HAL open science

# L'algèbre des symétries quantiques d'Ocneanu et la classification des systèmes conformes à 2D

Gil Schieber

**To cite this version:**

Gil Schieber. L'algèbre des symétries quantiques d'Ocneanu et la classification des systèmes conformes à 2D. 2004. hal-00003353

**HAL Id: hal-00003353**

**https://hal.science/hal-00003353v1**

Preprint submitted on 25 Nov 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00003353, version 1 - 25 Nov 2004

# THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

**Gil Schieber**

pour obtenir le grade de docteur de l'Université de Provence, spécialité

physique des particules, physique mathématique et modélisation.

## L'ALGÈBRE DES SYMÉTRIES QUANTIQUES D'OCNEANU ET LA CLASSIFICATION DES SYSTÈMES CONFORMES À 2D

Soutenue le 16 Septembre 2003, devant un jury composé de :

R. Amorim (co-directeur de thèse, président du jury)
R. Coquereaux (directeur de thèse)
M. V. Cougo Pinto
O. Ogievetsky
I. Roditi
T. Schücker

F. Toppan (rapporteur)
R. Trinchero (rapporteur)

# Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Robert Coquereaux, d'abord pour m'avoir accepté comme son étudiant de DEA, et par la suite pour m'avoir orienté dans cette thèse (même si souvent à distance !). Ses conseils et motivations m'ont été indispensables pour en arriver là : un grand merci pour ces déjà nombreuses années de collaboration et d'amitié, qui, j'en suis sûr, continueront dans le futur.

Touta ma reconaissance à Juan Alberto Mignaco, pour avoir accepté d'être mon directeur de thèse au Brésil, et m'avoir accueilli à Rio de Janeiro : c'est un grand dommage qu'il n'ait pu être là pour en voir la fin. Un grand merci à Ricardo Amorim, pour avoir accepté de me codiriger à Rio par la suite.

Je remercie vivement tous les membres du jury, notamment ceux venant de loin, comme Oleg Ogievetsky ; ainsi que les rapporteurs Francesco Toppan et Roberto Trinchero, pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Cette thèse a été effectuée dans deux très belles villes côtières – Marseille et Rio de Janeiro – grâce à une convention de cotutelle signée entre l'Université de Provence et l'Université Fédérale de Rio de Janeiro.

Ma gratitude aux membres du secrétariat du Centre de Physique Théorique à Marseille, notamment Sylvie, Michèle, Corinne et Dolly ; ainsi qu'à ceux de l'Instituto de Física de l'UFRJ, Casé et Márcia, pour leur très précieuse aide dans mes embarras administratifs, ainsi que pour leur bonne humeur.

Je remercie mes amis et collègues de travail des deux côtés de l'Atlantique : Sébastien, Pierre, Sam et David, pour les bons moments et la bonne ambiance au CPT, ainsi que Pablo et Bernd, pour une non moins bonne ambiance à l'UFRJ.

Enfin, une mention spéciale pour mes amis belges, que j'ai quitté il y a longtemps déjà, mais qui ont toujours continué à m'encourager et à me soutenir dans cette longue entreprise, et à ma famille, pour son soutien moral et financier oh combien nécessaire les derniers mois de cette thèse...

Ma dernière pensée va à Larissa et Irache, qui, à des moments différents de cette thèse, ont partagé ma vie.

# Table des matières

**Introduction** **1**

**1 Classification des théories conformes à deux dimensions** **7**

1.1 Théories conformes : une introduction . . . . . 7

1.1.1 Importance des symétries . . . . . 7

1.1.2 Transformations conformes . . . . . 9

1.1.3 OPE des champs . . . . . 13

1.1.4 Algèbre de Virasoro et représentations $\mathcal{V}_i$ . . . . . 15

1.2 Théories conformes rationelles : RCFT . . . . . 18

1.2.1 Algèbre de fusion . . . . . 18

1.2.2 Unitarité et irréductibilité de $\mathcal{V}_i$ . . . . . 19

1.2.3 Modèles minimaux . . . . . 21

1.2.4 Modèles $\widehat{g}$-WZWN . . . . . 21

1.2.5 Propriétés modulaires des caractères $\chi_i$ et formule de Verlinde . . . . 22

1.3 Invariance modulaire, conditions aux bord et lignes de défaut . . . . . 24

1.3.1 Modèles définis sur le tore . . . . . 24

1.3.2 Fonctions de partition invariante modulaire . . . . . 25

1.3.3 Conditions au bord . . . . . 26

1.3.4 Lignes de défauts et fonctions de partition généralisées . . . . . 27

1.4 Classifications et graphes . . . . . 30

1.4.1 Modèles $\widehat{su}(2)$ . . . . . 30

1.4.2 Modèles minimaux . . . . . 32

1.4.3 Modèles $\widehat{su}(n), n \geq 3$ et modèles minimaux généralisés . . . . . 34

**2 L'algèbre des symétries quantiques d'Ocneanu** **35**

2.1 Les chemins essentiels sur un graphe $G$ . . . . . 35

2.1.1 Quelques définitions . . . . . 35

2.1.2 Graphes bi-orientés et leur classification . . . . . 37

2.1.3 Chemins essentiels sur un graphe . . . . . 38

2.2 La bigèbre de Hopf faible $\mathcal{B}(G)$ . . . . . 42

2.2.1 Endomorphismes gradués de chemins essentiels . . . . . 42
2.2.2 Bigèbre faible $\mathcal{B}(G)$ : construction abstraite . . . . . 43
2.2.3 Équations pentagonales . . . . . 45
2.2.4 Projecteurs minimaux centraux $\pi_i$ et $\varpi_x$ et graphes $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$ . 47
2.2.5 Cellules d'Ocneanu . . . . . 49
2.3 Une construction explicite . . . . . 52
2.3.1 Cas $A_3$ . . . . . 52
2.3.2 Graphes $G$ du type $ADE$ et généralisations . . . . . 60

**3 Des graphes aux fonctions de partition 61**
3.1 Représentations irréductibles et graphes $\mathcal{A}$ . . . . . 61
3.1.1 Définitions . . . . . 61
3.1.2 Algèbre de graphe et matrices $N_i$ . . . . . 63
3.1.3 Représentation du groupe modulaire $SL(2,\mathbb{Z})$ et formule de Verlinde . 65
3.2 Diagrammes de Coxeter-Dynkin généralisés $G$ . . . . . 66
3.2.1 Historique et définitions . . . . . 66
3.2.2 Algèbre de graphe . . . . . 68
3.2.3 $\mathcal{V}(G)$ comme module sur $\mathcal{A}(G)$ : matrices $F_i$ (ou $E_a$) . . . . . 70
3.3 Graphes d'Ocneanu $Oc(G)$ . . . . . 74
3.3.1 Définition . . . . . 74
3.3.2 Réalisation algébrique de $Oc(G)$ . . . . . 76
3.3.3 $\mathcal{V}(G)$ comme module sur $Oc(G)$ : matrices $S_x$ . . . . . 78
3.4 Relations entre $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$ . . . . . 79
3.4.1 Fonctions de partition . . . . . 79
3.4.2 $Oc(G)$ comme bi-module sur $A(G)$ : matrices $W_{ij}$ et $W_{xy}$ . . . . . 81
3.4.3 Relations de compatibilité algébrique . . . . . 82

**4 Calculs explicites 87**
4.1 Rappels des notations . . . . . 87
4.2 Calculs des cas $\widehat{su}(2)$ . . . . . 89
4.2.1 Les cas $A_n$ . . . . . 89
4.2.2 Le cas $E_6$ . . . . . 93
4.2.3 Le cas $E_8$ . . . . . 100
4.2.4 Les cas $D_{2n}$ . . . . . 107
4.2.5 Les cas $D_{2n+1}$ . . . . . 118
4.2.6 Le cas $E_7$ . . . . . 122
4.3 Quelques exemples du cas $su(3)$ . . . . . 129
4.3.1 Le cas $\mathcal{E}_5$ . . . . . 129
4.3.2 Le cas $\mathcal{E}_9$ . . . . . 134

4.3.3 Le cas $\mathcal{E}_{21}$ . . . . . 136

**Conclusion et perspectives** **143**

**A Diagrammes de Dynkin $ADE$ et $ADE^{(1)}$** **145**

**B Correspondance de McKay classique et quantique** **147**

B.1 Correspondance de McKay classique et graphes $ADE^{(1)}$ . . . . . 147

B.1.1 Le groupe $SU(2)$ classique . . . . . 147

B.1.2 Formulation matricielle et graphe $A_\infty$ . . . . . 148

B.1.3 Sous-groupes $\Gamma$ de $SU(2)$ et graphes $ADE^{(1)}$ . . . . . 149

B.1.4 Exemple : le groupe binaire octahédrique $\mathcal{O}$ et le graphe $E_7^{(1)}$ . . . . . 150

B.1.5 $\widehat{\Gamma}$ comme module sur $\widehat{SU}(2)$ et règles de branchement $SU(2) \hookrightarrow \Gamma$ . . 152

B.2 Correspondance de McKay quantique et graphes $ADE$ . . . . . 153

B.2.1 Le groupe quantique $U_q(sl(2))$ . . . . . 153

B.2.2 Quotient de $U_q(sl(2))$ et graphe $A_n$ . . . . . 154

B.2.3 "Sous-groupes" finis de $U_q(sl(2))$ et graphes $ADE$ . . . . . 155

**C Quelques définitions algébriques** **157**

C.1 Algèbre de Hopf . . . . . 157

C.2 Algèbre de Hopf faible . . . . . 160

C.3 Divers . . . . . 161

**D Fonctions de partition généralisées** **165**

D.1 Cas $\widehat{su}(2)$ . . . . . 165

D.1.1 Le cas $A_4$ . . . . . 165

D.1.2 Le cas $E_6$ . . . . . 165

D.1.3 Le cas $E_8$ . . . . . 166

D.1.4 Le cas $D_4$ . . . . . 167

D.1.5 Le cas $D_6$ . . . . . 168

D.1.6 Le cas $D_5$ . . . . . 168

D.1.7 Le cas $E_7$ . . . . . 169

D.2 Cas $\widehat{su}(3)$ : $\mathcal{E}_5$ . . . . . 170

**Bibliographie** **171**

# Introduction

L'époque des grands savants multidisciplinaires – qu'ils soient grecs, égyptiens ou chinois – est de nos jours révolue. Le développement naturel du savoir l'amène à une ramification de plus en plus pointue. Toutefois, la mathématique et la physique (théorique), même si pouvant être conceptuellement classées comme deux domaines différents du savoir, ont cheminé main dans la main de l'Antiquité jusqu'au début du vingtième siècle. Archimède, un des plus grands mathématiciens de son époque, était également un brillant physicien ; à partir de Galilée et l'avènement de la physique dite moderne, ces deux derniers domaines étaient même devenus indissociables. Les grands bouleversements de paradigmes en physique ont toujours été précédés ou accompagnés de la découverte de nouvelles structures mathématiques : mécanique classique et calcul différentiel ont ainsi été développés conjointement par des mathématiciens et physiciens : Newton, Euler, Lagrange, Hamilton ... De même, les trois grandes révolutions physiques du début du siècle dernier, à savoir la relativité restreinte, la mécanique quantique et la théorie de la gravitation d'Einstein, ne peuvent être évoquées sans penser au groupe de Poincaré, à l'espace de Hilbert et à la géométrie Riemannienne (voir [64]).

L'avènement de la théorie quantique des champs (l'unification de la mécanique quantique et de la relativité restreinte) et ses problèmes, notamment ceux inhérents à l'apparition de divergences, a créé un grand éloignement entre ces deux communautés. La parole à Res Jost (cité dans [87]) : "... sous l'influence démoralisante de la théorie quantique des champs perturbative (infestée de divergences), les mathématiques nécessaires à un physicien théoricien ont été réduites à la connaissance rudimentaire de l'alphabet Grec et Latin." Les mathématiciens n'étaient pas en reste, Weil et Dieudonné par exemple affirmant que "les mathématiques du vingtième siècle ne souffriront pas l'influence de la physique" [16]. Ainsi Dyson déclara en 1972 : "le mariage entre mathématique et physique ... a récemment terminé en divorce" [36].

Ces dernières décennies, un nouveau rapprochement entre mathématique pure et physique théorique s'est opéré, bénéfique pour ces deux branches du savoir, car stimulant et mutuellement enrichissant. Citons entre autres exemples la formulation de la méthode de *scattering* quantique inverse introduite par Faddeev, Sklyanin et Takhtajan [38] pour les modèles intégrables qui amena à la découverte des groupes quantiques[1] [35], ou la découverte récente

[1] Nous devrions plutôt parler de *redécouverte* puisque les groupes quantiques sont des cas spéciaux d'algèbres de Hopf [83], structures déjà connues des mathématiciens.

d'une structure d'algèbre de Hopf dans la combinatoire du programme de renormalisation de la théorie des champs perturbative [58, 18] et ses liens avec un problème de Riemann-Hilbert [19]. Les **théories conformes à deux dimensions** offrent un autre exemple marquant d'un terrain d'entente par sa transparence mathématique et ses riches applications physiques. Un système conforme est invariant sous les transformations de l'espace qui conservent les angles, donc notamment sous les transformations d'échelle. Les applications physiques concernent les transitions de phase dans les phénomènes critiques (car alors aucun paramètre d'échelle n'intervient), mais aussi les modèles intégrables et principalement la théorie des cordes. En mathématique, l'étude des systèmes conformes est à la base de la formulation de nouvelles structures algébriques introduites par A. Ocneanu [66]. De fait, il est assez surprenant et stimulant de savoir que ce mathématicien, spécialiste des algèbres d'opérateur, a utilisé une classification des fonctions de partition de théorie des champs conformes pour obtenir ces structures !

Depuis l'article fondateur de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [5], les systèmes conformes à deux dimensions ont constitué un intense domaine de recherche. Dans un tel système, l'algèbre des transformations (algèbre de Virasoro) est de dimension infinie : les contraintes imposées sur les fonctions de corrélation du système sont alors telles qu'il est possible dans certains cas de le résoudre explicitement, ouvrant ainsi la voie à des classifications. Un cas important est celui de théories possédant comme symétrie étendue une algèbre de courant (contenant Virasoro), en particulier les modèles avec algèbre affine $\widehat{g}$.

À deux dimensions, le système est défini sur un réseau bi-dimensionnel. En définissant des conditions périodiques selon les deux axes, la géométrie du système se ramène à celle d'un tore. Pour les modèles $\widehat{su}(n)$, la classsification des fonctions de partition invariantes modulaires définies sur le tore (de paramètre modulaire $\tau$) se réduit à la classification des matrices $\mathcal{M}$ à coefficients entiers non-négatifs qui commutent avec les générateurs $S$ et $T$ du groupe modulaire. $\mathcal{M}$ est appelée l'invariant modulaire, et la fonction de partition s'écrit alors en termes des caractères $\chi_i$ de l'algèbre $\widehat{su}(n)$ :

$$\mathcal{Z}(\tau) = \sum_{i,j} \chi_i(\tau)\, \mathcal{M}_{ij}\, \overline{\chi}_j(\overline{\tau}). \tag{1}$$

La première classification des fonctions de partition invariantes modulaires a été obtenue pour les modèles $\widehat{su}(2)$ en 1987 par Cappelli, Itzykson et Zuber [10, 11] et est connue sous le nom de classification $ADE$. À chaque fonction de partition $\mathcal{Z}$ est associé un graphe tel que son spectre soit codé dans les éléments diagonaux de $\mathcal{M}$. C'est ainsi qu'apparaissent les diagrammes de Dynkin de type $ADE$, mais soulignons que cette analogie était à l'époque mystérieuse. Notons que les modèles minimaux (comme par exemple le modèle d'Ising ou le modèle de Potts) sont reliés aux modèles $\widehat{su}(2)$ par une construction de *coset* [46] : la classification des modèles $\widehat{su}(2)$ conduit donc à celle des modèles minimaux. Plus généralement, la classification

des modèles affines joue un rôle prépondérent dans la classification des théories conformes dites rationnelles. La classification des invariants modulaires des modèles $\widehat{su}(3)$ a été obtenue en 1994 par Gannon [44], et à cette classification est associée une liste de graphes appelés diagrammes de Coxeter-Dynkin généralisés.

Quand sont incorporées des conditions au bord (labellées par $a$ et $b$) ou des lignes de défaut (labellées par $x$ et $y$) sur le système de manière compatible avec l'invariance conforme, les fonctions de partition s'écrivent :

$$\mathcal{Z}_{a|b}(\tau) = \sum_i \mathcal{F}^i_{ab}\, \chi_i(\tau), \tag{2}$$

$$\mathcal{Z}_{x|y}(\tau) = \sum_{i,j} \chi_i(\tau)\, \mathcal{W}^{ij}_{xy}\, \overline{\chi}_j(\overline{\tau}), \tag{3}$$

où $\mathcal{F}^i_{ab}$ et $\mathcal{W}^{ij}_{xy}$ sont des coefficients entiers non-négatifs formant des nimreps ("*numerical integer valued matrix representation*") de certaines algèbres. Le problème de la classification des fonctions de partition des théories conformes $\widehat{su}(n)$ dans divers environnements se réduit donc à la détermination de l'ensemble de ces matrices. Or ces coefficients (ou ces matrices) définissent les diverses structures d'une nouvelle classe d'algèbres de Hopf, appelées "algèbres de Hopf faibles" [8, 9].

Une algèbre de Hopf faible (WHA) est similaire à une algèbre de Hopf usuelle. Elle possède un espace vectoriel muni d'un produit $\circ$ et d'un coproduit $\Delta$, compatibles dans le sens usuel, et une unité $\mathbb{1}$, une counité $\epsilon$ et une antipode $S$. Cependant, contrairement à une algèbre de Hopf usuelle – pour laquelle $\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ – dans une algèbre de Hopf faible[2] $\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_{(1)} \otimes \mathbb{1}_{(2)}$. Tous les axiomes reliés à l'unité doivent alors être modifiés en conséquence. Il a été montré que toute solution d'un ensemble d'équations connues sous le nom de "*The Big Pentagon Equation*" fournit un exemple de WHA, dont un cas particulier de solution provient des différents coefficients intervenant dans une théorie conforme [65, 8].

A. Ocneanu associe à l'espace des endomorphismes de chemins essentiels[3] définis sur un graphe $G$ de type $ADE$ une *digèbre*, notée $\mathcal{B}(G)$. Cette digèbre est un espace vectoriel muni de deux produits $\circ$ et $\odot$. L'existence d'un produit scalaire permet de transposer le produit $\odot$ en un coproduit $\Delta$, de manière à ce que $\mathcal{B}(G)$ soit techniquement une WHA, même si aucune vérification n'a jamais été explicitement menée. La digèbre $\mathcal{B}(G)$ est semi-simple pour ses deux structures multiplicatives et peut donc être diagonalisée pour chacune de ces lois. $\mathcal{B}(G)$ est isomorphe à une somme directe de blocs matriciels de deux manières différentes :

$$\mathcal{B}(G) \cong \bigoplus_i L^i \cong \bigoplus_x X^x\,. \tag{4}$$

Les blocs pour la loi $\circ$ sont labellés par les vertex d'un graphe noté $\mathcal{A}(G)$ : c'est le graphe de la série $A$ possédant la même norme que le graphe $G$. Les blocs pour la loi $\odot$ sont labellés

[2] Nous adoptons ici la convention de Sweedler : une sommation sur les indices de type (1) ou (2) est implicite.

[3] La notion de chemins essentiels sera introduite au chapitre **2**.

par les vertex d'un autre graphe, appelé le graphe d'Ocneanu de $G$, noté $Oc(G)$. L'espace vectoriel engendré par les vertex de chacun de ces deux graphes (relatif à une des deux lois) est muni, vis à vis de l'autre loi, d'une structure algébrique associative : nous obtenons deux algèbres que nous notons par le même symbole que le graphe lui-même. L'algèbre $\mathcal{A}(G)$ est commutative, mais l'algèbre $Oc(G)$, aussi appelée l'**algèbre des symétries quantiques** de $G$, ne l'est pas toujours.

La connaissance de ces algèbres – ou la donnée des graphes correspondants – permet de reconstruire l'ensemble des coefficients définissant les fonctions de partition des cas du type $\widehat{su}(2)$. En particulier, à un vertex spécial du graphe d'Ocneanu (l'unité) est associée une fonction de partition qui est invariante modulaire : nous retrouvons ainsi la classification de Cappelli-Itzykson-Zuber. Mais il est aussi possible d'associer des fonctions de partition aux autres points de ce graphe : elles ne sont plus invariantes modulaires, mais sont interprétées en théorie des champs conformes comme provenant d'un système avec une ligne de défauts. Utilisant l'algèbre des symétries quantiques, il est aussi possible de définir des fonctions de partition provenant d'un système avec deux lignes de défauts. Ces fonctions de partition – à une et deux lignes de défauts – sont appelées *twistées* ou généralisées [77].

Le travail central de cette thèse est la description d'une réalisation de l'algèbre des symétries quantiques d'Ocneanu, construite comme un certain quotient du carré tensoriel d'algèbres de graphes déjà connues. À partir de cette réalisation, nous introduisons un algorithme simple permettant la détermination de toutes les fonctions de partition (invariante modulaire et généralisées) pour tous les cas du type $\widehat{su}(2)$ [25] (voir aussi [78], utilisant un formalisme différent). Par la suite, une caractérisation de cette réalisation par les propriétés modulaires du graphe $G$ a permis de construire l'agèbre des symétries quantiques sans la nécessité de la connaissance préalable des graphes d'Ocneanu [26] (toutefois, pour les cas où $Oc(G)$ n'est pas commutative, cette construction n'est pas entièrement satisfaisante).

Les graphes d'Ocneanu ne sont connus (publiés) que pour les modèles $\widehat{su}(2)$, mais la liste des diagrammes de Coxeter-Dynkin généralisés a été obtenue pour les cas du type $\widehat{su}(3)$ [31, 32, 71] et $\widehat{su}(4)$ [71]. Cependant, l'explicite diagonalisation de la loi $\odot$ pour une (hypothétique ?) digèbre $\mathcal{B}(G)$ construite sur ces diagrammes généralisés n'a pas encore été effectuée.

Les fonctions de partition généralisées des modèles $\widehat{su}(n), n \geq 3$ n'étaient donc pas connues. Grâce à la caractérisation introduite précédemment, notre méthode de construction de $Oc(G)$ se prête à une généralisation aux cas $\widehat{su}(n), n \geq 3$. Nous avons étudiés certains exemples choisis des modèles $\widehat{su}(3)$, et obtenu les fonctions de partition associées. Nous retrouvons les fonctions de partition invariantes modulaires correspondant à la classification de Gannon, confirmant ainsi notre construction, et nous obtenons les expressions des fonctions de partition à une et deux lignes de défaut des cas étudiés [26].

La construction est la suivante. À un diagramme de Dynkin $G$ de type $ADE$ (ou possiblement généralisé) est associé l'espace vectoriel $\mathcal{V}(G)$ engendré par les vertex de ce diagramme.

Dans certains cas, cet espace vectoriel possède une structure multiplicative associative et commutative avec des coefficients de structure entiers non-négatifs (c'est notamment le cas pour les diagrammes de la série $\mathcal{A}$) appelée **algèbre de graphe** : nous dirons alors que $G$ possède *self-fusion*. Même si $G$ ne possède pas *self-fusion*, $\mathcal{V}(G)$ est toujours un module sous l'action de l'algèbre du graphe $\mathcal{A}(G)$ ayant la même norme (de Perron-Frobenius) que $G$. Si nous notons $\sigma_a$ les vertex de $G$ et $\tau_i$ les vertex de $\mathcal{A}(G)$, alors :

$$\tau_i \,.\, \sigma_a = \sum_b \mathcal{F}^i_{ab}\, \sigma_b \,, \tag{5}$$

et les coefficients $\mathcal{F}^i_{ab}$ sont les mêmes que ceux de l'équation (2). Dans les cas simples ($A_n$, $E_6$ et $E_8$ pour $\widehat{su}(2)$), l'algèbre $Oc(G)$ est isomorphe au carré tensoriel de l'algèbre du graphe $G$, mais où le produit tensoriel est pris au-dessus d'une sous-algèbre $J$ de $G$, caractérisée par les propriétés modulaires de $G$ : $Oc(G) \cong G \otimes_J G$. Un élément $x$ de $Oc(G)$ s'écrit alors de la forme $x = \sigma_a \otimes_J \sigma_b$. Comme il existe une action de $\mathcal{A}(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$, il existe aussi une action naturelle à droite et à gauche de $\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G)$. $Oc(G)$ est donc un bi-module sur $\mathcal{A}(G)$ et nous avons :

$$\tau_i \,.\, x \,.\, \tau_j \;=\; \tau_i \,.\, (\sigma_a \otimes_J \sigma_b) \,.\, \tau_j \;=\; \sum_y \mathcal{W}^{ij}_{xy}\, y \,, \tag{6}$$

où les coefficients $\mathcal{W}^{ij}_{xy}$ sont les mêmes que ceux de l'équation (3). La détermination de ces coefficients permet alors d'obtenir les fonctions de partition généralisées du modèle conforme associé au graphe $G$.

Soulignons que, bien que les graphes $Oc(G)$ soient *a priori* définis à partir de la diagonalisation de la loi $\odot$ de $\mathcal{B}(G)$, la construction explicite de ces graphes par Ocneanu lui-même s'est basée sur la connaissance préalable de la classification des invariants modulaires de $\widehat{su}(2)$ de Cappelli-Itzykson-Zuber, ou celle de $\widehat{su}(3)$ par Gannon. Un autre axe de recherche développé dans cette thèse est l'étude approfondie de la digèbre $\mathcal{B}(G)$ et de ses structures, notamment à travers les cellules d'Ocneanu. L'objectif est double : d'une part, nous voulons vérifier que la digèbre $\mathcal{B}(G)$ est techniquement une algèbre de Hopf faible, d'autre part nous voulons obtenir la diagonalisation de $\mathcal{B}(G)$ pour la loi $\odot$ dans le but de construire explicitement les graphes d'Ocneanu [27].

Le plan de la thèse est le suivant :

• Bien que le travail de recherche à proprement parler de cette thèse se situe plutôt au niveau algébrique, plusieurs résultats obtenus sont interprétés dans le langage de la théorie des champs conformes. Nous avons donc décidé de dédier le chapitre **1** à ces notions. Après une courte introduction aux théories des champs conformes à deux dimensions, et notamment aux théories des champs conformes dites *rationelles*, nous présentons les diverses classifications

des modèles $\widehat{su}(n)$ et des modèles minimaux, et montrons comment ces classifications sont naturellement reliées à des coefficients formant des *nimreps* d'un certain ensemble d'algèbres, pouvant être codées par des graphes.

• Dans le chapitre **2** est présentée la construction d'Ocneanu d'une digèbre $\mathcal{B}(G)$ associée à un diagramme de Dynkin de type $ADE$. Nous montrons comment cette digèbre permet de définir les graphes $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$ et analysons explicitement l'exemple du diagramme $A_3$.

• Le chapitre **3** est consacré à la présentation d'une certaine réalisation de l'algèbre des symétries quantiques d'Ocneanu. Nous montrons comment cette réalisation – qui se prête naturellement à une généralisation aux cas $\widehat{su}(n), n \geq 3$ – permet d'obtenir un algorithme simple pour le calcul des divers coefficients entrant dans la définition des fonctions de partition du modèle conforme associé.

• Dans le chapitre **4** nous traiterons explicitement tous les cas du type $\widehat{su}(2)$ ainsi que trois exemples choisis du type $\widehat{su}(3)$.

• Les diagrammes de Dynkin $ADE$ et leur extension affine $ADE^{(1)}$, une présentation de la correspondance de Mc-Kay (classique et quantique), plusieurs définitions algébriques ainsi que les expressions des fonctions de partition généralisées pour les exemples étudiés sont donnés en Annexe.

Les résultats originaux obtenus dans cette thèse sont présentés dans le chapitre **4** (ils ont en partie été publiés dans les articles [25, 26]) ainsi qu'à la fin du chapitre **2** (ils seront publiés dans [27]).

# Chapitre 1

# Classification des théories conformes à deux dimensions

Les systèmes conformes sont les systèmes invariants sous les transformations de l'espace qui préservent les angles. À deux dimensions, ces systèmes deviennent très intéressants car l'algèbre des transformations est alors de dimension infinie. Par conséquent, il existe des modèles pour lesquels une classification a pu être établie : c'est notamment le cas pour les modèles affines $\widehat{su}(2)$ [11], $\widehat{su}(3)$ [44] et pour les modèles minimaux [11]. Dans ce chapitre, nous mentionons les relations existantes entre ces classifications et un ensemble de coefficients pouvant être codé par des graphes [75, 76, 79]. Ce chapitre est dédié à des résultats déjà connus mais parfois peu divulgués dans la littérature (principalement en ce qui concerne les systèmes avec l'introduction de lignes de défauts [77]), c'est pourquoi nous avons jugé utile de les présenter ici.

## 1.1 Théories conformes : une introduction

Nous donnons ici une brève introduction aux théories conformes, principalement à $2d$. Il existe de nos jours plusieurs bons textes traitant du sujet, citons entre autres [45, 53, 33].

### 1.1.1 Importance des symétries

L'objet principal d'une théorie des champs est l'action $S[\Phi]$, fonctionnelle des champs, définie par :

$$S[\Phi] = \int d^d x \, \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)), \tag{1.1}$$

où $d$ est la dimension de l'espace-temps et $\mathcal{L}$ la densité lagrangienne du système. Ici $\Phi$ est une collection de champs locaux (qui peuvent être de nature très différente : scalaires, spinoriels, ...). Au niveau quantique, nous nous intéressons plus particulièrement aux fonc-

tions de corrélation entre les champs :

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x_1}) \cdots \Phi(\boldsymbol{x_n}) \rangle \doteq \frac{1}{\mathcal{Z}} \int [d\Phi]\ \Phi(\boldsymbol{x_1}) \cdots \Phi(\boldsymbol{x_n})\ e^{-S[\Phi]}, \tag{1.2}$$

où $\mathcal{Z}$ est la fonctionnelle génératrice du vide, aussi appelée, en analogie avec la physique statistique, fonction de partition.

**Définition 1** *Nous dirons qu'un système est* **soluble** *si nous pouvons calculer explicitement les fonctions de corrélations entre tous les champs présents dans le système.*

De manière générale, un système n'est pas soluble. Par contre, l'invariance du système sous une transformation se présente sous la forme de contraintes sur les fonctions de corrélations, à travers les identités de Ward. Plus "grande" sera la symétrie imposée, plus nombreuses seront ces contraintes, pouvant dans certains cas nous amener à trouver des solutions explicites. Ce sera notamment le cas pour des systèmes invariants sous les transformations conformes à deux dimensions, car l'algèbre conforme est alors de dimension infinie ! Analysons tout d'abord une transformation générale sur le système.

### Transformation du point de vue actif

Une transformation générale sur le système est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{x'} \\ \Phi(\boldsymbol{x}) & \longmapsto & \Phi'(\boldsymbol{x'}) = \mathcal{F}(\Phi(\boldsymbol{x})) \end{array} \tag{1.3}$$

Nous adoptons ici le point de vue actif : la transformation change le système de coordonnées ($\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x'}$), et le champ $\Phi$ est lui-même affecté par celle-ci ($\Phi \mapsto \Phi'$). Pour des transformations infinitésimales, à $n$ paramètres $w^a$, $a = (1, \ldots, n)$, avec $w^a \ll 1$ :

$$\begin{array}{rcl} x^\mu & \longmapsto & x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + w^a \dfrac{\delta x^\mu}{\delta w^a} \\ \Phi(\boldsymbol{x}) & \longmapsto & \Phi'(\boldsymbol{x'}) = \Phi(\boldsymbol{x}) + \delta\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) + w^a \dfrac{\delta\Phi}{\delta w^a}(\boldsymbol{x}) \end{array} \tag{1.4}$$

Le générateur $G_a$ de la transformation infinitésimale est défini à partir de la transformation au **même point** :

$$\Phi'(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) - i w^a G_a \Phi(\boldsymbol{x}). \tag{1.5}$$

Le lien entre générateur et paramètre est alors donné par :

$$i G_a \Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta x^\mu}{\delta w^a} \partial_\mu \Phi(\boldsymbol{x}) - \frac{\delta\Phi}{\delta w^a}(\boldsymbol{x}). \tag{1.6}$$

Considérons maintenant un système invariant sous la transformation (1.3) : $S[\mathcal{F}(\Phi)] = S[\Phi]$.

**Conséquence classique** Sous la transformation générale infinitésimale (1.4), la variation de l'action ($S \mapsto S + \delta S$) est donnée par :

$$\delta S = \int d^d\boldsymbol{x}\ \partial_\mu j_a^\mu(\boldsymbol{x})\ w^a, \tag{1.7}$$

où $j_a^\mu(\boldsymbol{x})$ est le courant associé à la transformation :

$$j_a^\mu(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\nu\Phi - g^\mu{}_\nu\mathcal{L}\right)\frac{\delta x^\nu}{\delta w^a} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\frac{\delta\Phi}{\delta w^a}. \tag{1.8}$$

**Théorème 1** *Si les champs vérifient les équations classiques du mouvement, alors :*

$$\delta S = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_\mu j_a^\mu(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{1.9}$$

La conséquence classique de l'invariance du système sous la transformation générale (1.3) est la loi de conservation du courant associé : c'est le **théorème de Noether**.

**Conséquence quantique** Si l'action est invariante sous la transformation (1.3) et si, de plus, nous faisons l'hypothèse que la mesure d'intégration l'est aussi[1], alors les fonctions de corrélations doivent satisfaire les contraintes suivantes :

$$\langle\Phi(\boldsymbol{x_1'})\cdots\Phi(\boldsymbol{x_n'})\rangle = \langle\Phi'(\boldsymbol{x_1'})\cdots\Phi'(\boldsymbol{x_n'})\rangle. \tag{1.10}$$

Si nous nous intéressons au niveau infinitésimal de la transformation, l'invariance du système se traduit par les **identités de Ward** :

$$\langle\delta\Phi\rangle = \int d^d\boldsymbol{x}\partial_\mu\langle j_a^\mu(\boldsymbol{x})\Phi\rangle w^a. \tag{1.11}$$

En spécifiant la variation de $\Phi$ à travers les générateurs de la transformation (1.5), nous obtenons la forme locale des identités de Ward :

$$-i\sum_{i=1}^{n}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_i})\langle\Phi(\boldsymbol{x_1})\cdots G_a\Phi(\boldsymbol{x_i})\cdots\Phi(\boldsymbol{x_n})\rangle = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle j_a^\mu(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x_1'})\cdots\Phi(\boldsymbol{x_n'})\rangle. \tag{1.12}$$

Au niveau quantique, l'invariance d'un système sous une transformation générale se traduit donc par des contraintes imposées sur les fonctions de corrélations.

### 1.1.2 Transformations conformes

Nous considérons un espace-temps à $d$ dimensions, avec une métrique $g_{\mu\nu}$. Sous un changement de coordonnées $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x'}$, la métrique se transforme comme :

$$g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) \longmapsto g'_{\mu\nu}(\boldsymbol{x'}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}). \tag{1.13}$$

[1] Ce n'est pas toujours le cas, notamment si nous introduisons une procédure de régularisation.

**Définition 2** *Une transformation* **conforme** *est un élément du sous-groupe des transformations de coordonnées qui laisse la métrique invariante à un facteur d'échelle près :*

$$g'_{\mu\nu}(\boldsymbol{x'}) = \Lambda(\boldsymbol{x}) g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}). \tag{1.14}$$

Les transformations conformes sont les transformations de l'espace qui préservent les angles. Considérons maintenant une transformation infinitésimale de paramètres $\xi^\mu$ : $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon\, \xi^\mu$, avec $\varepsilon \ll 1$. En imposant (1.14), nous obtenons des contraintes sur $\xi^\mu$ :

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho. \tag{1.15}$$

Ces contraintes nous permettent de spécifier la transformation conforme, les cas à $d = 2$ et $d > 2$ étant très différents.

**Cas** $d > 2$

Les transformations conformes finies sont :

- translation : $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$
- Lorentz (rotations) : $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = -\Lambda^\nu{}_\mu$
- dilatation : $x'^\mu = \alpha\, x^\mu$
- SCT : $\dfrac{x'^\mu}{\boldsymbol{x'}^2} = \dfrac{x^\mu}{\boldsymbol{x}^2} - b^\mu$

où la dernière transformation est la "transformation conforme spéciale" (SCT), qui n'est autre qu'une inversion, suivie d'une translation et d'une nouvelle inversion. Ces transformations forment un groupe à un nombre **fini** de paramètres, égal à : $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$. Dans un espace avec signature $(p, q)$ de dimension $d = p+q$, le groupe conforme est isomorphe à $SO(p+1, q+1)$. Considérons un système invariant sous le groupe des transformations conformes :

**Conséquence classique** Il est bien connu que l'invariance par translation et transformations de Lorentz (le groupe de Poincaré) conduit à la conservation du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$. Considérons aussi les dilatations, définies par :

$$x^\mu \longmapsto x'^\mu = \lambda x^\mu, \qquad \Phi(\boldsymbol{x}) \longmapsto \Phi'(\boldsymbol{x'}) = \lambda^{-\Delta} \Phi(\boldsymbol{x}), \tag{1.16}$$

où $\Delta$ est la dimension d'échelle du champ $\Phi$. Le courant associé à la dilatation est :

$$j_D^\mu(\boldsymbol{x}) = T^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{1.17}$$

et la conservation de ce courant implique que le tenseur énergie-impulsion est de trace nulle :

$$T^\mu{}_\mu = 0. \tag{1.18}$$

Le courant conforme associé à une transformation générale infinitésimale (1.15), défini par $J^\mu \doteq T^{\mu\nu}\xi_\nu$, est alors conservé si $T^{\mu\nu}$ est de trace nulle :

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{2}T^{\mu\nu}(\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu) = 0. \tag{1.19}$$

De fait, la condition de conservation du tenseur énergie-impulsion et la condition (1.18) impliquent l'invariance sous toutes transformations conformes.

**Conséquence quantique** L'invariance par translation et rotation implique par (1.10) que la fonction de corrélation à deux points est de la forme suivante :

$$\langle\phi_1(\boldsymbol{x_1})\phi_2(\boldsymbol{x_2})\rangle = f(|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|). \tag{1.20}$$

Nous verrons que l'invariance conforme permet de fixer explicitement la forme des fonctions de corrélations à deux et trois points.

**Cas** $d = 2$

Dans un espace euclidien à deux dimensions, les contraintes sur $\xi^\mu$ pour que la transformation soit conforme s'écrivent :

$$\partial_0\xi^1 + \partial_1\xi^0 = 0, \qquad \partial_0\xi^0 = \partial_1\xi^1. \tag{1.21}$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann, qui définissent une fonction holomorphe. Il est donc naturel de travailler sur le plan complexe et introduire :

$$\begin{cases} z &= x^0 + ix^1 \\ \overline{z} &= x^0 - ix^1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi &= \xi^0 + i\xi^1 \\ \overline{\xi} &= \xi^0 - i\xi^1 \end{cases}$$

Alors les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial z}\overline{\xi}(z,\overline{z}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\xi(z,\overline{z}) = 0, \tag{1.22}$$

admettant comme solution toute transformation finie analytique (resp. anti-analytique) :

$$z \longmapsto z' = f(z), \qquad \overline{z} \longmapsto \overline{z}' = \overline{f}(\overline{z}). \tag{1.23}$$

Les variables $z$ et $\overline{z}$ se découplent, et peuvent être traitées comme deux variables complexes indépendantes, la condition physique de réalité : $\overline{z} = z^*$, où $z^*$ désigne le complexe conjugué de $z$, pouvant être imposée à tout moment. Pour une transformation (1.23) infinitésimale :

$$z \longmapsto z' = z + \varepsilon(z), \qquad \overline{z} \longmapsto \overline{z}' = \overline{z} + \overline{\varepsilon}(\overline{z}), \tag{1.24}$$

où $\varepsilon(z)$ et $\overline{\varepsilon}(\overline{z})$ peuvent être prises infiniment petites dans un disque de rayon fixé. Nous pouvons les développer en série de Laurent autour de $z = 0$ :

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n z^{n+1}, \qquad \overline{\varepsilon}(\overline{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\varepsilon}_n \overline{z}^{n+1}, \tag{1.25}$$

et les générateurs correspondants sont de la forme :

$$\ell_n = -z^{n+1}\partial_z, \qquad \overline{\ell}_n = -\overline{z}^{n+1}\partial_{\overline{z}}. \tag{1.26}$$

Le nombre de générateurs des transformations conformes à 2d est donc infini ! Ces générateurs forment l'**algèbre de Witt**, dont les relations de commutation sont données par :

$$\begin{aligned} [\ell_n, \ell_m] &= (n-m)\,\ell_{n+m} \\ [\ell_n, \overline{\ell}_m] &= 0 \\ [\overline{\ell}_n, \overline{\ell}_m] &= (n-m)\,\overline{\ell}_{n+m} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Pour former un groupe, les transformations doivent être inversibles et définies en tout point de l'espace, auquel cas nous leur réservons le nom de transformations globales. L'ensemble des transformations globales forment le groupe conforme $SO(3,1)$ à deux dimensions, dont les générateurs sont : $\{\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1\} \cup \{\overline{\ell}_{-1}, \overline{\ell}_0, \overline{\ell}_1\}$. $\ell_{-1}$ et $\overline{\ell}_{-1}$ sont les générateurs des translations, $(\ell_0+\overline{\ell}_0)$ et $i(\ell_0+\overline{\ell}_0)$ sont respectivement les générateurs des dilatations et rotations ; $\ell_1$ et $\overline{\ell}_1$ les générateurs des transformations spéciales conformes. Les autres transformations conformes ne sont pas globales (mais locales), et ne forment pas un groupe : c'est pourquoi nous parlerons plus généralement d'algèbre conforme.

**Tenseur énergie-impulsion** Dans le plan complexe, les propriétés de symétrie et de trace nulle du tenseur énergie-impulsion impliquent $T^{z\overline{z}} = T^{\overline{z}z} = 0$. La conservation de ce tenseur s'écrit alors :

$$\partial_{\overline{z}} T^{zz} = 0, \qquad \partial_z T^{\overline{z}\overline{z}} = 0, \tag{1.28}$$

et nous introduisons :

$$T(z) = -2\pi T_{zz}, \qquad \overline{T}(\overline{z}) = -2\pi T_{\overline{z}\overline{z}}, \tag{1.29}$$

qui sont des fonctions respectivement holomorphe et anti-holomorphe du plan complexe.

