ de surfaces, Newhouse a exhibé des systèmes dynamiques avec persistance, après perturbations, d'intersections homoclines *tangentes* entre variétés stables et instables le long d'un ensemble de Cantor, systèmes pour lesquels ni l'hyperbolicité ni la stabilité structurelle ne sont des propriétés denses. Il est donc remarquable que la stabilité structurelle soit une propriété générique dans l'espace des applications rationnelles de $\widehat{\mathbb{C}}$.

§5. Enjeux de la conjecture d'hyperbolicité dense

5.1. L'harmonie hyperbolique. En dimension quelconque, une application différentiable f d'une variété riemannienne (M,g) dans elle-même est dite *hyperbolique* sur un compact invariant K (*i.e.* tel que $f(K) \subset K$) si l'espace tangent en tout point p de K se scinde de manière continue (ou mesurable) en deux sous-espaces $T_pM = E_p^+ \oplus E_p^-$ sur chacun desquels l'application tangente est, respectivement, strictement dilatante et strictement contractante. Dans le cas des applications rationnelles R de $\mathbb{C}$ et des ensembles de Julia J_R, cette notion se simplifie parce que la dimension géométrique est égale à un. Une application R est dite *hyperbolique* si sa restriction au compact totalement invariant J_R est hyperbolique. Comme l'application restreinte ne peut être que dilatante, l'hyperbolicité de R signifie simplement que R est *uniformément dilatante* sur son ensemble de Julia : il existe une constante $c > 1$ et une métrique conforme sur $\widehat{\mathbb{C}}$ telle que $|R'(z)| \geq c$ pour tout $z \in J_R$. Autrement dit, R pousse dans son ensemble de Fatou de manière uniforme tous les points proches de son ensemble de Julia qui ne lui appartiennnent pas. On démontre que R est hyperbolique si et seulement si la fermeture de la réunion des orbites des points critiques de R, appelée *ensemble postcritique* de R, est disjointe de J_R. Une autre condition équivalente est que tous les points critiques de R sont attirés par l'ensemble fini des cycles attractifs de R.

Les applications rationnelles hyperboliques de $\widehat{\mathbb{C}}$ possèdent un faisceau de propriétés particulièrement agréables qui en font les applications les plus simples conceptuellement, d'un point de vue dynamique. Tout d'abord, l'ensemble de Fatou de R ne contient ni disque de Siegel, ni anneau de Herman, mais seulement un nombre inférieur ou égal à $2d-2$ de cycles (super)attractifs. D'après le théorème de non-errance de Sullivan, toute composante de Fatou (il y en a en général une infinité) est prépériodique et est attiré par l'un des cycles attractifs. Ces cycles sont bien évidemment stables par perturbation, et l'on sait que dans l'espace des applications rationnelles de $\widehat{\mathbb{C}}$, l'hyperbolicité est une propriété ouverte. Cet espace peut être paramétré par les $2d-1$ constantes apparaissant dans une fraction rationnelle à laquelle on impose (sans perte de généralité) $R(\infty) = \infty$ et qui s'écrit alors

$$R(z) = \frac{c_0 + c_1\, z + \cdots + c_{d-1}\, z^{d-1} + z^d}{c_d + c_{d+1}\, z + \cdots + c_{2d-1}\, z^{d-1}}.$$

Il s'identifie donc à l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{C}^{2d-1}$. Grâce au lemme de distorsion de Kœbe, on démontre que l'ensemble de Julia est *ρ-poreux* pour une certaine constante $\rho > 0$, c'est-à-dire que tout disque centré en un point de

J_R et de rayon r contient un disque de rayon $\rho\, r$ évitant J_R. Par un raisonnement général de théorie de la mesure, on en déduit que J_R est de dimension de Hausdorff $\delta(\rho)$ dépendant de ρ et strictement inférieure à 2. En particulier, l'aire de J_R est nulle. De plus, l'ensemble de Julia varie de manière continue pour la topologie classique de Hausdorff entre compacts de $\widehat{\mathbb{C}}$. Enfin, de manière générale, si l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle hyperbolique est connexe, ou bien J_R est un cercle et R un produit de Blaschke, ou bien J_R est un fractal au sens de Mandelbrot, c'est-à-dire que la dimension de Hausdorff de J_R est strictement supérieure à 1.

Ainsi, la condition d'hyperbolicité implique une simplicité, une robustesse et une "harmonie dynamique" remarquables d'où sont exclues tous les comportements fins liés aux points indifférents rationnels ou irrationnels. Puisque tous les points d'un ensemble de mesure totale convergent vers un attracteur fini A (la réunion des cycles attractifs), ces systèmes ont un comportement physique complètement prédictible du point de vue probabiliste : il existe un ouvert $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ (en l'occurence, il suffit de choisir $U := F_R$) de mesure pleine tel l'orbite de tout point $z_0 \in U$ converge vers A. En définitive, même si la combinatoire des cycles, leur nombre et leurs périodes peuvent tendre vers l'infini lorsque l'on fait varier certains paramètres de R, le portrait dynamico-géométrique des applications hyperboliques est clair et sans surprise.