**Identités de Ward** À deux dimensions, nous travaillons dans le plan complexe, ce qui nous permet d'utiliser la puissance du calcul analytique. Pour $X$ une collection de champs locaux : $X = \phi_1(w_1, \overline{w}_1)\ldots\phi_n(w_n, \overline{w}_n)$, les identités de Ward (1.11) provenant de l'invariance conforme – où le courant conservé est le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ – s'écrivent :

$$\langle \delta_{\varepsilon,\overline{\varepsilon}} X\rangle = \frac{1}{2i\pi}\oint_\Gamma dz\varepsilon(z)\langle T(z)X\rangle + \frac{1}{2i\pi}\oint_\Gamma d\overline{z}\overline{\varepsilon}(\overline{z})\langle \overline{T}(\overline{z})X\rangle \tag{1.30}$$

où le contour $\Gamma$ inclut toutes les positions $(w_i, \overline{w}_i)$ des champs contenus dans $X$, et où $T(z)$ est défini en (1.29). Pour donner une forme locale précise à (1.30), il nous faut soit connaître la variation des champs sous une transformation conforme (membre de gauche), soit pouvoir développer le membre de droite et calculer explicitement l'intégrale, ce qui nous amène à introduire l'expansion du produit des champs.

**Remarque 1** *Nous avons vu que les variables $z$ et $\overline{z}$ se découplent, nous permettant de traiter les deux parties séparemment. Par la suite, nous allons souvent ne traiter que de la partie holomorphe, la partie anti-holomorphe donnant lieu à des résultats parallèles.*

### 1.1.3 OPE des champs

#### Définition de l'OPE

L'expansion en produit d'opérateurs (OPE), introduite par Wilson, joue un rôle important en théorie quantique des champs. L'OPE de deux opérateurs locaux donne leur comportement à courte distance ($\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$) :

$$A_i(\boldsymbol{x})B_j(\boldsymbol{y}) \sim \sum_k C_{ij}^k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})O_k(\boldsymbol{y}), \tag{1.31}$$

où les $C_{ij}^k$ sont des coefficients numériques singuliers englobant les divergences pour $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$, et où les $O_k$ forment un ensemble complet d'opérateurs locaux. Cette propriété en TQC n'est normalement valable qu'asymptotiquement. Par contre, en théorie des champs conformes, elle devient une propriété exacte, car aucun paramètre de longueur $\ell$ n'apparaît dans l'expansion compte tenu de l'invariance d'échelle. Traduite en formalisme pour les champs conformes, nous pouvons alors écrire :

$$A_i(z)B_j(w) = \sum_{k=-\infty}^{N} \frac{C_{ij}^k}{(z-w)^k}O_k(w) = \sum_{k=1}^{N} \frac{C_{ij}^k}{(z-w)^k}O_k(w) + \textbf{ rég.} \tag{1.32}$$

où $N$ est un entier positif. Dans la deuxième équation, nous avons séparé la partie divergente pour $z \to w$ (terme de gauche) de la partie régulière (notée **rég.**), car seulement cette première va survivre à l'intégration dans les identités de Ward (1.30). La connaissance de l'OPE des champs présents dans le système est d'une grande utilité : elle nous permet de ramener le calcul des fonctions de corrélations à $N$ points graduellement à celui à 2 points. L'identité de Ward conforme nous permet d'expliciter l'OPE pour une certaine classe de champs dont nous connaissons la loi de transformation.

#### Champs primaires

Il existe des champs, appelés **champs primaires**, dont la loi de transformation sous une transformation conforme est donnée. Soit un champ $\phi$ de spin $s$ et de dimension d'échelle $\Delta$, sa dimension conforme $h$ (resp. $\overline{h}$) est définie par :

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s), \qquad \overline{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s). \tag{1.33}$$

**Définition 3** *Sous une transformation conforme $z \mapsto w(z)$, $\overline{z} \mapsto \overline{w}(\overline{z})$, un* **champ primaire** *est un champ qui se transforme comme une $(h, \overline{h})$-forme :*

$$\phi(z, \overline{z}) \longmapsto \phi'(w, \overline{w}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h} \left(\frac{d\overline{w}}{d\overline{z}}\right)^{-\overline{h}} \phi(z, \overline{z}). \tag{1.34}$$

En spécifiant pour une transformation infinitésimale $z \mapsto w = z + \varepsilon(z)$, la variation du champ primaire est donnée par :

$$\delta_\varepsilon \phi(w) = \phi'(w) - \phi(w) = -\varepsilon(w)\partial_w \phi(w) - h\left[\partial_w \varepsilon(w)\right]\phi(w). \tag{1.35}$$

Ceci nous permet de conclure, d'après l'identité de Ward conforme (1.30), que l'OPE d'un champ primaire avec le tenseur énergie-impulsion s'écrit :

$$T(z)\phi(w) = \left\{\frac{1}{z-w}\partial_w \phi(w) + \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w)\right\} + \textbf{rég.} \tag{1.36}$$

où **rég.** désignent des termes réguliers. En effet, nous pouvons vérifier qu'en mettant cette expression dans (1.30), nous retrouvons bien la variation infinitésimale du champ primaire donnée en (1.35). Connaissant la loi de transformation des champs primaires, l'invariance conforme, par (1.10), permet de fixer la forme des fonctions de corrélations à deux et trois points. Soient $\phi_i(z_i)$ des champs primaires, et $z_{ij} = z_i - z_j$, alors :

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(z)\phi_2(w)\rangle &= \frac{C_{12}}{(z-w)^{2h}}, \qquad h = h_1 = h_2, \\ \langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3)\rangle &= \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{13}^{h_1+h_3-h_2}}. \end{aligned}$$

Deux champs primaires ne sont corrélés que s'ils ont la même dimension conforme, et nous pouvons choisir de les normaliser de manière à avoir $C_{12} = \delta_{12}$. L'OPE de deux champs primaires peut alors s'écrire comme :

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \sum_k \frac{C_{ijk}}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k}}\phi_k(w) + \textbf{rég.} \tag{1.37}$$

où les coefficients $C_{ijk}$ sont les mêmes que ceux apparaissant dans la fonction à trois points.

### Tenseur d'énergie-impulsion

Il existe un autre champ de la théorie pour lequel les propriétés de transformation sont connues, c'est le tenseur énergie-impulsion :

**Définition 4** *Sous une transformation conforme finie $z \mapsto w(z)$, le tenseur énergie-impulsion se transforme comme :*

$$T'(w) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2}\left[T(z) - \frac{c}{12}\{w; z\}\right], \tag{1.38}$$

*où c est la charge centrale*[2] *et où nous avons introduit la dérivée Schwarzienne :*

$$\{w;z\} = \frac{(d^3w/dz^3)}{(dw/dz)} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2w/dz^2}{dw/dz}\right)^2. \tag{1.39}$$

Le tenseur énergie-impulsion se transforme donc comme un champ primaire de dimension conforme 2, à l'anomalie schwarzienne près, qui s'annule pour des transformations conformes globales. Donc, sous une transformation conforme globale, le tenseur énergie-impulsion se transforme exactement comme un champ primaire : les champs ayant cette propriété sont appelés **quasi-primaires**. En spécifiant pour une transformation infinitésimale $z \mapsto w = z + \varepsilon(z)$, la variation du tenseur énergie-impulsion est donnée par :

$$\delta_\varepsilon T(w) \doteq T'(w) - T(w) = -\frac{c}{12}\partial_w^3\varepsilon(w) - 2\partial_w\varepsilon(w)T(w) - \varepsilon(w)\partial_w T(w). \tag{1.40}$$

Ceci nous permet de conclure, d'après l'identité de Ward conforme (1.30), que l'OPE du tenseur énergie-impulsion avec lui-même s'écrit

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} + \textbf{rég.} \tag{1.41}$$

Nous pouvons à nouveau vérifier qu'en mettant cette expression dans (1.30), nous retrouvons bien la variation infinitésimale du tenseur énergie-impulsion donnée en (1.40).

### 1.1.4 Algèbre de Virasoro et représentations $\mathcal{V}_i$

#### Correspondance état-champ

Il est toujours utile en TQC d'avoir une vision duale entre champs et états. Dans ce but, introduisons la procédure de quantification radiale. À deux dimensions, nous devons faire une distinction entre l'espace et le temps : la théorie est initialement définie sur un cylindre infini de diamètre L. Le temps $t$ court selon l'axe infini du cylindre (t va de $-\infty$ à $+\infty$) et l'espace est compactifié : $x \in [0, L]$, c.à.d. $(0, t) \doteq (L, t)$. Le cylindre est alors paramétrisé par les coordonnées complexes $\xi = t + ix, \overline{\xi} = t - ix$, et le passage entre le cylindre et le plan complexe se fait à travers les applications suivantes :

$$z \to \exp\left(\frac{2\pi\xi}{L}\right), \qquad \xi \to \frac{L}{2\pi}\ln z. \tag{1.42}$$

Le passé lointain ($t \to -\infty$) sur le cylindre correspond à l'origine ($z = 0$) du plan, et le futur lointain correspond au point à l'infini sur le plan complexe (plus exactement sur la sphère de Riemann). Ceci nous permet de définir les états entrants et sortants :

$$|\phi_{\text{in}}\rangle \doteq \lim_{z,\overline{z}\to 0}\phi(z,\overline{z})|0\rangle, \qquad \langle\phi_{\text{out}}| \doteq |\phi_{\text{in}}\rangle^\dagger = \lim_{z,\overline{z}\to 0}\langle 0|\phi^\dagger(z,\overline{z}),$$

[2] L'interprétation physique de la charge centrale apparaît lorsque nous considérons des géométries restreintes, comme analogue à un effet Casimir, c.à.d. un déplacement fini de l'énergie libre.

où l'adjoint est défini par :

$$\phi^\dagger(z,\overline{z}) \doteq \overline{z}^{-2h} z^{-2\overline{h}} \phi(\frac{1}{\overline{z}}, \frac{1}{z}). \tag{1.43}$$

Un champ conforme $\phi(z,\overline{z})$ de dimension conforme $(h,\overline{h})$ peut être développé en modes (ce qui n'est rien d'autre que sa série de Laurent autour du point $z=0$) selon :

$$\begin{aligned} \phi(z,\overline{z}) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z^{m+h}} \frac{1}{\overline{z}^{n+\overline{h}}} \phi_{m,n}, \\ \text{où} \quad \phi_{m,n} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_0 dz z^{m+h-1} \frac{1}{2i\pi}\oint_0 d\overline{z}\overline{z}^{n+\overline{h}-1}\phi(z,\overline{z}), \qquad \phi^\dagger_{m,n} = \phi_{-m,-n}. \end{aligned}$$

### Algèbre de Virasoro

Le tenseur énergie-impulsion étant un champ quasi-primaire de dimension conforme 2, son développement en série de Laurent est donné par :

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \qquad \overline{T}(\overline{z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{L}_n}{\overline{z}^{n+2}}. \tag{1.44}$$

Les modes $L_n$ seront vus comme des opérateurs, agissant sur un espace de Hilbert. En inversant la relation, nous trouvons :

$$L_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_0 dz\ z^{n+1}T(z), \qquad \overline{L}_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_0 d\overline{z}\ \overline{z}^{n+1}\overline{T}(\overline{z}). \tag{1.45}$$

A partir de l'OPE du tenseur énergie-impulsion (1.41), nous pouvons en déduire que ces opérateurs vérifient les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, \overline{L}_m] &= 0 \\ [\overline{L}_n, \overline{L}_m] &= (n-m)\overline{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \end{aligned} \tag{1.46}$$

Elles définissent l'**algèbre de Virasoro**, qui constitue l'extension centrale [43] de l'algèbre de Witt définie en (1.27). Les opérateurs $L_n, \overline{L}_n$ sont les générateurs des transformations conformes, agissant sur un espace de Hilbert.

### Espace de Hilbert et représentations de Virasoro

L'Hamiltonien est proportionnel au générateur de translation temporelle sur le cylindre : $H \sim L^{\text{cyl}}_{-1} + \overline{L}^{\text{cyl}}_{-1}$. En passant vers le plan complexe, les opérateurs de translation deviennent des opérateurs de dilatation. Sur le plan complexe, nous avons donc : $H \sim L_0 + \overline{L}_0$. Nous considérons alors les représentations de Virasoro construites à partir de l'état de plus haut poids $|h_i\rangle$ – c'est l'**état primaire** engendré par le champ primaire $\phi_i(z)$ de dimension conforme $h_i$ – caractérisé par :

$$L_0|h_i\rangle = h_i|h_i\rangle, \qquad L_n|h_i\rangle = 0, \qquad \forall n > 0. \tag{1.47}$$

Cet état est vecteur propre de l'Hamiltonien du système. Les autres états de la représentation (les états excités, appelés états secondaires), sont construits par application successive des générateurs $L_{-k}, k > 0$ :

$$L_{-k_1} L_{-k_2} \cdots L_{-k_n} |h_i\rangle, \qquad (k_1 < k_2 \cdots < k_n), \tag{1.48}$$

et sont vecteurs propres de $L_0$, de valeur propre $h_i + N$, où $N = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ est le niveau de l'état. Les champs correspondants aux états secondaires sont appelés champs secondaires. Par exemple, à l'état $L_{-n}|h_i\rangle$ correspond le champ secondaire $\phi_i^{(-n)}$ :

$$L_{-n}|h_i\rangle \longrightarrow \phi_i^{(-n)}(w) \doteq \frac{1}{2i\pi} \oint dz \frac{1}{(z-w)^{n-1}} T(z)\phi_i(w). \tag{1.49}$$

À un état primaire $|h_i\rangle$ correspond une infinité d'états secondaires de la forme (1.48) : ils forment ensemble une famille conforme, notée $[\phi_{h_i}]$. Les opérateurs $L_n$ sont les générateurs des transformations conformes. Sous une transformation conforme, l'état $|h_i\rangle$ et ses descendants se transforment donc entre-eux : ils forment une représentation de l'algèbre de Virasoro, appelée **module de Verma**, et notée $V(c, h_i)$ ou plus simplement $\mathcal{V}_i$. Nous avons parallèlement le module de Verma associé à la partie anti-holomorphe $\overline{V}(c, \overline{h}_i)$. L'espace de Hilbert est alors défini par :

$$\mathcal{H} = \sum_{i,\bar{i}} \mathcal{V}_i \otimes \overline{\mathcal{V}}_{\bar{i}} = \sum_{h_i, \overline{h}_i} V(c, h_i) \otimes \overline{V}(c, \overline{h}_i) \tag{1.50}$$

*A priori*, nous n'avons aucune indication sur le nombre de termes apparaissant dans la somme, ce nombre pouvant être infini.

### Fonctions de corrélations

Il existe deux classes de champs dans une théorie conforme :

- les champs primaires $\phi(w)$ de dimension conforme $(h, \overline{h})$ ;
- les champs secondaires : à chaque champ primaire $\phi(w)$ correspond une infinité de champs secondaires $\phi^{(-k_1,\ldots,-k_n)}(w)$.

Soit $X$ une collection de champs primaires : $X = \phi_2(w_2) \ldots \phi_n(w_n)$, de dimensions conformes $h_i$ $(i = 2, \ldots, n)$, et $\phi^{(-n)}(w)$ un champ secondaire. La fonction de corrélation entre $\phi^{(-n)}(w)$ et $X$ est donnée par :

$$\langle \phi^{(-n)} X \rangle = \mathcal{L}_{-n} \langle \phi(w) X \rangle, \tag{1.51}$$

où $\mathcal{L}_{-n}$ est un opérateur différentiel défini par :

$$\mathcal{L}_{-n} = \sum_i \left\{ \frac{(n-1)h_i}{(w_i - w)^n} - \frac{1}{(w_i - w)^{n-1}} \partial_{w_i} \right\}. \tag{1.52}$$

Pour un champ secondaire plus général, de la forme $\phi^{(-k_1,-k_2,\ldots,-k_n)}$, nous obtenons de la même manière :

$$\langle \phi^{(-k_1,-k_2,\ldots,-k_n)} X \rangle = \mathcal{L}_{-k_1} \ldots \mathcal{L}_{-k_n} \langle \phi(w) X \rangle. \tag{1.53}$$

Le calcul de fonctions de corrélations contenant des champs secondaires se réduit donc à celui contenant seulement des champs primaires, sur lequel nous ferons agir un opérateur différentiel bien défini. Nous sommes donc ramenés au seul calcul des fonctions de corrélations entre champs primaires. Si nous connaissons l'OPE des champs primaires, elles nous permettent de passer graduellement du calcul des fonctions à $N$ points à celui des fonctions à deux points, qui sont explicitement fixées par l'invariance conforme. Nous avons vu que l'OPE de deux champs primaires est donnée par :

$$\phi_i(z,\overline{z})\phi_j(w,\overline{w}) = \sum_k \frac{C_{ijk}}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k}(\overline{z}-\overline{w})^{\overline{h}_i+\overline{h}_j-\overline{h}_k}}\phi_k(w,\overline{w}), \tag{1.54}$$

où les $\phi_k(w,\overline{w})$ sont des champs primaires ou secondaires. Nous pouvons regrouper dans le membre de droite tous les champs secondaires appartenant à la famille conforme $[\phi_p]$ ensemble et diviser la sommation selon :

$$\phi_i(z,\overline{z})\phi_j(w,\overline{w}) = \sum_p \sum_{\{k,\overline{k}\}} C_{ijp}^{\{k\overline{k}\}} \frac{1}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k-\sum_l k_l}} \frac{1}{(\overline{z}-\overline{w})^{\overline{h}_i+\overline{h}_j-\overline{h}_k-\sum_l \overline{k}_l}} \phi_p^{\{k,\overline{k}\}}(w,\overline{w}),$$

où tous les champs descendants du champ primaire $\phi_p$ sont notés $\phi_p^{\{k,\overline{k}\}}$. En utilisant l'équation (1.53), il est possible de montrer que :

$$C_{ijk}^{\{k,\overline{k}\}} = \sum_p C_{ijp}\beta_{ij}^{p\{k\}}\overline{\beta}_{ij}^{p\{\overline{k}\}}, \tag{1.55}$$

où les $C_{ijp}$ sont les coefficients de l'OPE entre champs primaires seulement, et les $\beta_{ij}^{p\{k\}}$, $\overline{\beta}_{ij}^{p\{\overline{k}\}}$ sont des fonctions des quatre paramètres $h_i, h_j, h_p$ et $c$, entièrement fixées par l'invariance conforme. Le calcul des fonctions de corrélation entre les champs du système est donc ramené à la connaissance des coefficients $C_{ijk}$. Nous sommes donc amené à la :

**Conclusion 1** *Toute l'information nécessaire pour complètement spécifier une théorie conforme à deux dimensions est la donnée de la charge centrale $c$, des dimensions conformes $(h_i, \overline{h}_i)$ des champs primaires et des coefficients $C_{ijk}$ provenant de l'OPE de ces champs primaires. Avec ces données, il est possible de calculer toutes les fonctions de corrélations du système, et par conséquent, d'obtenir un système soluble !*

Cependant, l'invariance conforme à elle-seule ne fixe pas les coefficients $C_{ijk}$, il nous faut des informations supplémentaires externes. Nous verrons par la suite certaines contraintes permettant de compléter la théorie, ouvrant ainsi la voie vers les classifications des théories conformes.

## 1.2 Théories conformes rationelles : RCFT

### 1.2.1 Algèbre de fusion

Nous voulons maintenant transcrire les résultats obtenus jusqu'à maintenant sous forme algébrique. L'OPE de deux champs quelconques d'une famille conforme est obtenu à par-

tir de celle des champs primaires correspondants. En considérant l'OPE entre deux champs primaires, l'information importante est de savoir quelles familles conformes ils vont créer, à travers les coefficients $C_{ijk}$. Ceci nous permet d'écrire les règles suivantes :

$$[\phi_{h_i}] \times [\phi_{h_j}] = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k \, [\phi_{h_k}]. \tag{1.56}$$

L'interprétation est la suivante : le membre de gauche représente l'OPE entre un champ conforme de la famille $[\phi_{h_i}]$ et un champ conforme de la famille $[\phi_{h_j}]$, le membre de droite indiquant quelles familles conformes $[\phi_{h_k}]$ vont apparaître dans cette OPE. Les nombres $\mathcal{N}_{ij}^k$ sont donc des entiers non-négatifs, reliés aux coefficients $C_{ijk}$. Les champs primaires $\phi_{h_i}(z)$ sont en correspondance avec les états de plus haut poids $|h_i\rangle$ de la représentation $\mathcal{V}_i$ de Virasoro. L'équation (1.56) peut donc s'écrire comme la fusion des représentations :

$$\mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k \, \mathcal{V}_k \, . \tag{1.57}$$

**Définition 5** *L'***algèbre de fusion** *est une algèbre commutative, associative, de générateurs $\mathcal{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, ($n$ est un entier ou $+\infty$), possédant une identité $\mathcal{V}_1 = \mathbb{1}$ (la représentation identité), et un produit noté $\times$, dont les règles de multiplication sont données par (1.57).*

Définissons les matrices $N_i$, appelées matrices de fusion, ayant comme éléments :

$$(N_i)_{jk} = \mathcal{N}_{ij}^k. \tag{1.58}$$

Alors l'existence de l'identité implique $N_1 = \mathbb{1}$, et la propriété d'associativité de l'algèbre de fusion implique la commutativité des matrices $N_i$ : $N_i N_j = N_j N_i$. L'associativité peut aussi s'écrire comme :

$$N_i N_j = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k N_k. \tag{1.59}$$

Les matrices $N_i$ forment donc une représentation fidèle de l'algèbre de fusion. L'information sur les coefficients $C_{ijk}$ est donc ramenée à la connaissance de l'algèbre de fusion – ou de manière équivalente à la connaissance des matrices de fusion $N_i$ – qui à ce stade reste toutefois à déterminer.

### 1.2.2 Unitarité et irréductibilité de $\mathcal{V}_i$

La base de la représentation $\mathcal{V}_i$ est formée par l'état de plus haut poids $|h_i\rangle$ et tous ses états descendants (1.48). La norme de l'état $L_{-k_1} \cdots L_{-k_n}|h\rangle$ est définie par :

$$\langle h| L_{k_n} \cdots L_{k_1} L_{-k_1} \cdots L_{-k_n} |h\rangle. \tag{1.60}$$

### Unitarité

Une représentation $\mathcal{V}_i$ est dite **unitaire** si elle ne possède pas d'états de norme négative : comme la norme dépend de la dimension conforme $h$ et de la charge centrale $c$ (à travers les relations de commutation de l'algèbre), l'unitarité impose donc des contraintes sur ces valeurs. L'étude de la norme des états des représentation $\mathcal{V}_i$ a été effectuée dans [50] et [40] : il existe un vecteur de norme nulle au niveau $\ell = rs$ ($r$ et $s$ entiers) lorsque la dimension conforme de la représentation est donnée par la **formule de Kac** :

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \qquad h_{r,s}(m) = \frac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)}, \qquad m \in \mathbb{C}. \tag{1.61}$$

La présence d'un vecteur de norme nulle permet de délimiter les zones $(c, h)$ d'existence de vecteurs de norme négatives (non-unitarité). Les représentations de Virasoro sont non-unitaires pour $c < 0$ et pour $h < 0$. Pour $h \geq 0$, elles sont unitaires si $c \geq 1$. Si $0 < c < 1$, elles sont unitaires pour les valeurs de la formule de Kac avec les contraintes supplémentaires suivantes (spectre fini) :

$$m \text{ entier } > 2, \qquad 1 \leq r < m, \qquad 1 \leq s \leq r. \tag{1.62}$$

### Vecteurs singuliers et irréductibilité

Lorsque $h = h_{r,s}$, il existe donc un état $|\chi\rangle$ au niveau $\ell = rs$ dont la norme est nulle, appelé **état singulier**. Cet état satisfait les propriétés (1.47) d'un état de plus haut poids. Les états descendants de $|\chi\rangle$ – aussi de norme nulle – forment un module de Verma noté $\mathcal{V}_\chi$. L'espace de la représentation $\mathcal{V}_{h_{r,s}}$ contient un sous-espace $\mathcal{V}_\chi$ qui est lui-même une représentation de Virasoro : il est donc **réductible**. Nous contruisons des représentations irréductibles en quotientant par les sous-modules $\mathcal{V}_\chi$ (ce qui équivaut à identifier les états qui ne diffèrent que par un état de norme nulle). À l'état singulier $|\chi\rangle$ est associé le champ $\chi(z)$, qui est un champ descendant du champ primaire $\phi(z)$, mais qui est lui-même un champ primaire. Le fait que l'état $|\chi\rangle$ soit de norme nulle (donc orthogonal au module de Verma) se traduit en langage des champs à l'annulation des fonctions de corrélation $\langle \chi(z) X \rangle$, où $X$ est une collection de champs : le champ $\chi(z)$ se *découple* des autres champs. Ceci a comme conséquence une équation diférentielle (1.53) pour les fonctions de corrélations $\langle \phi(z) X \rangle$, donnant des contraintes sur l'OPE des champs, se traduisant par une troncation de l'algèbre de fusion :

$$\mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j = \sum_k{}' \, \mathcal{N}_{ij}^k \, \mathcal{V}_k. \tag{1.63}$$

Cependant, pour une valeur arbitraire de $c$, le nombre de champs primaires de la théorie peut être infini, et il faut d'autres contraintes pour "fermer" l'algèbre de fusion.

Les théories conformes pour lesquelles le nombre de champs primaires est fini sont appelées rationnelles (RCFT). Ce sont des théories où intervient un nombre fini de représentations $\mathcal{V}_i$ pour lesquelles l'algèbre de fusion est fermée. L'exemple type de RCFT est fourni par les modèles minimaux.

### 1.2.3 Modèles minimaux

Pour $p, p'$ deux entiers premiers entre-eux tels que $m = p'/(p - p')$, la formule de Kac s'écrit :

$$c = 1 - 6\frac{(p-p')^2}{pp'}, \qquad h_{r,s} = \frac{(pr - p's)^2 - (p-p')^2}{4pp'}, \tag{1.64}$$

et les dimensions conformes sont alors périodiques $h_{r,s} = h_{r+p',s+p}$. Nous avons notamment :

$$h_{r,s} = h_{p'-r,p-s}, \tag{1.65}$$

ce qui implique l'existence d'un autre vecteur singulier $|\chi'\rangle$ au niveau $(p' - r)(p - s)$. Les dimensions conformes de ces deux états singuliers sont égaux à :

$$h_\chi = h_{r,s} + rs, \qquad h_{\chi'} = h_{r,s} + (p' - r)(p - s), \tag{1.66}$$

et sont donc aussi données par la formule de Kac (elles s'écrivent de la forme $h_{r',s'}$) ! Ces deux états singuliers engendrent donc des sous-modules de Verma $\mathcal{V}_\chi$ et $\mathcal{V}_{\chi'}$ réductibles, contenant à leur tour des états singuliers engendrant des sous-modules réductibles, et ainsi de suite. Il existe donc une infinité d'états singuliers dans une représentation $\mathcal{V}_i$ avec les valeurs (1.64). Chaque état singulier conduit à une équation différentielle agissant comme une contrainte sur les fonctions de corrélation des champs primaires, et donc sur leur OPE. L'effet global est une nouvelle troncation de l'algèbre de fusion, qui a comme conséquence que seulement un nombre *fini* de représentations $\mathcal{V}_i$ sont à considérer : ce sont les modèles appelés **minimaux**. Les modèles minimaux sont unitaires pour $p' = p + 1$ (ou $p' = p - 1$) et sont notés $\mathcal{M}(p', p)$. Le premier modèle minimal unitaire non-trivial correspond au cas $p = 3$ : il a été identifié comme décrivant le modèle critique d'Ising [5]. Nous avons les suivantes identifications pour les premiers éléments de la série unitaire :

- $\mathcal{M}(4,3)$ : modèle critique d'Ising $c = 1/2$
- $\mathcal{M}(5,4)$ : modèle tri-critique d'Ising $c = 7/10$
- $\mathcal{M}(6,5)$ : modèle de Potts à trois états $c = 4/5$
- $\mathcal{M}(7,6)$ : modèle tri-critique de Potts à trois états $c = 6/7$

### 1.2.4 Modèles $\widehat{g}$-WZWN

Une situation fréquente en théorie des champs conformes est qu'il existe une algèbre "étendue" $\mathcal{A}$ agissant sur les champs de la théorie (algèbre de Kac-Moody, supersymétrie, algèbre $\mathcal{W}$, ...), telle que Virasoro soit une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ ou de l'algèbre enveloppante de $\mathcal{A}$. Nous nous intéressons plus particulièrement aux théories conformes où l'algèbre étendue est une algèbre affine $\widehat{g}$ : ce sont des modèles particuliers (appelés WZWN[3]) en ce sens qu'ils

[3]Ils ont été introduits par Wess et Zumino, puis complétés par Witten et Novikov, et sont connus dans la littérature sous le nom de modèles WZWN.

peuvent être formulés directement en terme d'une action[4]. Pour ces modèles, les courants additionnels conservés $J^a(z)$ possèdent une OPE de la forme :

$$J^a(z)\,J^b(w) = \frac{\mathbf{k}\delta_{ab}}{(z-w)} + \sum_c i\, f_{abc}\frac{J^c(w)}{(z-w)} + \textbf{rég.} \tag{1.67}$$

et les modes de $J^a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J^a_n z^{-n-1}$ satisfont les relations de commutation d'une algèbre affine :

$$[J^a_n J^b_m,] = \sum_c i\; f_{abc} J^c_{n+m} + \mathbf{k}\; n\; \delta_{ab}\; \delta_{n+m,0}, \tag{1.68}$$

où $\mathbf{k}$ est un élément central. Les représentations des algèbres affines $\widehat{g}$ sont de nos jours bien connues [51, 42]. Une généralisation de la notion de représentations irréductibles d'une algèbre de Lie simple $g$ est fournie par la notion de représentations **intégrables**. Elles sont labellées par $(\lambda, k)$, où $\lambda$ est le plus haut poids et $k$ le niveau, et il existe un nombre fini de telles représentations à chaque niveau $k$. La dimension conforme et la charge centrale des modèles $\widehat{g}_k$ sont données par :

$$h_\lambda = \frac{(\lambda, \lambda+2\rho)}{2(k+\kappa)}, \qquad\qquad c = \frac{k\dim(g)}{k+\kappa}, \tag{1.69}$$

où $\rho$ est le vecteur de Weyl, et $\kappa$ le nombre (dual) de Coxeter de $g$. Les champs primaires sont en correspondance avec les plus haut poids $\lambda$ des représentations intégrables : comme il existe un nombre fini de telles représentations à chaque niveau $k$, il existe donc un nombre fini de champs primaires. Les modèles WZWN fournissent donc un autre exemple de RCFT. De plus, les représentations intégrables étant unitaires, ces modèles le sont aussi.

Les modèles avec algèbre affine fournissent des exemples non-triviaux de modèles quantiques à $2d$ exactement solubles, et jouent un rôle prédominant dans la classification des théories conformes à 2d. Nous verrons par exemple que la classification des modèles minimaux est reliée, à travers une construction de *coset*, à la classification des modèles $\widehat{su}(2)$.

### 1.2.5 Propriétés modulaires des caractères $\chi_i$ et formule de Verlinde

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre décrivant la symétrie d'une théorie conforme rationelle, et $\mathcal{V}_i$ une représentation de $\mathcal{A}$, pour $i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ étant un ensemble fini. Les représentations $\mathcal{V}_i$ sont graduées par l'action du générateur $L_0$ de Virasoro[5]. Le spectre de $L_0$ dans $\mathcal{V}_i$ est de la forme $\{h_i, h_i+1, h_i+2, \cdots\}$, et nous appelons $\#_n$ le nombre d'états linéairement indépendants au niveau $n$ (donc de valeur propre $h+n$). Nous introduisons le caractère $\chi_i$ de la représentation $\mathcal{V}_i$ comme la fonction génératrice des multiplicités $\#_n$, dépendant d'une variable complexe $\tau$ :

[4]Ce sont des modèles construits à partir d'une action du type modèle $\sigma$ non-linéaire, avec l'addition d'un terme de Wess-Zumino.

[5]C'est le cas même si $\mathcal{A} \neq Vir$, car les générateurs de Virasoro s'expriment, à travers la construction de Sugawara, en fonction des courants $J$ de $\mathcal{A}$.

$$\chi_i(\tau) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}_i}\, q^{L_0 - \frac{c}{24}} = \sum_{n=0}^{\infty} \#_n\, q^{n+h-\frac{c}{24}}, \qquad (q \doteq e^{2i\pi\tau}). \tag{1.70}$$

Les caractères de Virasoro par exemple sont donnés par :

$$\chi_{(c,h)}(\tau) = (q^{h-\frac{c}{24}})(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}). \tag{1.71}$$

L'expression des caractères des modèles minimaux est plus compliquée que (1.71), car il faut tenir compte de toutes les soustractions des sous-modules : ils sont explicités par exemple dans [33]. Les caractères (1.70) pour les algèbres affines $\widehat{g}$ (appelés spécialisés car ils comptent les états en fonction de la valeur propre de $L_0$ seulement) se trouvent aussi dans [33].

### Propriétés modulaires

Une propriété remarquable des caractères (de Virasoro, des modèles minimaux ou des algèbres affines) est qu'ils satisfont de belles propriétés de transformation sous l'action du groupe modulaire. Le groupe modulaire $SL(2,\mathbb{Z})$ sur une variable $\tau$ est défini par :

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}), \qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \qquad ad - bc = 1, \tag{1.72}$$

et est engendré par les deux transformations :

$$T : \tau \longmapsto \tau + 1, \qquad S : \tau \longmapsto -\frac{1}{\tau}, \tag{1.73}$$

satisfaisant les relations $(ST)^3 = S^2 = 1$. Les caractères $\chi_i$ d'une représentation de l'algèbre $\mathcal{A}$ d'une RCFT forment une représentation fini-dimensionelle et unitaire du groupe modulaire : ils se transforment entre-eux sous l'action de (1.72). Il existe donc deux matrices $S_{ij}$ et $T_{ij}$ telles que :

$$\chi_i(\tau) \mapsto \chi_i(\tau+1) = \sum_{j\in\mathcal{I}} T_{ij}\, \chi_j(\tau), \qquad \chi_i(\tau) \mapsto \chi_i(-\frac{1}{\tau}) = \sum_{j\in\mathcal{I}} S_{ij}\, \chi_j(\tau). \tag{1.74}$$

Il est clair d'après la définition (1.70) que sous l'action de $T$ :

$$\chi_i(\tau) \mapsto \chi_i(\tau+1) = e^{2i\pi(h_i - \frac{c}{24})}\, \chi_i(\tau), \tag{1.75}$$

et la matrice $T_{ij}$ est donc une matrice diagonale ($T_{ij} = e^{2i\pi(h_i-\frac{c}{24})}\delta_{ij}$). L'expression de la matrice $S$ pour une algèbre affine générale se trouve dans [51].

**Formule de Verlinde**

La correspondance entre champs primaires et états de plus haut poids de $\mathcal{V}_i$ permet de coder l'OPE de ces champs dans l'algèbre de fusion des représentations (voir l'équation (1.57)). E. Verlinde a montré qu'il existe un lien étroit entre les coeficients de fusion $\mathcal{N}_{ij}^k$ et la matrice $S_{ij}$ des transformations modulaires des caractères de l'algèbre, donné par la **formule de Verlinde** [88]

$$\mathcal{N}_{ij}^k = \sum_{\ell \in \mathcal{I}} \frac{S_{i\ell} S_{j\ell} S_{k\ell}^*}{S_{1\ell}}. \tag{1.76}$$

Cette relation est hautement non triviale, car elle relie les coefficients de fusion $\mathcal{N}_{ij}^k$, qui sont des entiers non-négatifs, aux coefficients de la matrice $S$, qui sont des réels ! Connaissant les propriétés de transformation des caractères, nous pouvons donc en déduire les règles de fusion ; ou réciproquement, la connaissance des règles de fusion nous donne des informations sur la matrice $S$.

## 1.3 Invariance modulaire, conditions aux bord et lignes de défaut

Nous avons jusqu'à présent utilisé implicitement le découplage de la théorie en partie holomorphe et anti-holomorphe. Les données nécesaires pour totalement spécifier une théorie conforme rationelle sont : l'algèbre $\mathcal{A}$, ses représentations de plus haut poids $\mathcal{V}_i$ en nombre fini (ce qui fixe la charge centrale $c$ et les dimensions conformes des champs primaires $\phi_{h_i}$), ses caractères $\chi_i$ et la matrice $S_{ij}$ des transformations modulaires des caractères – ou de manière équivalente les coefficients de fusion $\mathcal{N}_{ij}^k$ des représentations, obtenus à travers la formule de Verlinde. L'espace de Hilbert du système s'écrit :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i,j} \mathcal{M}_{ij}\, \mathcal{V}_i \otimes \overline{\mathcal{V}}_j, \qquad \mathcal{M}_{ij} \in \mathbb{N}, \tag{1.77}$$

où la sommation s'étend *a priori* sur toutes les dimensions conformes $h_i$, $\overline{h}_j$ du système. Cependant, toute combinaison gauche/droite de représentations $\mathcal{V}_i$ n'est pas nécessairement physiquement réaliste. Il s'avère que l'étude des théories conformes sur des variétés de genre plus élevé (comme le tore) nous fournit de précieux renseignements [13, 49].

### 1.3.1 Modèles définis sur le tore

Un tore est obtenu en spécifiant deux vecteurs sur le plan – ou deux nombres complexes $w_1, w_2$ (périodes) sur le plan complexe – définissant ainsi un réseau, et en identifiant les points qui diffèrent par une combinaison linéaire entière de ces vecteurs. Une théorie conforme définie sur le tore ne doit pas dépendre de la base choisie sur le réseau pour définir le tore : elle ne

dépendra que du paramètre $\tau = w_2/w_1$, appelé **paramètre modulaire**, et nous pouvons toujours choisir comme périodes 1 et $\tau$.

Une théorie à $2d$ est définie sur un cylindre de diamètre $a$, où le temps court selon l'axe du cylindre et l'espace est compactifié : $x = x + a$, l'application du cylindre (paramétrise par $\xi$) vers le plan étant $z = \exp(\frac{2i\pi\xi}{a})$. L'hamiltonien correspond à la translation temporelle sur le cylindre, et est donc proportionnel au générateur de translation $(L_{-1} + \overline{L}_{-1})$. Par la loi de transformation (1.38) du tenseur énergie-impulsion, l'opérateur de translation $(L_{-1})$ devient un opérateur de dilatation $(L_0)$ sur le plan :

$$L_{-1}^{\text{cyl}} = -\frac{2i\pi}{a}\left(L_0 - \frac{c}{24}\right), \tag{1.78}$$

où le coefficient $c/24$ provient de la dérivée Schwartzienne de l'exponentielle. L'opérateur d'évolution du système (l'exponentielle de l'hamiltonien) est alors donné par :

$$\mathcal{T} \doteq e^{-Ha} = e^{2i\pi(\tau(L_0 - \frac{c}{24}) - \overline{\tau}(\overline{L}_0 - \frac{c}{24}))}. \tag{1.79}$$

La fonction de partition est donnée par la trace de l'opérateur d'évolution $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{Z}(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}}\, \mathcal{T} = \text{Tr}_{\mathcal{H}}\, q^{(L_0 - \frac{c}{24})}\, \overline{q}^{(\overline{L}_0 - \frac{c}{24})}, \qquad q \doteq e^{2i\pi\tau}. \tag{1.80}$$

En utilisant la décomposition (1.77) de l'espace de Hilbert et l'expression (1.70) des caractères $\chi_i$ de $\mathcal{V}_i$, nous obtenons alors :

$$\boxed{\mathcal{Z}(\tau) = \sum_{i,j} \mathcal{M}_{ij}\, \chi_i(\tau)\, \overline{\chi}_j(\tau)} \tag{1.81}$$

### 1.3.2 Fonctions de partition invariante modulaire

Physiquement, la fonction de partition d'une théorie conforme définie sur le tore ne peut dépendre que du paramètre modulaire $\tau = w_2/w_1$, mais il reste toutefois une redondance. En effet, considérons des périodes $w_1', w_2'$ qui soient des combinaisons linéaires entières de $w_1$ et $w_2$ (et donc appartenant au même réseau) :

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \qquad ad - bc = 1. \tag{1.82}$$

Par invariance conforme, ces nouvelles périodes définissent le même réseau, et la fonction de partition doit donc être invariante sous ces transformations. Le groupe engendré par les transformations (1.82) est le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$, et sous (1.82) le paramètre modulaire devient :

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \tag{1.83}$$

Ce groupe est engendré par les deux transformations $S$ et $T$, la fonction de partition doit donc satisfaire[6] :

$$T : \mathcal{Z}(\tau+1) = \mathcal{Z}(\tau), \qquad S : \mathcal{Z}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \mathcal{Z}(\tau). \tag{1.84}$$

Utilisant l'expression (1.81) de $\mathcal{Z}$, les propriétés de transformations (1.74) des caractères $\chi_i$ et l'unitarité des matrices $S$ et $T$, le problème de classification des fonctions de partition invariantes modulaires se réduit donc à la :

**Classification 1** *Trouver toutes les $n \times n$ matrices $\mathcal{M}$, telles que :*

- $\mathcal{M}_{ij} \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{M}_{11} = 1$
- *$\mathcal{M}$ commute avec $S$ et $T$ : $S\mathcal{M} = \mathcal{M}S$, $T\mathcal{M} = \mathcal{M}T$*

La deuxième condition impose l'unicité du vide ($\mathcal{V}_1$ est la représentation identité) ; la troisième condition exprime sous forme matricielle l'invariance modulaire (1.84) de $\mathcal{Z}$. Une telle matrice $\mathcal{M}$ est appelée l'**invariant modulaire**, et la fonction de partition invariante modulaire s'obtient par (1.81). Notons que des solutions évidentes de ce problème sont données par les matrices $\mathcal{M} = \mathbb{1}_{n\times n}$. Ce sont les théories appelées diagonales.

La classification des fonctions de partition invariantes modulaires a été obtenue pour les modèles minimaux et les modèles $\widehat{su}(2)$ dans [10, 11], celle des modèles $\widehat{su}(3)$ dans [44]. Nous verrons qu'à ces classifications sont naturellement associés des graphes (diagrammes de Dynkin de type $ADE$ pour $\widehat{su}(2)$, diagrammes de Di Francesco - Zuber pour $\widehat{su}(3)$). Ces liens avec des graphes deviennent plus explicites lorsque nous considérons des théories conformes avec conditions au bord (BCFT).

### 1.3.3 Conditions au bord

Une théorie conforme définie sur une variété sans bord possède comme symétrie deux algèbres $\mathcal{A}$ et $\overline{\mathcal{A}}$, agissant respectivement (et séparemment) sur la dépendence holomorphe ($z$) et anti-holomorphe ($\overline{z}$) des champs de la théorie. Il s'avère toutefois nécessaire en physique d'étudier des théories définies sur des variétés à bord et ses possibles conditions au bord (réseau fini en physique statistique, théorie des cordes, ...). L'étude des systèmes conformes définis sur une variété à bord a été initiée par J. Cardy [12, 14], dont l'exemple type est le semi-plan infini $Im(z) > 0$, à partir duquel par application conforme nous pouvons obtenir d'autres exemples de géométries. Des conditions sur le bord formé par l'axe réel sont imposées, que nous labellons de manière générale par $a$ et $b$ sur les domaines $Re(z) > 0$ et $Re(z) < 0$. Sur une bande infinie de largeur $L$, celà correspond à des conditions sur les bords $x = 0$ et $x = L$.

[6] $\tau$ n'est pas affecté par un changement de signe global des paramètres $a, b, c, d$ dans (1.83) : la symétrie réelle de la fonction de partition est donc $PSL(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$.

Les transformations conformes doivent préserver les conditions aux bords, les générateurs de ces transformations ne sont donc plus indépendants sur le bord :

$$T(z) = \overline{T}(\overline{z})|_{\text{axe réel}}, \tag{1.85}$$

qui exprime l'absence de flux d'énergie à travers le bord. Par conséquent, il n'y a plus deux algèbres mais **une seule copie** de l'algèbre agissant sur les champs, et l'espace de Hilbert se décompose comme :

$$\mathcal{H}_{ab} = \bigoplus_i \mathcal{F}^i_{ab}\, \mathcal{V}_i. \tag{1.86}$$

où les coefficients $\mathcal{F}^i_{ab}$ sont des nombres entiers non-négatifs décrivant la multiplicité de la représentation $\mathcal{V}_i$ pour un système avec des conditions aux bords labellées par $a$ et $b$. Ces conditions aux bords sont réalisées par des opérateurs de bord $\phi_a, \phi_b$, ou par des états de bord $|a\rangle, |b\rangle$, dont une base complète est donnée par les $r$ états de Ishibashi $|j\rangle\rangle$. Les coefficients $\mathcal{F}^i_{ab}$ doivent satisfaire des conditions de compatibilité à travers l'équation de Cardy [15], qui impliquent que les $r \times r$ matrices $F_i$ ($(F_i)_{ab} = \mathcal{F}^i_{ab}$) doivent satisfaire l'algèbre de fusion [4] :

$$F_i\, F_j = \sum_k \mathcal{N}^k_{ij}\, F_k. \tag{1.87}$$

L'unicité du vide impose $F_1 = \mathbb{1}_{r\times r}$, et de manière générale il est seulement nécessaire de spécifier un sous-ensemble de ces matrices qui engendre les autres par fusion, à travers (1.87).

**Classification 2** *La classification des conditions aux bords $(a, b)$ compatibles avec l'invariance conforme se ramène donc à la classification des matrices $F_i$ de dimension $r$ à entrées dans $\mathbb{N}$ satisfaisant l'algèbre de fusion (1.87).*

Or, comme les matrices à entrées dans $\mathbb{N}$ sont associées à des matrices d'adjacence de graphes, nous voyons que les graphes aparaissent naturellement dans l'étude des systèmes conformes avec conditions au bord ! Nous verrons que pour les théories $\widehat{su}(2)$, les graphes associés sont les diagrammes de Dynkin du type $ADE$.

### 1.3.4 Lignes de défauts et fonctions de partition généralisées

La fonction de partition d'une théorie conforme définie sur le tore s'obtient par la trace de l'opérateur d'évolution $\mathcal{T}$ défini en (1.79). Dans [77], une situation plus générale est considérée où est insérée l'action d'un opérateur $X$ dans la trace de $\mathcal{T}$. Ceci est interprété comme l'introduction d'une ligne de défaut $x$ dans le système, le long d'un contour non-contractible du cylindre, avant de le fermer en un tore, et dont l'effet est de *twister* les conditions aux bords. L'opérateur $X$ (appelé opérateur de *twist*), n'est pas arbitraire : il doit être invariant sous une distorsion de la ligne à laquelle il est attaché, et par conséquent doit commuter avec les générateurs de Virasoro :

$$[L_n, X] = [\overline{L}_n, X] = 0. \tag{1.88}$$

Deux classes d'opérateurs $X$ et $Y$ peuvent être considérées (correspondant aux deux contours non-contractibles du tore), et les fonctions de partition du modèle – appelées **généralisées** ou *twistées* – sont données par $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\, X\, Y\, \mathcal{T}$ :

$$\boxed{\mathcal{Z}_{x|y}(\tau) = \sum_{i,j} \chi_i(\tau)\, \mathcal{W}^{ij}_{xy}\, \overline{\chi}_j(\tau)} \tag{1.89}$$

où les coefficients $\mathcal{W}^{ij}_{xy}$ sont des entiers non-négatifs décrivant la multiplicité de la représentation $\mathcal{V}_i \otimes \overline{\mathcal{V}}_j$ dans l'espace de Hilbert avec deux lignes de défauts ("*seams*") $x$ et $y$. Le cas sans lignes de défauts ($x = y = 0$) implique que l'on retrouve l'invariant modulaire :

$$\mathcal{W}^{ij}_{00} = \mathcal{M}_{ij}. \tag{1.90}$$

Les coefficients $\mathcal{W}^{ij}_{xy}$ peuvent être codés dans des matrices $\widetilde{W}_{ij}$ ou dans des matrices $W_{xy}$ :

$$(\widetilde{W}_{ij})_{xy} = (W_{xy})_{ij} = \mathcal{W}^{ij}_{xy}. \tag{1.91}$$

Des conditions de compatibilité [77, 78] imposent que les matrices $\widetilde{W}_{ij}$ doivent former une représentation de l'algèbre carrée de fusion :

$$\widetilde{W}_{ij}\, \widetilde{W}_{i'j'} = \sum_{i'',j''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\, \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\, \widetilde{W}_{i''j''}, \tag{1.92}$$

où $\mathcal{N}^{i''}_{ii'}$ sont les coefficients de structure de l'algèbre de fusion. L'équation (1.92) pour $j = j' = 1$ (resp. $i = i' = 1$) implique ($\mathcal{N}^{j''}_{11} = \delta_{j''1}$) :

$$\widetilde{W}_{i1}\, \widetilde{W}_{i'1} = \sum_{i''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\, \widetilde{W}_{i''1}, \qquad \widetilde{W}_{1j}\, \widetilde{W}_{1j'} = \sum_{j''} \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\, \widetilde{W}_{1j''}. \tag{1.93}$$

Les matrices $\widetilde{W}_{i1}$ et $\widetilde{W}_{1j}$ forment donc une représentation de l'algèbre de fusion. Leurs coefficients sont des entiers non-négatifs, et à leurs matrices correspondantes sont donc naturellement associés des graphes. Il est seulement nécessaire de spécifier un sous-ensemble de ces matrices qui engendre les autres par fusion, à travers (1.93). Dans le cas des modèles $\widehat{su}(2)$, les matrices $\widetilde{W}_{21}$ et $\widetilde{W}_{12}$ sont appelées fondamentales, car elles engendrent les autres par fusion. Elles correspondent chacune à la matrice d'adjacence d'un graphe : les graphes d'Ocneanu sont la superposition sur un même graphe de ces deux graphes. Les graphes d'Ocneanu de apparaissent donc naturellement dans la classification des fonctions de partition *twistées* des modèles $\widehat{su}(2)$.

**Matrices toriques** Définissons les matrices $W_x \doteq W_{x0}$ (telles que $(W_x)_{ij} = \mathcal{W}^{ij}_{x0}$), alors combinant (1.90) et (1.92) prise pour $x = y = 0$, nous obtenons :

$$\sum_x (W_x)_{ij}\, (W_x)_{i'j'} = \sum_{i'',j''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\, \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\, \mathcal{M}_{i''j''} \tag{1.94}$$

Les matrices $W_x$ sont appelées **matrices toriques** et sont associées aux vertex $x$ du graphe d'Ocneanu. Elles ont premièrement été obtenues par Ocneanu [66][7] pour le modèle $\widehat{su}(2)$, explicitement calculées en résolvant l'équation (1.94). Sa méthode d'obtention des matrices toriques $W_x$ à partir de la connaissance de l'invariant modulaire $\mathcal{M}$ et par la formule (1.94) est appelée "*modular splitting method*". Ces matrices toriques définissent les fonctions de partition généralisées à une ligne de défaut. Les matrices toriques généralisées $W_{xy}$ (définissant les fonctions de partition à deux lignes de défaut) s'obtiennent alors à partir de la connaissance des matrices toriques $W_x$ et des coefficients de structure $\mathcal{O}_{xy}^z$ (entiers non-négatifs) de l'algèbre d'Ocneanu :

$$W_{xy} = \sum_z \mathcal{O}_{xy}^z \, W_z \tag{1.95}$$

L'algèbre d'Ocneanu est aussi appelée algèbre des symétries quantiques, dont une représentation matricielle est donnée par les matrices $O_x$ telles que $(O_x)_{yz} = \mathcal{O}_{xy}^z$ :

$$O_x \, O_y = \sum_z \mathcal{O}_{xy}^z \, O_z \tag{1.96}$$

**Conclusion 2** *Ces définitions et relations sont a priori suffisantes pour calculer tous les coefficients $\mathcal{W}_{xy}^{ij}$ et ainsi obtenir toutes les fonctions de partition (invariante modulaire et généralisées) du modèle conforme considéré. Les données initiales indispensables sont les matrices $\widetilde{W}_{21}$ et $\widetilde{W}_{12}$, ou de manière équivalente le graphe d'Ocneanu lui-même, et les coefficients de structure de l'algèbre d'Ocneanu.*

Cependant, ces graphes ne sont connus (publiés) que pour le cas $\widehat{su}(2)$. Le travail central de cette thèse est de présenter une réalisation de l'algèbre des symétries quantiques $Oc(G)$. Ceci nous permet d'une part d'obtenir les coefficients $\mathcal{W}_{xy}^{ij}$ sans faire appel à la donnée explicite des coefficients de structure de l'algèbre $Oc(G)$, obtenant des expressions compactes pour les fonctions de partition du modèle $\widehat{su}(2)$. D'autre part, notre méthode permet de généraliser cette construction pour les modèles $\widehat{su}(n)$, sans faire appel à la donnée des graphes d'Ocneanu correspondants. L'unique donnée initiale se réduit à la connaissance des diagrammes de Coxeter-Dynkin associés.

### Conditions au bord et lignes de défaut

Une situation encore plus générale consiste à combiner une ligne de défaut $x$ et des conditions au bord labellées par $a$ et $b$ [79]. À nouveau, une seule copie de l'algèbre intervient dans la théorie, et l'espace de Hilbert se décompose comme :

$$\mathcal{H}_{x;ab} = \bigoplus_i (F_i S_x)_{ab} \, \mathcal{V}_i, \tag{1.97}$$

[7] Les premières matrices toriques ont été publiées dans [23] pour le modèle $E_6$ de $\widehat{su}(2)$.

où les $S_x$ sont des matrices de même dimension que les matrices $F_i$, et dont les éléments sont des entiers non-négatifs. Des conditions de compatibilité [79] impliquent qu'elles forment une représentation de l'algèbre $Oc(G)$ (généralement de dimension différente) :

$$S_x\, S_y = \sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\, S_z, \tag{1.98}$$

où les $\mathcal{O}^z_{xy}$ sont les coefficients de structure de l'algèbre $Oc(G)$.

## 1.4 Classifications et graphes

Dans l'étude des théories conformes à deux dimensions, nous avons vu que le spectre d'une RCFT dans divers environnements (système ouvert, avec conditions au bord ou avec l'introduction de lignes de défaut) est décrit par un ensemble de coefficients qui ont la particularité de former des représentations matricielles à entiers non-négatifs d'algèbre (appelée dans la littérature "*nimreps*") :

$$\begin{array}{lrcl}
(N_i)_{jk} & N_i\, N_j & = & \displaystyle\sum_k \mathcal{N}^k_{ij}\, N_k \\
(F_i)_{ab} & F_i\, F_j & = & \displaystyle\sum_k \mathcal{N}^k_{ij}\, F_k \\
(\widetilde{W}_{ij})_{xy} & \widetilde{W}_{ij}\, \widetilde{W}_{i'j'} & = & \displaystyle\sum_{i'',j''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\, \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\, \widetilde{W}_{i''j''} \\
(O_x)_{yz} & O_x\, O_y & = & \displaystyle\sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\, O_z \\
(S_x)_{ab} & S_x\, S_y & = & \displaystyle\sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\, S_z
\end{array} \tag{1.99}$$

Trois ensembles d'indices interviennent : $(i, j, k, \ldots)$ ; $(a, b, c, \ldots)$ ; $(x, y, z, \ldots)$ : nous verrons qu'ils sont associés à trois types de graphes : les graphes $\mathcal{A}(G)$, les graphes $G$ (diagrammes de Dynkin ou généralisés) et les graphes d'Ocneanu $Oc(G)$. Nous verrons comment ces structures apparaissent dans l'étude de la digèbre $\mathcal{B}(G)$, qui joue donc un rôle prédominant dans la classification des théories conformes rationelles, et qui peut être considérée comme la symétrie quantique naturelle associée au modèle.

### 1.4.1 Modèles $\widehat{su}(2)$

La première classification des fonctions de partition invariantes modulaires a été obtenue en 1987 par Cappelli, Itzykson et Zuber [11] pour les modèles $\widehat{su}(2)$ et est présentée dans la Tab. 1.1. Elle consiste en trois séries infinies (labellées par $A_n$, $D_{2n}$ et $D_{2n+1}$) et trois cas exceptionnels (labellés par $E_6$, $E_7$, et $E_8$) et est connue sous le nom de classification $ADE$. Cette terminologie est utilisée pour mettre en valeur l'analogie existante avec la classification de Cartan des algèbres de Lie semi-simples simplement lacées : si nous nous concentrons sur les termes diagonaux de $\mathcal{Z}$, leur label $i$ sont égaux aux exposants de Coxeter des diagrammes

de Dynkin $G$ correspondants[8]. Pour un tel diagramme $G$, les valeurs propres de sa matrice d'adjacence sont de la forme $2\cos\frac{\pi m^C}{\kappa}$, où $\kappa$ est le nombre (dual) de Coxeter de $G$ et $m^C$ l'exposant de Coxeter de $G$. Les valeurs de $\kappa$ et $m^C$ sont illustrées dans la Tab. 1.2.

| | | |
|---|---|---|
| $A_{k+1}$ | $k \geq 0$ | $\sum_{i=0}^{k} \lvert\chi_i\rvert^2$ |
| $D_{2\ell+2}$ | $k = 4\ell$ | $\sum_{i \text{ pair } =0}^{2\ell-2} \lvert\chi_i + \chi_{4\ell-i}\rvert^2 + 2\lvert\chi_{2\ell}\rvert^2$ |
| $D_{2\ell+1}$ | $k = 4\ell - 2$ | $\sum_{i \text{ pair } =0}^{4\ell-2} \lvert\chi_i\rvert^2 + \lvert\chi_{2\ell-1}\rvert^2 + \sum_{i \text{ impair } =1}^{2\ell-3} (\chi_i\overline{\chi}_{4\ell-2-i} + \chi_{4\ell-2-i}\overline{\chi}_i)$ |
| $E_6$ | $k = 10$ | $\lvert\chi_0 + \chi_6\rvert^2 + \lvert\chi_3 + \chi_7\rvert^2 + \lvert\chi_4 + \chi_{10}\rvert^2$ |
| $E_7$ | $k = 16$ | $\lvert\chi_0 + \chi_{16}\rvert^2 + \lvert\chi_4 + \chi_{12}\rvert^2 + \lvert\chi_6 + \chi_{10}\rvert^2 + \lvert\chi_8\rvert^2 + \chi_8(\overline{\chi}_2 + \overline{\chi}_{14}) + (\chi_2 + \chi_{14})\overline{\chi}_8$ |
| $E_8$ | $k = 28$ | $\lvert\chi_0 + \chi_{10} + \chi_{18} + \chi_{28}\rvert^2 + \lvert\chi_6 + \chi_{12} + \chi_{16} + \chi_{22}\rvert^2$ |

Tab. 1.1 – Classification $ADE$ des fonctions de partition invariantes modulaires pour les modèles $\widehat{su}(2)$ (en fonction des caractères $\chi_i$ de $\widehat{su}(2)_k$)

Les classifications de type $ADE$ interviennent dans divers domaines des mathématiques ; en plus des algèbres de Lie semi-simples, signalons aussi : sous-groupes finis de $SO(3)$, groupes de réflexion en cristallographie, matrices symétriques de valeur propre comprise entre -2 et +2, .... Cependant, l'apparition d'une telle classification $ADE$ pour les fonctions de partition invariantes modulaires était mystérieuse à l'époque. Depuis l'avènement des études des conditions au bord et des lignes de défaut, une meilleure compréhension de cette analogie a été obtenue.

Rappelons qu'au niveau $k$, les représentations intégrables de $\widehat{su}(2)_k$ sont labellées par $\mathcal{I} = \{0, 1, 2 \cdots, k\}$, avec $c = 3k/(k+2)$ et $h_i = ((i+1)^2 - 1)/(4(k+2))$. Les matrices $T$ et $S$ de transformation modulaire des caractères sont données par :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \exp\left[2i\pi\left(\frac{j^2}{4(k+2)} - \frac{1}{8}\right)\right]\delta_{ij}, \\ S_{ij} &= \sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin\left(\frac{\pi\, i\, j}{k+2}\right). \end{aligned}$$

De la matrice $S$ et par la formule de Verlinde, nous obtenons les coefficients de fusion $\mathcal{N}_{ij}^k$.

[8] Il y a un *shift* global de 1 dû à notre convention de label pour les caractères.

| Diagramme | $\kappa$ | Valeurs de $m^C$ |
|---|---|---|
| $A_n$ | $n+1$ | $1, 2, 3, \ldots, n$ |
| $D_n$ | $2n-2$ | $1, 3, \ldots, 2n-3$ et $n-1$ |
| $E_6$ | 12 | $1, 4, 5, 7, 8, 11$ |
| $E_7$ | 18 | $1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$ |
| $E_8$ | 30 | $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ |

TAB. 1.2 – Nombre de Coxeter $\kappa$ et exposants de Coxeter $m^C$ pour les diagrammes $ADE$

Introduisant les matrices de fusion $N_i$ telles que $(N_i)_{jk} = \mathcal{N}_{ij}^k$, elles satisfont :

$$N_i \, N_2 = N_{i-1} + N_{i+1}, \tag{1.100}$$

avec $N_1 = \mathbb{1}_{k+1,k+1}$. Les matrices de fusion s'obtiennent donc toutes à partir de la connaissance de la matrice $N_1$, appelée fondamentale : $N_1$ correspond à la matrice d'adjacence du diagramme $A_{k+1}$ !

En présence de conditions au bord, le spectre de la théorie est codé par des matrices $F_i$ satisfaisant la même algèbre de fusion (1.100). La classification des matrices $F_i$ possédant cette propriété a été complétée. $F_2$ est aussi appelée fondamentale, car elle engendre les autres par fusion, et elle correspond à la matrice d'adjacence d'un diagramme $G$ de Dynkin de type $ADE$ ! Les conditions aux bords $a$ et $b$ peuvent être mises en correspondance avec les vertex du diagramme $G$.

Finalement, les graphes d'Ocneanu de $\widehat{su}(2)$ et les algèbres d'Ocneanu correspondantes — à partir desquels sont définis les coefficients $\mathcal{W}_{xy}^{ij}$ — sont connus et classifiés [67]. Ils permettent de définir toutes les fonctions de partition généralisées (à une et deux lignes de défaut) des modèles $\widehat{su}(2)$ [25, 78].

### 1.4.2 Modèles minimaux

La classification des modèles minimaux ($c < 1$) a été complétée [11], et suit aussi une classification de type $ADE$ : à chaque fonction de partition invariante modulaire correspond une paire de diagrammes de Dynkin $(A, G)$. La théorie est unitaire si et seulement si le nombre de Coxeter des deux diagrammes diffère d'une unité. Cette classification est naturellement

reliée à la classification $ADE$ des modèles $\widehat{su}(2)$. La charge centrale pour les modeles minimaux et les modèles $\widehat{su}(2)_k$ est respectivement donnée par :

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \qquad c = \frac{3k}{k+2} \geq 1. \tag{1.101}$$

Les modèles minimaux ont une charge centrale $c < 1$. Pour obtenir ces valeurs à partir d'un système avec algèbre affine, il faut considérer des théories associées à des quotients G/H, avec H sous-groupe de G. La charge centrale d'une theorie construite sur G/H est donnée par $c_{G/H} = c_G - c_H$ [46, 47]. En considerant une theorie avec des quotients de la forme suivante :

$$SU(2)_k \times SU(2)_1/SU(2)_{k+1}, \qquad \frac{\widehat{su}(2)_k \oplus \widehat{su}(2)_1}{\widehat{su}(2)_{k+1}}, \tag{1.102}$$

la charge centrale est donnée par :

$$c = \frac{3k}{k+2} + 1 - \frac{3(k+1)}{k+3} = 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)}, \tag{1.103}$$

et nous retrouvons alors exactement la charge centrale des modeles minimaux unitaires (avec $m$ entier $= k+2$) ! La classification des modèles minimaux unitaires est donc reliée, à travers une construction de *coset*, à la classification des modeles $\widehat{su}(2)$, ce qui explique la classification $ADE$ de ces modèles minimaux.

Dans notre approche, la relation entre modèles minimaux et modèles $\widehat{su}(2)$ peut être reformulée comme suit : la fonction de partition invariante modulaire $\mathcal{Z}$ d'un modèle minimal unitaire de type $(A, G)$, où $A$ et $G$ sont des diagrammes tels que $\kappa_A = \kappa_G \pm 1$, est définie par :

$$\mathcal{Z} = \overline{\chi}\, \mathcal{M}\, \chi\,, \tag{1.104}$$

où la matrice $\mathcal{M}$ est obtenue par le produit tensoriel des invariants modulaires des modèles $\widehat{su}(2)$ associés aux graphes $A$ et $G$ : $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A \otimes \mathcal{M}_G$. La matrice $\mathcal{M}$ agit sur un espace vectoriel dont une base est labellée par les vecteurs $\chi = \chi_i \otimes \chi_j$ (où $\chi_i$ désigne les caractères de $\widehat{su}(2)$). Toutefois, il faut prendre en compte l'action $\sigma$ de $\mathbb{Z}_2$ entre les vecteurs labellés par $(i, j)$ et $(\sigma(i), \sigma(j))$ provenant de la symétrie de la table de Kac [28]. La classification des invariants modulaires $\mathcal{M}$ des modèles $\widehat{su}(2)$ permet alors de retrouver très simplement celle des modèles minimaux.

D'autre part, la possibilité de remplacer l'invariant modulaire $\mathcal{M}_G = W_0$ par des matrices toriques $W_x$ (ou généralisées $W_{xy}$) amène naturellement à la classification des différentes fonctions de partition twistées des modèles minimaux :

$$\mathcal{Z}_{xy,x'y'} = \frac{1}{2}\overline{\chi}\left(W_{xy} \otimes W'_{x'y'}\right)\chi \tag{1.105}$$

Il existe six types différents de fonctions de partition twistées pour les modèles minimaux, obtenues en choisissant les indices $(x, y)$ et $(x', y')$ comme suit : $((0,0),(0,0))$ ; $((x,0),(0,0))$ ; $((x,y),(0,0))$ ; $((x,0),(x',0))$, $((x,y),(x',0))$, $((x,y),(x',y'))$.

### 1.4.3 Modèles $\widehat{su}(n), n \geq 3$ et modèles minimaux généralisés

**Modèles $\widehat{su}(3)$** Suivant une démarche combinatoire pour la recherche des invariants modulaires $\mathcal{M}$, la classification des modèles $\widehat{su}(3)$ a été obtenue par Gannon en 1994 [44]. Elle comporte six séries infinies et six cas exceptionnels. De même que les cas $\widehat{su}(2)$ sont reliés aux diagrammes de Dynkin $ADE$, à chaque fonction de partition $\mathcal{Z}$ de $\widehat{su}(3)$ nous pouvons associer un graphe, tel que son spectre (valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe) soit codé dans les termes diagonaux de $\mathcal{Z}$, et tel que les conditions au bord soient en correspondance avec ses vertex. Les diagrammes de $\widehat{su}(3)$ ont premièrement été déterminés de manière empirique dans [31], par l'imposition de propriétés spectrales, et sont connus dans la littérature sous le nom de diagrammes de Di Francesco-Zuber. Par la suite, ces diagrammes sont apparus dans les travaux d'algèbres d'opérateurs [67, 6, 7]. La liste de ces diagrammes a été rectifiée par Ocneanu : la liste finale est publiée dans [71].

Les graphes d'Ocneanu de $\widehat{su}(3)$ ne sont pas connus (publiés), les fonctions de partition à une ou deux lignes de défaut pour ces modèles n'avaient donc pas été obtenues. Nous verrons que grâce à notre réalisation de l'algèbre des symétries quantiques (conjecturée en s'inspirant de celle de $\widehat{su}(2)$), nous obtenons sur quelques exemples ces fonctions de partition [26].

**Modèles $\widehat{su}(n)$** Nous pouvons suivre la même démarche et associer à chaque fonction de partition invariante modulaire $\mathcal{Z}$ de $\widehat{su}(n)$ un graphe codant à travers ses propriétés spectrales les termes diagonaux $\mathcal{Z}$, et tels que ses vertex classifient les possibles conditions aux bords. La liste complète des graphes a été déterminée par Ocneanu pour le cas $\widehat{su}(4)$ (la liste est publiée dans [71]), et nous pouvons en déduire une classification correspondante complète des fonctions de partition invariantes modulaires du cas $\widehat{su}(4)$. Pour des rangs supérieurs à 4, il n'existe pas de classification complète des fonctions de partition invariante modulaire, ni de liste complète des graphes correspondants.

**Modèles minimaux généralisés** Les modèles minimaux "usuels" font intervenir un nombre fini de représentations irréductibles de l'algèbre de Virasoro, et sont labellés par une paire de diagrammes de type $su(2)$, c.à.d. les diagrammes $ADE$. Or, l'algèbre de Virasoro est un cas particulier d'algèbres plus générales $\mathcal{W}_n$ : $Vir = \mathcal{W}_2$. Les modèles minimaux usuels sont de type $\mathcal{W}_2$. Nous pouvons définir des modèles minimaux de type $\mathcal{W}_n$, appelés généralisés. Pour le cas $\mathcal{W}_3$ par exemple, ils sont labellés par une paire de disgrammes de Di Francesco-Zuber, et sont unitaires si les nombres de Coxeter (généralisés) de ces diagrammes diffèrent d'une unité.

En ce sens, l'obtention des matrices toriques généralisées $W_{xy}$ des modèles $\widehat{su}(n)$ (dont les expressions pour $\widehat{su}(2)$ et quelques exemple de $\widehat{su}(3)$ sont données dans le chapitre **4**) est d'une grande utilité pour la classification des modèles minimaux généralisés (détermination de la fonction de partition invariante modulaires et des différents types de fonctions de partition twistées) [28].

# Chapitre 2

# L'algèbre des symétries quantiques d'Ocneanu

La construction d'Ocneanu – premièrement décrite dans [66] – associe une digèbre $\mathcal{B}(G)$ à chaque diagramme de Dynkin $G$ de type $ADE$. $\mathcal{B}(G)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de chemins essentiels sur lequel sont définies deux lois multiplicatives $\circ$ et $\odot$. Les divers coefficients provenant des structures algébriques de $\mathcal{B}(G)$ interviennent dans la détermination des fonctions de partition des modèles conformes $\widehat{su}(2)$. Nous présentons dans ce chapitre une introduction à ces structures algébriques ainsi que l'étude approfondie de la digèbre associée au diagramme de Dynkin $A_3$.

## 2.1 Les chemins essentiels sur un graphe $G$

La notion de chemins essentiels sur un graphe a été introduite par A. Ocneanu dans [67]. Cet article étant très "dense" et les définitions y étant présentées parfois de manière allusive, nous donnons ici une introduction à ces notions (voir aussi [23, 26]).

### 2.1.1 Quelques définitions

**Définition 6** *Nous définissons un* **graphe** $G$ *par la donnée d'un triplet* $(V, E, \psi)$ *tel que :*

- $V$ *est un ensemble non-vide d'éléments* $v$ *appelés vertex,*
- $E$ *est un ensemble non vide d'éléments* $\xi$ *appelés arcs,*
- $\psi$ *est une fonction d'incidence qui associe à chaque arc de* $G$ *une paire ordonnée de vertex (non nécessairement distincts) de* $G$.

Un graphe est dit **fini** si les ensembles $V$ et $E$ sont finis, et nous notons $r$ le nombre de vertex du graphe : $r = Card(V)$. Si $\xi$ est un arc, $v_i$ et $v_j$ deux vertex tels que $\psi(\xi) = v_i v_j$, alors $\xi$ joint le vertex $v_i$ au vertex $v_j$, et nous notons un tel arc $\xi_{ij}$ ou $\vec{ij}$. Nous appelons $s(\xi_{ij}) = v_i$ la **source** de $\xi_{ij}$ et $r(\xi_{ij}) = v_j$ l'**extrémité** de $\xi_{ij}$. Un arc ayant la même source et extrémité

est appelé une **boucle**. Un graphe est dit **simple** s'il ne possède pas de boucle et si deux arcs différents ne relient pas la même paire de points. Un graphe est dit **bi-orienté** si pour tout arc $\xi_{ij}$ reliant $v_i$ à $v_j$, il existe l'arc inverse $\xi_{ji}$ reliant $v_j$ à $v_i$, que nous notons $\xi_{ij}^{-1}$. Dans le cas contraire, le graphe est dit **orienté**. Un **diagramme** est la représentation picturale du graphe. Dans le diagramme, nous représentons les vertex $v_i$ par des points labellés par $\sigma_i$, $(i = 1, \ldots, r)$. L'arc $\xi_{ij}$ est représenté par un vecteur reliant le vertex $v_i$ au vertex $v_j$. Dans le cas d'un graphe bi-orienté, les deux arcs $\xi_{ij}$ et $\xi_{ij}^{-1}$ sont représentés plus simplement par une seule ligne (non-fléchée) reliant $v_i$ et $v_j$.

Un **chemin élémentaire** est une séquence $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ d'arcs telle que l'extrémité de chaque arc coïncide avec la source de l'arc suivant : $r(\xi_i) = s(\xi_{i+1}), 1 \leq i \leq k-1$. Si le chemin rencontre successivement les vertex $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$, nous le notons $P(v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1})$. Un graphe est dit **fortement connecté** si pour tout couple de vertex $v_i$ et $v_j$, il existe un chemin élémentaire reliant ces vertex.

Les chemins élémentaires de longueur $i$ forment donc l'ensemble suivant :

$$\mathcal{P}^{(i)}(G) = \{P(v_1, v_2, \cdots, v_i, v_{i+1})\} = \{\xi^{(i)} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i) | r(\xi_\ell) = s(\xi_{\ell+1})\} \tag{2.1}$$

et nous considérons les vertex $v$ comme des chemins de longueur 0. Nous appelons $Path^{(i)}$ l'espace vectoriel ayant comme base les chemins élémentaires $\xi^{(i)} \in \mathcal{P}^{(i)}(G)$. Nous introduisons un produit scalaire dans cet espace vectoriel, noté $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$, en imposant que les chemins élémentaires soient orthonormés :

$$\langle \xi, \eta \rangle = \delta_{\xi\,\eta} \qquad\qquad \xi, \eta \in Path^{(i)} \tag{2.2}$$

**Définition 7** *Soit $G$ un graphe à $r$ vertex. La* **matrice d'adjacence** *de $G$ est la matrice $r \times r$ $\mathcal{G}$ ayant comme entrée $\mathcal{G}_{ij} = n$ s'il existe $n$ arcs $\xi_{ij}$ reliant le vertex $v_i$ au vertex $v_j$, et $\mathcal{G}_{ij} = 0$ sinon. La* **norme** *du graphe $G$ est définie comme étant égale à la norme de sa matrice d'adjacence $\mathcal{G}$.*

Pour un graphe simple, sa matrice d'adjacence vérifie donc : $\mathcal{G}_{ii} = 0$ et $\mathcal{G}_{ij} \in \{0, 1\}$. Par la suite, nous parlerons de graphes comme un racourci pour graphes simples, finis et fortement connectés.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée et appelons $a_{ij}^{(k)}$ l'entrée $(i, j)$ de la matrice $A^k$, où $k$ est un entier positif.

**Définition 8** *Une matrice $A$ carrée $n \times n$ à entrée dans les entiers non-négatifs est dite* **irréductible** *si et seulement si, pour chaque $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un entier positif $k$, qui peut dépendre de $i$ et $j$, tel que $a_{ij}^{(k)} > 0$.*

Nous avons vu plus haut la définition d'un chemin élémentaire. Il existe une manière très simple de compter le nombre de tels chemins de longueur $k$ fixée.

**Théorème 2** *Si $A = (a_{ij})$ est la matrice d'adjacence d'un graphe à $n$ vertex, alors le nombre de chemins élémentaires distincts de longueur $k$ reliant les vertex $v_i$ et $v_j$ est égal à $a_{ij}^{(k)}$.*

Puisque, par définition, dans un graphe fortement connecté il existe au moins un chemin reliant tout vertex $v_i$ à un vertex $v_j$, sa matrice d'adjacence est donc irréductible.

**Théorème 3 (Perron-Frobenius)** *Soit $A$ une matrice carrée irréductible à entrées dans les entiers non négatifs. Alors, il existe une valeur propre $\beta$ de $A$ telle que :*

- *$\beta$ est réelle, $\beta > 0$ ;*
- *$\beta$ est la plus grande valeur propre de $A$ ;*
- *le vecteur propre correspondant à $\beta$ est positif*[1]*, et est unique à une constante multiplicative près.*

Ce vecteur-propre est appelé vecteur de Perron-Frobenius, et sera noté $P$. Il satisfait donc à l'équation suivante :

$$\mathcal{G}P = \beta P \tag{2.3}$$

Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ une base des vertex du graphe $G$ : puisque la matrice d'adjacence de $G$ est irréductible à entrées dans $\mathbb{N}$, le **Théorème 3** s'applique et nous définissons l'application $\mu$ donnant la composante de Perron-Frobenius des vertex :

$$\begin{aligned} \mu : V(G) &\longmapsto \mathbb{R}^+ \\ v_i &\longmapsto P(i) \end{aligned}$$

Nous normalisons ce vecteur de telle manière que $\mu(v_1) = 1$, où $v_1$ est choisi comme étant le vertex[2] ayant la plus petite composante $P(i)$ (il sera noté avec une $\star$ sur le diagramme correspondant).

### 2.1.2 Graphes bi-orientés et leur classification

Dans le cas d'un graphe $G$ bi-orienté, sa matrice d'adjacence est symétrique, et sa norme est alors donnée par :

$$||G|| = ||\mathcal{G}|| = \max\{|\lambda|, \text{où } \lambda \text{ est valeur propre de } \mathcal{G}\}$$

Il existe une classification reliant les valeurs possibles de cette norme et son graphe correspondant [48] :

**Théorème 4** *Soit $\mathcal{G}$ une matrice carrée symétrique à entrée dans les entiers non-négatifs. Alors :*

[1] Toutes ses composantes ont le même signe.

[2] Dans les cas considérés, il n'y aura pas d'ambiguité sur le choix de ce vertex.

– $||\mathcal{G}|| = 2$ *si et seulement si* $\mathcal{G}$ *est la matrice* $(\ell+1)\times(\ell+1)$ *d'adjacence de l'un des graphes suivants :*

$$A_\ell^{(1)}(\ell \geq 2), \qquad D_\ell^{(1)}(\ell \geq 4), \qquad E_\ell^{(1)}(\ell = 6,7,8)$$

– $||\mathcal{G}|| < 2$ *si et seulement si* $\mathcal{G}$ *est la matrice* $(\ell \times \ell)$ *d'adjacence de l'un des graphes suivants :*

$$A_\ell(\ell \geq 2), \qquad D_\ell(\ell \geq 4), \qquad E_\ell(\ell = 6,7,8)$$

*De plus,* $||\mathcal{G}|| = \beta = 2\cos(\frac{\pi}{\kappa})$*, où* $\kappa$ *est par définition le nombre (dual) de Coxeter du graphe correspondant. Les autres valeurs propres de* $\mathcal{G}$ *sont données par* $\lambda = 2\cos(\frac{m^c\pi}{\kappa})$ *(possiblement avec multiplicité), où les* $m^c$ *sont par définition les exposants de Coxeter du graphe, prenant* $\ell$ *valeurs comprises entre 1 et* $\kappa - 1$*.*

Les graphes définis ci-dessus sont illustrés dans l'Annexe **A**. Ils correspondent aux diagrammes de Dynkin des algèbres de Lie semi-simples simplement lacées $(A_\ell, D_\ell, E_\ell)$, ou de leur extension affine $(A_\ell^{(1)}, D_\ell^{(1)}, E_\ell^{(1)})$. Insistons sur le fait que nous n'utiliserons pas la notion d'algèbre de Lie ici (le nombre dual de Coxeter par exemple est *défini* à travers la norme du graphe).

**Correspondance de Mc-Kay** Les vertex des diagrammes affines $(A_\ell^{(1)}, D_\ell^{(1)}, E_\ell^{(1)})$ sont en correspondance bi-univoque avec les représentations irréductibles des sous-groupes du groupe $SU(2)$, et la composante de Perron-Frobenius de ces vertex est égale à la dimension des irreps : c'est la correspondance de Mc-Kay classique [60]. De même, les vertex des diagrammes $(A_\ell, D_\ell, E_\ell)$ peuvent être mis en correspondance avec les irreps de "sous-groupes" ou "modules" associés[3] au groupe quantique $U_q(sl(2))$, avec $q$ racine de l'unité, les composantes de Perron-Frobenius donnant, par définition, les dimensions quantiques de ces irreps (ce ne sont plus des nombres entiers, mais des $q$-nombres !). C'est l'analogie quantique de la correspondance de Mc-Kay. Les correspondances de Mc-Kay (classique et quantique) sont présentées plus en détail dans l'Annexe **B**.

### 2.1.3 Chemins essentiels sur un graphe

Considérons un graphe $G$ à $r$ vertex, et l'espace vectoriel des chemins élémentaires de longueur deux : $Path^{(2)}$. Un élément $\xi^{(2)}$ de cet espace sera aussi noté $\xi \otimes \eta$, où $\xi$ et $\eta$ sont des chemins de longueur un (ce sont des arcs). L'opérateur d'annihilation d'Ocneanu $C_1$ est défini par :

$$\begin{array}{rrcl} C_1 : & Path^{(2)} & \longmapsto & Path^{(0)} \\ & \xi^{(2)} = \xi \otimes \eta & \longmapsto & \delta_{\xi,\eta^{-1}} \sqrt{\dfrac{\mu(r(\xi))}{\mu(s(\xi))}} s(\xi) \end{array} \tag{2.4}$$

[3] La définition ici adoptée des mots "sous-groupe" et "module" diffère de l'acceptation usuelle de ces termes : nous précisons dans l'Annexe **B** ce que nous entendons par là.

L'opérateur $C_1$ donne un résultat non-nul si et seulement si le chemin de longueur deux sur lequel il agit est un aller-retour : $C_1[P(v_i v_j v_k)] \sim \delta_{i,k} v_i$. L'opérateur de création d'Ocneanu $C_1^\dagger$ est défini par :

$$\begin{array}{rccl} C_1^\dagger : & Path^{(0)} & \longmapsto & Path^{(2)} \\ & v & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\xi, s(\xi)=v} \sqrt{\frac{\mu(r(\xi))}{\mu(s(\xi))}} \xi \otimes \xi^{-1} \end{array} \tag{2.5}$$

En d'autres termes, l'opérateur $C_1^\dagger$ crée des allers-retours avec tous les vertex adjacents à $v$.

**Théorème 5** *La composition de ces deux opérateurs $C_1 C_1^\dagger$ est un scalaire égal à $\beta$, la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence du graphe.*

**dém.** : L'équation $\mathcal{G}P = \beta P$, où $P_i = \mu(v_i)$, implique :

$$\sum_j (\mathcal{G})_{ij} \mu(v_j) = \beta\, \mu(v_i) \implies \sum_{v_j \text{ voisin de } v_i} \mu(v_j) = \beta\, \mu(v_i) \implies \beta = \sum_{\xi, s(\xi)=v_i} \frac{\mu(r(\xi))}{\mu(s(\xi))}.$$

En composant (2.5) et (2.4), la démonstration est alors immédiate. ■

**Définition 9** *Le projecteur de Jones $e_1$ est l'opérateur de projection défini par :*

$$e_1 = \frac{1}{\beta} C_1^\dagger C_1. \tag{2.6}$$

Il est immédiat de vérifier que c'est bien un opérateur de projection : $e_1^\dagger = e_1$, $e_1^2 = e_1$.

**Exemple : diagramme $A_3$** Le diagramme $A_3$ possède 3 vertex notés $\tau_0, \tau_1$ et $\tau_2$, et est représenté à la Fig.2.1. Nous donnons entre crochets la valeur de la composante du vecteur de Perron-Frobenius (dimension quantique) de chaque vertex.

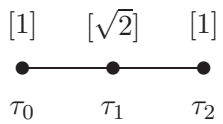



FIG. 2.1 – Diagramme $A_3$ et dimension quantique de ses vertex

Les chemins élémentaires de longueur deux sur le diagramme $A_3$ sont au nombre de 6 :

$$\begin{array}{ll} P(\tau_0\tau_1\tau_0) = \vec{01} \otimes \vec{10} & P(\tau_1\tau_2\tau_1) = \vec{12} \otimes \vec{21} \\ P(\tau_0\tau_1\tau_2) = \vec{01} \otimes \vec{12} & P(\tau_2\tau_1\tau_2) = \vec{21} \otimes \vec{12} \\ P(\tau_1\tau_0\tau_1) = \vec{10} \otimes \vec{01} & P(\tau_2\tau_1\tau_0) = \vec{21} \otimes \vec{10} \end{array}$$

L'action de l'opérateur de création $C_1^\dagger$ sur les vertex est donnée par :

$$\begin{aligned} C_1^\dagger(\tau_0) &= 2^{1/4}(0\vec{1} \otimes 1\vec{0}) \\ C_1^\dagger(\tau_1) &= 2^{-1/4}(\,1\vec{0} \otimes 0\vec{1} + 1\vec{2} \otimes 2\vec{1}\,) \\ C_1^\dagger(\tau_2) &= 2^{1/4}(2\vec{1} \otimes 1\vec{2}) \end{aligned}$$

L'action de l'opérateur d'annihilation $C_1$ sur les chemins élémentaires de longueur deux est donnée par :

$$\begin{aligned} C_1(0\vec{1} \otimes 1\vec{0}) &= 2^{1/4}(\tau_0) & C_1(2\vec{1} \otimes 1\vec{2}) &= 2^{1/4}(\tau_2) \\ C_1(1\vec{0} \otimes 0\vec{1}) = C_1(1\vec{2} \otimes 2\vec{1}) &= 2^{-1/4}(\tau_1) & C_1(0\vec{1} \otimes 1\vec{2}) = C_1(2\vec{1} \otimes 1\vec{0}) &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier que la composition des deux opérateurs $C_1 C_1^\dagger$ est bien un scalaire égal à la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence ($\beta = \sqrt{2}$) :

$$C_1 C_1^\dagger(\tau_0) = \sqrt{2}(\tau_0) \qquad C_1 C_1^\dagger(\tau_1) = \sqrt{2}(\tau_1) \qquad C_1 C_1^\dagger(\tau_2) = \sqrt{2}(\tau_2)$$

Nous pouvons maintenant étendre la définition de ces opérateurs à des chemins élémentaires de longueur quelconque.