Bien au contraire, de nombreuses questions sont encore ouvertes au sujet des applications non hyperboliques, notamment la forme des parties de l'ensembles de Julia bordant un disque de Siegel, la distribution des points paraboliques, l'existence d'un ensemble de Julia d'intérieur vide mais de mesure de Lebesgue positive, la description topologique des bifurcations des ensembles de Julia, la transformation des fleurs de Leau-Fatou en disques de Siegel, *etc.*.

5.2. Formulations de la conjecture d'hyperbolicité. Fatou croyait vraisemblablement que l'ensemble des applications rationnelles non hyperboliques était contenu dans un ensemble dénombrable de sous-variétés analytiques de $\mathbb{C}^{2d-1}$. Or il n'en est rien d'après un résultat de Rees (1986), qui a démontré que les applications non hyperboliques forment un ensemble de mesure positive dans l'espace $\mathbb{C}^{2d-1}$. Néanmoins, il est généralement conjecturé que l'hyperbolicité est une propriété dense parmi les applications rationnelles : c'est l'un des problèmes centraux de la dynamique holomorphe à une variable, encore largement ouvert aujourd'hui. L'enjeu est celui d'une bonne compréhension des comportement dynamiques en dimension un et pour des systèmes particulièrement rigides, qui possèdent à la fois des propriétés analytiques provenant de l'holomorphie et des propriétés de finitude provenant de l'algébricité [12]. Mañe, Sad et Sullivan ont démontré que la stabilité structurelle est une propriété dense. Plus précisément, une application rationnelle est structurellement stable si elle appartient à l'ensemble dense des applications ayant un nombre localement maximal (et donc localement constant) de cycles attractifs. De manière conjecturale, on s'attend à ce que tout système dynamique rationnel sur $\widehat{\mathbb{C}}$ qui est structurellement stable soit aussi hyperbolique.

12. Par exemple, le théorème de non-errance de Sullivan, valable pour les applications rationnelles, est mis en défaut pour les applications transcendantes.

5.3. Restriction à la famille quadratique. Après conjugaison, tout polynôme de degré deux sur $\widehat{\mathbb{C}}$ se ramène à la forme simple $z^2 + c$. L'ensemble de ces polynômes est alors paramétré par *une* constante complexe : l'espace des paramètres s'identifie à l'espace de la variable z. Malgré cette apparente simplicité analytique, la dynamique des applications quadratiques est particulièrement riche. La conjecture d'hyperbolicité peut être spécialisée à la famille quadratique $z \mapsto f_c(z) := z^2 + c$ et elle est encore ouverte : pour un ensemble dense de $c \in \mathbb{C}$, l'application f_c est hyperbolique. Elle peut être encore spécialisée en restreignant le domaine de variation de c à la droite réelle. Alors la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ offre une contrainte topologique forte permettant d'aller beaucoup plus loin, notamment dans le cadre de la dynamique des applications d'intervalles.

L'application f_c n'a que deux points critiques, $z = 0$ et $z = \infty$. De plus, le point ∞ est superattracif. Puisqu'il y a au plus 2 cycles attractifs et qu'une application est hyperbolique si et seulement si l'ensemble postcritique est disjoint de l'ensemble de Julia, on a la caractérisation suivante des applications quadratiques hyperboliques : ou bien le point critique est attiré par l'infini, ou bien il est attiré par un éventuel second cycle attractif situé dans le plan complexe fini $\mathbb{C}$.

Cette dichotomie rend naturelle la définition suivante du célèbre *ensemble de Mandelbrot* M : c'est l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ tels que l'orbite du point critique $\{f_c^{\circ n}(0)\}_{n \geq 0}$ n'est pas attirée par l'infini, c'est-à-dire reste bornée. C'est donc parmi les $c \in M$ que l'on doit rechercher les applications hyperboliques "non triviales", *i.e.* celles qui possèdent un cycle attractif à distance finie.

En 1995, McMullen a démontré un résultat sur l'inexistence de champs de droites mesurables invariants qui sont supportés par l'ensemble de Julia de f_c [13]. Ce résultat implique que toute composante connexe de l'ensemble de l'intérieur de l'ensemble Mandelbrot qui rencontre l'axe réel est entièrement constituée d'applications hyperboliques.

CNRS, Université de Provence, LATP, UMR 6632, CMI, 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France

E-mail address: merker@cmi.univ-mrs.fr 00 33 / (0)4 91 11 36 72 / (0)4 91 53 99 05

13. La conjecture dite *rigide* énonce que seuls les exemples de type Lattès de dynamique couverte par une application linéaire dilatante d'un tore complexe possèdent un champ de droite qui est invariant par l'application rationnelle induite. Pour les applications quadratiques réelles ($c \in \mathbb{R}$), elle est traitée dans C.T. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Annals of Math. Studies 135, Princeton University Press, 1995.