**Définition 10** *Pour tout entier $n > 1$, l'opérateur d'annihilation $C_n$, agissant sur des chemins élémentaires de longueur $p$, est défini par :*

$$\begin{aligned} \textit{si } p \leq n : \qquad C_n(\xi_1 \dots \xi_p) &= 0\,, \\ \textit{si } p > n : \qquad C_n(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \xi_{n+1} \dots \xi_p) &= \sqrt{\frac{\mu(r(\xi))}{\mu(s(\xi))}}\,\delta_{\xi_n, \xi_{n+1}^{-1}}(\xi_1 \xi_2 \dots \widehat{\xi}_n \widehat{\xi}_{n+1} \dots \xi_p)\,, \end{aligned}$$

*où le symbole $\widehat{\xi}$ signifie que l'on élimine l'arc $\xi$ du chemin.*

L'opérateur $C_n$ agissant sur des chemins élémentaires de longueur $p$ donne donc comme résultat soit 0, soit un chemin élémentaire de longueur $p - 2$.

**Définition 11** *Pour tout entier $n > 1$, l'opérateur de création $C_n^\dagger$, agissant sur des chemins élémentaires de longueur $p$, est défini par :*

$$\begin{aligned} \textit{si } p < n+1 : \qquad C_n^\dagger(\xi_1 \dots \xi_p) &= 0\,, \\ \textit{si } p \geq n-1 : \qquad C_n^\dagger(\xi_1 \dots \xi_{n-1} \xi_n \dots \xi_p) &= \sum_{\eta, s(\eta) = r(\xi_{n-1})} \sqrt{\frac{\mu(r(\xi))}{\mu(s(\xi))}}(\xi_1 \dots \xi_{n-1}\, \eta\, \eta^{-1}\, \xi_n \dots \xi_p)\,. \end{aligned}$$

L'opérateur $C_n^\dagger$ agissant sur des chemins élémentaires de longueur $p$ donne donc comme résultat soit 0, soit une combinaison linéaire de chemins élémentaires de longueur $p + 2$.

Les projecteurs de Jones $e_k$ sont définis par :

$$e_k \doteq \frac{1}{\beta} C_k^\dagger C_k, \tag{2.7}$$

et vérifient les relations définissant une algèbre de Temperley-Lieb (voir Annexe **C**).

**Définition 12** *L'espace des chemins essentiels de longueur $n$ est défini par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}ss^{(n)} = EssPath^{(n)}(G) &= \left\{\xi \in Path^{(n)} |\, C_k\,\xi = 0 \qquad \forall k = (1, 2, \cdots, n)\right\} \\ &= \left\{\xi \in Path^{(n)} |\, e_k\,\xi = 0 \qquad \forall k \in (1, 2, \cdots, n)\right\}\end{aligned}$$

Un chemin est donc essentiel s'il appartient à l'intersection du noyau de tous les opérateurs d'annihilation $C_k$ ( ou de tous les projecteurs de Jones $e_k$). Tout chemin élémentaire de longueur 0 et de longueur 1 est aussi un chemin essentiel, car il appartient au noyau des opérateurs d'annihilations. Notons qu'un élément de $\mathcal{E}ss^{(n)}$ n'est pas toujours un chemin élémentaire de longueur $n$, mais possiblement une combinaison linéaire de tels éléments.

**Exemple : diagramme $A_3$** Nous avons vu que $C_1(\vec{01} \otimes \vec{12}) = C_1(\vec{21} \otimes \vec{10}) = 0$, donc ces deux chemins sont des chemins essentiels. Nous avons vu aussi que $C_1(\vec{10} \otimes \vec{01}) = C_1(\vec{12} \otimes \vec{21})$. Soit le chemin $\gamma = \vec{10} \otimes \vec{01} - \vec{12} \otimes \vec{21}$, nous avons alors $C_1(\gamma) = 0$. $\gamma$ est donc aussi un chemin essentiel, bien qu'il ne soit pas élémentaire mais une combinaison linéaire de chemins élémentaires.

Soit $\mathcal{E}ss^{(i)}_{a,b}$ l'espace des chemins essentiels de longueur $i$ partant du vertex $v_a$ et arrivant au vertex $v_b$. Alors :

$$\mathcal{E}ss^{(i)} = \sum_{v_a, v_b \in V} \mathcal{E}ss^{(i)}_{a,b}. \tag{2.8}$$

**Théorème 6 (Ocneanu[67])** *La dimension de l'espace des chemins essentiels $\mathcal{E}ss^{(i)}_{a,b}$ est donnée par la formule de récurrence suivante (loi modérée de Pascal) :*

$$dim(\mathcal{E}ss^{(i+1)}_{a,b}) = \sum_{\xi, r(\xi) = v_b} dim(\mathcal{E}ss^{(i)}_{a,s(\xi)}) - dim(\mathcal{E}ss^{(i-1)}_{a,b}). \tag{2.9}$$

Les chemins essentiels de longueur 0 et 1 sont des chemins élémentaires (vertex et arcs). La loi (2.9) nous permet alors de calculer la dimension des chemins essentiels de longueur donnée. Ces résultats sont plus facilement codés dans des matrices.

**Matrices $F_i$** Définissons les matrices carrées $r \times r$ $F_i$ telles que la composante $(a, b)$ de $F_i$ soit égale au nombre de chemins essentiels de longueur $i$ reliant le vertex $v_a$ au vertex $v_b$ (donc égale à la dimension de $\mathcal{E}ss^{(i)}_{a,b}$). La loi modérée de Pascal (2.9) nous permet d'obtenir une récurrence simple pour calculer ces matrices $F_i$ :

$$\begin{aligned}F_0 &= \mathbb{1}_{r \times r} \\ F_1 &= \mathcal{G} \\ F_{i+1} &= \mathcal{G} F_i - F_{i-1}\end{aligned}$$

La dimension de l'espace vectoriel des chemins essentiels de longueur $i$ est donc donnée par :

$$\dim(\mathcal{E}ss^{(i)}) = \sum_{a,b} (F_i)_{ab} \tag{2.10}$$

**Rappel** : À chaque diagramme de type $ADE$ est associé un nombre $\kappa$ (nombre dual de Coxeter), défini à partir de la norme $\beta$ de la matrice d'adjacence du graphe par la relation $\beta = 2\cos\left(\frac{\pi}{\kappa}\right)$.

**Théorème 7 (Ocneanu[67])** *Pour les diagrammes de type $ADE$, il n'existe pas de chemins essentiels de longueur plus grande que $\kappa - 2$.*

Au niveau matriciel, ceci se traduit par le fait que la matrice $F_{\kappa-1}$ est nulle. Au vue de la correspondance de Mc-Kay, nous verrons au chapitre **3** que les matrices $F_i$ codent la décomposition du produit tensoriel $\tau_i \otimes \sigma_a$ en irreps $\sigma_b$, où les irreps $\sigma_a$ et $\sigma_b$ sont associées aux vertex $v_a$ et $v_b$ du graphe $G$ de nombre de Coxeter $\kappa$, et l'irrep $\tau_i$ est associée au vertex $v_i$ du graphe $A_{\kappa-1}$ Les graphes $A_n$ correspondent à un quotient $\mathcal{H}$ du groupe quantique $U_q(sl(2))$, tandis que les graphes $G$ sont associés à des "sous-groupes" ou "modules" de $\mathcal{H}$.

**Matrices essentielles $E_a$** Il existe une autre manière de coder ces résultats. Définissons $r$ matrices $E_a$ associées à chaque vertex $v_a$ de $G$ et appelées **matrices essentielles**, par :

$$E_a[i+1, b] \doteq F_i[a, b] \tag{2.11}$$

Alors la composante $(i+1, b)$ de la matrice $E_a$ est le nombre de chemins essentiels de longueur $i$ reliant le vertex $v_a$ au vertex $v_b$. Pour le cas de graphes $ADE$, nous obtenons donc $r$ matrices $E_a$, de $\kappa - 1$ lignes et $r$ colonnes.

## 2.2 La bigèbre de Hopf faible $\mathcal{B}(G)$

Nous considérons à partir d'ici seulement les diagrammes $G$ de type $ADE$ ("cas $su(2)$"). Toutes ces constructions peuvent *a priori* être généralisées à d'autres diagrammes, notamment les diagrammes de Di Francesco-Zuber ("cas $su(3)$"), mais nous nous limiterons ici aux cas $ADE$.

### 2.2.1 Endomorphismes gradués de chemins essentiels

Soit $G$ un graphe de type $ADE$, à $r$ vertex et nombre (dual) de Coxeter $\kappa$. À chaque vertex $v_a$ de $G$ est associée une dimension quantique $\mu_a$. Soit $H$ l'espace vectoriel des chemins essentiels sur $G$. $H$ est un espace vectoriel fini-dimensionnel, gradué par la longueur :

$$H = \bigoplus_{i=0}^{\kappa-1} H_i \tag{2.12}$$

où $H_i \cong \mathbb{C}^{d_i}$ est l'espace vectoriel des chemins essentiels de longueur $i$, de dimension $d_i$. Soit $\{e^{i,\gamma}_{a,b}\}$ une base de $H_i$ formée des chemins essentiels de longueur $i$, partant du vertex $v_a$ et arrivant au vertex $v_b$, de multiplicité $\gamma = 1, 2, \cdots, (F_i)_{ab}$. La dimension de $H_i$ est $d_i = \sum_{a,b}(F_i)_{a,b}$. Nous choisissons cette base orthonormée par rapport au produit scalaire $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ des chemins élémentaires :

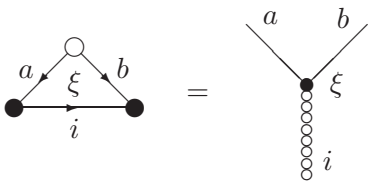
$$\langle\, e^{i,\gamma}_{a,b}\, ,\, e^{i',\gamma'}_{a',b'}\,\rangle = \delta_{a\,a'}\,\delta_{b\,b'}\,\delta_{i\,i'}\,\delta_{\gamma\,\gamma'} \tag{2.13}$$

Pour clarifier les notations, nous omettrons l'indice de multiplicité $\gamma$, et nous noterons les éléments de cette base $\{|a \xrightarrow{i} b\rangle\}$, appelés chemins essentiels normalisés. Considérons l'espace dual $\widehat{H}$ de $H$. Une base orthonormée de $\widehat{H}$ est formée par les éléments $\{\langle d \xleftarrow{i} c|\}$, tels que :

$$\langle\, d \xleftarrow{i} c\,|\, a \xrightarrow{j} b\,\rangle = \delta_{a\,c}\,\delta_{b\,d}\,\delta_{i\,j} \tag{2.14}$$

Soit $\xi$ un élément de la base normalisée des chemins essentiels, nous pouvons l'illustrer de deux manières différentes, avec des triangles bi-colorés, ou des vertex "habillés" :

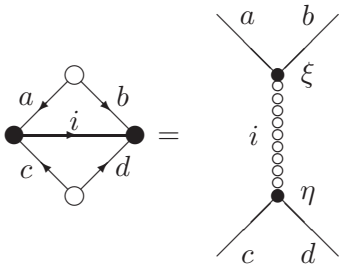
$$\xi \quad = \quad |\, a \xrightarrow{i} b\,\rangle \quad =$$




(2.15)

Considérons l'espace gradué $\mathcal{B} = \oplus_i End(H_i)$ des endomorphismes de l'espace vectoriel (gradué) $H$. Appelant $\widehat{H}_i$ l'espace vectoriel dual de $H_i$, alors $End(H_i) = H_i \otimes \widehat{H}_i$. Les éléments de la base orthonormée de $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G) = \oplus_i H_i \otimes \widehat{H}_i$ sont illustrés de la manière suivante :

$$e_{\xi\eta}(i) \quad = \quad |\, a \xrightarrow{i} b\,\rangle\,\langle\, d \xleftarrow{i} c\,| \quad =$$




(2.16)

C'est sur cet espace $\mathcal{B}$ (ou son dual $\widehat{\mathcal{B}}$) que seront définies différentes structures faisant de $\mathcal{B}$ une algèbre de Hopf faible (WHA). Pour une définition générale des propriétés d'une WHA, voir l'Annexe **C**. Nous donnons d'abord une construction générale abstraite de ses structures dans la section suivante.

### 2.2.2 Bigèbre faible $\mathcal{B}(G)$ : construction abstraite

• $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel, $\widehat{B}$ son dual.

• $\mathcal{B}$ possède un produit associatif noté $\circ$, faisant de $(\mathcal{B}, \circ)$ une algèbre. De manière duale, $\widehat{\mathcal{B}}$ possède un coproduit $\widehat{\Delta}$ coassociatif : $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\Delta})$ est une cogèbre.

• $\mathcal{B}$ possède un coproduit $\Delta$ coassociatif, faisant de $(\mathcal{B}, \Delta)$ une cogèbre. De manière duale, $\widehat{\mathcal{B}}$ possède un produit associatif noté $\widehat{\odot}$ : $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\odot})$ est une algèbre.

• Les deux structures sont compatibles, c'est-à-dire entre autre que $\Delta$ est un homomorphisme $(\mathcal{B}, \circ) \mapsto (\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \circ)$ :

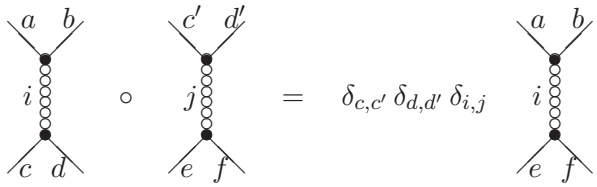
$$\Delta(u \circ v) = \Delta(u) \circ \Delta(v), \qquad u, v \in \mathcal{B}. \tag{2.17}$$

Mais les conditions de compatibilité sont prises dans le sens "faible", (notamment $\Delta(\mathbb{1}) \neq \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ mais[4] $\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2$) : $\mathcal{B}$ est appelée techniquement une bigèbre de Hopf faible. Il existe aussi une antipode $S$ dans $\mathcal{B}$ (et $\widehat{S}$ dans $\widehat{\mathcal{B}}$), faisant de $\mathcal{B}$ (et $\widehat{\mathcal{B}}$) une algèbre de Hopf faible. Tous les axiomes d'une algèbre de Hopf usuelle reliés à l'unité, à la counité et à l'antipode sont alors modifiés car ils contiennent les éléments $\mathbb{1}_1$ et $\mathbb{1}_2$. Les définitions des structures et propriétés d'une algèbre de Hopf faible sont présentées dans l'Annexe **C**.

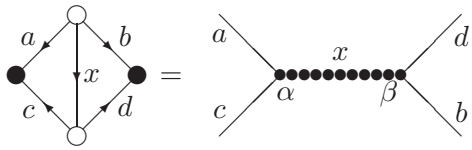
• L'algèbre $(\mathcal{B}, \circ)$ est semi-simple. Elle peut donc être diagonalisée et est isomorphe à une somme de blocs matriciels (labellés par un index $i$) agissant sur un espace vectoriel gradué $H = \oplus_i H_i$. Les matrices élémentaires (unités matricielles) de chaque bloc $i$ sont notées $e_{\xi\xi'}(i)$, où $\xi, \xi'$ appartiennent à l'espace $H_i$. Elles sont représentés diagrammatiquement dans (2.16). Le produit $\circ$ des éléments de la base de $\mathcal{B}$ correspond alors au produit des unités matricielles :

$$e_{\xi\xi'}(i) \circ e_{\eta\eta'}(j) = \delta_{ij}\, \delta_{\xi'\eta}\, e_{\xi\eta'}(i)$$

Ce produit est appelé **composition** d'endomorphismes, ou aussi **produit vertical**, et est représenté dans le diagramme suivant :




• L'algèbre $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\odot})$ est semi-simple. Elle peut donc être diagonalisée et est isomorphe à une somme de blocs matriciels (labellés par un index $x$) agissant sur un espace vectoriel gradué $V = \oplus_x V_x$. Les matrices élémentaires (unités matricielles) de chaque bloc $x$ sont notées $E^{\alpha\alpha'}(x)$, où $\alpha, \alpha'$ appartiennent à l'espace $V_x$, et sont représentés diagrammatiquement par :

$$E^{\alpha\beta}(x) \quad = \quad$$ 

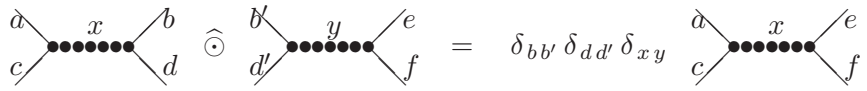
(2.18)

[4]Nous utilisons la convention de Sweedler : une sommation est implicite.

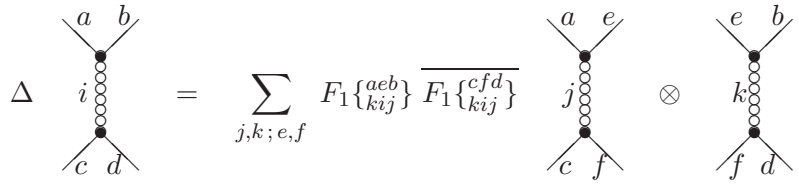
Le produit $\widehat{\odot}$ des éléments de la base de $\widehat{\mathcal{B}}$ est donné par :

$$E^{\alpha\beta}(x)\,\widehat{\odot}\,E^{\alpha'\beta'}(y) = \delta_{xy}\,\delta_{\beta\alpha'}\,E^{\alpha\beta'}(x)$$

Ce produit est appelé convolution d'endomorphismes, ou aussi **produit horizontal**, et est représenté dans le diagramme suivant :

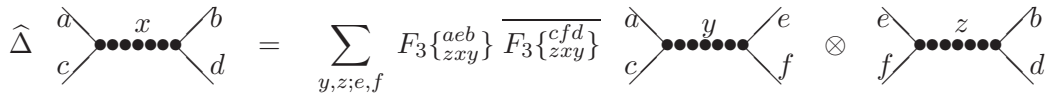



• Le coproduit $\Delta$ dans $\mathcal{B}$ est codé par un ensemble de coefficients $F_1$ :



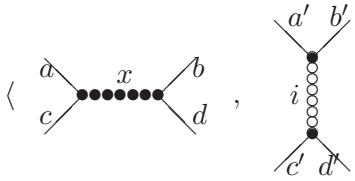

$$\sum_{j,k\,;\,e,f} F_1\{{}^{aeb}_{kij}\}\,\overline{F_1\{{}^{cfd}_{kij}\}} \tag{2.19}$$

• Le coproduit $\widehat{\Delta}$ dans $\widehat{\mathcal{B}}$ est codé par un ensemble de coefficients $F_3$ :




$$\sum_{y,z;e,f} F_3\{{}^{aeb}_{zxy}\}\,\overline{F_3\{{}^{cfd}_{zxy}\}} \tag{2.20}$$

• Il existe une forme bilinéaire (*pairing*) $\langle\,,\,\rangle : \widehat{\mathcal{B}} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ de compatibilité entre les deux structures duales, appelée **cellules d'Ocneanu**, telle que :

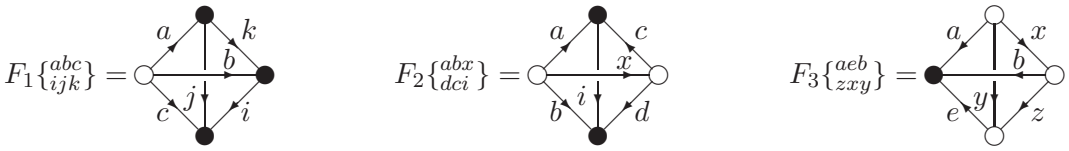



$$= \delta_{aa'}\,\delta_{bb'}\,\delta_{cc'}\,\delta_{dd'}\,F_2\{{}^{abx}_{dci}\} \tag{2.21}$$

L'ensemble de ces coefficients doit bien entendu satisfaire des conditions pour faire de $\mathcal{B}$ (et de son dual $\widehat{\mathcal{B}}$) une bigèbre de Hopf faible, décrites par un ensemble d'équations connu sous le nom de "*The Big Pentagon Equation*".

### 2.2.3 Équations pentagonales

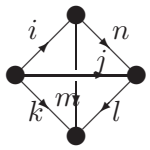
Utilisant la diagrammation des éléments de la base de $\mathcal{B}$ et de $\widehat{\mathcal{B}}$ en termes de triangles duaux, nous pouvons illustrer les coefficients $F_1$, $F_2$ et $F_3$ comme des tétrahèdres comme suit :

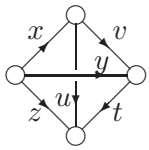


La condition de coassociativité du coproduit $\Delta$ est vérifiée s'il existe une fonction $F_0$, illustrée par un tétrahèdre sans vertex $\bigcirc$ telle que l'équation de type pentagonale suivante soit satisfaite :

$$F_0\, F_1\, F_1 \;=\; F_1\, F_1 \qquad (P_1)$$

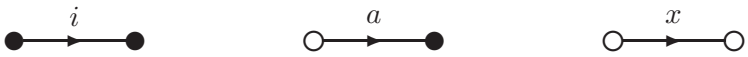
Pour que $F_0$ satisfasse $(P_1)$ il est aussi nécessaire que $F_0$ satisfasse une équation pentagonale du type $F_0\, F_0\, F_0 = F_0\, F_0$, notée $(P_0)$. De manière duale, l'associativité du coproduit dans $\widehat{B}$ impose l'existence d'une fonction $F_4$ illustrée par un tétrahèdre sans vertex $\bullet$, telle qu'elle satisfasse l'équation pentagonale du type $F_4\, F_3\, F_3 = F_3\, F_3$, notée $(P_4)$ ; de même $F_4$ doit satisfaire une équation du type $F_4\, F_4\, F_4 = F_4\, F_4$, notée $(P_5)$. Les deux fontions $F_0$ et $F_4$ sont illustrées par :

$F_0\{^{ijk}_{lmn}\} =$ 


$F_4\{^{xyz}_{tuv}\} =$ 


Enfin, la condition pour que le *pairing* transpose le coproduit de $\mathcal{B}$ en le produit de $\widehat{\mathcal{B}}$ est aussi une équation pentagonale de type $F_2\, F_1\, F_1 = F_2\, F_2$ $(P_2)$. De manière duale, la transposition du produit de $\mathcal{B}$ en le produit de $\widehat{\mathcal{B}}$ implique $F_2\, F_3\, F_3 = F_2\, F_2$ $(P_3)$.

**Remarque 2** *Nous choisissons une fois pour toute la nature des indices* $\{i, j, k, \cdots\}$ ; $\{a, b, c, \cdots\}$ ; $\{x, y, z, \cdots\}$. *Ils correspondent respectivement à trois types d'arcs (orientés) :*

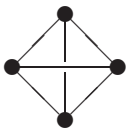


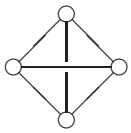

*Insistons sur le fait qu'il n'y a pas d'arc reliant* $\bullet$ *à* $\bigcirc$. *Alors la notation* $\{^{\cdots}_{\cdots}\}$ *à elle seule suffit sans qu'il soit nécessaire de préciser s'il s'agit de* $F_0, F_1, F_2, F_3$ *ou* $F_4$.

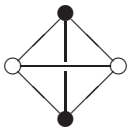
Les différents coefficients $F$ apparaisent comme des généralisations des symboles $3j$ et $6j$ quantiques. La connaissance d'un ensemble $F = (F_0, F_1, F_2, F_3, F_4)$ vérifiant "*The Big Pentagon Equation*" $(P) = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ permet alors de contruire toutes les structures d'une bigèbre de Hopf faible [8]. Toutefois, la résolution explicite de toutes les équations et la détermination des différents coefficients pose des problèmes techniques extrêmement complexes.

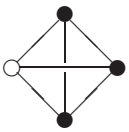
Le prototype d'une telle construction est donnée par l'espace vectoriel des endomorphismes gradués des chemins essentiels sur un graphe $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G) = \oplus_i H_i \otimes \widehat{H}_i$. Nous verrons que les différentes "fonctions tétrahédriques" sont reliées aux divers coefficients définissant les fonctions de partition de systèmes conformes à $2d$ dans différents environnements. Pour établir un lien avec les notations introduites dans le chapitre **1**, signalons simplement pour l'instant

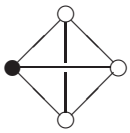
qu'il existe des relations entre les objets suivants :

$F_0 =$  $\rightsquigarrow \mathcal{N}^k_{ij}$

$F_4 =$  $\rightsquigarrow \mathcal{O}^z_{xy}$

$F_2 =$ 

$F_1 =$  $\rightsquigarrow \mathcal{F}^i_{ab}$

$F_3 =$  $\rightsquigarrow \mathcal{S}^x_{ab}$

Notre humble but ici n'est pas de présenter toute la théorie des algèbres de Hopf faibles, ni de calculer explicitement tous les coefficients de structure dans le cas des bigèbres associées à des diagrammes de Dynkin. Nous montrerons plutôt comment, à partir des structures d'une bigèbre $\mathcal{B}(G)$, sont définis deux types de graphes, les graphes $\mathcal{A}(G)$ et les graphes d'Ocneanu de $G$, et comment la simple donnée de ces deux graphes nous permet d'obtenir tous les coefficients permettant de déterminer les fonctions de partition (généralisées) des modèles conformes à deux dimensions.

### 2.2.4 Projecteurs minimaux centraux $\pi_i$ et $\varpi_x$ et graphes $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$

Soit $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des endomorphismes de chemins essentiels sur le graphe $G$, et $\widehat{\mathcal{B}}$ son dual. $(\mathcal{B}, \circ)$ et $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\odot})$ sont des algèbres. Utilisant le *pairing* $\langle \widehat{\mathcal{B}}, \mathcal{B} \rangle \to \mathbb{C}$, le produit $\widehat{\odot}$ induit un coproduit $\Delta$ dans $\mathcal{B}$ : $(\mathcal{B}, \circ, \Delta)$ est une bigèbre (faible). Mais nous pouvons aussi utiliser un produit scalaire dans $\mathcal{B}$ nous permettant de passer de $\widehat{\mathcal{B}}$ à $\mathcal{B}$, et définir alors le produit $\widehat{\odot}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}$ lui-même : nous notons alors ce produit par $\odot$. Sur $\mathcal{B}$ sont donc définies deux structures multiplicatives $\circ$ et $\odot$ : nous obtenons une **digèbre**. Notons que les deux lois doivent bien sûr satisfaire des propriétés de compatibilité. Nous considérons dorénavant la digèbre $(\mathcal{B}, \circ, \odot)$.

• $(\mathcal{B}, \circ)$ est une algèbre semi-simple et est donc isomorphe à une somme de blocs matriciels labellés par $i$. Appelons $\pi_i$ les projecteurs centraux minimaux de $(\mathcal{B}, \circ)$. Ils vérifient par définition :

$$\pi_i \circ \pi_j = \delta_{i\,j}\, \pi_j \,, \tag{2.22}$$

et sont représentés par des matrices unités dans chaque bloc. Ils engendrent un espace vectoriel noté $\mathcal{A}(G)$, de dimension $\kappa - 1$. Multipliant les projecteurs $\pi_i$ par le produit $\odot$, nous obtenons :

$$\pi_i \odot \pi_j = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k \, \pi_k \ . \tag{2.23}$$

Les projecteurs $\pi_i$ sont fermés pour la loi $\odot$. Lorsque $G$ est un graphe de type $ADE$, $\mathcal{N}_{ij}^k$ sont les coefficients entiers non-négatifs de l'algèbre de fusion (apparaissant dans les théories conformes $\widehat{su}(2)$ à deux dimensions). Le produit $\odot$ des projecteurs $\pi_i$ est codé par le graphe $\mathcal{A}(G)$ correspondant au diagramme de Dynkin de type $A_n$ ayant la même norme que $G$. Donc $\mathcal{A}(G) = A_{\kappa-1}$.

• $(\mathcal{B}, \odot)$ est aussi une algèbre semi-simple, et est donc isomorphe à une somme de blocs matriciels labellés par $x$. Appelons $\varpi(x)$ les projecteurs centraux minimaux de $(\mathcal{B}, \odot)$. Ils vérifient par définition :

$$\varpi_x \odot \varpi_y = \delta_{x\,y} \, \varpi_y \ . \tag{2.24}$$

Ils engendrent un espace vectoriel noté $Oc(G)$, de dimension $s$, et sont représentés par des matrices unités dans chaque bloc (sommes d'unités matricielles diagonales). Les unités matricielles pour les lois $\circ$ et $\odot$ ne sont pas normalisées pour le même produit scalaire. Ceci conduit à la définition de nouveaux opérateurs $\rho_x$ qui s'écrivent formellement comme les $\varpi_x$ mais dont les termes constituants diffèrent par des facteurs de normalisation. Multipliant les opérateurs $\rho_x$ à l'aide de la loi $\circ$, nous obtenons :

$$\rho_x \circ \rho_y = \sum_z \mathcal{O}_{xy}^z \, \rho_z \ . \tag{2.25}$$

Les opérateurs $\rho_x$ (moralement les projecteurs $\varpi_x$) sont fermés pour la loi $\circ$. Ils engendrent une algèbre, appelée l'**algèbre des symétries quantiques** du graphe $G$, qui est codée par le graphe d'Ocneanu de $G$, noté $Oc(G)$.

**Remarque 3** *Nous ne donnons ici aucune démonstration, nous contentant de décrire et adapter les résultats énoncés par Ocneanu dans [67] (mais jamais explicitement montrés sur des exemples concrets).*

La connaissance du graphe $G$ permet de calculer les coefficients $F_{ia}^b$ (nombre de chemins essentiels de longueur $i$ allant du vertex $v_a$ au vertex $v_b$ sur $G$). La diagonalisation explicite (obtention des projecteurs $\pi_i$ et $\varpi_x$) des deux lois $\circ$ et $\odot$ permet d'obtenir les coefficients $\mathcal{N}_{ij}^k$ et $\mathcal{O}_{xy}^z$, et donc les graphes $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$. Inversément, la donnée de ces deux graphes permet d'obtenir ces coefficients. Nous verrons comment calculer les coefficients $\mathcal{S}_{xa}^b$ (nombre de chemins "verticaux" de label $x$ allant du vertex $v_a$ au vertex $v_b$). Nous pouvons alors déterminer toutes les fonctions de partition des modèles conformes associés au graphe $G$.

### 2.2.5 Cellules d'Ocneanu

Les systèmes de cellules d'Ocneanu ont été introduits par Ocneanu dans le contexte de paragroupes et d'inclusion de sous-facteurs [68, 69] (voir aussi [37]). Ces cellules ont par la suite été reliés à des modèles intégrables définis sur le réseau (analogie avec les poids de Boltzmann [80]). Nous présentons ici les définitions adaptées au contexte de chemins (essentiels) sur des graphes.

Considérons un graphe de Dynkin $G$, ses vertex notés $v_i$ et soit $\mu_i$ la composante de Perron-Frobenius de $v_i$ (dimension quantique). Soient $\xi, \eta, \alpha, \beta$ des chemins élémentaires sur $G$, et notons $|\xi|$ la longueur du chemin $\xi$. Une cellule d'Ocneanu est un carré dont les arrêtes horizontales sont labellées par des chemins $\xi, \eta$ (avec $|\xi| = |\eta|$) et les arrêtes verticales par des chemins $\alpha, \beta$ (avec $|\alpha| = |\beta|$) tels que : $s(\xi) = s(\alpha) = v_1; r(\xi) = s(\beta) = v_2; r(\alpha) = s(\eta) = v_4; r(\eta) = r(\beta) = v_3$. Par convention, nous les représentons comme suit :

**Cellule d'Ocneanu**

$$\begin{array}{ccc} v_1 & \xi & v_2 \\ \alpha & & \beta \\ v_4 & \eta & v_3 \end{array} \tag{2.26}$$

Une celulle sera dite **basique** si les chemins qui la composent sont tous de longueur un : les chemins relient alors des vertex adjacents sur le graphe $G$. Une **connexion** $x$ est une application qui assigne à chaque cellule d'Ocneanu un nombre complexe, et qui doit vérifier certaines conditions rappelées plus loin. Ce nombre complexe coïncide avec la fonction pentagonale $F_2$ lorsque $\xi, \eta$ sont des chemins essentiels (de longueur $i$) et $\alpha, \beta$ des chemins verticaux (de label $x$), et sera noté :

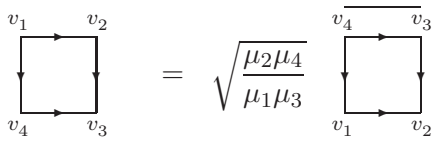
$$F_2\left\{\begin{smallmatrix} v_1 v_2 x \\ v_4 v_3 i \end{smallmatrix}\right\} = \begin{array}{ccc} v_1 & \xi & v_2 \\ \alpha & \mathbf{x} & \beta \\ v_4 & \eta & v_3 \end{array} \tag{2.27}$$

Les conventions adoptées dans la littérature diffèrent selon les auteurs : signalons deux types de convention, appelées connexions U (U pour unitaires) et connexions S (S pour standard). Elles sont reliées entre elles par :

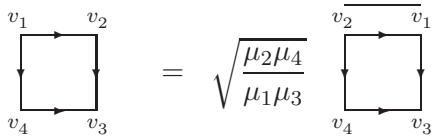
$$\begin{array}{ccc} v_1 & & v_2 \\ & U & \\ v_4 & & v_3 \end{array} = \left(\frac{\mu_2\mu_4}{\mu_1\mu_3}\right)^{\frac{1}{4}} \begin{array}{ccc} v_1 & & v_2 \\ & S & \\ v_4 & & v_3 \end{array} \tag{2.28}$$

Pour faciliter la lecture, nous n'écrivons pas explicitement les indices labellant les chemins. Nous choisissons d'utiliser les connexions U. Elles doivent satisfaire les conditions suivantes

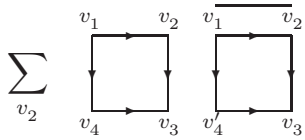
[68, 29] :




réflexion horizontale $(A_1)$

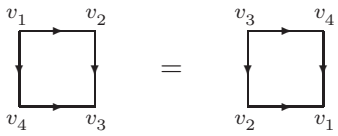



réflexion verticale $(A_2)$

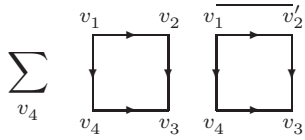



unitarité $(A_3)$

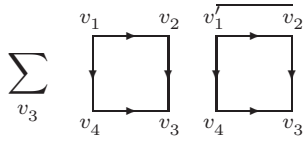
où $\overline{\square}$ est le complexe conjugué de $\square$. Les conditions précédentes impliquent aussi :



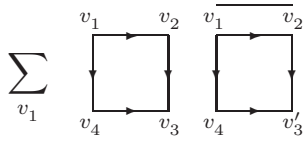

réflexion diagonale $(A_4)$




unitarité $(A_5)$




unitarité $(A_6)$




unitarité $(A_7)$

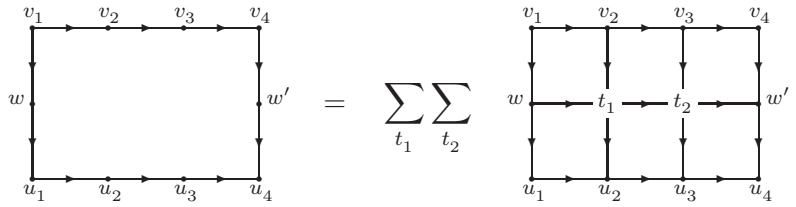
Pour un système de cellules, les conditions d'unitarité et de réflexions fixent les valeurs possibles des connexions, à une liberté de choix de jauge près. Si $X(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est la valeur d'une cellule – pour une connexion $x$ donnée – satisfaisant les propriétés $(A_1, A_2, A_3)$, alors

$$X'(v_1, v_2, v_3, v_4) = U(v_1, v_4)^* U(v_4, v_3)^* X(v_1, v_2, v_3, v_4) U(v_1, v_2) U(v_2, v_3), \tag{2.29}$$

avec $U(a, b)^* = U(b, a)$, satisfait aussi ces propriétés [80]. À un choix de jauge près, pour un système de cellules basiques, il existe deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre. Une formule générale pour ces cellules basiques est donnée dans [69] (obtenue aussi par [85]).

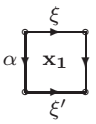
La valeur d'une connexion pour des cellules générales (appelées **macro-cellules** dans [56]) s'obtient à partir des valeurs des cellules basiques. Il est plus instructif de présenter un exemple. Considérons une cellule où les chemins horizontaux sont de longueur 3 et les chemins

verticaux de longueur 2. La valeur de la connexion de cette cellule est donnée par la somme sur toutes les configurations permises pour les vertex intérieurs de la valeur de la connexion de la cellule "remplie", où la valeur d'une connexion pour une cellule "remplie" est donnée par le produit de toutes les cellules basiques qui la composent.




Nous allons voir que le calcul des connexions nous permet d'obtenir une écriture matricielle des endomorphismes de chemins essentiels $\xi\otimes\xi'$ pour la loi $\odot$. Considérons la digèbre $(\mathcal{B},\circ,\odot)$, et la base des endomorphismes gradués de chemins essentiels $e_{\xi\xi'}=\xi\otimes\xi'$ (qui diagonalise $\mathcal{B}$ pour la loi $\circ$). $(\mathcal{B},\odot)$ est semi-simple, elle est donc isomorphe à une somme directe d'algèbre matricielle (donnant ses représentations irréductibles), labellées par $\mathbf{x}$. L'irrep fondamentale, appelée $\mathbf{x_1}$ est reliée à la connexion basique aussi notée $\mathbf{x_1}$ de la manière suivante [67]. Définissons l'application $\phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha\beta}:\mathcal{E}ss\mapsto\mathcal{E}ss$ :

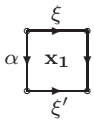
$$\phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha\beta}(\xi)=\sum_{\xi'}$$




$$\xi' \ , \tag{2.30}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des chemins de longueur un et où dans le membre de droite de (2.30) apparaît la valeur de la cellule pour la connexion $\mathbf{x_1}$. Définissons alors l'application $\Phi^{\mathbf{x_1}}$ :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha\beta}(\xi\otimes\xi')=\langle\phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha\beta}(\xi)\,,\,\xi'\rangle=$$



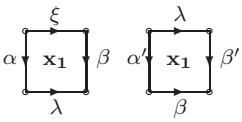

$$, \tag{2.31}$$

qui satisfait la propriété d'homomorphisme suivante :

$$\sum_{\beta}\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha\beta}(\xi\otimes\xi')\,\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\beta\gamma}(\eta\otimes\eta')\;=\;\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha\gamma}(\xi\otimes\xi'\;\odot\eta\otimes\eta')\,. \tag{2.32}$$

Nous obtenons alors la représentation matricielle d'un élément $\xi\otimes\xi'$ pour la loi $\odot$ dans le bloc $\mathbf{x_1}$. Le produit tensoriel de représentations est donné par :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}\otimes\mathbf{x_1}}_{\alpha\cdot\alpha',\beta\cdot\beta'}(\xi\otimes\xi')\;=\;\langle\phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha'\beta'}(\phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha\beta}(\xi))\,,\,\xi'\rangle\;=\;\sum_{\lambda}$$




$$\tag{2.33}$$

où $\alpha\cdot\alpha'$ représente la concaténation des chemins $\alpha$ et $\alpha'$. Nous sommes donc en mesure de trouver la représentation matricielle de tous les éléments de la base $\xi\otimes\xi'$ de $\mathcal{B}$ pour la loi $\odot$, et ainsi d'en déduire la table de multiplication :

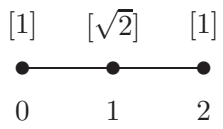
$$(\xi\otimes\xi')\odot(\eta\otimes\eta'). \tag{2.34}$$

Il suffit alors de trouver la décomposition du produit tensoriel des irreps $\mathbf{x_1} \otimes \mathbf{x_1}$ en somme de irreps $\mathbf{x_i}$, et ainsi trouver la décomposition en blocs (labellés par $\mathbf{x}$) de $(\mathcal{B}, \odot)$. Il est plus instructif d'étudier en détail un exemple, nous traitons le cas du diagramme $A_3$ dans la section suivante.

## 2.3 Une construction explicite

### 2.3.1 Cas $A_3$

Le graphe $A_3$ possède trois vertex notés $0, 1, 2$ et son nombre de Coxeter $\kappa = 4$, il est représenté ci-dessous, où sont aussi indiquées (entre crochets) les dimensions quantiques $\mu_i$ de ses vertex.




Une base orthonormée des chemins essentiels $\xi$ est donnée par l'ensemble de 3+4+3=10 vecteurs suivants :

$$v_0 = P(0)\,,\ v_1 = P(1)\,,\ v_2 = P(2)$$

$$r_0 = P(0,1)\,,\ \ell_1 = P(1,0)\,,\ r_1 = P(1,2)\,,\ \ell_2 = P(2,1)$$

$$d = P(0,1,2)\,,\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(P(1,2,1) - P(1,0,1))\,,\ g = P(2,1,0)$$

Les endomorphismes gradués de chemins essentiels $\xi \otimes \xi'$ seront notés plus simplement $\xi\xi'$, où $\xi$ et $\xi'$ sont des chemins essentiels de même longueur. Ils forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A_3)$, de dimension $3^2 + 4^2 + 3^2 = 34$.

**Loi de composition** Le produit de composition $\circ$ dans $\mathcal{B}$ est défini par :

$$\xi\eta \circ \xi'\eta' = \langle \eta, \xi' \rangle \xi\eta' = \delta_{\eta\xi'}\ \xi\eta'.$$

$(\mathcal{B}, \circ)$ est isomorphe à une somme directe de blocs matriciels labellés par la longueur $i$ des chemins essentiels : $\mathcal{B} \cong \bigoplus_{i=0}^{2} L^i$. Nous pouvons écrire de manière condensée la $(\circ)$-représentation

matricielle des éléments $\xi\xi'$ comme :

$$(\mathcal{B},\circ) \cong \begin{pmatrix} v_0v_0 & v_0v_1 & v_0v_2 & . & . & . & . & . & . & . \\ v_1v_0 & v_1v_1 & v_1v_2 & . & . & . & . & . & . & . \\ v_2v_0 & v_2v_1 & v_2v_2 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & r_0r_0 & r_0\ell_1 & r_0r_1 & r_0\ell_2 & . & . & . \\ . & . & . & \ell_1r_0 & \ell_1\ell_1 & \ell_1r_1 & \ell_1\ell_2 & . & . & . \\ . & . & . & r_1r_0 & r_1\ell_1 & r_1r_1 & r_1\ell_2 & . & . & . \\ . & . & . & \ell_2r_0 & \ell_2\ell_1 & \ell_2r_1 & \ell_2\ell_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & dd & d\gamma & dg \\ . & . & . & . & . & . & . & \gamma d & \gamma\gamma & \gamma g \\ . & . & . & . & . & . & . & gd & g\gamma & gg \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

La convention adoptée est la suivante : pour obtenir la $(\circ)$-représentation d'un élément $\xi\xi'$, on remplace cet élément par 1 et tous éléments $\eta\eta' \neq \xi\xi'$ par 0. Chaque élément est représenté par une matrice élémentaire. Par exemple :

$$v_0v_1 = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \qquad v_1v_0 = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$v_0v_0 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

et la multiplication matricielle reproduit bien le produit $\circ$ :

$$v_0v_1 \circ v_1v_0 = v_0v_0.$$

Le neutre pour la loi $\circ$ (matrice unité) est donné par :

$$1_\circ = v_0v_0 + v_1v_1 + v_2v_2 + r_0r_0 + \ell_1\ell_1 + r_1r_1 + \ell_2\ell_2 + dd + \gamma\gamma + gg. \tag{2.36}$$

Les projecteurs minimaux centraux $\pi_i$ pour $(\mathcal{B},\circ)$ sont donnés par :

$$\pi_0 = v_0v_0 + v_1v_1 + v_2v_2\ ,$$

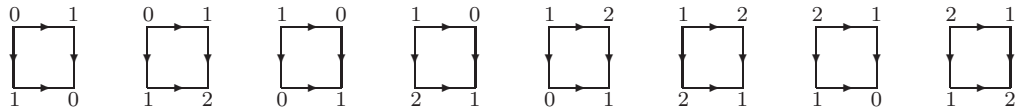
$$\pi_1 = r_0 r_0 + \ell_1 \ell_1 + r_1 r_1 + \ell_2 \ell_2 \ ,$$

$$\pi_2 = dd + \gamma\gamma + gg \ .$$

Nous vérifions qu'ils satisfont bien aux relations suivantes :

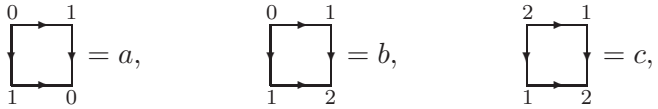
$$\pi_i \circ \pi_j = \delta_{i\,j} \ \pi_i \ . \tag{2.37}$$

**Cellules d'Ocneanu** Considérons les cellules d'Ocneanu où les chemins horizontaux et verticaux sont de longueur un (cellules basiques). Il existe huit cellules différentes de ce type :




(2.38)

La connexion $\mathbf{x_1}$ est définie sur des cellules où les chemins verticaux sont de longueur 1 (donc notamment sur les huit cellules basiques ci-dessus). Elle associe à chaque cellule un nombre complexe, devant satisfaire des conditions de réflexion et d'unitarité. Nous codons les résultats dans une matrice $4 \times 4$ notée $C$, où les indices de colonne correspondent au chemin horizontal supérieur et les indices de ligne au chemin horizontal inférieur, dans l'ordre suivant (01 , 10 , 12 , 21). Par exemple, la valeur de la cellule basique à l'extrême-gauche de (2.38) correspond à l'élément $C_{21}$. Nous fixons la valeur des trois cellules suivantes :




$a, b, c \in \mathbb{C}.$

Alors, utilisant les propriétés de réflexion et d'unitarité, la matrice $C$ la plus générale s'écrit :

$$C = \begin{pmatrix} \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} a^* & \frac{1}{\sqrt{2}} b^* & \cdot \\ a & \cdot & \cdot & b \\ b & \cdot & \cdot & c \\ \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} b^* & \frac{1}{\sqrt{2}} c^* & \cdot \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 = |b|^2 = |c|^2 = 1 \ , \ a^* b + b^* c = 0.$$

Nous pouvons choisir $a = 1, b = 1, c = -1$ (liberté de choix de jauge), et la matrice $C$ s'écrit :

$$C = \begin{pmatrix} \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \end{pmatrix}$$

**Produit de convolution** La représentation matricielle du produit de convolution $\odot$ des éléments $\xi\xi'$ est calculée à travers le calcul des cellules d'Ocneanu. Considérons d'abord la connexion $\mathbf{x_1}$.

• $\mathbf{x_1}$ La représentation matricielle pour la loi $\odot$ des éléments $\xi\xi'$ est donnée par :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha,\beta}(\xi\xi') = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\alpha"'] & \cdot \arrow[d, "\beta"] \\ \cdot \arrow[r, "\xi'"'] & \cdot \end{tikzcd},$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des chemins de longueur un. La matrice $\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha\beta}$ est donc une matrice $4 \times 4$, où l'ordre choisi[5] pour les indices est $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1})$ :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha,\beta} = \begin{array}{c} \\ \frac{0}{1} \\ \frac{1}{0} \\ \frac{0}{1} \\ \frac{1}{0} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \frac{0}{1} & \frac{1}{0} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour des endomorphismes $\xi\xi'$ de longueur un, la valeur de la connexion $\mathbf{x_1}$ est codée dans la matrice $C$ (cellules basiques). Nous avons par exemple :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\substack{0\ 1\\ 1,0}}(r_0\,\ell_1) = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} = 1\,, \qquad \Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha,\beta}(r_0\,\ell_1) = 0, \qquad \text{si } (\alpha,\beta) \neq (\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{0}),$$

et la représentation matricielle de $r_0\ell_1$ est donc donnée par :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha,\beta}(r_0\ell_1) = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Pour les endomorphismes de longueur 0, la valeur de la connexion $\mathbf{x_1}$ est égale par convention à 1 (ceci est relié à l'axiome de *flatness* de Ocneanu [67]). Par exemple :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha,\beta}(v_0v_1) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha,\beta}(v_1v_2) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Pour les chemins essentiels de longueur deux, prenons l'exemple de $d\gamma$. Rappelons que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(121 - 101)$, nous avons :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\substack{0\ 2\\ 1,1}}(d\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left( \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \\ \cdot \arrow[u] & \cdot \arrow[u] & \cdot \arrow[u] \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd} - \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \\ \cdot \arrow[u] & \cdot \arrow[u] & \cdot \arrow[u] \\ 1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

[5] Attention, les indices de lignes et de colonnes représentent maintenant des chemins verticaux.

Nous obtenons ainsi la suivante représentation matricielle des éléments $\xi\xi'$ pour la loi $\odot$ :

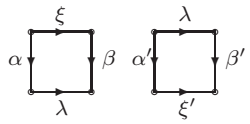
$$\Phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha,\beta}(\xi\xi') = \begin{pmatrix} v_0v_1 & r_0\ell_1 & r_0r_1 & -d\gamma \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_1r_0 & v_1v_0 & -\gamma d & \frac{1}{\sqrt{2}}r_1r_0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_1\ell_2 & -\gamma g & v_1v_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1\ell_2 \\ -g\gamma & \ell_2\ell_1 & -\ell_2r_1 & v_2v_1 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

La convention adoptée est la suivante : pour obtenir la $(\odot)$-représentation de l'élément $\xi\xi'$, nous remplaçons cet élément par 1 et tous éléments $\eta\eta' \neq \xi\xi'$ par 0. De (2.39) nous pouvons lire par exemple :

$$r_0l_1 \odot l_1r_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0v_1, \qquad \gamma d \odot \ell_1\ell_2 = -\ell_1r_0.$$

• $\mathbf{x_1} \otimes \mathbf{x_1}$ La représentation matricielle pour la loi $\odot$ d'un élément $\xi\xi'$ pour le produit tensoriel est donnée par :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}\otimes\mathbf{x_1}}_{\alpha\cdot\alpha',\beta\cdot\beta'}(\xi\xi') \;=\; \langle \phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha'\beta'}(\phi^{\mathbf{x_1}}_{\alpha\beta}(\xi))\;,\;\xi'\rangle \;=\; \sum_{\lambda}$$



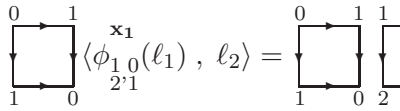

(2.40)

où les chemins verticaux $\alpha\cdot\alpha'$ et $\beta\cdot\beta'$ sont maintenant des chemins de longueur deux. Pour le diagramme $A_3$, la matrice $\Phi_{\alpha\cdot\alpha',\beta\cdot\beta'}$ est une matrice $6\times 6$, où l'ordre choisi pour les indices est $(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix})$ :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}\otimes\mathbf{x_1}}_{\alpha\cdot\alpha',\beta\cdot\beta'} = \begin{array}{c} \\ \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

Par exemple, nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathbf{x_1}\otimes\mathbf{x_1}}_{\substack{0\;1\\1,0\\2\;1}}(r_0\ell_2) &= \langle \phi^{\mathbf{x_1}}_{\substack{1\;0\\2,1}}(\phi^{\mathbf{x_1}}_{\substack{0\;1\\1,0}}(r_0))\;,\;\ell_2\rangle \\ &= \langle \phi^{\mathbf{x_1}}_{\substack{1\;0\\2,1}}(\ell_1)\;,\;\ell_2\rangle = \langle \ell_2\;,\;\ell_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



Étendant le calcul aux autres éléments $\xi\xi'$, nous trouvons :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}\otimes\mathbf{x_1}}_{\alpha\cdot\alpha',\beta\cdot\beta'}(\xi\xi') = \begin{pmatrix} v_0v_0 & . & \frac{1}{\sqrt{2}}r_0r_0 & \frac{1}{\sqrt{2}}r_0r_0 & . & dd \\ . & v_0v_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}r_0\ell_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}r_0\ell_2 & dg & . \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_1\ell_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_1r_1 & v_1v_1 & \gamma\gamma & \frac{1}{\sqrt{2}}r_1\ell_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}r_1r_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_1\ell_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\ell_1r_1 & \gamma\gamma & v_1v_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1\ell_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}r_1r_1 \\ . & gd & \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_2r_0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\ell_2r_0 & v_2v_0 & . \\ gg & . & \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_2\ell_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_2\ell_2 & . & v_2v_2 \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

Par exemple, la $\odot$-représentation matricielle des éléments $v_0v_0$, $r_0l_2$ et $\ell_1\ell_1$ est donnée par :

$$r_0r_0 = \begin{pmatrix} . & . & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \quad \ell_2\ell_2 = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & . & . & . & . & . \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \quad v_0v_0 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

et nous pouvons alors en déduire :

$$r_0r_0 \odot \ell_2\ell_2 = v_0v_0.$$

Pour diagonaliser la loi $\odot$, nous effectuons le suivant changement de base des indices de la matrice $\Phi_{\alpha\cdot\alpha',\beta\cdot\beta'}$ :

$$\underline{0} = \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} \qquad \underline{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right), \qquad \underline{2} = \begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix},$$

$$\underline{d} = \begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}, \qquad \underline{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \qquad \underline{g} = \begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}.$$

Alors, dans l'ordre $(\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\,;\, \underline{g}, \underline{\gamma}, \underline{d})$, nous obtenons :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}\otimes\mathbf{x_1}}_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\xi\xi') = \begin{pmatrix} v_0v_0 & r_0r_0 & dd & . & . & . \\ \ell_1\ell_1 & v_1v_1+\gamma\gamma & r_1r_1 & . & . & . \\ gg & \ell_2\ell_2 & v_2v_2 & . & . & . \\ . & . & . & v_0v_2 & -r_0\ell_2 & dg \\ . & . & . & -\ell_1r_1 & v_1v_1-\gamma\gamma & -r_1\ell_1 \\ . & . & . & gd & -\ell_2r_0 & v_2v_0 \end{pmatrix}$$

et nous obtenons alors la décomposition suivante du produit tensoriel de représentations :

$$\Phi^{\mathbf{x_1}\otimes\mathbf{x_1}} = \Phi^{\mathbf{x_0}} \oplus \Phi^{\mathbf{x_2}} \tag{2.42}$$

qui définissent deux autres connexions $\mathbf{x_0}$ (reliée à la représentation identité) et $\mathbf{x_2}$.

**Représentation matricielle de la loi $\odot$** $(\mathcal{B},\odot)$ est donc isomorphe à une somme d'algèbres matricielles (blocs) labellées par un indice $\mathbf{x}$ : $(\mathcal{B},\odot) \cong \bigoplus_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}^{2} \Phi^{\mathbf{x}}$

$$(\mathcal{B},\odot) \cong \begin{pmatrix} v_0v_0 & r_0r_0 & dd & . & . & . & . & . & . & . \\ \ell_1\ell_1 & v_1v_1+\gamma\gamma & r_1r_1 & . & . & . & . & . & . & . \\ gg & \ell_2\ell_2 & v_2v_2 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & v_0v_1 & r_0\ell_1 & r_0r_1 & -d\gamma & . & . & . \\ . & . & . & \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_1r_0 & v_1v_0 & -\gamma d & \frac{1}{\sqrt{2}}r_1r_0 & . & . & . \\ . & . & . & \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_1\ell_2 & -\gamma g & v_1v_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1\ell_2 & . & . & . \\ . & . & . & -g\gamma & \ell_2\ell_1 & -\ell_2r_1 & v_2v_1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & v_0v_2 & -r_0\ell_2 & dg \\ . & . & . & . & . & . & . & -\ell_1r_1 & v_1v_1-\gamma\gamma & -r_1\ell_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & gd & -\ell_2r_0 & v_2v_0 \end{pmatrix}$$

Rappelons que pour obtenir la $(\odot)$-représentation matricielle d'un élément $\xi\xi'$, nous remplaçons cet élément par 1 et tous les éléments $\eta\eta' \neq \xi\xi'$ par 0. À partir de cette représentation matricielle[6], nous pouvons alors calculer le produit $\odot$ des éléments de $\mathcal{B}$. La connaissance du produit $\odot$ défini dans $\mathcal{B}$ – et par conséquent du produit $\widehat{\odot}$ dans $\widehat{\mathcal{B}}$ – nous permet de calculer le coproduit $\Delta$ dans $\mathcal{B}$, à travers :

$$\langle u \otimes v, \Delta(x)\rangle = \langle u \,\widehat{\odot}\, v, x\rangle \qquad\qquad x \in \mathcal{B};\ u,v \in \widehat{\mathcal{B}} \tag{2.43}$$

Nous vérifions alors que la propriété d'homomorphisme $\Delta(x \circ y) = \Delta(x) \circ \Delta(y)$ est satisfaite. Les matrices élémentaires non-triviales correspondent aux positions $(2,2)$ dans le premier bloc (notée $a_{22}$) et dans le troisième bloc (notée $c_{22}$). Elles sont données par :

$$a_{22} = \frac{1}{2}(v_1v_1+\gamma\gamma), \qquad\qquad c_{22} = \frac{1}{2}(v_1v_1-\gamma\gamma).$$

Le neutre pour cette loi (la matrice identité) s'écrit en termes d'endomorphismes :

$$1_\odot = v_0v_0 + v_1v_1 + v_2v_2 + v_0v_1 + v_1v_0 + v_1v_2 + v_2v_1 + v_0v_2 + v_2v_0$$

Les projecteurs minimaux centraux sont donnés par :

$$\varpi_0 = v_0v_0 + \frac{1}{2}(v_1v_1+\gamma\gamma) + v_2v_2\ ,$$

$$\varpi_1 = v_0v_1 + v_1v_0 + v_1v_2 + v_2v_1\ ,$$

$$\varpi_2 = v_0v_2 + \frac{1}{2}(v_1v_1-\gamma\gamma) + v_2v_0\ .$$

Ils vérifient les relations :

$$\varpi_x \odot \varpi_y = \delta_{x\,y}\ \varpi_y\ .$$

[6]Cette $(\odot)$-représentation matricielle a aussi été obtenue, de manière indépendante, par R. Trinchero [86].

**Graphes $\mathcal{A}(A_3)$ et $Oc(A_3)$** Les projecteurs minimaux centraux $\pi_i$ et $\varpi_x$ s'expriment en termes d'endomorphismes. Ils vérifient les relations :

$$\pi_i \circ \pi_j = \delta_{i\,j}\ \pi_j, \qquad\qquad \varpi_x \odot \varpi_y = \delta_{x\,y}\ \varpi_y.$$

Ayant obtenu les décompositions en blocs de $\mathcal{B}(A_3)$ pour ses deux structures multiplicatives $\circ$ et $\odot$, nous pouvons alors multiplier les projecteurs définis pour une loi par l'autre loi. Nous obtenons :

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl@{\qquad}lcl}
\pi_0 \odot \pi_0 & = & \pi_0 & \pi_1 \odot \pi_0 & = & \pi_1 & \pi_2 \odot \pi_0 & = & \pi_2 \\
\pi_0 \odot \pi_1 & = & \pi_1 & \pi_1 \odot \pi_1 & = & \pi_0 + \pi_2 & \pi_2 \odot \pi_1 & = & \pi_1 \\
\pi_0 \odot \pi_2 & = & \pi_2 & \pi_1 \odot \pi_2 & = & \pi_1 & \pi_2 \odot \pi_2 & = & \pi_0
\end{array}$$

Les projecteurs $\pi_i$ pour la loi $\odot$ définissent l'algèbre $\mathcal{A}_3$. Si nous décidons de coder cette algèbre dans un graphe, tel que ses vertex soient en correspondance avec $\pi_i$ et tel que la multiplication par $\pi_1$ de $\pi_i$ soit égale à la somme des voisins de $\pi_i$ sur le graphe, nous obtenons le graphe $\mathcal{A}(A_3) = A_3$.

Considérons maintenant la multiplication $\circ$ des projecteurs $\varpi_x$ : ces projecteurs ne sont pas fermés pour la loi $\circ$. Par contre, en définissant les projecteurs renormalisés $\rho_x$ suivants :

$$\rho_0 = v_0 v_0 + v_1 v_1 + \gamma\gamma + v_2 v_2$$

$$\rho_1 = \varpi_1$$

$$\rho_2 = v_0 v_2 + v_1 v_1 - \gamma\gamma + v_2 v_0$$

alors nous obtenons :

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl@{\qquad}lcl}
\rho_0 \circ \rho_0 & = & \rho_0 & \rho_1 \circ \rho_0 & = & \rho_1 & \rho_2 \circ \rho_0 & = & \rho_2 \\
\rho_0 \circ \rho_1 & = & \rho_1 & \rho_1 \circ \rho_1 & = & \rho_0 + \rho_2 & \rho_2 \circ \rho_1 & = & \rho_1 \\
\rho_0 \circ \rho_2 & = & \rho_2 & \rho_1 \circ \rho_2 & = & \rho_1 & \rho_2 \circ \rho_2 & = & \rho_0
\end{array}$$

Ces relations définissent l'algèbre $Oc(A_3)$, appelée algèbre des symétries quantiques de $A_3$. La multiplication par le projecteur $\rho_1$ est codée par le graphe $Oc(A_3)$, et nous obtenons $Oc(A_3) = A_3$. Le passage des projecteurs $\varpi_x$ aux projecteurs renormalisés $\rho_x$ – nécéssaire à l'obtention de l'algèbre $Oc(A_3)$ – provient d'un produit scalaire non-trivial (différent du produit scalaire définissant l'orthonormalité des chemins élémentaires) pour effectuer le passage entre $\mathcal{B}$ et son dual $\widehat{\mathcal{B}}$ [27]. Plus précisemment, les unités matricielles associées à la loi $\circ$ constituent une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien induit de celui des chemins élémentaires (ceux-ci sont orthonormés), mais les unités matricielles associées à la loi $\odot$ constituent une base non-orthonormée pour ce produit scalaire. Nous pouvons introduire un nouveau produit scalaire hermitien pour lequel elles sont orthonormées. Cette différence de normalisation est à l'origine de la différence existante entre les expressions des opérateurs $\varpi_x$ et des opérateurs $\rho_x$.

### 2.3.2 Graphes $G$ du type $ADE$ et généralisations

L'étude de la digèbre associée au diagramme de Dynkin $A_3$ montre l'extrême richesse de ses structures, mais aussi son extrême complexité, alors que $A_3$ est le cas le plus simple – hormis $A_2$ – des diagrammes de Dynkin puisqu'il ne comporte que trois points ! Bien que la diagonalisation de la loi de composition $\circ$ et l'obtention des projecteurs $\pi_i$ soient presque immédiats, la définition de la loi $\odot$ – à travers le calcul des cellules d'Ocneanu– sa diagonalisation et l'obtention des projecteurs $\varpi_x$ est nettement plus difficile.

Nous conjecturons que la multiplication des endomorphismes $\xi\xi'$ pour la loi $\odot$ peut être obtenue à partir d'une structure algébrique $\star$ définie directement sur l'espace vectoriel des chemins essentiels :

$$\xi\xi' \odot \eta\eta' \stackrel{?}{=} \mathcal{P}\left[(\xi \star \eta)(\xi' \star \eta')\right] , \tag{2.44}$$

où $\mathcal{P}$ est un opérateur qui projette sur les endomorphismes gradués par la longueur. La diagonalisation de cette loi $\star$ dans cet espace vectoriel définirait alors une base des chemins verticaux de l'espace $V_x$. L'existence de ce produit $\star$ permettrait alors de définir de manière beaucoup plus directe la loi $\odot$, sans la nécéssité de faire usage des cellules d'Ocneanu. Cependant, cette construction n'est pas connue à ce jour.

Les graphes d'Ocneanu pour les cas du type $su(2)$ s'obtiennent *a priori* à travers la diagonalisation de la loi $\odot$, et sont premièrement apparus dans la littérature dans [67]. Cependant, leur construction par Ocneanu lui-même s'est en fait basée sur la classification des invariants modulaires de $\widehat{su}(2)$ de Cappelli-Itzykson-Zuber. La diagonalisation de la loi $\odot$ ne semble jamais avoir été explicitement menée. Nous prendrons donc dans un premier temps ces graphes d'Ocneanu comme donnée initiale. Nous allons établir dans le prochain chapitre une réalisation de l'algèbre des symétries quantiques d'Ocneanu nous permettant de retrouver les graphes d'Ocneanu.

La digèbre $\mathcal{B}(G)$ est construite à partir des diagrammes de Dynkin de type $ADE$. Une définition de $\mathcal{B}(G)$ pour des diagrammes de Coxeter-Dynkin généralisés est possible, mais aucune définition précise de cette digèbre généralisée n'est à ce jour disponible dans la littérature.

Les graphes d'Ocneanu pour les cas du type $su(3)$ et $su(4)$ ont été obtenus par Ocneanu (mais jamais publiés) : sa construction pour $su(3)$ s'est basée sur la classification des invariants modulaires de $\widehat{su}(3)$ de Gannon ; pour $su(4)$ une technique originale a été développée [71]. Nous verrons que notre réalisation permet aussi de reconstruire les graphes d'Ocneanu pour certaines classes d'exemples.

# Chapitre 3

# Des graphes aux fonctions de partition

Les graphes d'Ocneanu – et les algèbres des symétries quantiques $Oc(G)$ – sont connus pour les cas du type $su(2)$ [67]. Dans ce chapitre nous allons présenter une réalisation de l'algèbre $Oc(G)$ comme un certain quotient du carré tensoriel de l'algèbre du graphe $G$, où $G$ est un diagramme de Dynkin $ADE$. D'une part cette réalisation permet d'obtenir un algorithme très simple pour le calcul des divers coefficients définissant les fonctions de partition généralisées du modèle conforme $\widehat{su}(2)$ associé au graphe $G$. D'autre part, cette réalisation se prête naturellement à une généralisation aux cas $su(n), n \geq 3$, ce qui nous a permis de définir le graphe d'Ocneanu et l'algèbre $Oc(G)$ pour certains exemples choisis du type $su(3)$ et ainsi obtenir les fonctions de partition généralisées associées à ces exemples.

## 3.1 Représentations irréductibles et graphes $\mathcal{A}$

### 3.1.1 Définitions

#### Cas classique

Considérons le groupe $SU(n)$ et ses représentations irréductibles $(i) \in \text{Irr } SU(n)$. Ce groupe possède $n-1$ représentations fondamentales, en ce sens que les autres représentations irréductibles peuvent être obtenues par tensorialisation puis réduction à partir des fondamentales. Chaque représentation fondamentale donne lieu à un graphe infini, dont les vertex sont labellés par $(i) \in \text{Irr } SU(n)$ et dont les arcs correspondent à la tensorialisation par la représentation fondamentale.

Par exemple le groupe $SU(2)$ possède une représentation fondamentale, de dimension deux, notée (2), et la décomposition du produit tensoriel d'une irrep $(n) \in \text{Irr } SU(2)$ par la fondamentale (2) est donnée par la formule suivante (correspondant au couplage d'une

particule de spin 1/2 avec une particule de spin $j = (n-1)/2)$ :

$$(2) \otimes (n) = (n-1) \oplus (n+1). \tag{3.1}$$

Le résultat de cette décomposition peut être codé dans le graphe $A_\infty$ de $SU(2)$ illustré à la Fig.3.1.

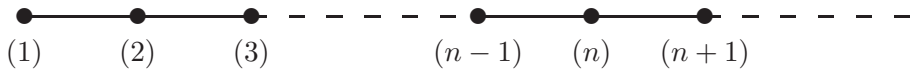



FIG. 3.1 – Graphe $A_\infty$ de $SU(2)$.

Les vertex de ce graphe sont labellés par les irreps $(i) \in \mathrm{Irr}\, SU(2)$, et $(2)\otimes(i)$ se décompose en la somme directe d'irreps $(j)$, tel que $(j)$ soit voisin de $(i)$ sur le graphe. L'exemple de $SU(2)$ est traité de manière plus détaillée dans l'Annexe **B**.

Le groupe $SU(3)$ possède deux représentations fondamentales (notées[1] 3 et $\overline{3}$), chacune donnant lieu à un graphe infini $\mathcal{A}_\infty$. Les représentations 3 et $\overline{3}$ étant conjuguées, le graphe correspondant à la tensorialisation par $\overline{3}$ s'obtient en inversant la direction des arcs du graphe correspondant à 3. Le graphe $A_\infty$ de $SU(3)$ correspondant à la représentation 3 est illustré à la Fig. 3.2. Nous lisons sur le graphe, par exemple : $3 \otimes 3 = \overline{3} \oplus 6$, car il y a un arc reliant 3 à $\overline{3}$ et un arc reliant 3 à 6.

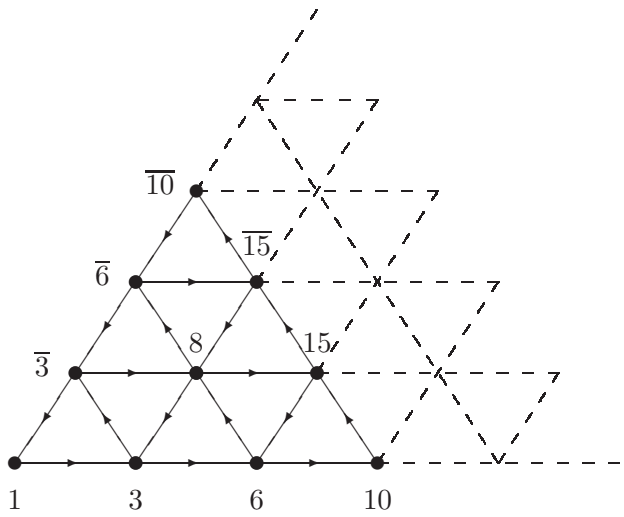



FIG. 3.2 – Graphe $\mathcal{A}_\infty$ de $SU(3)$ pour la représentation 3.

[1]Nous avons choisi de labeller les irreps de $SU(3)$ par leur dimension, mais nous aurions pu aussi les labeller par des diagrammes de Young.

### Cas quantique

Les groupes de Lie en général possèdent des déformations quantiques (groupes quantiques), dont un exemple bien connu est fourni par le groupe quantique $U_q(sl(n))$. Aux racines de l'unité ($q^N = 1$), nous pouvons définir des quotients de Hopf non semi-simples, de dimension finie – génériquement désignés par $u_q(sl(n))$ – à partir du groupe quantique $U_q(sl(n))$ : ces groupes quantiques possèdent alors un nombre fini de représentations irréductibles (nous nous intéressons en fait à celles qui sont de q-dimension non-nulle : voir Annexe **B** pour le cas $u_q(sl(2))$). Nous décidons de noter $SU(n)_\ell = u_q(sl(n))$ pour $q$ racine de l'unité[2] :

$$q^{2(\ell+h)} = q^{2\kappa} = 1, \tag{3.2}$$

où $\ell$ est appelé le niveau et $h$ est le nombre (dual) de Coxeter du groupe classique correspondant (pour $SU(n)$, $h = n$). $\kappa$ est le nombre de Coxeter généralisé (parfois appelé altitude) et est défini par la relation $\kappa = \ell + h$. De manière analogue au cas classique, nous pouvons associer à chaque représentation fondamentale de $SU(n)_\ell$ un graphe : ce graphe s'obtient par troncation (au niveau $\ell$) du graphe du cas classique correspondant.

Ainsi, pour $SU(2)_\ell$, $h = 2$ et à la $2(\ell + 2)$-ième racine de l'unité, nous obtenons le graphe $\mathcal{A}_\ell = A_{\ell+1}$[3] de $SU(2)_\ell$. Pour $SU(3)_\ell$, $h = 3$, et à la $2(\ell + 3)$-ième racine de l'unité, nous obtenons le graphe $\mathcal{A}_\ell$ de $SU(3)_\ell$.

Pour $SU(2)_4$, nous avons $\mathcal{A}_4 = A_5$, ce graphe possède 5 vertex notés $\tau_0, \cdots, \tau_4$. La représentation identité est $\tau_0$ et la fondamentale $\tau_1$. Pour $SU(3)_4$, le graphe $\mathcal{A}_4$ possède 15 vertex. De manière générale, le graphe $\mathcal{A}_\ell$ de $SU(3)_\ell$ possède $(\ell + 1)(\ell + 2)/2$ vertex que nous labellons[4] par $(\lambda_1, \lambda_2)$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \ell$. La représentation identité est $(0, 0)$ et les deux représentations fondamentales (conjuguées) sont $(1, 0)$ et $(0, 1)$ : le graphe code la tensorialisation par $(1, 0)$. Le graphe de tensorialisation par $(0, 1)$ est obtenu en inversant la direction des arcs. Les graphes $\mathcal{A}_4$ de $SU(2)_4$ et $SU(3)_4$ sont représentés pour à la Fig. 3.3.

### 3.1.2 Algèbre de graphe et matrices $N_i$

Le graphe $\mathcal{A}_\ell$ code la décomposition de la tensorialisation des irreps $(i)$ (vertex des graphes) par les représentations fondamentales ($\tau_1$ pour $SU(2)_\ell$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ pour $SU(3)_\ell$). Cette information permet de calculer la fusion de toute irrep :

$$(i).(j) = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k\ (k), \tag{3.3}$$

[2]Attention : l'index $q$ de $u_q$ est quelquefois noté $q^{1/2}$ dans la littérature.

[3]Pour le cas $SU(2)_\ell$, les graphes $\mathcal{A}_\ell$ correspondent aux diagrammes de Dynkin de type $A_{\ell+1}$ : nous réservons la notation caligraphique pour les graphes labellés par le niveau $\ell$, la notation standard pour les graphes labellés par le nombre de vertex, c.à.d. par le rang de l'algèbre de Lie correspondante au diagramme de Dynkin.

[4]Notre convention pour les indices des vertex de $SU(3)_\ell$ commencent à 0 et non à 1. Certains auteurs adoptent des conventions différentes.

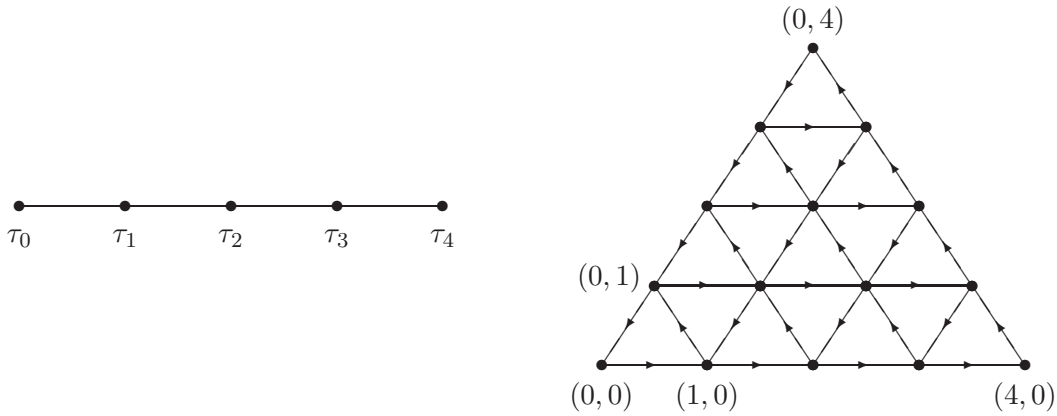



FIG. 3.3 – Les graphes $\mathcal{A}_4$ pour $SU(2)_4$ (5 vertex) et $SU(3)_4$ (15 vertex).

où $\mathcal{N}_{ij}^k$ sont des nombres entiers non-négatifs (multiplicité de $(k)$ dans $(i).(j)$). Nous appelons cette algèbre l'**algèbre du graphe** $\mathcal{A}_\ell$ ou plus simplement l'algèbre $\mathcal{A}_\ell$.

**Cas** $SU(2)_\ell$

Les vertex des graphes $A_n$ sont notés $\tau_i$, pour $i = (0, 1, \cdots, \kappa - 2)$. Nous savons multiplier par l'identité $\tau_0$ et par la fondamentale $\tau_1$ (à l'aide du graphe). En imposant l'associativité, nous construisons de proche en proche la table de multiplication de l'algèbre du graphe $A_n$. Par exemple, pour $n > 4$, nous avons $\tau_1.\tau_1 = \tau_0 + \tau_2$, donc nous écrivons $\tau_2 = \tau_1.\tau_1 - \tau_0$, d'où nous déduisons :

$$\begin{aligned} \tau_2.\tau_2 = (\tau_1.\tau_1 - \tau_0).\tau_2 = \tau_1.\tau_1.\tau_2 - \tau_0.\tau_2 &= \tau_1.(\tau_1 + \tau_3) - \tau_2 \\ &= \tau_0 + \tau_2 + \tau_2 + \tau_4 - \tau_2 = \tau_0 + \tau_2 + \tau_4 \end{aligned}$$

Par la même méthode, nous calculons $\tau_2.\tau_i$, et plus généralement $\tau_i.\tau_j$. Nous obtenons ainsi l'algèbre du graphe $A_n$, qui est l'algèbre commutative et associative ayant comme éléments de l'espace vectoriel les combinaisons linéaires des vertex $\tau_i$, et comme multiplication :

$$\tau_i.\tau_j = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k \tau_k, \qquad \mathcal{N}_{ij}^k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Nous associons à chaque vertex $\tau_i$ une matrice $(\kappa - 1 \times \kappa - 1)$ $N_i$, telle que $(N_i)_{jk} = \mathcal{N}_{ij}^k$. Ces matrices $N_i$ s'obtiennent directement par la formule de récurrence suivante (**formule de récurrence tronquée de** $SU(2)$) :

$$\left.\begin{aligned} N_0 &= \mathbb{1}_{n\times n} \\ N_1 &= \mathcal{G}_{A_n} \\ N_1.N_i &= N_{i-1} + N_{i-2} \qquad i = 2, \ldots, n-2 \\ N_1.N_{n-1} &= N_{n-2} \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

où $\mathcal{G}_{A_n}$ est la matrice d'adjacence du graphe $A_n$. Elles forment l'algèbre matricielle du graphe $A_n$ et fournissent une représentation fidèle de l'algèbre de graphe $A_n$ :

$$N_i.N_j = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k N_k \;=\; \sum_k (N_i)_{jk} N_k \tag{3.6}$$

**Cas** $SU(3)_\ell$

Pour $SU(3)_\ell$, nous pouvons suivre la même démarche. Connaissant le graphe $\mathcal{A}_\ell$, nous obtenons les matrices d'adjacence $N_{(1,0)}$, $N_{(0,1)}$ et nous pouvons construire l'algèbre du graphe $\mathcal{A}_\ell$, dont une représentation fidèle est donnée par les matrices $N_i = N_{\lambda,\mu}$. Ces matrices s'obtiennent par la **formule de récurrence tronquée de** $SU(3)$ :

$$\left.\begin{array}{lcll} N_{\lambda,\mu} & = & 0 & \text{si } \lambda < 0 \text{ ou } \mu < 0 \\ N_{\lambda,0} & = & N_{1,0}N_{\lambda-1,0} - N_{\lambda-2,1} & \\ N_{\lambda,\mu} & = & N_{1,0}N_{\lambda-1,\mu} - N_{\lambda-1,\mu-1} - N_{\lambda-2,\mu+1} & \text{si } \mu \neq 0 \\ N_{0,\lambda} & = & N_{\lambda,0}^T & \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

où $N^T$ désigne la matrice transposée de $N$.

### 3.1.3 Représentation du groupe modulaire $SL(2,\mathbb{Z})$ et formule de Verlinde

E. Verlinde [88] a montré qu'il existe, dans une théorie conforme rationelle, un lien étroit entre les coefficients de fusion $\mathcal{N}_{ij}^k$ des champs primaires et la matrice $S_{ij}$ des transformations modulaires des caractères de l'algèbre agissant sur les champs, donné par la formule de Verlinde :

$$\mathcal{N}_{ij}^k = \sum_l \frac{S_{i\ell}S_{j\ell}S_{k\ell}^\star}{S_{1\ell}} \tag{3.8}$$

Pour les modèles conformes basés sur l'algèbre affine $\widehat{su}(2)_k$ au niveau $k$, les matrices $S$ et $T$ de transformation modulaire des caractères sont données par :

$$\begin{array}{lcl} S_{mn} & = & \sqrt{\dfrac{2}{k+2}}\sin\left(\dfrac{\pi mn}{k+2}\right) \\ T_{mn} & = & \exp\left[2i\pi\left(\dfrac{m^2}{4(k+2)} - \dfrac{1}{8}\right)\right] \end{array} \qquad m,n = 1,\ldots,k+1 \tag{3.9}$$

Un fait remarquable est que les coefficients de fusion $\mathcal{N}_{ij}^k$ calculés par la formule de Verlinde à partir des matrices données en (3.9) sont identiques aux coefficients de structure de l'algèbre de graphe $\mathcal{A}_k$ de $SU(2)_k$. Les matrices $N_i$ du graphe $\mathcal{A}_k$ forment donc une représentation de l'algèbre de fusion de $\widehat{su}(2)_k$ : nous les appelons par la suite matrices de fusion. Cette correspondance est aussi valable pour les cas $SU(n)_\ell$. Les graphes $\mathcal{A}_\ell$ codent donc des informations sur la théorie conforme correspondante. Dans une théorie conforme, au lieu de calculer les coefficients de fusion $\mathcal{N}_{ij}^k$ à partir de la matrice $S$, nous pouvons les obtenir directement à partir des matrices de fusion $N_i$ calculées à partir du graphe $\mathcal{A}_\ell$.

**Matrice $S$**

Dans le cadre de la correspondance de McKay classique, à chaque sous-groupe $\Gamma$ fini de $SU(2)$ est associé un ensemble de matrices qui code la tensorialisation des irreps de $\Gamma$. La table des caractères de $\Gamma$ peut être reconstruite, sans faire appel à la notion de classe de conjuguaison, par la diagonalisation simultannée de ces matrices (voir Annexe **B**). Dans le cas quantique, nous ne pouvons pas parler de groupe, ni de classe de conjuguaison ni de table de caractères. Mais les $N_i$ sont l'analogue des matrices précédentes. La matrice qui diagonalise simultanément les matrices $N_i$ est donc l'analogue quantique de la table des caractères. Convenablement normalisée, cette matrice est égale à la matrice $S$ du groupe modulaire. La matrice $S$ peut donc s'obtenir par la diagonalisation des matrices de fusion $N_i$ : c'est l'inverse de la relation (3.8).

**Matrice $T$**

À chaque graphe $\mathcal{A}_k$ de $SU(2)_k$ correspond l'algèbre de fusion d'une théorie conforme $\widehat{su}(2)_k$. La matrice $T_{ij}$ des transformations des caractères de l'algèbre affine est diagonale. Nous pouvons donc associer à chaque vertex du graphe $\mathcal{A}_k$ une valeur donnée, définie – à une phase globale près – par la matrice $T_{ij}$, que nous appelons l'**exposant modulaire**.

Dans le cas de $SU(2)_k$, la matrice $T$ est donnée en (3.9) et l'exposant modulaire pour le vertex $\tau_i$ est défini par la quantité $\hat{T}$ donnée par :

$$\hat{T} = (i+1) \qquad \text{mod } 4\kappa \qquad\qquad (\kappa = k+2) \tag{3.10}$$

Dans le cas de $SU(3)_k$, la matrice $T$ est donnée par :

$$\left(T^{(k)}\right)_{\lambda\mu} = e_\kappa \left[-(\lambda_1+1)^2 - (\lambda_1+1).(\lambda_2+1) - (\lambda_2+1)^2 + \kappa\right] \delta_{\lambda\mu}, \tag{3.11}$$

où $\lambda \doteq (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu \doteq (\mu_1, \mu_2)$, $e_\kappa[x] \doteq \exp\left(\frac{-2i\pi x}{3\kappa}\right)$, et $\kappa = k+3$. L'exposant modulaire est défini par la quantité :

$$\hat{T} = -(\lambda_1+1)^2 - (\lambda_1+1).(\lambda_2+1) - (\lambda_2+1)^2 + \kappa \qquad \text{mod } 3\kappa. \tag{3.12}$$

## 3.2 Diagrammes de Coxeter-Dynkin généralisés $G$

### 3.2.1 Historique et définitions

Considérons le groupe $SU(2)$ et l'espace vectoriel dont une base est formée par ses irreps $(i)$. Nous pouvons tensorialiser les irreps $(i)$ entre-elles et décomposer le résultat en une somme directe d'irreps : les irreps de $SU(2)$ forment une algèbre, dont les coefficients de structure sont des entiers non-négatifs. Soit $\Gamma$ un sous-groupe fini de $SU(2)$ et considérons l'espace vectoriel (de dimension finie) formé par ses irreps $\sigma$. La tensorialisation de l'irrep fondamentale de

$SU(2)$ par les irreps $\sigma$ de $\Gamma$ est codée par les diagrammes de Dynkin affine de type $ADE^{(1)}$ : c'est la correspondance de McKay classique. Nous pouvons reformuler cette correspondance en disant qu'il existe une action des irreps de $SU(2)$ sur les irreps de $\Gamma$ : nous écrivons que $\widehat{\Gamma}$ est un module sur $\widehat{SU}(2)$. Les irreps de $\Gamma$ peuvent aussi être tensorialisées entre-elles : elles forment donc aussi une algèbre.

L'analogue quantique de $SU(2)$ sont les groupes quantiques $SU(2)_\ell$. Nous pouvons tensorialiser les irreps $\tau_i$ de $SU(2)_\ell$ entre-elles et décomposer le résultat en une somme d'irreps. Les $\tau_i$ forment donc une algèbre (appelée algèbre de fusion), codée par les diagrammes $\mathcal{A}_\ell$ : nous dirons que $\mathcal{A}_\ell$ possède *self-fusion*. Soit un graphe $G$, appelons $\sigma$ ses vertex et considérons l'espace vectoriel $\mathcal{V}(G)$ dont une base est formée par l'ensemble des $\sigma$. Définissons l'action du générateur $\tau_1$ de $\mathcal{A}_\ell$ sur $\sigma$ comme étant égale à la somme des voisins de $\sigma$ sur le graphe $G$. Nous pouvons alors rechercher les graphes $G$ de même norme que $\mathcal{A}_\ell$ tels que l'espace vectoriel $\mathcal{V}(G)$ soit un module par rapport à l'action de $\mathcal{A}_\ell$. Les graphes possédant ces propriétés sont[5] les diagrammes de Dynkin de type $ADE$. Les vertex de ces diagrammes sont donc considérés comme des irreps. Certains de ces diagrammes possèdent *self-fusion*, c.à.d. que nous pouvons définir une structure algébrique commutative et associative dont les coefficients de structure soient des entiers non-négatifs (nous pouvons tensorialiser les irreps entre-elles). C'est le cas des diagrammes $A_n, D_{2n}, E_6$ et $E_8$, et nous dirons qu'ils forment un "sous-groupe" du $SU(2)_\ell$ correspondant. Les autres diagrammes ($D_{2n+1}$ et $E_7$) seront appelés "modules". Notons que les diagrammes $D_n$ sont obtenus par une procédure de *folding* à partir des diagrammes $A_n$. Les diagrammes $E_6, E_7$ et $E_8$ sont dits exceptionnels. On peut montrer que $E_7$ est obtenu à partir d'un *twist* du diagramme $D_{10}$. Nous avons une correspondance bi-univoque entre les sous-groupes finis de $SU(2)$ (diagrammes $ADE^{(1)}$) et leur analogue quantique (diagrammes $ADE$). D'autre part, rappelons qu'il existe une correspondance bi-univoque entre les fonctions de partition invariante modulaire des théories conformes $\widehat{su}(2)$ et les diagrammes $ADE$.

Qu'en est-il pour $SU(3)$ ? Historiquement, une première classification empirique des diagrammes de Coxeter-Dynkin $G$ généralisés pour $SU(3)_\ell$ (appelés diagrammes de Di Francesco-Zuber) a été déterminée par CAF ("*Computer Aided Flair*") par Di Francesco et Zuber en 1989 [31]. Contrairement au cas $SU(2)$, il n'y a pas de correspondance bi-univoque entre ces graphes et les graphes codant les sous-groupes finis de $SU(3)$. Par la suite, la classification des fonctions de partition invariante modulaire des théories conformes $\widehat{su}(3)$ a été obtenue par Gannon [44], mais la correspondance entre les graphes de la liste de Di Francesco-Zuber et la classification de Gannon n'était pas claire. Dans un effort de stimulation privée à la recherche, la récompense proposée par Zuber pour la classification des diagrammes généralisés pour $SU(3)_\ell, SU(4)_\ell$ et $SU(5)_\ell$ était respectivement 1,2 et 3 bouteilles de champagne.

La classification des diagrammes généralisés de $SU(3)_\ell$ et $SU(4)_\ell$ a été obtenue par A.

[5] En fait cette caractérisation inclut également les diagrammes de type *tadpole* qu'il convient d'éliminer.

Ocneanu et présentée à l'Ecole de Bariloche 2000 [71]. Pour le cas $SU(3)_\ell$, il y a la série $\mathcal{A}_n$, et trois séries qui généralisent les deux séries $D_{2n}$ et $D_{2n+1}$ de $SU(2)_\ell$, nous pourrions les appeler $\mathcal{D}_{3n}$, $\mathcal{D}_{3n+1}$ et $\mathcal{D}_{3n+2}$. Il y a également deux séries $\mathcal{A}_n^c$ et $3\mathcal{A}_n^c$ obtenues à partir de la série $\mathcal{A}_n$ précédente en utilisant la conjuguaison complexe. Sur ces six séries, seulement deux possèdent *self-fusion* : $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{D}_{3n}$. Il y a 7 graphes exceptionnels, dont trois possèdent *self-fusion* (ils généralisent les graphes $E_6$ et $E_8$ de $SU(2)_\ell$) : ce sont $\mathcal{E}_5$, $\mathcal{E}_9$ et $\mathcal{E}_{21}$. Il y a un graphe $\mathcal{D}_9^t$ obtenu à partir de $\mathcal{D}_9$ par un twist exceptionnel (comme $E_7$ à partir de $D_{10}$). Les trois autres exceptionnels ($\mathcal{E}_5^c$, $\mathcal{E}_9^c$ et $\mathcal{D}_9^{tc}$) font usage d'un morphisme associé à la conjuguaison complexe $c$. La classification de Gannon des fonctions de partition invariante modulaire consiste en six séries et six cas exceptionnels. Notons que deux graphes distincts (donc deux théories conformes très différentes) possèdent la même fonction de partition invariante modulaire. La liste d'Ocneanu confirme celle trouvée empiriquement par Di Francesco-Zuber, à l'exception d'un diagramme exceptionnel, exclu pour ne pas satisfaire des conditions locales de nature cohomologique (définition de cellules et de connections internes) : c'est le graphe noté $\mathcal{E}_3^{(12)}$ dans [31]. La liste des diagrammes pour $SU(3)_\ell$ ainsi que pour $SU(4)_\ell$ est publiée dans [71].

Bien qu'utilisée par Ocneanu, insistons sur le fait qu'aucune définition mathématiquement rigoureuse des propriétés devant être satisfaites par ces diagrammes (appelés "*Higher Coxeter System*" dans [70]) n'est disponible dans la littérature. Par la suite, nous prendrons ces diagrammes comme donnée de départ.

### 3.2.2 Algèbre de graphe

Par la suite, nous traiterons en détail le cas $SU(2)_\ell$. La généralisation au cas $SU(3)_\ell$ est souvent immédiate, nous le mentionnerons seulement lorsque cette généralisation n'est pas triviale.

#### Graphe $G$ et matrice d'adjacence

Nous prenons comme point de départ les graphes $G$ de type $ADE$, listés dans l'Annexe **A**, et appelons $r$ le nombre de vertex du graphe considéré. Les vertex de ces graphes seront notés $\sigma_a$, pour $a = (0, 1, \cdots, r-1)$. À chaque graphe $G$ est associée sa matrice d'adjacence, notée $\mathcal{G}$, qui est une matrice carrée $r \times r$, telle que $\mathcal{G}_{ij} = 1$ si un arc relie les vertex correspondant à $i$ et $j$ et $\mathcal{G}_{ij} = 0$ sinon. Tous les graphes $ADE$ sont bi-orientés, leur matrice d'adjacence est donc symétrique. La norme du graphe est définie comme étant la plus grande valeur propre de sa matrice d'adjacence, et est notée $\beta$. Pour tous les graphes de type $ADE$, nous avons :

$$\beta = 2\cos\left(\frac{\pi}{\kappa}\right). \tag{3.13}$$

Cette relation définit le nombre $\kappa$, appelé le nombre (dual) de Coxeter du graphe[6]. Nous avons $1 < \beta < 2$ : de fait, les graphes $ADE$ apparaissent aussi dans la classification des graphes

[6] $\kappa$ est ainsi appelé car il correspond au nombre (dual) de Coxeter des algèbres de Lie semi-simples simplement lacées, décrites par les diagrammes de Dynkin de type $ADE$ correspondant : nous le définissons ici sans

bi-orientés de norme strictement comprise entre un et deux (voir chapitre **2**). Introduisons le nombre quantique $[n]_q$, défini par :

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \qquad q = \exp(\frac{i\pi}{\kappa}), \qquad q^{2\kappa} = 1. \tag{3.14}$$

Alors, la norme $\beta$ du graphe est égale au q-nombre deux : $\beta = [2]_q = q + 1/q = 2\cos(\pi/\kappa)$. Nous rappelons la valeur de $\kappa$ pour chaque graphe $ADE$ dans la Tab. 3.1.

| | $A_n$ | $D_n$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\kappa$ | $n+1$ | $2(n-1)$ | 12 | 18 | 30 |

TAB. 3.1 – Nombre (dual) de Coxeter $\kappa$ pour les graphes de type $ADE$.

Le vecteur propre correspondant à $\beta$ est noté $P$ (vecteur de Perron-Frobenius). Les composantes de ce vecteur correctement normalisé nous donnent, par définition, les **dimensions quantiques** des irreps. La normalisation est telle que $P(\sigma_0) = [1]_q = 1$. Alors, dans tous les cas, la dimension quantique de la représentation fondamentale ($\sigma_1$) est égale à $[2]_q$.

### Algèbre de graphe

Nous considérons l'espace vectoriel $\mathcal{V}(G)$ dont la base est donnée par les vertex $\sigma_a$ du graphe $G$, considérés comme des éléments linéairement indépendants. Dans tous les cas, $\sigma_0$ est appelé l'identité, et $\sigma_1$ la fondamentale. Dans le cas classique $SU(2)$, les graphes $ADE^{(1)}$ codent la décomposition de $f \otimes \sigma_a$ en somme directe d'irreps $\sigma_b$ (où $f$ est la représentation fondamentale de SU(2)). Les graphes $G$ de type $ADE$ sont vus comme codant la décomposition du produit des irreps par la fondamentale $f = \sigma_1$ :

$$\sigma_1.\sigma_a = \sigma_a.\sigma_1 = \sum_{b:a} \sigma_b, \tag{3.15}$$

où $b : a$ signifie que $\sigma_b$ est voisin de $\sigma_a$ sur le graphe $G$. Nous voulons étendre la définition du produit à tout l'espace vectoriel $\mathcal{V}(G)$, en analogie avec la décomposition du produit tensoriel du cas classique, de manière à obtenir une algèbre commutative et associative :

$$\sigma_a.\sigma_b = \sum_c G^c_{ab}\sigma_c, \qquad G^c_{ab} \in \mathbb{N}, \tag{3.16}$$

où les coefficients $G^c_{ab}$ sont vus comme la multiplicité de $\sigma_c$ dans $\sigma_a.\sigma_b$ (ce sont des entiers non-négatifs). L'obtention de la table de multiplication se fait par construction, de proche en proche, comme dans l'exemple de $SU(2)$ traité dans l'Annexe **B**. Nous savons multiplier par l'identité $\sigma_0$ et par la fondamentale $\sigma_1$ (à l'aide du graphe). En imposant l'associativité du produit, nous pouvons essayer de construire la multiplication par les autres irreps. Le résultat suivant a été premièrement obtenu par Pasquier[74], et les algèbres obtenues sont quelquefois appelées algèbres de Pasquier :

faire appel au langage des algèbres de Lie.

**Théorème 8** *Soit $G$ un graphe de type $ADE$ à $r$ vertex, et $\mathcal{V}(G)$ l'espace vectoriel dont la base est formée par les vertex $\sigma_a$ de $G$. Les graphes pour lesquels il est possible de définir un produit satisfaisant (3.15) et (3.16) sont les graphes $A_n$, $D_{2n}$, $E_6$ et $E_8$.*

Pour $A_n$, $E_6$ et $E_8$, nous pouvons construire la table de multiplication de manière unique. Pour les cas $D_{2n}$, nous trouvons une famille à un paramètre de solutions, mais en imposant que les coefficients de structures soient des entiers non négatifs, la solution devient unique [25] (voir détails dans la section correspondante). Pour ces cas, nous obtenons donc une algèbre commutative et associative, dont les coefficients de structure sont des entiers non-négatifs, appelée **algèbre de graphe**, et que nous notons par le même symbole $G$ que le graphe lui-même : nous dirons par la suite que ces graphes possèdent "*self-fusion*", ou de manière équivalente, qu'ils sont de **type I**.

Pour $D_{2n+1}$ et $E_7$, il est impossible d'obtenir une algèbre commutative et associative, avec des coefficients de structure qui soient des entiers non-négatifs [73] (pour le cas $E_7$, une algèbre existe, mais avec des coefficients de structure négatifs). Ces cas ne possèdent pas "*self-fusion*", les graphes sont dits de **type II**.

#### Algèbre matricielle de graphe

Dans les cas des graphes qui possèdent *self-fusion*, nous pouvons donner une réalisation matricielle de leur algèbre de graphe. À chaque irrep $\sigma_a$, nous associons une matrice $r \times r$ $G_a$ telle que :

$$(G_a)_{bc} = G_{ab}^c. \tag{3.17}$$

Ces matrices forment une représentation fidèle de l'algèbre $G$ (lorsqu'elle existe) que nous appelons **algèbre matricielle de** $G$, et vérifient :

$$G_a.G_b = \sum_c (G_a)_{bc} G_c$$

Comme l'algèbre de graphe est commutative, les matrices $G_a$ commutent évidemment entre-elles :

$$G_a.G_b = \sum_c (G_a)_{bc} G_c = \sum_c G_{ab}^c G_c = \sum_c G_{ba}^c G_c = \sum_c (G_b)_{ac} G_c = G_b.G_a$$

Nous avons $G_0 = \mathbb{1}_{r\times r}$ et $G_1 = \mathcal{G}$, la matrice d'adjacence du graphe. Dans tous les cas (à l'exception de $D_{2n}$), les autres matrices $G_a$ s'expriment comme des polynômes de $G_0$ et $G_1$ : pour ces cas, nous donnons les expressions polynomiales permettant d'obtenir ces matrices.

### 3.2.3 $\mathcal{V}(G)$ comme module sur $\mathcal{A}(G)$ : matrices $F_i$ (ou $E_a$)

À chaque graphe $G$ de type $ADE$ est associé un autre graphe, noté $\mathcal{A}(G)$, appartenant à la série $A_n$ et ayant la même norme (et donc même nombre de Coxeter $\kappa$) que $G$. Si $\kappa$

est le nombre de Coxeter de $G$, alors $\mathcal{A}(G) = A_{\kappa-1}$. Nous avons donc les correspondances suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{A}(A_n) & = & A_n & \kappa = n+1 \\ \mathcal{A}(D_n) & = & A_{2n-3} & \kappa = 2n-2 \\ \mathcal{A}(E_6) & = & A_{11} & \kappa = 12 \\ \mathcal{A}(E_7) & = & A_{17} & \kappa = 18 \\ \mathcal{A}(E_8) & = & A_{29} & \kappa = 30 \end{array}$$

Les vertex $\tau_i$ $(i = 0, \ldots, \kappa - 2)$ du graphe $\mathcal{A}(G)$ forment un espace vectoriel, sur lequel nous pouvons définir une multiplication : nous obtenons l'algèbre de graphe $\mathcal{A}(G)$. Les vertex $\sigma_a$ $(a = 0, \ldots, r-1)$ du graphe $G$ forment aussi un espace vectoriel, noté $\mathcal{V}(G)$. Nous voulons définir une action de $\mathcal{A}(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$ :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(G) \times \mathcal{V}(G) & \rightarrow & \mathcal{V}(G) \\ \tau_i.\sigma_a & = & \displaystyle\sum_b \mathcal{F}_{ia}^b \sigma_b \end{array} \tag{3.18}$$

telle que les coefficients $\mathcal{F}_{ia}^b$ soient des entiers non-négatifs (ainsi $\mathcal{F}_{ia}^b$ représente la multiplicité de $\sigma_b$ dans $\tau_i.\sigma_a$, en analogie avec le cas classique). Pour que cette action soit bien définie, il faut imposer :

$$(\tau_i.\tau_j).\sigma_a = \tau_i.(\tau_j.\sigma_a). \tag{3.19}$$

Utilisant (3.4) et (3.18), et du fait que les $\sigma$ sont des éléments linéairement indépendants de $\mathcal{V}(G)$, les coefficients $\mathcal{F}_{ij}^k$ doivent satisfaire les relations suivantes :

$$\sum_b \mathcal{F}_{ja}^b \, \mathcal{F}_{ib}^c = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k \, \mathcal{F}_{ka}^c \tag{3.20}$$

Les indices $(a, b, c, \ldots)$ sont réservés pour les vertex $\sigma$ de $G$ $(a, b, c = 0, 1, \ldots, r-1)$, et les indices $(i, j, k, \ldots)$ sont réservés pour les vertex $\tau$ de $\mathcal{A}(G)$ $(i, j, k = 0, 1, \ldots, \kappa - 2)$. Nous pouvons parler d'un analogue quantique de la correspondance de McKay : le graphe $G$ code la décomposition des irreps $\sigma$ de $G$ par l'irrep fondamentale $\tau_1$ du quotient de $U_q(sl(2))$ correspondant. Il est donc naturel de poser $\tau_1.\sigma_a = \sigma_1.\sigma_a = \sum_{b:a} \sigma_b$ (la sommation se fait sur les voisins de $\sigma_a$ sur le graphe $G$). L'action explicite de $\mathcal{A}(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$ est définie par :

$$\left.\begin{array}{rcll} \mathcal{A}(G) \times \mathcal{V}(G) & \rightarrow & \mathcal{V}(G) & \\ \tau_0.\sigma_a & \doteq & \sigma_0.\sigma_a = \sigma_a & \\ (\tau_1)^n.\sigma_a & \doteq & (\sigma_1)^n.\sigma_a & n > 1 \end{array}\right\} \tag{3.21}$$

À noter que même pour les cas où $G$ ne possède pas de self-fusion, l'action est bien définie : même si nous ne pouvons calculer $\sigma_a.\sigma_b$, la multiplication $\sigma_a.\sigma_1$ existe toujours. $\tau_1$ est l'irrep fondamentale de $\mathcal{A}(G)$ : tout irrep $\tau_i$ s'exprime par un polynôme sur $\tau_1$ et $\tau_0$. Par exemple :

$$\tau_2 = \tau_1.\tau_1 - \tau_0 \qquad\qquad \tau_3 = \tau_1.\tau_1.\tau_1 - \tau_1 - \tau_1$$

De manière générale, nous écrivons : $\tau_i = Pol_i(\tau_0, \tau_1)$. Alors, l'action d'un élément quelconque $\tau_i$ de $\mathcal{A}(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$ s'écrit :

$$\tau_i.\sigma_a = Pol_i(\tau_0, \tau_1).\sigma_a = Pol_i(\sigma_0, \sigma_1).\sigma_a \tag{3.22}$$

**Matrices $F_i$**

Nous pouvons coder matriciellement l'action (3.18). Introduisons $\kappa - 1$ matrices $(r \times r)$ $F_i$ telles que $(F_i)_{ab} = \mathcal{F}^b_{ia}$. De la propriété de structure de module (3.19), nous concluons que les matrices $F_i$ satisfont :

$$F_i\ F_j = \sum_k \mathcal{N}^k_{ij} F_k \tag{3.23}$$

Elles forment donc une représentation de l'algèbre de fusion de dimension $r$ (les matrices $N_i$ forment une représentation fidèle de l'algèbre de fusion, de dimension $\kappa - 1$). Du fait que $\tau_0.\sigma_a = \sigma_a$ et que $\tau_1.\sigma_a = \sigma_1.\sigma_a$, et par (3.23), nous concluons que les matrices $F_i$ s'obtiennent directement par :

$$\begin{aligned} F_0 &= \mathbb{1}_{n\times n} \\ F_1 &= \mathcal{G}_G \\ F_1.F_i &= F_{i-1} + F_{i-2} \qquad\qquad i = 2, \ldots, \kappa - 2 \\ F_1.F_{n-1} &= F_{n-2} \end{aligned} \tag{3.24}$$

**Remarque 4** *Par la relation de récurrence (3.24) définissant les matrices $F_i$ et comparant avec la relation (2.9), nous concluons que l'élément $(F_i)_{ab}$ représente le nombre de chemins essentiels de longueur $i$, partant du vertex $\sigma_a$ et arrivant au vertex $\sigma_b$, sur le graphe $G$.*

**Matrices $E_a$**

Définissons $r$ matrices $(\kappa - 1 \times r)$ $E_a$ telles que :

$$(E_a)_{ib} = (F_i)_{ab} \tag{3.25}$$

Alors l'action (3.18) s'écrit aussi :

$$\tau_i.\sigma_a = \sum_b (E_a)_{ib}\ \sigma_b \tag{3.26}$$

Les matrices $E_a$ sont appelées les **matrices essentielles** du graphes $G$. L'une d'entre elles en particulier, possède des propriétés intéressantes : la matrice $E_0$, appelée dans la littérature de physique statistique "*intertwiner*".

**Théorème 9** *Soient $G$ un graphe ADE et $\mathcal{A}(G)$ le graphe de la série $A_n$ ayant le même nombre de Coxeter $\kappa$, et soit $G_1 = \mathcal{G}_G$ et $N_1 = \mathcal{G}_{\mathcal{A}(G)}$ leur matrice d'adjacence respective. Alors :*

$$N_1\ E_0 = E_0\ G_1 \tag{3.27}$$

<u>*Démonstration*</u> : Considérons l'équation (3.26) pour $a = 0$, et appliquons $\tau_1$. Le terme de gauche s'écrit :

$$\tau_1.\tau_i.\sigma_0 = (\tau_1.\tau_i).\sigma_0 = \sum_j (N_1)_{ij}\tau_j.\sigma_0 = \sum_j \sum_c (N_1)_{ij}(E_0)_{jc}\sigma_c$$

Le terme de droite s'écrit :

$$\sum_b (E_0)_{ib}\tau_1.\sigma_b = \sum_b (E_0)_{ib}\sigma_1.\sigma_b = \sum_b \sum_c (E_0)_{ib}(G_1)_{bc}\sigma_c$$

Comme les $\sigma$ sont linéairement indépendants, l'égalité est valable pour tout terme :

$$\sum_j (N_1)_{ij}(E_0)_{jc} = \sum_b (E_0)_{ib}(G_1)_{bc} \quad \Longleftrightarrow \quad (N_1.E_0)_{ic} = (E_0.G_1)_{ic}$$

■

**Corollaire 1** *Soit $\beta$ la plus grande valeur propre de $G$ (donc de $\mathcal{A}(G)$ aussi) et $P$ le vecteur propre normalisé correspondant. Alors $(E_0.P)$ est le vecteur propre normalisé de $\mathcal{A}(G)$ correspondant à $\beta$.*

Soient deux graphes $G_1$ et $G_2$ tels qu'il existe une matrice $\mathrm{card}(G_1)\times\mathrm{card}(G_2)$ $E_0$ qui relie leur matrice d'adjacence comme dans (3.27). Si deux modèles statistiques sont décrits par ces deux graphes, alors ils auront certaines propriétés communes (énergie libre, charge centrale), bien qu'ils diffèrent au niveau de l'algèbre des opérateurs [80].

### Règles de branchement $\mathcal{A}(G) \hookrightarrow G$

Dans le cas où les graphes $G$ possèdent *self-fusion* (type I), l'action (3.18) est compatible avec la structure algébrique de $G$ :

$$\tau_i.(\sigma_a.\sigma_b) = (\tau_i.\sigma_a).\sigma_b \tag{3.28}$$

Au niveau matriciel, ceci se traduit par les relations suivantes entre les matrices $F_i$ et $G_a$ :

$$[F_i, G_a] = 0, \qquad\qquad F_i\, G_a = \sum_b (F_i)_{ab}G_b. \tag{3.29}$$

L'action de $\tau_i$ sur $\sigma_a$ est donnée par (3.22). Pour $a = 0$, nous avons :

$$\tau_i.\sigma_0 = Pol_i(\sigma_0, \sigma_1) = \sum_b (F_i)_{0b}\sigma_b \tag{3.30}$$

Pour les cas possédant self-fusion, l'action de $\tau_i$ sur $\sigma_a$ peut donc s'écrire :

$$\tau_i.\sigma_a = \sum_b (F_i)_{0b}\ \sigma_b.\sigma_a \tag{3.31}$$

L'équation (3.31) nous donne les règles de branchement :

$$\tau_i \hookrightarrow \sum_b (F_i)_{0b}\ \sigma_b = \sum_b (E_0)_{ib}\ \sigma_b \tag{3.32}$$

Les règles de branchement sont donc entièrement codées dans la matrice $E_0$ : la restriction de l'irrep $\tau_i$ vers les irreps $\sigma$ de $G$ se lit dans la ligne correspondante à $\tau_i$ de la matrice $E_0$.

**Corollaire 2** *La connaissance de $E_0$ et des matrices $G_a$ nous permet de déterminer les autres matrices $E_a$ :*

$$E_a = E_0.G_a \tag{3.33}$$

<u>*Démonstration*</u> : D'une part, l'action est donnée par : $\tau_i.\sigma_a = \sum_c (E_a)_{ic}\ \sigma_c$. D'autre part, en utilisant les règles de branchement $\tau_i \hookrightarrow \sum_b (E_0)_{ib}\sigma_b$, nous avons :

$$\tau_i.\sigma_a = \sum_b (E_0)_{ib}\sigma_b.\sigma_a = \sum_c \sum_b (E_0)_{ib}(G_a)_{bc}\sigma_c = \sum_c (E_0.G_a)_{ic}\sigma_c$$

Les $\sigma$ étant linéairement indépendants, nous avons finalement : $(E_a)_{ic} = (E_0.G_a)_{ic}$ ■

La correspondance entre $G$ et $\mathcal{A}(G)$ peut être vue de deux manières complémentaires :

- Dans le langage de la correspondance de Mc-Kay quantique, le graphe $G$ est relié à un "sous-groupe" (ou "module") du quotient de $U_q(sl(2))$ pour $q^{2\kappa=1}$, ce dernier étant relié au graphe $A_{\kappa-1}$, c.à.d. justement à $\mathcal{A}(G)$. L'espace vectoriel $\mathcal{V}(G)$ engendré par les vertex de $G$ est toujours un module sous l'action de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$.
- Les chemins essentiels sont définis sur le graphe $G$, et leur nombre est codé dans les matrices $F_i$ ou dans les matrices essentielles $E_a$. $\mathcal{B}(G)$ est la digèbre des endomorphismes de chemins essentiels. Les deux lois multiplicatives sont la composition $\circ$ et la convolution $\odot$. La diagonalisation de $\mathcal{B}G$ pour la loi $\circ$ donne lieu à des projecteurs minimaux centraux, dont la multiplication par la loi $\odot$ est codée par le graphe $\mathcal{A}(G)$.

Ces constructions se généralisent pour les cas $SU(n)_\ell$ : les matrices $F_i$ codant l'action de $\mathcal{A}(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$ donnent une représentation de l'algèbre de fusion. Cependant, les chemins essentiels n'ont été définis que pour les graphes de type $ADE$ (plus exactement pour des graphes bi-partites). L'extension de la définition des chemins essentiels pour des graphes de type $SU(n)_\ell$ est possible (la notion de "longueur" étant remplacée par un tableau de Young), et nous pouvons établir un lien avec des généralisations des algèbres de Jones-Temperley-Lieb.

## 3.3 Graphes d'Ocneanu $Oc(G)$

### 3.3.1 Définition

La digèbre $\mathcal{B}(G)$ des endomorphismes de chemins essentiels sur un graphe $G$ (de type $ADE$) possède deux lois multiplicatives $\circ$ et $\odot$. La diagonalisation de $\mathcal{B}(G)$ pour la loi $\odot$ donne lieu à des projecteurs minimaux centraux[7], dont la multiplication par la loi $\circ$ est

[7]Nous devons normaliser ces opérateurs pour le produit scalaire de l'espace dual : voir la discussion de l'exemple $A_3$ dans le chapitre **2**.

codée par le graphe d'Ocneanu de $G$. C'est ainsi que sont formellement introduits les graphes d'Ocneanu de $G$. Soulignons toutefois que la diagonalisation explicite de la loi $\odot$ de $\mathcal{B}(G)$ est d'une extrême complexité. Ces graphes ont été introduits par A. Ocneanu [66], et sont premièrement apparus dans la littérature dans [67]. Ces graphes et l'algèbre des symétries quantiques jouent un rôle important dans l'étude des systèmes conformes à deux dimensions. Ocneanu a utilisé la classification des fonctions de partition invariante modulaire des modèles $\widehat{su}(2)$ pour construire ces graphes : une explicite diagonalisation de la loi $\odot$ ne semble pas avoir été vraiment effectuée $\cdots$

Nous prenons les graphes d'Ocneanu dans un premier temps comme donnée initiale. Nous définirons par la suite une réalisation de l'algèbre d'Ocneanu à partir de l'algèbre d'un graphe $G$.

Les graphes d'Ocneanu ne sont définis et publiés que pour les cas $ADE$, donc pour les modèles $SU(2)_\ell$. Les définitions de chemins essentiels n'ont pas à nos jours été étendues à des diagrammes de Coxeter-Dynkin généralisés. La digèbre que l'on pourrait associer à ces diagrammes reste donc un objet "virtuel". Même si une construction de cette bigèbre était définie, l'explicite diagonalisation des deux lois $\circ$ et $\odot$ et l'obtention des projecteurs minimaux centraux pour ces lois, conduisant à la construction des graphes d'Ocneanu correspondants, serait une tâche ardue ...

Toutefois, notre réalisation de l'algèbre d'Ocneanu se prête naturellement à une généralisation aux cas $SU(n)_\ell$. Nous pouvons ainsi obtenir des *"graphes d'Ocneanu"* pour ces modèles : nous verrons notamment que les fonctions de partition invariantes modulaires qui y sont associées pour certains exemples traités du cas $SU(3)_\ell$ sont identiques à la classification de Gannon, confirmant ainsi notre construction.

### Algèbre du graphe $Oc(G)$

Nous prenons comme donnée initiale les graphes d'Ocneanu $Oc(G)$ du modèle $ADE$ publiés dans [67]. Les vertex de ces graphes sont notés $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \ldots)$, et nous appelons $s$ le nombre de vertex du graphe. Considérons l'espace vectoriel de dimension $s$ formé par les vertex du graphe $Oc(G)$. Les éléments $\underline{1}$ et $\underline{1'}$ sont appelés respectivement les générateurs chiraux gauche et droit. Le graphe d'Ocneanu est la superposition de deux graphes de Cayley de multiplication par les générateurs. La multiplication par le générateur gauche $\underline{1}$ (resp. droit $\underline{1'}$) est donnée par la somme des voisins sur le graphe reliés à $\underline{1}$ (resp. à $\underline{1'}$) par une ligne continue (resp. discontinue). De plus, l'élément $\underline{0}$ est considéré comme l'identité pour cette multiplication. Nous avons donc :

$$\underline{0} \cdot \underline{x} = \underline{x}, \qquad \underline{1} \cdot \underline{x} = \sum_{\underline{y}-\underline{1}} \underline{y} = \sum_{y} (\mathcal{G}_{\underline{1}})_{xy}\, \underline{y}, \qquad \underline{1'} \cdot \underline{x} = \sum_{\underline{y}\cdots\underline{1'}} \underline{y} = \sum_{y} (\mathcal{G}_{\underline{1'}})_{xy}\, \underline{y}. \tag{3.34}$$

où $\mathcal{G}_{\underline{1}}$ et $\mathcal{G}_{\underline{1'}}$ sont les matrices d'adjacence correspondantes aux générateurs $\underline{1}$ et $\underline{1'}$. À partir de ces données et en imposant l'associativité, il est possible d'étendre la multiplication à tous les

vertex de $Oc(G)$. Nous obtenons alors l'algèbre de graphe $Oc(G)$, qui sera aussi notée $Oc(G)$ et dont la multiplication est donnée par :

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\, \underline{z} \tag{3.35}$$

où $\mathcal{O}^z_{xy} \in \{0, 1, \ldots\}$ est vu comme la multiplicité de $\underline{z}$ dans $\underline{x}.\underline{y}$. Cette algèbre est appelée l'**algèbre des symétries quantiques** de $G$. Contrairement aux algèbres de graphes $G$, les algèbres $Oc(G)$ ne sont pas forcément commutatives (pour le cas $SU(2)_\ell$, $Oc(D_{2n})$ est non-commutative).

À chaque vertex $\underline{x}$ du graphe $Oc(G)$ nous associons la matrice $(s \times s)$ $O_x$ telle que $(O_x)_{yz} = \mathcal{O}^z_{xy}$. Nous avons notamment :

$$O_0 = \mathbb{1}_{s\times s}, \qquad O_1 = \mathcal{G}_{\underline{1}}, \qquad O_{1'} = \mathcal{G}_{\underline{1}'}$$

Les matrices $O_x$ donnent une représentation fidèle de l'algèbre $Oc(G)$ :

$$O_x\, O_y = \sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\, O_z = \sum_z (O_x)_{yz} O_z\ . \tag{3.36}$$

### 3.3.2 Réalisation algébrique de $Oc(G)$

Historiquement, la première réalisation d'une algèbre $Oc(G)$ a été effectuée dans [23] pour le cas $E_6$. Il y est observé que l'algèbre $Oc(E_6)$ s'obtient comme le carré tensoriel de l'algèbre du graphe $E_6$, mais où le produit tensoriel est pris au-dessus d'une sous-algèbre de $E_6$, isomorphe à l'algèbre de graphe $A_3$ :

$$Oc(E_6) = \frac{E_6 \otimes E_6}{A_3} = E_6 \otimes_{A_3} E_6\ . \tag{3.37}$$

Le produit tensoriel pris au-dessus de $A_3$ signifie que l'on identifie les termes $a.u \otimes b$ et $a \otimes u.b$, pour $a, b \in E_6$ et $u \in A_3 \subset E_6$. Un premier travail de cette thèse a consisté à généraliser cette réalisation à tous les cas de type $ADE$ de $SU(2)_\ell$. Il est difficile de présenter une méthode générale, chaque cas posédant ces particularités. Les différents cas sont traités explicitement dans le chapitre **4**. Notre réalisation des algèbres d'Ocneanu permet d'obtenir de manière simple les matrices toriques (définissant les fonctions de partition à une ligne de défauts) et les matrices toriques généralisées (deux lignes de défauts). Les résultats obtenus sont en partie publiés dans [25]. Par la suite, nous avons montré que la sous-algèbre au-dessus de laquelle le produit tensoriel est pris est déterminée par les propriétés modulaires du graphe $G$ [26] : cette caractérisation de $Oc(G)$ par les propriétés modulaires de $G$ permet de définir la réalisation de $Oc(G)$ sans la connaissance préalable du graphe d'Ocneanu (ceci n'est pas tout à fait valable pour les cas où l'algèbre d'Ocneanu est non-commutative), et nous pouvons l'étendre de manière naturelle aux diagrammes de Coxeter-Dynkin généralisés. Ceci nous a permis d'obtenir les algèbres d'Ocneanu pour certains cas choisis de $SU(3)_\ell$, pour lesquels nous obtenons les fonctions de partition généralisées.

Nous donnons ici un aperçu de la caractérisation des propriétés modulaires de $G$ et de la réalisation de $Oc(G)$. Tous les cas $ADE$ de $SU(2)_\ell$ et les trois cas exceptionnels possèdant *self-fusion* de $SU(3)_\ell$ sont traités de manière détaillée dans le chapitre **4**.

### Cas possédant self-fusion : type I

Nous rappelons ici, pour les graphes possédant self-fusion $(A_n, E_6, E_8, D_{2n})$, les règles de branchement $\mathcal{A}(G) \hookrightarrow G$ :

$$\tau_i \hookrightarrow \sum_b (E_0)_{ib}\, \sigma_b. \tag{3.38}$$

Elles sont entièrement codées dans la matrice essentielle $E_0$, qui est une matrice rectangulaire, à $\kappa - 1$ lignes et $r$ colonnes. Les lignes de $E_0$ sont indexées par les irreps $\tau_i$ de $\mathcal{A}(G)$, et les colonnes par les irreps $\sigma_a$ de $G$. Pour connaître la restriction $\mathcal{A}(G) \hookrightarrow G$, il suffit donc de lire les éléments non-nuls de la ligne de $E_0$ correspondant à $\tau_i$.

Considérons maintenant l'induction $G \hookleftarrow \mathcal{A}(G)$ : pour savoir de quelles irreps $\tau_i$ provient l'irrep $\sigma_a$ de $G$ (les irreps $\tau_i$ pour lesquelles $\sigma_a$ apparaît dans leur restriction), il suffit de lire les éléments non-nuls de la colonne de $E_0$ correspondant à $\sigma_a$.

Les graphes $\mathcal{A}$ sont toujours modulaires, en ce sens que nous pouvons définir une représentation de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur l'espace vectoriel formé par ses irreps $\tau_i$ (vus ici comme labellant les caractères $\chi_i$ de l'algèbre de fusion). En particulier, l'opérateur $T$ est diagonal (voir formule (3.9)), et nous pouvons assigner une valeur de l'exposant modulaire $\hat{T}$ fixée à chaque irrep $\tau_i$ de $\mathcal{A}$.

Nous voudrions définir une valeur de $\hat{T}$ sur l'espace vectoriel formé par les irreps $\sigma_a$ de $G$, de manière compatible avec l'induction-restriction entre $\mathcal{A}(G)$ et $G$. Supposons que l'irrep $\sigma_a$ apparaisse dans les règles de branchement des irreps $\tau_i$ et $\tau_j$ : nous pourrions définir $\hat{T}(\sigma_a)$ par $\hat{T}(\tau_i)$ ou par $\hat{T}(\tau_j)$, mais si ces valeurs sont différentes, alors la définition est ambigüe. De manière générale, il existe un sous-ensemble $J$ des irreps $\sigma_a$ sur lequel $T$ est bien défini, et ce sous-ensemble $J$ est une sous-algèbre de l'algèbre de graphe $G$.

**Définition 13** *Soit $G$ un graphe de type $ADE$ possédant "self-fusion". Alors, l'ensemble $J$ est formé par le sous-espace des irreps $\sigma_a$ de $G$ pour lesquels l'exposant modulaire $\hat{T}$ est bien défini. $\sigma_a \in J$ si $\hat{T}$ possède la même valeur sur les irreps $\tau_i$ de $\mathcal{A}(G)$ dont la restriction à $G$ contient $\sigma_a$.*

Cette définition donne une caractérisation de l'ensemble $J$ pour les graphes de type I. Pour les cas où l'algèbre d'Ocneanu est commutative $(A_n, E_6, E_8)$ nous obtenons la suivante réalisation de $Oc(G)$ :

$$Oc(G) = \frac{G \otimes G}{J} = G \otimes_J G \tag{3.39}$$

L'algèbre d'Ocneanu des cas $D_{2n}$ est non-commutative. La réalisation précédente n'est donc pas valable, car elle définit une algèbre commutative : il faut utiliser la symétrie $\mathbb{Z}_2$ du dia-

gramme pour définir $Oc(D_{2n})$ à l'aide d'un produit semi-direct avec $\mathbb{Z}_2$ : le cas $D_4$ est traité en détail dans le chapitre **4**.

**Cas ne possédant pas self-fusion : type II**

Les cas $D_{2n+1}$ et $E_7$ ne possèdent pas *self-fusion* (type II). L'algèbre d'Ocneanu d'un graphe de type II est construite à partir de l'algèbre du graphe $H$, où $H$ est un graphe de type I appelé le "*parent graph*" de $G$ [79]. Nous obtenons $Oc(E_7) = D_{10} \otimes_\rho D_{10}$, où le *twist* exceptionnel $\rho$ est déterminé par les propriétés modulaires du graphe $A_{17}$. L'algèbre $Oc(D_{2n+1})$ est obtenue comme un quotient (utilisant une application $\rho$) du produit tensoriel d'algèbre $\mathcal{A}$ (de même nombre de Coxeter). Par exemple $Oc(D_5) = A_7 \otimes_{\rho(A_7)} A_7$. Les détails sont présentés dans le chapitre **4**.

### 3.3.3 $\mathcal{V}(G)$ comme module sur $Oc(G)$ : matrices $S_x$

Tous les graphes d'Ocneanu définissent une algèbre de graphe $Oc(G)$. Nous voulons définir une action de $Oc(G)$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}(G)$ des irreps $\sigma$ de $G$ :

$$\begin{aligned} Oc(G) \times \mathcal{V}(G) &\rightarrow \mathcal{V}(G) \\ \underline{x}.\sigma_a &= \sum_b \mathcal{S}^b_{xa}\sigma_b \end{aligned} \tag{3.40}$$

telle que les coefficients $\mathcal{S}^b_{xa}$ soient des entiers non-négatifs (ainsi $\mathcal{S}^b_{xa}$ représente la multiplicité de $\sigma_b$ dans $\underline{x}.\sigma_a$). Pour que cette action soit bien définie, il faut imposer :

$$(\underline{x}.\underline{y}).\sigma_a = \underline{x}.(\underline{y}.\sigma_a) \tag{3.41}$$

Utilisant (3.35) et (3.40), et du fait que les $\sigma$ sont des éléments linéairement indépendants de $\mathcal{V}(G)$, les coefficients $\mathcal{S}^b_{xa}$ doivent satisfaire les relations suivantes :

$$\sum_b \mathcal{S}^b_{xa}\mathcal{S}^c_{yb} = \sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\mathcal{S}^c_{za} \tag{3.42}$$

Les indices $(a, b, c, \ldots)$ sont réservés pour les vertex $\sigma$ de $G$ $(a, b, c = 0, 1, \ldots, r-1)$, et les indices $(x, y, z, \ldots)$ sont réservés pour les $s$ vertex de $Oc(G)$. Du fait que $\underline{1}$ et $\underline{1'}$ sont les générateurs de l'algèbre $Oc(G)$ (l'unité $\underline{0}$ peut aussi s'exprimer à l'aide de $\underline{1}$ et $\underline{1'}$), tout élément $\underline{x}$ de $Oc(G)$ s'exprime comme un polynôme sur $(\underline{0}, \underline{1}, \underline{1'})$ :

$$\underline{x} = Pol_x(\underline{0}, \underline{1}, \underline{1'})$$

Il est donc suffisant de définir l'action de $Oc(G)$ par ses générateurs. L'action explicite de $Oc(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$ est définie par :

$$\left.\begin{aligned} Oc(G) \times \mathcal{V}(G) &\rightarrow \mathcal{V}(G) \\ \underline{0}.\sigma_a &= \sigma_a \\ (\underline{1})^n.\sigma_a = (\underline{1'})^n.\sigma_a &= (\sigma_1)^n.\sigma_a \\ (\underline{1}.\underline{1'})^n.\sigma_a &= (\sigma_1.\sigma_1)^n.\sigma_a \end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

À noter que même pour les cas où $G$ ne possède pas *self-fusion*, l'action est bien définie : la multiplication $\sigma_1.\sigma_a$ existe toujours (codée par le graphe $G$). L'action d'un élément quelconque $\underline{x}$ de $Oc(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$ s'écrit :

$$\underline{x}.\sigma_a = Pol_x(\underline{0}, \underline{1}, \underline{1'}).\sigma_a = Pol_x(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_1).\sigma_a \tag{3.44}$$

**Matrices $S_x$**

Introduisons $s$ matrices $(r \times r)$ $S_x$ telles que $(S_x)_{ab} = \mathcal{S}^b_{xa}$. Par la propriété de module de (3.41), les matrices $S_x$ satisfont les relations suivantes :

$$S_x.S_y = \sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\, S_z \tag{3.45}$$

Par la définition explicite (3.43) de l'action de $Oc(G)$ sur $G$ , nous avons : $S_0 = \mathbb{1}_{r\times r}$, $S_1 = \mathcal{G}_{\underline{1}}$ et $S_{1'} = \mathcal{G}_{\underline{1}'}$. Les autres matrices $S_x$ peuvent être obtenues à partir de la connaissance de la réalisation de $Oc(G)$. Si $Oc(G)$ est isomorphe à l'algèbre $G \otimes_J G$, nous écrirons un élément $\underline{x}$ de $Oc(G)$ comme $\underline{x} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$[8]. Alors l'action de $Oc(G)$ sur $G$ s'écrit :

$$\underline{x}.\sigma_c = (\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b).\sigma_c \doteq \sigma_a.\sigma_b.\sigma_c \tag{3.46}$$

auquel cas les matrices $S_x$ sont données par :

$$S_x = G_a.G_b \qquad\qquad \text{pour } \underline{x} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b \tag{3.47}$$

## 3.4 Relations entre $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$

### 3.4.1 Fonctions de partition

Considérons des théories conformes à deux dimensions avec algèbre affine $\widehat{su}(2)$. Nous avons vu dans le chapitre **1** que les fonctions de partition d'un système avec deux lignes de défauts $x$ et $y$ – appelées généralisées [77] – définies sur le tore (de paramètre modulaire $\tau$) s'écrivent :

$$\mathcal{Z}_{x|y}(\tau) = \sum_{i,j} \chi_i(\tau)\, \mathcal{W}^{ij}_{xy}\, \overline{\chi}_j(\tau)\ , \tag{3.48}$$

où les $\chi_i(\tau)$ sont les caractères de l'algèbre $\widehat{su}(2)$, et les coefficients $\mathcal{W}^{ij}_{xy}$ sont des entiers non-négatifs. Le cas sans ligne de défauts ($x$=$y$=0) permet d'obtenir l'invariant modulaire $\mathcal{M}$ qui comute avec les générateurs $S$ et $T$ du groupe modulaire ($\mathcal{M}_{ij} = \mathcal{W}^{ij}_{00}$), et la fonction de partition invariante modulaire s'écrit :

$$\mathcal{Z}(\tau) = \overline{\chi}\, \mathcal{M}\, \chi \tag{3.49}$$

[8]Selon les cas, $\underline{x}$ peut parfois être une combinaison linéaire de tels éléments.

Définissant les matrices $(s \times s)$ $\widetilde{W}_{ij}$ telles que $(\widetilde{W}_{ij})_{xy} = \mathcal{W}^{ij}_{xy}$, des conditions de compatibilité [77, 78] imposent que ces matrices doivent satisfaire l'algèbre carrée de fusion :

$$\widetilde{W}_{ij}\, \widetilde{W}_{i'j'} = \sum_{i'',j''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\, \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\, \widetilde{W}_{i''j''} \ , \tag{3.50}$$

alors que les matrices $\widetilde{W}_{i1}$ et $\widetilde{W}_{1j}$ forment une représentation de l'algèbre de fusion :

$$\widetilde{W}_{i1}\, \widetilde{W}_{i'1} = \sum_{i''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\, \widetilde{W}_{i''1}, \qquad \widetilde{W}_{1j}\, \widetilde{W}_{1j'} = \sum_{j''} \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\, \widetilde{W}_{1j''}. \tag{3.51}$$

La matrice $\widetilde{W}_{11}$ est l'identité, tandis que les matrices $\widetilde{W}_{21}$ et $\widetilde{W}_{12}$ correspondent respectivement aux deux matrices d'adjacence d'un graphe d'Ocneanu $Oc(G)$ :

$$\widetilde{W}_{11} = \mathbb{1}_{s\times s} \ , \qquad \widetilde{W}_{21} = O_1 \ , \qquad \widetilde{W}_{12} = O_{1'} \ . \tag{3.52}$$

Ainsi la donnée du graphe d'Ocneanu (des matrices $O_1$ et $O_{1'}$) permet d'obtenir les matrices $\widetilde{W}_{21}$ et $\widetilde{W}_{12}$, et en utilisant (3.51) puis (3.50) d'obtenir les matrices $\widetilde{W}_{ij}$, et donc les coefficients $\mathcal{W}^{ij}_{xy}$ qui définissent les fonctions de partition généralisées. C'est la démarche suivie par Zuber *et al* [77, 78], cependant, dans cette approche les graphes d'Ocneanu sont une donnée initiale externe et indispensable. Ces graphes n'étant pas connus (publiés) pour des systèmes $su(n), n \geq 3$, cette méthode ne peut pas s'étendre à ces cas-là.

Il a été par la suite remarqué que pour des théories de type I, l'invariant modulaire peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{M}_{ij} = \sum_{c\in J} (F_i)_{1c} (F_j)_{1c} \tag{3.53}$$

où les $F_i$ sont des matrices à coefficients entiers non-négatifs satisfaisant l'algèbre de fusion, et où la sommation s'effectue sur un sous-ensemble $J$. Cette formule a originellement été obtenue de manière empirique [31] et par la suite généralisée aux modèles de type II [3, 4, 75, 76]. L'élément $F_1$ est le générateur de l'algèbre de fusion, et correspond à la matrice d'adjacence d'un graphe : c'est ainsi que les graphes $ADE$ sont formellement apparus dans la classification des fonctions de partition des modèles $\widehat{su}(2)$.

Introduisant les caractères étendus $\widehat{\chi}_a$, définis par :

$$\widehat{\chi}_a = \sum_i (F_i)_{1a}\, \chi_i \ , \tag{3.54}$$

la fonction de partition invariante modulaire des modèles de type I s'écrit :

$$\mathcal{Z} = \sum_{a\in J} |\widehat{\chi}_a|^2, \tag{3.55}$$

et est donc diagonale par rapport à ces caractères. Ceux-ci sont interprétés comme des caractères d'une algèbre chirale étendue [89]. Les fonctions de partition des modèles de type II sont obtenues à partir de celles de type I par une procédure de twist [34, 62, 63].

Notons que les expressions des fonctions de partition invariantes modulaires ou généralisées étaient obtenues de manière empirique ou par la donnée du graphe d'Ocneanu. Nous allons voir que grâce à notre réalisation de l'algèbre d'Ocneanu, nous pouvons déterminer ces expressions de manière naturelle par l'action de $\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G)$, et d'autre part que cette méthode se prête à une généralisation aux cas $\widehat{su}(n), n \geq 3$.

### 3.4.2 $Oc(G)$ comme bi-module sur $A(G)$ : matrices $W_{ij}$ et $W_{xy}$

Soit $G$ un graphe de type $ADE$ (ou généralisé), $\mathcal{V}(G)$ l'espace vectoriel formé par ses vertex et $\mathcal{A}(G)$ l'algèbre du graphe $A_n$ de même norme. Il existe une action de $\mathcal{A}(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$, codée par les matrices $F_i$. Une réalisation de l'algèbre $Oc(G)$ est construite à partir du carré tensoriel de l'algèbre du graphe $G$ : il est donc naturel d'avoir une action (à gauche et à droite) de $\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G)$. Nous avons :

$$\tau_i.\underline{x}.\tau_j = \sum_y \mathcal{W}^{ij}_{xy}\underline{y} \tag{3.56}$$

où les coeficients $\mathcal{W}^{ij}_{xy}$ sont des nombres entiers non-négatifs. Introduisons alors des matrices $s \times s$ $W_{ij}$ telles que $(W_{ij})_{xy} = \mathcal{W}^{ij}_{xy}$.

**Propriété 1** *Ces matrices $W_{ij}$ satisfont les relations suivantes :*

1. $W_{ij}\, W_{i'j'} = \sum_{i'',j''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\, \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\, W_{i''j''}$
2. $W_{i1}\, W_{i'1} = \sum_{i''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\, W_{i''1}$

   $W_{1j}\, W_{1j'} = \sum_{j''} \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\, W_{1j''}$
3. $O_x\, W_{ij} = W_{ij}\, O_x = \sum_y (W_{ij})_{xy}\, O_y$
4. $W_{ij} = \sum_y (W_{ij})_{0y}\, O_y$

**<u>Démonstration</u> :** La relation (1) provient de l'égalité $\tau_{i'}.(\tau_i.x.\tau_j).\tau_{j'} = (\tau_{i'}.\tau_i).x.(\tau_j.\tau_{j'})$. La relation (2) est obtenue à partir de (1) pour $i = i' = 0$ (j=j'=0). La relation (3) est obtenue en multipliant à gauche et à droite l'équation (3.56) par $\underline{z}$. Et enfin (4) est une conséquence immédiate de (3). ■

**Conclusion 3** *Les matrices $W_{ij}$ définies à partir de la structure de bi-module de $Oc(G)$ sur $A(G)$ coïncident avec les matrices $\widetilde{W}_{ij}$ introduites précédemment. Les fonctions de partition généralisées des modèles $\widehat{su}(2)$ s'écrivent donc :*

$$\mathcal{Z}_{x|y}(\tau) = \sum_{i,j} \chi_i(\tau)\, (W_{ij})_{xy} \overline{\chi}_j(\tau). \tag{3.57}$$

*où les coefficients $W^{xy}_{ij}$ sont calculés en explicitant l'action (3.56) de $\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G)$*

L'obtention de ces coefficients dépend de chaque cas spécifique. Par exemple, pour $x = \sigma_a \otimes_J \sigma_b \in Oc(G)$, avec $\sigma_a, \sigma_b \in G$, nous avons :

$$\tau_i \,.\, x \,.\, \tau_j \;=\; (\tau_i.\sigma_a) \otimes_J (\sigma_b.\tau_j) \;=\; \sum_{c,d} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}\, \sigma_c \otimes_J \sigma_d \;, \tag{3.58}$$

et il faut alors identifier les éléments $\sigma_c \otimes_J \sigma_d$ sur la base des éléments de la base $\{y\}$ de $Oc(G)$. Pour un élément $y$, nous obtenons alors les coefficients $\mathcal{W}_{xy}^{ij}$ à partir desquels sont définies les matrices toriques généralisées $W_{xy}$. Pour l'élément $y = 0$ nous obtenons les matrices toriques $W_x = W_{x0}$. L'action est bien définie et permet d'obtenir des formules compactes pour les expressions des fonctions de partition invariantes modulaires et généralisées. Nous retrouvons ainsi la classification de Cappelli-Itzykson-Zuber et donnons des formules pour les expressions des fonctions de partition à une et deux lignes de défauts de tous les modèles $\widehat{su}(2)$.

Notre réalisation de $Oc(G)$ permet de généraliser les méthodes aux cas $SU(n)_\ell$. Nous avons étudié les trois cas exceptionnels possédant *self-fusion* du modèle $\widehat{su}(3)$ et déterminé leurs fonctions de partition. Les expressions obtenues pour la fonction de partition invariante modulaire coïncident avec celles provenant de la classification de Gannon, et nous avons obtenu des expressions générales pour les fonctions de partition à une et deux lignes de défauts.

Les calculs explicites ainsi que les expressions des fonctions de partition des modèles étudiées sont présentés dans le chapitre **4**.

### 3.4.3 Relations de compatibilité algébrique

Soit $G$ un graphe de type $ADE$ et $\mathcal{B}(G)$ l'algèbre graduée des endomorphismes de chemins essentiels sur $G$ : $\mathcal{B}(G)$ est techniquement une algèbre de Hopf faible [67]. Il existe deux produits distincts $\circ$ (composition) et $\odot$ (convolution) dans $\mathcal{B}(G)$, vérifiant des conditions de compatibilité.

#### La digèbre $\mathcal{B}(G)$ : règles de somme (quadratique et linéaire)

$\mathcal{B}(G)$ est semi-simple pour ses deux structures algébriques, nous pouvons donc la diagonaliser pour ses deux lois. L'espace vectoriel $\mathcal{B}(G)$ possède donc deux structures d'algèbre, qu'on peut écrire matriciellement :

$$\mathcal{B}(G) \cong \bigoplus_i L^i \cong \bigoplus_x X^x \tag{3.59}$$

**Première loi : composition $\circ$** Pour la loi de composition $\circ$, les blocs $L^i$ sont indexés par la longueur $i$ des chemins essentiels. Les projecteurs minimaux centraux dans chaque bloc sont labellés par les vertex du graphe $\mathcal{A}(G)$. Rappelons que l'élément $(a, b)$ de la matrice $F_i$, pour $i \in \mathcal{A}(G)$, est égal au nombre de chemins essentiels de longueur $i$ partant du vertex $\sigma_a$

et arrivant au vertex $\sigma_b$ de $G$. La dimension de chaque bloc $L^i$ est donnée par :

$$d_i = \sum_{a,b=0}^{r-1} (F_i)_{ab} \tag{3.60}$$

Comme $\mathcal{B}(G) \cong \oplus_i L^i$, la dimension de $\mathcal{B}(G)$ est donnée par :

$$\dim(\mathcal{B}(G)) = \sum_{i=0}^{\kappa-2} d_i^2 \tag{3.61}$$

**Deuxième loi : convolution $\odot$** Pour la loi de convolution $\odot$, les blocs $X^x$ sont indexés par le label $x$. Les projecteurs minimaux centraux de chaque bloc sont labellés par les vertex du graphe $Oc(G)$. En analogie avec le cas précédent, la dimension de chaque bloc $X^x$ est donnée par

$$d_x = \sum_{a,b=0}^{r-1} (S_x)_{ab} \tag{3.62}$$

L'élément $(a, b)$ de $S_x$, pour $x \in Oc(G)$, est vu comme le nombre de chemins verticaux partant du vertex $\sigma_a$ et arrivant au vertex $\sigma_b$ sur $G$, les chemins verticaux étant une base des chemins qui diagonalisent $\mathcal{B}(G)$ pour la loi $\odot$. Comme $\mathcal{B}(G) \cong \oplus_x X^x$, la dimension de $\mathcal{B}(G)$ est donnée par :

$$\dim(\mathcal{B}(G)) = \sum_{x=0}^{s-1} d_x^2 \tag{3.63}$$

**Règles de somme** Nous avons l'égalité suivante (**règle de somme quadratique**) :

$$\dim(\mathcal{B}(G)) = \sum_{l=0}^{\kappa-2} d_l^2 = \sum_{x=0}^{s-1} d_x^2 \tag{3.64}$$

Une autre relation peut aussi être vérifiée dans la plupart des cas[9], la **règle de somme linéaire** :

$$\sum_{l=0}^{\kappa-2} d_l = \sum_{x=0}^{s-1} d_x \tag{3.65}$$

*A priori*, il n'existe pas de raison d'obtenir une telle relation pour une digèbre semi-simple pour ses deux structures multiplicatives. Son interprétation reste encore mystérieuse. Elle proviendrait d'un changement de base entre les chemins essentiels (indexés par la longueur $i$) et les chemins verticaux (indexés par le label $x$), mais une définition précise des chemins verticaux et de cette transformation demeure incomplète.

[9]Dans les cas où cette relation n'est pas satisfaite, on sait la corriger.

### Une autre règle de somme

Considérons un graphe $G$ de type $ADE$ et de nombre de Coxeter $\kappa$, et les algèbres $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$ associées. Une représentation de $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$ est donnée par les matrices de fusion $N_i$ (de dimension $\kappa - 1$) et $O_x$ (de dimension $s$). Définissons :

$$\widehat{d}_i = \sum_{j,k} (N_i)_{jk} \ , \qquad \widehat{d}_x = \sum_{y,z} (O_x)_{yz} \ . \tag{3.66}$$

Soient $W_x$ les matrices toriques associées au modèle. Nous avons vérifié que les relations suivantes sont satisfaites :

$$\sum_{y,z} (O_x)_{yz} \ = \sum_{i,j} (W_x)_{ij} \ . \tag{3.67}$$

Alors, la règle de somme suivante est satisfaite :

$$\sum_{i,j} \mathcal{M}_{ij} \ \widehat{d}_i \ \widehat{d}_j \ = \sum_x \widehat{d}_x^2 \, . \tag{3.68}$$

**dém** : Nous partons de l'équation (1.94)

$$\sum_x (W_x)_{ij} \ (W_x)_{i'j'} = \sum_{i'',j''} \mathcal{N}_{ii'}^{i''} \ \mathcal{N}_{jj'}^{j''} \ \mathcal{M}_{i''j''} \tag{3.69}$$

Du fait que $(N_i)_{jk} = \mathcal{N}_{ij}^k$, en sommant sur les $i, i', j, j'$, nous obtenons :

$$\sum_{i'',j''} \mathcal{M}_{i''j''} \ \widehat{d}_{i''} \ \widehat{d}_{j''} = \sum_x \sum_{ij} \sum_{i'j'} (W_x)_{ij} \ (W_x)_{i'j'} \tag{3.70}$$

et utilisant (3.67) nous arrivons au résultat. ■

Cette règle de somme est importante car elle relie les nombres caractéristiques de l'algèbre $Oc(G)$ avec les nombres caractéristiques de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$. Elle permet donc une vérification de nos constructions des structures algébriques construites à partir de diagrammes $G$ généralisés.

### Masses quantiques

Pour un graphe $G$, les composantes du vecteur normalisé de Peron-Frobenius définissent les dimensions quantiques des vertex $\sigma$ de $G$ : ce sont des nombres quantiques $[n]_q = qdim(\sigma)$. Rappelons que le nombre quantique $[n]_q$ est défini par :

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \qquad q = \exp(\frac{i\pi}{\kappa}), \qquad q^{2\kappa} = 1. \tag{3.71}$$

Ces nombres s'écrivent explicitement :

$$\begin{aligned} \text{n pair} \qquad [n]_q &= q + q^{-1} + q^3 + q^{-3} + q^5 + q^{-5} + \ldots + q^{n-1} + q^{-(n-1)} \\ &= 2\cos\left(\tfrac{\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{3\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{5\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{(n-1)\pi}{\kappa}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{n impair} \qquad [n]_q &= 1 + q^2 + q^{-2} + q^4 + q^{-4} + q^6 + q^{-6} + \ldots + q^{n-1} + q^{-(n-1)} \\ &= 1 + 2\cos\left(\tfrac{2\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{4\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{6\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{(n-1)\pi}{\kappa}\right) \end{aligned}$$

**Définition 14** *Pour um graphe $G$ de type $ADE$ à $r$ vertex $\sigma_a$, sa* **masse quantique** $m(G)$ *est définie par :*

$$m(G) = \sum_{a=0}^{r-1} (qdim(\sigma_a))^2 \tag{3.72}$$

Si $Oc(G)$ est de la forme $Oc(G) = G \otimes_J G$, alors nous définissons la masse quantique de $Oc(G)$ par :

$$m(Oc(G)) = \frac{m(G).m(G)}{m(J)} \tag{3.73}$$

**Propriété 2** *Soit un graphe $G$ tel que la diagonalisation des deux lois $\circ$ et $\odot$ de la digèbre $\mathcal{B}G$ soit décrite respectivement par $\mathcal{A}(G)$ et par $Oc(G)$. Alors les masses quantiques de $A(G)$ et de $Oc(G)$ sont égales :*

$$m(A(G)) = m(Oc(G)) \tag{3.74}$$

Cette observation, proprement généralisée[10], est aussi valable pour les graphes de type $ADE$. Nous ne connaissons pas de démonstration de cette relation, ni même son origine. Nous verrons qu'elle est aussi vérifiée pour les graphes généralisés des cas $SU(3)_\ell$ étudiés.

Grâce à notre réalisation de l'algèbre d'Ocneanu, nous avons pu définir les algèbres d'Ocneanu pour certains exemples des diagrammes de Coxeter-Dynkin généralisés. *A priori* cette construction est une conjecture, car une définition de la digèbre $\mathcal{B}(G)$ pour des graphes généralisés $G$ n'est pas encore disponible dans la littérature. Pour les cas étudiés de $SU(3)_\ell$, les diverses règles de somme (linéaire, quadratique, de masse quantique) sont satisfaites, donnant ainsi une confirmation de nos constructions.

[10] La définition de la masse quantique de $Oc(G)$ pour les graphes $D_{2n}$ et les graphes de type II doit être adaptée.

# Chapitre 4

# Calculs explicites

Dans ce chapitre nous traitons explicitement l'ensemble des cas du type $su(2)$ et trois exemples du type $su(3)$, en donnant une réalisation de leur algèbre d'Ocneanu. Par cette réalisation, nous déterminons toutes les fonctions de partition invariantes modulaires ainsi que les formules générales permetttant d'obtenir les fonctions de partition généralisées, interprétées dans le langage de la théorie des champs conformes comme décrivant des systèmes définis sur un tore, avec l'introduction de une ou deux lignes de défauts.

## 4.1 Rappels des notations

Nous donnons un rappel des notations introduites pour les différentes structures rencontrées.

- Graphes $G$
  - $G$ est un graphe correspondant à un diagramme de Dynkin de type $ADE$ ou généralisé. Nous apelons aussi $G$ l'algèbre du graphe de $G$, lorsque $G$ possède *self-fusion* (type I).
  - $r$ est le nombre de vertex de $G$.
  - $\sigma_a$ sont les vertex du graphe $G$ ($a = 0, 1, \ldots, r-1$ pour un diagramme $ADE$).
  - $\mathcal{V}(G)$ est l'espace vectoriel, de dimension $r$, dont une base est formée par les vertex $\sigma_a$ de $G$.
  - $\mathcal{G}$ est la matrice d'adjacence de $G$.
  - $\beta$ est la plus grande valeur propre de $\mathcal{G}$ (norme de $G$).
  - $P$ est le vecteur propre de $\mathcal{G}$ correspondant à $\beta$ (vecteur de Perron-Frobenius). Les composantes de P définissent les dimensions quantiques des vertex $\sigma$ de $G$.
  - $\kappa$ est le nombre (dual) de Coxeter de $G$.
  - $G_a = (G_a)_{bc}$ sont les matrices donnant une représentation fidèle de l'algèbre du graphe $G$, lorsqu'elle existe.

• Graphes $\mathcal{A}(G)$

- $\mathcal{A}(G)$ est le graphe de la série $\mathcal{A}$ ayant le même nombre de Coxeter $\kappa$ que $G$. $\mathcal{A}(G)$ désigne aussi l'algèbre du graphe (qui existe toujours).
- $\tau_i$ sont les vertex du graphe $\mathcal{A}(G)$ ($i = 0, 1, \ldots, \kappa - 2$ si $G$ est du type $ADE$.
- $N_i = (N_i)_{jk}$ sont les matrices donnant une représentation de l'algèbre du graphe $\mathcal{A}(G)$. Elles forment une représentation de l'algèbre de fusion.
- $F_i = (F_i)_{ab} \doteq (E_a)_{ib}$ sont les matrices qui codent l'action (multiplication externe) de $\mathcal{A}(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$. Elles forment une représentation de l'algèbre de fusion, de dimension $r$.
- $d_i = \sum\limits_{a,b} (F_i)_{ab}$ est la dimension des blocs de la digèbre $\mathcal{B}(G)$ pour la loi $\circ$.
- $E_a = (E_a)_{ib}$ sont les matrices essentielles du graphe $G$.
- $E_0$ est la matrice essentielle correspondant à $\sigma_0$, apelée *intertwiner*. Si $G$ possède *self-fusion*, elle code les règles de branchement $\tau_i \hookrightarrow \sum_b (E_0)_{ib}\, \sigma_b$ de $\mathcal{A}(G)$ vers $G$.

• Graphes $Oc(G)$

- $Oc(G)$ est le graphe d'Ocneanu associé à $G$. $Oc(G)$ désigne aussi l'algèbre du graphe $Oc(G)$, appelée algèbre des symétries quantiques (qui existe toujours, mais n'est pas forcément commutative).
- $s$ est le nombre de vertex de $Oc(G)$.
- $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \ldots$ sont les vertex de $Oc(G)$.
- $O_x = (O_x)_{yz}$ sont les matrices donnant une représentation de l'algèbre $Oc(G)$.
- $S_x = (S_x)_{ab}$ sont les matrices qui codent l'action (multiplication externe) de $Oc(G)$ sur $\mathcal{V}(G)$.
- $d_x = \sum\limits_{a,b} (S_x)_{ab}$ est la dimension des blocs de la digèbre $\mathcal{B}(G)$ pour la loi $\odot$.

• Fonctions de partition

- $W_{xy} = (W_{xy})_{ij}$ sont les matrices toriques généralisées qui codent l'action (à gauche et à droite) de $\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G)$.
- $\mathcal{Z}_{x|y} = \sum_{i,j} \chi_i(q)(W_{xy})_{ij}\overline{\chi}_j(q)$ sont les fonctions de partition généralisées (*twistées*) du modèle considéré.
- $\chi_i(q)$ sont les caractères de l'algèbre affine du modèle ($\widehat{su}(2)$ ou $\widehat{su}(3)$).
- $\hat{\chi}_a(q)$ sont les caractères étendus associés au graphe $G$.
- $\mathcal{M} = W_{00}$ est l'invariant modulaire, qui commute avec les générateurs $S$ et $T$ du groupe modulaire.
- $\mathcal{Z}_G = \mathcal{Z}_{0|0}$ est la fonction de partition invariante modulaire associée au graphe $G$.

Les différentes matrices rencontrées satisfont des relations, que nous rappelons ici :

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\tau_i.\tau_j & = & \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k\ \tau_k & \rightarrow & N_i.N_j & = & \sum_k (N_i)_{jk}\ N_k \\
\sigma_a.\sigma_b & = & \sum_b G_{ab}^c\ \sigma_c & \rightarrow & G_a.G_b & = & \sum_b (G_a)_{bc}\ G_c \\
\underline{x}.\underline{y} & = & \sum_z \mathcal{O}_{xy}^z\ \underline{z} & \rightarrow & O_x.O_y & = & \sum_z (O_x)_{yz}\ O_z \\
\tau_i.\sigma_a & = & \sum_b \mathcal{F}_{ia}^b\ \sigma_b & \rightarrow & F_i.G_a & = & \sum_b (F_i)_{ab}\ G_b \\
(\tau_i.\tau_j).\sigma_a & = & \tau_i.(\tau_j.\sigma_a) & \rightarrow & F_i.F_j & = & \sum_k (N_i)_{jk}\ F_k \\
\underline{x}.\sigma_a & = & \sum_b \mathcal{S}_{xa}^b\ \sigma_b & \rightarrow & S_x.G_a & = & \sum_b (S_x)_{ab}\ G_b \\
(\underline{x}.\underline{y}).\sigma_a & = & \underline{x}.(\underline{y}.\sigma_a) & \rightarrow & S_y.S_x & = & \sum_z (O_x)_{yz}\ S_z \\
\tau_i.\underline{x}.\tau_j & = & \sum_y (W_{ij})_{xy}\ \underline{y} & \rightarrow & W_{ij}.O_x & = & \sum_y (W_{ij})_{xy}\ O_y \\
\tau_{i'}.(\tau_i.x.\tau_j).\tau_{j'} & = & (\tau_{i'}.\tau_i).x.(\tau_j.\tau_{j'}) & \rightarrow & W_{ij}.W_{i'j'} & = & \sum_{i''}\sum_{j''} (N_i)_{i'i''}\ (N_j)_{j'j''}\ W_{i''j''}
\end{array}
$$

## 4.2 Calculs des cas $\widehat{su}(2)$

Les fonctions de partition à une ligne de défauts des cas du type $su(2)$ ont premièrement été publiées dans [25] et [77] (obtenues par des méthodes de calculs très différentes), et des résultats partiels sont aussi connus pour les fonctions de partition à deux lignes de défauts [78]. Elles y sont données en fonction des caractères de l'algèbre $\widehat{su}(2)$. Par l'introduction des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ [34, 62, 63], nous donnons des formules générales permettant l'obtention de toutes ces fonctions de partition de manière simple et compacte.

Il est difficile d'avoir un traitement unifié pour les différents cas $ADE$, chaque cas ayant sa particularité. Les cas $A_n$ sont trop simples, dans le sens où diverses structures coïncident. Les cas $E_6$ et $E_8$ (cas exceptionnels) sont assez analogues. Les cas $D_{2n}$ sont les seuls qui conduisent à une algèbre d'Ocneanu non-commutative, et forment avec les cas $A_n$, $E_6$ et $E_8$ les modèles de type I. Enfin, les cas $D_{2n+1}$ et $E_7$ sont les modèles de type II : leur algèbre d'Ocneanu est définie à partir de l'algèbre d'un graphe de type I.

### 4.2.1 Les cas $A_n$

Les cas $A_n$ sont les plus simples des cas $ADE$. Nous traiterons ici l'exemple du cas $A_4$. La généralisation aux $A_n$ est presque immédiate : nous donnerons un aperçu des calculs.

#### Le cas $A_4$

Le graphe $A_4$ et sa matrice d'adjacence sont illustrés à la Fig. 4.1, où nous avons choisi l'ordre suivant de la base des vertex : $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$.

$$\mathcal{G}_{A_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.1 – Le graphe $A_4$ et sa matrice d'adjacence.

Pour $A_4$, $\kappa = 5$, et la norme du graphe est égale au nombre d'or $\beta = 2\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, solution de l'équation $\beta^2 = 1 + \beta$. Les composantes du vecteur normalisé de Perron-Frobenius (dimensions quantiques des vertex) sont données par : $P = ([1]_q, [2]_q, [2]_q, [1]_q)$, pour $q = \exp(i\pi/5)$. Le graphe $A_4$ détermine de manière unique l'algèbre de graphe $A_4$. Nous connaissons dejà la multiplication par $\tau_0$ (l'identité) et par $\tau_1$ (à l'aide du graphe) : nous pouvons remplir les deux premières lignes et colonnes de la table. En écrivant $\tau_2 = \tau_1.\tau_1 - \tau_0$ et $\tau_3 = \tau_1.\tau_2 - \tau_1 = \tau_1.\tau_1.\tau_1 - 2\tau_0$, nous pouvons alors compléter toute la table, illustrée ci-dessous :

| | $\tau_0$ | $\tau_1$ | $\tau_2$ | $\tau_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\tau_0$ | $\tau_0$ | $\tau_1$ | $\tau_2$ | $\tau_3$ |
| $\tau_1$ | $\tau_1$ | $\tau_0 + \tau_2$ | $\tau_1 + \tau_3$ | $\tau_2$ |
| $\tau_2$ | $\tau_2$ | $\tau_1 + \tau_3$ | $\tau_0 + \tau_2$ | $\tau_1$ |
| $\tau_3$ | $\tau_3$ | $\tau_2$ | $\tau_1$ | $\tau_0$ |

TAB. 4.1 – Table de multiplication de l'algèbre de graphe $A_4$.

Les matrices de fusion $N_i$, dont les éléments sont les constantes de structure de l'algèbre de graphe $A_4$, peuvent se lire de cette table. Elles s'obtiennent plus facilement comme des polynomes de la matrice d'adjacence du graphe $A_4$ :

$$N_0 = \mathbb{1}_{4\times 4} \qquad N_2 = N_1.N_1 - N_0$$
$$N_1 = \mathcal{G}_{A_4} \qquad N_3 = N_1.N_1.N_1 - 2.N_1$$

ou bien directement par la formule de récurrence tronquée de $SU(2)$. Elles forment une représentation matricielle de l'algèbre de graphe $A_4$. Dans la base choisie, elles sont données par :

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et vérifient :

$$(N_i)_{jk} = (N_i)_{kj} = (N_k)_{ij} \tag{4.1}$$

Le graphe de la série $A_n$ correspondant à $A_4$ est ... $A_4$ lui-même. Par conséquent, les matrices $F_i$ sont égales aux matrices de fusion $N_i$. L'algèbre d'Ocneanu de $A_4$ est définie par :

$$Oc(A_4) = A_4 \otimes_{A_4} A_4 = A_4 \dot{\otimes} A_4. \tag{4.2}$$

où nous identifions les éléments $\tau_i \dot{\otimes} \tau_j$ avec $\tau_i.\tau_j \dot{\otimes} \tau_0$. C'est une algèbre de dimension 4 engendrée par les quatre éléments suivants :

$$\underline{0} = 0 \dot{\otimes} 0, \qquad \underline{1} = 1 \dot{\otimes} 0, \qquad \underline{2} = 2 \dot{\otimes} 0, \qquad \underline{3} = 3 \dot{\otimes} 0,$$

et est donc isomorphe à l'algèbre de graphe de $A_4$. Le graphe d'Ocneanu de $A_4$ est identique au graphe de $A_4$ lui-même. Les matrices $O_x$ codant la multiplication dans $Oc(A_4)$ et les matrices $S_x$ codant l'action de $Oc(A_4)$ sur $A_4$ sont égales aux matrices de fusion $N_i$. La dimension des blocs de la bigèbre $\mathcal{B}(A_4)$ pour ses deux lois multiplicatives est donnée par la somme des éléments des matrices $F_i$ et $S_x$, égales à $N_i$. Nous avons $d_i = d_x = (4, 6, 6, 4)$ et les règles de somme linéaire et quadratique sont évidemment vérifiées.

$$\sum_i d_i = \sum_x d_x = 20 \qquad \dim(\mathcal{B}A_4) = \sum_i d_i^2 = \sum_x d_x^2 = 104.$$

Les matrices toriques généralisées sont définies par l'action de $A_4$ sur $Oc(A_4)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \tau_i.x.\tau_j = \tau_i.(\tau_x \dot{\otimes} \tau_0).\tau_j &= \sum_m \sum_n (F_x)_{im}(F_0)_{jn}\ (\tau_m \otimes \tau_n) \\ &= \sum_y \sum_m \sum_n (N_x)_{im}(N_0)_{jn}(N_m)_{ny}(\tau_y \otimes \tau_0) \\ &= \sum_m (N_x)_{im}(N_y)_{mj}\underline{y} = (N_x.N_y)_{ij}\underline{y} \end{aligned}$$

Les matrices toriques $W_{xy}$ sont donc égales à :

$$(W_{xy})_{ij} = (N_x.N_y)_{ij} \tag{4.3}$$

Les fonction de partition généralisées du modèle $A_4$ sont définies par :

$$\mathcal{Z}_{x|y} = \sum_i \sum_j \chi_i(q)(N_x.N_y)_{ij}\overline{\chi}_j(q) \tag{4.4}$$

et la fonction de partition invariante modulaire s'écrit :

$$\mathcal{Z}_{A_4} = \sum_{i=0}^{3} |\chi_i(q)|^2. \tag{4.5}$$

Nous donnons toutes les fonctions de partition du modèle $A_4$ dans l'Annexe **D**.

**Formules générales pour $A_n$**

Nous illustrons ci-dessous le graphe $A_n$, pour $n > 4$, et sa matrice d'adjacence, avec comme ordre de la base $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-2}, \tau_{n-1}\}$.

$$\mathcal{G}_{A_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & . & \cdots & . & . \\ 1 & 0 & 1 & . & . & \cdots & . & . \\ . & 1 & 0 & 1 & . & \cdots & . & . \\ . & . & 1 & 0 & 1 & \cdots & . & . \\ . & . & . & 1 & 0 & \cdots & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.2 – Le graphe $A_n$ et sa matrice d'adjacence.

Pour les graphes $A_n$, $\kappa = n+1$ et $\beta = 2\cos\frac{\pi}{n+1}$. Les composantes du vecteur normalisé de Perron-Frobenius définissant les dimensions quantiques des vertex sont données par :

$$\begin{aligned} \text{n pair} : P &= \left([1]_q, [2]_q, [3_q], \ldots, \left[\frac{n}{2}-1\right]_q, \left[\frac{n}{2}\right]_q, \left[\frac{n}{2}\right]_q, \left[\frac{n}{2}-1\right]_q, \ldots, [3]_q, [2]_q, [1]_q\right) \\ \text{n impair} : P &= \left([1]_q, [2]_q, [3_q], \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]_q, \left[\frac{n+1}{2}\right]_q, \left[\frac{n-1}{2}\right]_q, \ldots, [3]_q, [2]_q, [1]_q\right) \end{aligned}$$

Pour tous les cas $A_n$, l'algèbre de graphe est entièrement déterminée par les données du graphe. Les matrices de fusion $N_i$ formant la représentation matricielle de l'algèbre de graphe $A_n$ s'obtiennent par la formule de récurrence tronquée de $SU(2)$. L'algèbre d'Ocneanu de $A_n$ est définie par :

$$Oc(A_n) = A_n \otimes_{A_n} A_n = A_n \dot{\otimes} A_n \tag{4.6}$$

et coïncide avec l'algèbre du graphe $A_n$. Pour les cas $A_n$, nous avons donc $\mathcal{A}(A_n) = Oc(A_n) = A_n$, les matrices $F_i$, $O_x$ et $S_x$ sont donc toutes égales à $N_i$. La dimension des blocs est donnée pour les deux structures par la somme des éléments des matrice $N_i$.
Les matrices toriques généralisées sont données par :

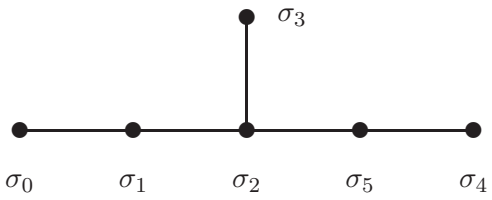
$$(W_{xy})_{ij} = (N_x.N_y)_{ij} \tag{4.7}$$

et les fonctions de partition généralisées et l'invariante modulaire sont données par :

$$\mathcal{Z}_{x|y} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \chi_i(q)\,(N_x.N_y)_{ij}\,\overline{\chi}_j(q) \qquad \mathcal{Z}_{A_n} = \sum_{i=1}^{n-1} |\chi_i(q)|^2 \tag{4.8}$$

### 4.2.2 Le cas $E_6$

**Graphe $E_6$ et matrices de fusion** Le graphe $E_6$ et sa matrice d'adjacence sont illustrés à la Fig. 4.2.2. Nous choisissons l'ordre suivant pour les vertex : $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_5, \sigma_4, \sigma_3\}$.




$$\mathcal{G}_{E_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.3 – Le graphe $E_6$ et sa matrice d'adjacence.

Pour $E_6$, $\kappa = 12$, la norme du graphe est $\beta = 2\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et les composantes du vecteur de Perron-Frobenius, sont : $P = \left([1]_q, [2]_q, [3]_q, [2]_q, [1]_q, \frac{[3]_q}{[2]_q}\right)$, avec $q = \exp(\frac{i\pi}{12})$. Le graphe $E_6$ détermine de manière unique la table de multiplication de l'algèbre de graphe $E_6$, illustrée ci-dessous :

| | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_5$ | $\sigma_4$ | $\sigma_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_0$ | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_5$ | $\sigma_4$ | $\sigma_3$ |
| $\sigma_1$ | $\sigma_1$ | $\sigma_0 + \sigma_2$ | $\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_5$ | $\sigma_2 + \sigma_4$ | $\sigma_5$ | $\sigma_2$ |
| $\sigma_2$ | $\sigma_2$ | $\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_5$ | $\sigma_0 + \sigma_2 + \sigma_2 + \sigma_4$ | $\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_5$ | $\sigma_2$ | $\sigma_1 + \sigma_5$ |
| $\sigma_5$ | $\sigma_5$ | $\sigma_2 + \sigma_4$ | $\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_5$ | $\sigma_0 + \sigma_2$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ |
| $\sigma_4$ | $\sigma_4$ | $\sigma_5$ | $\sigma_2$ | $\sigma_1$ | $\sigma_0$ | $\sigma_3$ |
| $\sigma_3$ | $\sigma_3$ | $\sigma_2$ | $\sigma_1 + \sigma_5$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_0 + \sigma_4$ |

TAB. 4.2 – Table de multiplication de l'algèbre de graphe $E_6$.

Les matrices de fusion $G_a$ de $E_6$ sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} G_0 &= \mathbb{1}_{6\times 6} & G_4 &= G_1.G_1.G_1.G_1 - 4G_1.G_1 + 2G_0 \\ G_1 &= \mathcal{G}_{E_6} & G_5 &= G_1.G_4 \\ G_2 &= G_1.G_1 - G_0 & G_3 &= -G_1.(G_4 - G_1.G_1 + 2G_0) \end{aligned}$$

**Induction-restriction** Le graphe de la série $A_n$ possédant le même nombre de Coxeter que $E_6$ est $A_{11}$. Les matrices de fusion $N_i$ de $A_{11}$ et les matrices $F_i$ codant l'action de $A_{11}$ sur $E_6$ s'obtiennent par :

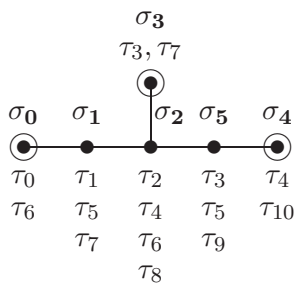
$$\begin{aligned} N_0 &= \mathbb{1}_{11\times 11} & F_0 &= \mathbb{1}_{6\times 6} \\ N_1 &= \mathcal{G}_{A_{11}} & F_1 &= \mathcal{G}_{E_6} \\ N_i &= N_1.N_{i-1} - N_{i-2} & F_i &= F_1.F_{i-1} - F_{i-2} \qquad 2 \leq i \leq 10 \end{aligned}$$

Les matrices essentielles $E_a$ ($(E_a)_{ib} = (F_i)_{ab}$) possèdent 11 lignes (labellées par les vertex $\tau_i$ de $A_{11}$) et 6 colonnes (labellées par les vertex $\sigma_b$ de $E_6$). La matrice essentielle $E_0$ (*intertwiner*) est illustrée à la Fig. 4.4 et définit les règles de branchement $A_{11} \hookrightarrow E_6 : \tau_i \hookrightarrow \sum_a (E_0)_{ia}\sigma_a$.

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & . & 1 & . \\ . & 1 & . & 1 & . & . \\ 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} \tau_0 & \hookrightarrow & \sigma_0 \\ \tau_1 & \hookrightarrow & \sigma_1 \\ \tau_2 & \hookrightarrow & \sigma_2 \\ \tau_3 & \hookrightarrow & \sigma_3 + \sigma_5 \\ \tau_4 & \hookrightarrow & \sigma_2 + \sigma_4 \\ \tau_5 & \hookrightarrow & \sigma_1 + \sigma_5 \\ \tau_6 & \hookrightarrow & \sigma_0 + \sigma_2 \\ \tau_7 & \hookrightarrow & \sigma_1 + \sigma_3 \\ \tau_8 & \hookrightarrow & \sigma_2 \\ \tau_9 & \hookrightarrow & \sigma_5 \\ \tau_{10} & \hookrightarrow & \sigma_4 \end{array}$$

FIG. 4.4 – Matrice essentielle $E_0$ de $E_6$ et règles de branchement $A_{11} \hookrightarrow E_6$.

Pour connaitre l'induction $E_6 \hookleftarrow A_{11}$, il suffit de considérer les règles de branchement dans la direction opposée. Par exemple, $\sigma_3$ *provient* de $\tau_3$ et de $\tau_7$ ($\sigma_3$ apparait dans la restriction de $\tau_3$ et de $\tau_7$ vers $E_6$), que nous écrivons $\sigma_3 \hookleftarrow (\tau_3, \tau_7)$. Nous obtenons ainsi le graphe d'induction $E_6 \hookleftarrow A_{11}$ illustré à la Fig. 4.5. L'opérateur $T$ du groupe modulaire est diagonal sur les vertex $\tau$ de $A_{11}$ : à chaque vertex $\tau_i$ correspond une valeur de l'exposant modulaire $\hat{T}$ définie par $\hat{T}(\tau_i) = (i+1)^2 \bmod 48$. Les valeurs de $\hat{T}$ sur les vertex du graphe $A_{11}$ sont aussi présentées à la Fig. 4.5.




| | $\tau_0$ | $\tau_1$ | $\tau_2$ | $\tau_3$ | $\tau_4$ | $\tau_5$ | $\tau_6$ | $\tau_7$ | $\tau_8$ | $\tau_9$ | $\tau_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{T}$ : | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 1 | 16 | 33 | 4 | 25 |

FIG. 4.5 – Graphe d'induction $E_6 \hookleftarrow A_{11}$ et valeurs de l'exposant modulaire $\hat{T}$ sur les vertex de $A_{11}$.

Du graphe d'induction $E_6/A_{11}$, nous lisons par exemple $\sigma_0 \hookleftarrow (\tau_0, \tau_6)$. La valeur de $\hat{T}$ sur $\tau_0$ et $\tau_6$ est la même : ceci permet de définir une valeur de $\hat{T}$ de manière unique au vertex $\sigma_0$ de $E_6$ : $\hat{T}(\sigma_0) = \hat{T}(\tau_0) = \hat{T}(\tau_6)$. Ceci est aussi valable pour les vertex $\sigma_3$ et $\sigma_4$ de $E_6$ : $\hat{T}(\sigma_3) = \hat{T}(\tau_3) = \hat{T}(\tau_7)$ et $\hat{T}(\sigma_4) = \hat{T}(\tau_0) = \hat{T}(\tau_4)$. Pour les autres vertex de $E_6$, nous ne pouvons pas

définir de valeur fixe de $\hat{T}$. Par exemple : $\sigma_1 \hookleftarrow (\tau_1, \tau_5, \tau_7)$, mais $\hat{T}(\tau_1) \neq \hat{T}(\tau_5) \neq \hat{T}(\tau_7)$. Les vertex de $E_6$ pour lesquels une valeur de $\hat{T}$ est définie de manière unique par le mécanisme d'induction forment le sous-espace $J = \{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_4\}$, qui est aussi une sous-algèbre de $E_6$ (les éléments de $J$ sont encerclés sur le graphe d'induction). Appelons $\overline{J}$ le sous-espace engendré par les éléments $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5\}$. Alors, nous avons :

$$E_6 = J \oplus \overline{J}, \qquad J\,J \subset J, \qquad J\,\overline{J} \subset J.$$

$J$ fournit une partition de $E_6$ en classes d'équivalence : $\sigma_a \sim \sigma_b$ s'il existe un élément $\sigma_c \in J$ tel que $(G_c)_{ab} \neq 0$ [2, 30, 32, 78]. Pour $E_6$, nous avons par exemple : $\sigma_0.\sigma_1 = \sigma_1, \sigma_3.\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_4.\sigma_1 = \sigma_5$. Nous avons deux classes d'équivalence :

$$\begin{aligned} \sigma_0 \sim \sigma_3 \sim \sigma_4 \quad &: \quad \tilde{\sigma_0} = \tilde{\sigma_3} = \tilde{\sigma_4} = \{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_4\} = J \\ \sigma_1 \sim \sigma_2 \sim \sigma_5 \quad &: \quad \tilde{\sigma_1} = \tilde{\sigma_2} = \tilde{\sigma_5} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5\} = \overline{J} \end{aligned}$$

Un élément $\sigma_b \notin J$ peut s'écrire $(\rho(\sigma_b).\sigma_1)$, où $\rho(\sigma_b)$ est un élément de $J$. Nous avons :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} \sigma_1 & = & \sigma_0.\sigma_1 & \rho(\sigma_1) & = & \sigma_0 \\ \sigma_2 & = & \sigma_3.\sigma_1 & \rho(\sigma_2) & = & \sigma_3 \\ \sigma_5 & = & \sigma_4.\sigma_1 & \rho(\sigma_5) & = & \sigma_4 \end{array}$$

**Algèbre d'Ocneanu** L'algèbre d'Ocneanu de $E_6$ est définie par :

$$Oc(E_6) = \frac{E_6 \otimes E_6}{J} = E_6 \otimes_J E_6 = E_6 \dot{\otimes} E_6 \tag{4.9}$$

Les éléments de $Oc(E_6)$ sont de la forme $\underline{x} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$, où nous identifions les éléments $(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b.\sigma_c)$ avec $(\sigma_a.\sigma_b \dot{\otimes} \sigma_c)$ pour $\sigma_b \in J$. Une base de $Oc(E_6)$ est donnée par les 12 éléments linéairement indépendants $\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0$ et $\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_1$, notés :

$$\begin{array}{llll} \underline{0} = \sigma_0 \dot{\otimes} \sigma_0, & \underline{3} = \sigma_3 \dot{\otimes} \sigma_0, & \underline{1'} = \sigma_0 \dot{\otimes} \sigma_1, & \underline{31'} = \sigma_3 \dot{\otimes} \sigma_1, \\ \underline{1} = \sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_0, & \underline{4} = \sigma_4 \dot{\otimes} \sigma_0, & \underline{11'} = \sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_1, & \underline{41'} = \sigma_4 \dot{\otimes} \sigma_1, \\ \underline{2} = \sigma_2 \dot{\otimes} \sigma_0, & \underline{5} = \sigma_5 \dot{\otimes} \sigma_0, & \underline{21'} = \sigma_2 \dot{\otimes} \sigma_1, & \underline{51'} = \sigma_5 \dot{\otimes} \sigma_1. \end{array}$$

Nous avons les suivantes identifications dans $Oc(E_6)$ :

$$\begin{array}{rcll} \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b & = & \sigma_a.\sigma_b \dot{\otimes} \sigma_0 & \sigma_b \in J \\ \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b & = & \sigma_a.\rho(\sigma_b) \dot{\otimes} \sigma_1 & \sigma_b \in \overline{J} \end{array} \tag{4.10}$$

La multiplication de l'algèbre $Oc(E_6)$ est définie par :

$$(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b).(\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_d) = \sigma_a.\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_b.\sigma_d \tag{4.11}$$

L'élément $\underline{0}$ est l'identité. Les éléments $\underline{1}$ et $\underline{1'}$ sont respectivement les générateurs chiraux gauche et droit : ils engendrent séparemment deux sous-algèbres $E_6 \dot{\otimes} 0$ et $0 \dot{\otimes} E_6$, chacune

isomorphe à l'algèbre de graphe $E_6$. La partie ambichirale est par définition l'intersection de ces deux sous-algèbres, elle est engendrée par les éléments $\{\underline{0}, \underline{3}, \underline{4}\}$. Nous pouvons vérifier que la multiplication par les générateurs de $Oc(E_6)$ est codée par le graphe d'Ocneanu de $E_6$, illustré à la Fig. 4.6. La multiplication par le générateur gauche $\underline{1}$ (resp. droit $\underline{1'}$) est donnée par la somme des éléments du graphe reliés à $\underline{1}$ (resp. $\underline{1'}$) par une ligne continue (resp. discontinue). Par exemple, $\underline{1}.\underline{2} = \underline{1} + \underline{3} + \underline{5}$ et les vertex $\underline{1}, \underline{3}$ et $\underline{5}$ sont reliés au vertex $\underline{2}$ par une ligne continue ; $\underline{1'}.\underline{4} = \underline{41'}$ et les vertex $\underline{4}$ et $\underline{41'}$ sont reliés par une ligne discontinue.

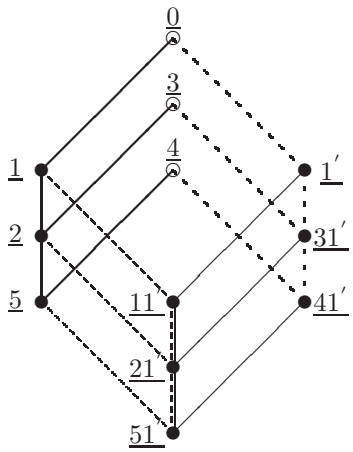



FIG. 4.6 – Le graphe d'Ocneanu de $E_6$

Explicitement, la multiplication des éléments de la base de $Oc(E_6)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0).(\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_0) &= \sum_e (G_a)_{ce}\ (\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_0) \\
(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0).(\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_1) = (\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_1).(\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_0) &= \sum_e (G_a)_{ce}\ (\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_1) \\
(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_1).(\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_1) &= \sum_e (G_a)_{ce}\ (\sigma_e \dot{\otimes} (\sigma_0 + \sigma_2))
\end{aligned}$$

Or, $\sigma_2 = \sigma_3.\sigma_1$, donc $(\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_2) = \sum_f (G_3)_{ef}\ (\sigma_f \dot{\otimes} \sigma_1)$, alors :

$$(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_1).(\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_1) = \sum_e (G_a)_{ce}\ (\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_0) + \sum_e (G_a.G_3)_{ce}\ (\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_1)$$

Les matrices $(12 \times 12)$ $O_x$ forment une représentation de l'algèbre $Oc(E_6)$. Les matrices correspondants aux générateurs $\underline{1}$ et $\underline{1'}$ sont les matrices d'adjacence du graphe d'Ocneanu. En choisissant comme ordre de la base des vertex l'ordre suivant :

$\{\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{5},\underline{4},\underline{3},\underline{1'},\underline{11'},\underline{21'},\underline{51'},\underline{41'},\underline{31'}\}$, ces matrices sont données par :

$$O_1 = \begin{pmatrix}
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & .
\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_1 \end{array}\right)$$

$$O_{1'} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & 1 \\
. & 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 & .
\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & G_3 \end{array}\right)$$

D'après la multiplication de l'algèbre $Oc(E_6)$, les matrices $O_x$ sont données par[1] :

$$O_x = \begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} G_a & 0 \\ \hline 0 & G_a \end{array}\right) & \text{pour } x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0 \\[2ex] \left(\begin{array}{c|c} 0 & G_a \\ \hline G_a & G_3.G_a \end{array}\right) & \text{pour } x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_1 \end{cases}$$

L'action de $Oc(E_6)$ sur $E_6$ est codée par les matrices $S_x$ :

$$\underline{x}.\sigma_c = \sum_d (S_x)_{cd}\sigma_d$$

Elles sont explicitement données par :

$$S_x = \begin{cases} G_a & \text{pour } \underline{x} \;=\; \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0 \\ G_a.G_1 & \text{pour } \underline{x} \;=\; \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_1 \end{cases}$$

**Dimensions des blocs** La digèbre $\mathcal{B}(E_6)$ s'écrit comme une somme de blocs (diagonalisation) pour ses deux structures multiplicatives. Pour la première loi (convolution $\circ$), les blocs sont labellés par les onze vertex du graphe $A_{11}$. La dimension $d_i$, avec $i \in (0, 1, 2, \ldots 10)$, pour ces onze blocs est donnée par la somme des éléments de la matrice $F_i$ : $d_i = \sum_{a,b}(F_i)_{ab}$ :

$$d_i : \qquad (6, 10, 14, 18, 20, 20, 20, 18, 14, 10, 6)$$

[1] Les matrices $O_x$ sont explicitement calculées ici d'après la multiplication de notre réalisation algébrique de $Oc(E_6)$. Dans [78], elles sont obtenues de manière empirique d'après le graphe d'Ocneanu.

Pour la deuxième loi (convolution $\odot$), la dimension $d_x$ des douze blocs, labellés par $\underline{x}$ dans l'ordre $(\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{5},\underline{4},\underline{3};\underline{1'},\underline{11'},\underline{21'},\underline{51'},\underline{41'},\underline{31'})$ est donnée par la somme des éléments de la matrice $S_x$ : $d_x = \sum_{a,b}(S_x)_{ab}$. Nous obtenons :

$$d_x : \qquad (6,10,14,10,6,8,10,20,28,20,10,14)$$

Les règles de somme quadratique et linéaire sont vérifiées :

$$\dim(\mathcal{B}E_6) = \sum_{i\in A_{11}} d_i^2 = \sum_{x\in Oc(E_6)} d_x^2 = 2512, \qquad \sum_i d_i = \sum_x d_x = 156.$$

La masse quantique de $E_6$ et de $\mathcal{A}(E_6) = A_{11}$ sont définies par la somme du carré des dimensions quantiques de leur irreps (composantes du vecteur de Perron-Frobenius). Nous avons : $m(E_6) = 4(3+\sqrt{3}), m(A_{11}) = 24(2+\sqrt{3})$. L'algèbre d'Ocneanu de $E_6$ est $E_6 \otimes_J E_6$, où $J = \{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_4\}$. La dimension quantique de $J$ est $m(J) = qdim^2(\sigma_0) + qdim^2(\sigma_3) + qdim^2(\sigma_4) = 4$. Alors, la relation de masse quantique entre $Oc(E_6)$ et $A_{11}$ est vérifiée :

$$m(Oc(E_6)) = \frac{m(E_6).m(E_6)}{m(J)} = m(A_{11}) = 24(2+\sqrt{3})$$

**Matrices toriques généralisées** L'action de $A_{11}$ sur $Oc(E_6)$ est codée par les matrices $W_{xy}$. Pour calculer explicitement ces matrices, calculons l'action (à droite et à gauche) de $A_{11}$ sur un élément $x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$ de $Oc(E_6)$, en utilisant les identifications (4.10) :

$$\begin{aligned}
\tau_i.(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b).\tau_j &= \sum_{(c,d)\in E_6} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}\ (\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_d) \\
&= \sum_c \sum_{d\in J} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}\ (\sigma_c.\sigma_d \dot{\otimes} \sigma_0) + \sum_c \sum_{d\in \overline{J}} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}\ (\sigma_c.\rho(\sigma_d) \dot{\otimes} \sigma_1) \\
&= \sum_e \sum_c \sum_{d\in J} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}(G_c)_{de}\ (\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_0) \\
&+ \sum_e \sum_c \sum_{d\in \overline{J}} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}(G_c)_{\rho(d)e}\ (\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_1)
\end{aligned}$$

Les matrices de fusion $G$ de $E_6$ commutent entre-elles et sont symétriques, donc nous avons : $(G_a)_{bc} = (G_c)_{ab}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\tau_i.(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b).\tau_j &= \sum_e \sum_c \sum_{d\in J} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}(G_e)_{cd}\ (\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_0) \\
&+ \sum_e \sum_c \sum_{d\in \overline{J}} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}(G_e)_{c\rho(d)}\ (\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_1)
\end{aligned}$$

Les matrices toriques généralisées $W_{xy}$ seront notées $W_{ab,ef}$, pour $\underline{x} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$ et $\underline{y} = \sigma_e \dot{\otimes} \sigma_f$ ($b$ et $f$ =0,1). Elles s'écrivent donc sous la forme compacte suivante :

$$\boxed{W_{ab,ef} = \begin{cases} \sum_{c\in E_6} \sum_{d\in J} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}(G_e)_{cd} & f = 0 \\ \sum_{c\in E_6} \sum_{d\in \overline{J}} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}(G_e)_{c\rho(d)} & f = 1 \end{cases}} \tag{4.12}$$

Nous pouvons alors vérifier que les matrices $(\widetilde{W}_{ij})_{xy} = (W_{xy})_{ij}$ satisfont bien l'algèbre carrée de fusion :

$$\widetilde{W}_{ij}\ \widetilde{W}_{i'j'} = \sum_{i''} \sum_{j''} \mathcal{N}_{ii'}^{i''} \mathcal{N}_{jj'}^{j''} \widetilde{W}_{jj'}\ .$$

L'invariant modulaire $\mathcal{M}$ correspond à la matrice $W_{00,00}$. Par la formule (4.12), et utilisant le fait que $(G_0)_{cd} = \mathbb{1}_{cd} = \delta_{c,d}$, $\mathcal{M}$ est donc égal à :

$$\mathcal{M}_{ij} = (W_{00,00})_{ij} = \sum_{d\in J} (F_i)_{0d}(F_j)_{0d}$$

et nous pouvons vérifier qu'il commute avec les générateurs $S$ et $T$ du groupe modulaire.

**Fonctions de partition généralisées** Elles sont définies à partir des matrices toriques généralisées par :

$$\mathcal{Z}_{x|y} = \sum_{i\in A_{11}} \sum_{j\in A_{11}} \chi_i(q)(W_{xy})_{ij}\overline{\chi}_j(q) \tag{4.13}$$

où les $\chi_i(q)$ sont les caractères de l'algèbre $\widehat{su}(2)$. Introduisons les caractères étendus $\hat{\chi}_a(q)$, définis à partir de la matrice essentielle $E_0$ par :

$$\hat{\chi}_a(q) = \sum_{i\in A_{11}} (E_0)_{ia}\chi_i(q) = \sum_{i\in A_{11}} (F_i)_{0a}\chi_i(q) \tag{4.14}$$

Ils sont explicitement donnés par :

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_0 &= \chi_0 + \chi_6 & \hat{\chi}_3 &= \chi_3 + \chi_7 \\ \hat{\chi}_1 &= \chi_1 + \chi_5 + \chi_7 & \hat{\chi}_4 &= \chi_4 + \chi_{10} \\ \hat{\chi}_2 &= \chi_2 + \chi_4 + \chi_6 + \chi_8 & \hat{\chi}_5 &= \chi_3 + \chi_5 + \chi_9 \end{aligned}$$

Introduisons aussi les caractères étendus généralisés $\hat{\chi}_{ab}$, qui sont des combinaisons linéaires des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ ou des caractères $\chi_i$ (utilisant la propriété $E_a = E_0.G_a$) :

$$\hat{\chi}_{ab} = \sum_{c\in E_6} (G_a)_{bc}\ \hat{\chi}_c\ = \sum_{i\in A_{11}} (F_i)_{ab}\chi_i(q) \tag{4.15}$$

Alors, toutes les fonctions de partition généralisées du modèle $E_6$ s'écrivent sous la forme compacte suivante :

$$\boxed{\mathcal{Z}_{ab,ef} = \begin{cases} \sum_c \sum_{d\in J} \hat{\chi}_{ac}(q)\,(G_e)_{cd}\,\overline{\hat{\chi}}_{bd}(q) & f=0 \\ \sum_c \sum_{d\in \overline{J}} \hat{\chi}_{ac}(q)\,(G_e)_{c\rho(d)}\,\overline{\hat{\chi}}_{bd}(q) & f=1 \end{cases}} \tag{4.16}$$

Pour $y = \sigma_0 \dot{\otimes} \sigma_0$, les matrices toriques $W_x = W_{x0}$ et les fonctions de partition $\mathcal{Z}_x$ (une ligne de défauts) sont données, pour $\underline{x} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$, par :

$$(W_{ab})_{ij} = \sum_{d\in J} (F_i)_{ad}(F_j)_{bd} \qquad \mathcal{Z}_{ab} = \sum_{d\in J} \hat{\chi}_{ad}(q)\overline{\hat{\chi}}_{bd}(q) \tag{4.17}$$

Les matrices toriques $W_x$ du modèle $E_6$ sont publiées dans [23]. Les fonctions de partition correspondantes $\mathcal{Z}_x$ sont données dans [25] en fonction des caractères de $A_{11}$. Nous les écrivons sous forme compacte en fonction des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ de $E_6$ dans l'Annexe **D**. La fonction de partition invariante modulaire de $E_6$ est diagonale en fonction des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{E_6} = \sum_{d\in J} \hat{\chi}_d(q)\overline{\hat{\chi}}_d(q) &= |\hat{\chi}_0|^2 + |\hat{\chi}_3|^2 + |\hat{\chi}_4|^2 \\ &= |\chi_0 + \chi_6|^2 + |\chi_3 + \chi_7|^2 + |\chi_4 + \chi_{10}|^2 \end{aligned}$$

et nous retrouvons la fonction de partition invariante modulaire de la classification de Cappelli, Itzykson et Zuber[11] labellée par $E_6$.

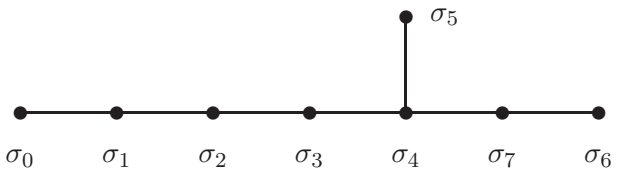
**Propriétés modulaires** Les propriétés modulaires des fonctions de partition s'étudient à travers les matrices toriques généralisées obtenues par (4.12). La fonction de partition $\mathcal{Z}_{E_6}$ est invariante modulaire car $\mathcal{M}$ commute avec les générateurs $T$ et $S$ du groupe modulaire. Les autres fonctions de partition ne sont pas invariantes modulaires. Néanmoins, elles satisfont les propriétés remarquables suivantes [28] :

- Aucune des matrices $W_{xy}$ (autre que $W_{00}$[2]) ne commute avec $T$ et $S$.
- Toutes les matrices $W_{xy}$ commutent avec l'opérateur $ST^{-1}S$.
- Les matrices $W_{xy}$ commutent avec une certaine puissance de l'opérateur $T$.

### 4.2.3 Le cas $E_8$

**Graphe $E_8$ et matrices de fusion** Le graphe $E_8$ et sa matrice d'adjacence sont illustrés à la Fig. 4.7, où l'ordre choisi pour représenter les vertex est : $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_7, \sigma_6, \sigma_5\}$.

[2]La matrice $W_{4,4}$ commute avec $T$ et $S$, mais cela provient du fait que $W_{44} = W_{00}$.




$$\mathcal{G}_{E_8} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.7 – Le graphe $E_8$ et sa matrice d'adjacence.

Pour $E_8$, $\kappa = 30$, la norme du graphe est $\beta = 2\cos(\frac{\pi}{30})$ et les composantes du vecteur de Perron-Frobenius sont données par $P = \left([1]_q, [2]_q, [3]_q, [4]_q, [5]_q, \frac{[7]_q}{[2]_q}, \frac{[5]_q}{[3]_q}, \frac{[5]_q}{[2]_q}\right)$, avec $q = \exp(\frac{i\pi}{30})$. Le graphe $E_8$ détermine de manière unique l'algèbre de graphe $E_8$, dont la table de multiplication est illustrée ci-dessous[3] :

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 6 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 6 | 5 |
| 1 | 1 | $0+2$ | $1+3$ | $2+4$ | $3+5+7$ | $4+6$ | 7 | 4 |
| 2 | 2 | $1+3$ | $0+2+4$ | $1+3+5+7$ | $2+4+4+6$ | $3+5+7$ | 4 | $3+7$ |
| 3 | 3 | $2+4$ | $1+3+5+7$ | $0+2+4+4+6$ | $1+3+3+5+7+7$ | $2+4+4$ | $3+5$ | $2+4+6$ |
| 4 | 4 | $3+5+7$ | $2+4+4+6$ | $1+3+3+5+7+7$ | $0+2+2+4+4+4+6$ | $1+3+3+5+7$ | $2+4$ | $1+3+5+7$ |
| 7 | 7 | $4+6$ | $3+5+7$ | $2+4+4$ | $1+3+3+5+7$ | $0+2+4+6$ | $1+7$ | $2+4$ |
| 6 | 6 | 7 | 4 | $3+5$ | $2+4$ | $1+7$ | $0+6$ | 3 |
| 5 | 5 | 4 | $3+7$ | $2+4+6$ | $1+3+5+7$ | $2+4$ | 3 | $0+4$ |

TAB. 4.3 – Table de multiplication de l'algèbre de graphe $E_8$.

Les matrices de fusion $G_a$ de $E_8$ sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} G_0 &= \mathbb{1}_{8\times 8} & G_4 &= G_1.G_3 - G_2 \\ G_1 &= \mathcal{G}_{E_8} & G_6 &= G_2.G_4 - G_2 - G_4 - G_4 \\ G_2 &= G_1.G_1 - G_0 & G_7 &= G_1.G_6 \\ G_3 &= G_1.G_2 - G_1 & G_5 &= G_6.G_3 - G_3 \end{aligned}$$

**Induction-restriction** Le graphe de la série $A_n$ possédant le même nombre de Coxeter que $E_8$ est $A_{29}$. Les matrices de fusion $N_i$ de $A_{29}$ et les matrices $F_i$ codant l'action de $A_{29}$ sur $E_8$ s'obtiennent par la formule de récurrence tronquée de $SU(2)$. Les matrices essentielles $E_a$ ($(E_a)_{ib} = (F_i)_{ab}$) possèdent 29 lignes (labelées par les vertex $\tau$ de $A_{29}$) et 8 colonnes (labelées par les vertex $\sigma$ de $E_8$). La matrice essentielle $E_0$ (*intertwiner*) est illustrée à la Fig. 4.8 et définit les règles de branchement $A_{29} \hookrightarrow E_8$ : $\tau_i \hookrightarrow \sum_a (E_0)_{ia}\sigma_a$. Nous obtenons alors le graphe d'induction $E_8 \hookleftarrow A_{29}$, illustré aussi à la Fig. 4.8.

[3]Pour une meilleure visibilité, les vertex $\sigma_a$ de $E_8$ sont désignés uniquement par leur indice $a$.

$$E_0 = \begin{pmatrix}
1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & 1 \\
. & . & . & . & 1 & . & 1 & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 \\
1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 \\
. & . & . & . & 2 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . \\
. & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 \\
. & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & 1 \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}$$

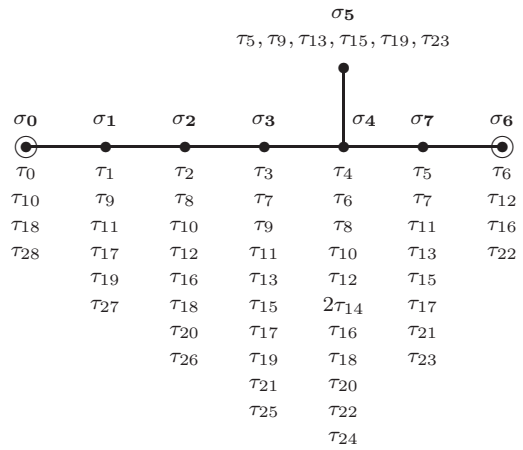



FIG. 4.8 – Matrice essentielle $E_0$ de $E_8$ et graphe d'induction $E_8 \hookleftarrow A_{29}$.

La valeur de $\hat{T}$ sur les vertex $(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{28})$ de $A_{29}$ (égale à $(j+1)^2$ mod 120 pour $\tau_j$) est donnée par la liste suivante :

$$(\underline{1}, 4, 9, 16, 25, 36, \underline{\underline{49}}, 64, 81, 100, \underline{1}, 22, \underline{\underline{49}}, 76, 105, 16, \underline{\underline{49}}, 84, \underline{1}, 40, 81, 4, \underline{\underline{49}}, 96, 25, 76, 9, 64, \underline{1})$$

Les seuls vertex $\sigma$ de $E_8$ pour lesquels une valeur de $\hat{T}$ est bien définie par le mécanisme d'induction sont $\sigma_0$ et $\sigma_6$ : $\hat{T}(\sigma_0) = 1$, $\hat{T}(\sigma_6) = 49$. Ils engendrent le sous-espace $J$, qui est une sous-algèbre de $E_8$. $J$ fournit une partition de $E_8$ en quatre classes d'équivalence :

$$\begin{array}{lcll}
\sigma_0 \sim \sigma_6 & : & \tilde{\sigma_0} = \tilde{\sigma_6} = \{\sigma_0, \sigma_6\} = J & \phi(\sigma_0) = \phi(\sigma_6) = \sigma_0 \\
\sigma_1 \sim \sigma_7 & : & \tilde{\sigma_1} = \tilde{\sigma_7} = \{\sigma_1, \sigma_7\} & \phi(\sigma_1) = \phi(\sigma_7) = \sigma_1 \\
\sigma_2 \sim \sigma_4 & : & \tilde{\sigma_2} = \tilde{\sigma_4} = \{\sigma_2, \sigma_4\} & \phi(\sigma_2) = \phi(\sigma_4) = \sigma_2 \\
\sigma_5 \sim \sigma_3 & : & \tilde{\sigma_5} = \tilde{\sigma_3} = \{\sigma_3, \sigma_5\} & \phi(\sigma_5) = \phi(\sigma_3) = \sigma_5
\end{array}$$

où l'application $\phi$ choisit un représentant dans chaque classe d'équivalence : l'ensemble $\Phi$ est donné par $\Phi = \{\phi(\sigma_a)\} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_5\}$. Notons qu'un élément $\sigma_b \notin \Phi$ peut s'écrire

$\sigma_b = \sigma_6.\phi(\sigma_b)$. En effet :

$$\sigma_6 = \sigma_6.\sigma_0, \qquad \sigma_7 = \sigma_6.\sigma_1, \qquad \sigma_4 = \sigma_6.\sigma_2, \qquad \sigma_3 = \sigma_6.\sigma_5$$

Introduisons alors l'application $\rho$ définie par :

$$\begin{array}{ll} \rho(\sigma_a) = \sigma_0 & \text{si } \sigma_a \in \Phi : \sigma_a \in \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_5\} \\ \rho(\sigma_a) = \sigma_6 & \text{si } \sigma_a \notin \Phi : \sigma_a \in \{\sigma_6, \sigma_7, \sigma_4, \sigma_3\} \end{array}$$

**Algèbre d'Ocneanu** L'algèbre d'Ocneanu $Oc(E_8)$ est définie par :

$$Oc(E_8) = \frac{E_8 \otimes E_8}{J} = E_8 \otimes_J E_8 = E_8 \dot{\otimes} E_8 \tag{4.18}$$

Les éléments de $Oc(E_8)$ sont de la forme $\underline{x} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$, où nous identifions les éléments $(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b.\sigma_c)$ avec $(\sigma_a.\sigma_b \dot{\otimes} \sigma_c)$ pour $\sigma_b \in J$. L'algèbre $Oc(E_8)$ est de dimension $6.8/2 = 32$. Une base de $Oc(E_8)$ est donnée par les 32 éléments linéairement indépendants suivants :

$$\underline{a} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0, \qquad \underline{a1'} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_1, \qquad \underline{a2'} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_2, \qquad \underline{a5'} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_5.$$

et utilisant les applications $\rho$ et $\phi$ introduites, nous avons les identifications suivantes dans l'algèbre $Oc(E_8)$ :

$$\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b = \sigma_a.\rho(\sigma_b) \dot{\otimes} \phi(\sigma_b) \tag{4.19}$$

La multiplication dans $Oc(E_8)$ est définie par :

$$(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b).(\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_d) = \sigma_a.\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_b.\sigma_d \tag{4.20}$$

L'élément $\underline{0}$ est l'identité. Les éléments $\underline{1}$ et $\underline{1}'$ sont respectivement les générateurs chiraux gauche et droit : ils engendrent séparemment deux sous-algèbres $E_8 \dot{\otimes} 0$ et $0 \dot{\otimes} E_8$, chacune isomorphe à l'algèbre de graphe $E_8$. Les seuls éléments ambichiraux sont $\underline{0}$ et $\underline{6}$. Nous pouvons vérifier que la multiplication par les générateurs de $Oc(E_8)$ est codée par le graphe d'Ocneanu de $E_8$, illustré à la Fig. 4.9. La multiplication par le générateur gauche $\underline{1}$ (resp. droit $\underline{1}'$) est donnée par la somme des éléments du graphe reliés à $\underline{1}$ (resp. $\underline{1}'$) par une ligne continue (resp. discontinue).

Les matrices $O_x$ qui codent la multiplication dans $Oc(E_8)$ sont explicitement données dans

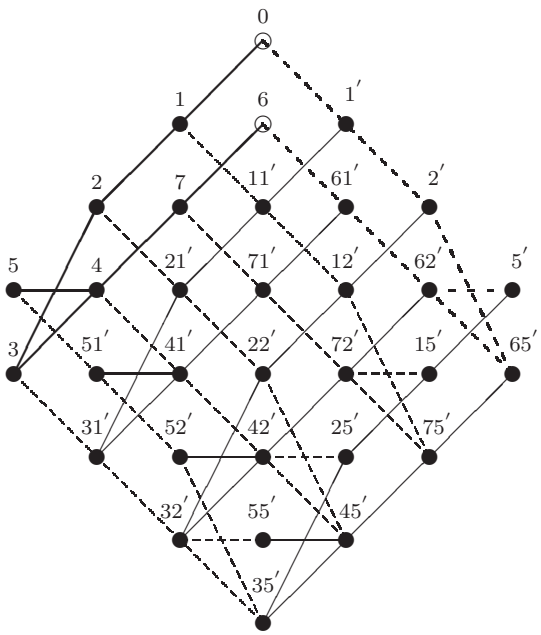



FIG. 4.9 – Le graphe d'Ocneanu de $E_8$.

la base $\{\{\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0\}, \{\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0\}, \{\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0\}, \{\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0\}\}$ par :

$$O_x = \begin{cases} \left(\begin{array}{c|c|c|c} G_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_a \end{array}\right) & \text{pour } x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0 \\[2ex] \begin{pmatrix} 0 & G_a & 0 & 0 \\ G_a & 0 & G_a & 0 \\ 0 & G_a & 0 & G_a.G_6 \\ 0 & 0 & G_a.G_6 & 0 \end{pmatrix} & \text{pour } x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_1 \\[2ex] \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & G_a & 0 \\ 0 & G_a & 0 & G_a.G_6 \\ G_a & 0 & G_a + G_a.G_6 & 0 \\ 0 & G_a.G_6 & 0 & G_a.G_6 \end{array}\right) & \text{pour } x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_2 \\[2ex] \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & G_a \\ 0 & 0 & G_a.G_6 & 0 \\ 0 & G_a.G_6 & 0 & G_a.G_6 \\ G_a & 0 & G_a.G_6 & 0 \end{array}\right) & \text{pour } x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_5 \end{cases}$$

Nous déterminons ainsi par notre réalisation de $Oc(E_8)$ les matrices $O_x$, qui coïncident avec

celles publiées dans [78], où elles sont déterminées de manière empirique. Les matrices $S_x$ qui codent l'action de $Oc(E_8)$ sur $E_8$ sont explicitement données par :

$$S_x = G_a.G_b \qquad \text{pour } \underline{x} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$$

**Dimension des blocs** Les dimensions $d_i$ des 29 blocs de la digèbre $\mathcal{B}(E_8)$ pour la loi $\circ$ sont données par $\sum_{a,b}(F_i)_{ab}$. Nous avons $F_{i-28} = F_i$. Donc, pour $i$ dans $(0, 1, \ldots, 14)$ :

$$d_i = d_{28-i} = (8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 48, 52, 56, 60, 62, 64, 64, 64)$$

Les dimensions $d_x$ des 32 blocs de la digèbre $\mathcal{B}(E_8)$ pour la loi $\odot$ sont données, pour $(\underline{x} = (\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0), (\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_1), (\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_2), (\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_5))$, par :

$$d_x = (8, 14, 20, 26, 32, 16, 12, 22), (14, 28, 40, 52, 64, 32, 22, 44), (20, 40, 60, 78, 96, 48, 32, 64), (16, 32, 48, 64, 78, 40, 26, 52)$$

Nous vérifions la règle de somme quadratique et linéaire :

$$dim(\mathcal{B}E_8) = \sum_{i \in A_{29}} d_i^2 = \sum_{x \in Oc(E_8)} d_x^2 = 63136 \ , \qquad \sum_i d_i = \sum_x d_x = 1240 \ .$$

Définissant la masse quantique de $Oc(E_8)$ à travers sa réalisation $Oc(E_8) = E_8 \otimes_J E_8$, avec $m(J) = qdim^2(\sigma_0) + qdim^2(\sigma_6)$, alors la relation de masse entre $Oc(E_8)$ et $A_{29}$ est satisfaite :

$$m(Oc(E_8)) = \frac{m(E_8).m(E_8)}{m(J)} = m(A_{29})$$

**Matrices toriques généralisées** Nous calculons l'action de $A_{29}$ sur $Oc(E_8)$, en utilisant l'équation (4.19) qui donne les identifications des éléments de l'algèbre $Oc(E_8)$ :

$$\begin{aligned}
\tau_i.(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b).\tau_j &= \sum_c \sum_d (F_i)_{ac}(F_j)_{bd} \ (\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_d) \\
&= \sum_c \sum_d (F_i)_{ac}(F_j)_{bd} \ (\sigma_c.\rho(\sigma_d) \dot{\otimes} \phi(\sigma_d)) \\
&= \sum_c \sum_d \sum_e (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}(G_e)_{c\rho(d)} \ (\sigma_e \dot{\otimes} \phi(\sigma_d))
\end{aligned}$$

Divisant alors la sommation sur $d$ en une sommation sur chaque classe d'équivalence, nous obtenons la formule compacte suivante pour les matrices toriques généralisées :

$$\boxed{W_{ab,ef} = \sum_c \sum_{d \in \tilde{f}} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}(G_e)_{c\rho(d)}} \tag{4.21}$$

où la sommation sur $d$ se fait sur les éléments de la classe d'équivalence de $\sigma_f$. Pour $f = 0$, la sommation sur $d$ est sur $\tilde{0} = J$, et pour $\sigma_d \in J$, $\rho(d) = d$. Alors, les matrices toriques $W_x = W_{x0}$ sont données par :

$$W_x = \sum_{c \in J} (F_i)_{ac} \ (F_j)_{bc} \qquad x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b \tag{4.22}$$

et nous pouvons vérifier que l'invariant modulaire $\mathcal{M} = W_0$ commute avec les générateurs $S$ et $T$ du groupe modulaire.

**Fonctions de partition généralisées** Elles sont définies à partir des matrices toriques généralisées par :

$$\mathcal{Z}_{x|y} = \sum_{i\in A_{29}} \sum_{j\in A_{29}} \chi_i(q)(W_{xy})_{ij}\overline{\chi}_j(q) \tag{4.23}$$

où les $\chi_i(q)$ sont les caractères de l'algèbre $\widehat{su}(2)$. Introduisons les caractères étendus $\hat{\chi}_a(q)$ du modèle $E_8$, définis à partir de la matrice essentielle $E_0$ par :

$$\hat{\chi}_a(q) = \sum_{i\in A_{11}} (E_0)_{ia}\chi_i(q) = \sum_{i\in A_{11}} (F_i)_{0a}\chi_i(q) \tag{4.24}$$

et les caractères étendus généralisés $\hat{\chi}_{ab}$, qui sont des combinaisons linéaires des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ ou des caractères $\chi_i$ (utilisant la propriété $E_a = E_0.G_a$) :

$$\hat{\chi}_{ab} = \sum_{c\in E_8} (G_a)_{bc}\ \hat{\chi}_c\ = \sum_{i\in A_{29}} (F_i)_{ab}\chi_i(q) \tag{4.25}$$

Les caractères étendus du modèle $E_8$ sont donnés dans l'Annexe **D**. Les fonctions de partition généralisées du modèle $E_8$ s'écrivent sous la forme compacte suivante :

$$\boxed{\mathcal{Z}_{ab,ef} = \sum_{c} \sum_{d\in\tilde{f}} \hat{\chi}_{ac}\ (G_e)_{c\rho(d)}\ \overline{\hat{\chi}}_{bd}} \tag{4.26}$$

Les fonctions de partition $\mathcal{Z}_x$ (une ligne de défauts) sont données, pour $\underline{x} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$, par :

$$\mathcal{Z}_{ab} = \sum_{d\in J} \hat{\chi}_{ad}(q)\overline{\hat{\chi}}_{bd}(q) \tag{4.27}$$

Elles sont publiées dans [25] en fonction des caractères de $A_{11}$, nous les écrivons sous forme compacte en fonction des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ de $E_8$ dans l'Annexe **D**. La fonction de partition invariante modulaire de $E_8$ est diagonale en fonction des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ :

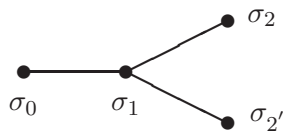
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{E_8} = \sum_{d\in J} \hat{\chi}_d(q)\overline{\hat{\chi}}_d(q) &= |\hat{\chi}_0|^2 + |\hat{\chi}_6|^2 \\ &= |\chi_0 + \chi_{10} + \chi_{18} + \chi_{28}|^2 + |\chi_6 + \chi_{12} + \chi_{16} + \chi_{22}|^2\end{aligned}$$

et nous retrouvons la fonction de partition invariante modulaire de la classification de Cappelli, Itzykson et Zuber[11] labellée par $E_8$.

### 4.2.4 Les cas $D_{2n}$

**Le cas $D_4$**

**Graphe $D_4$ et matrices de fusion** Le graphe $D_4$ et sa matrice d'adjacence sont illustrés à la Fig. 4.10, avec l'ordre suivant pour les vertex : $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{2'}\}$.




$$\mathcal{G}_{D_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.10 – Le graphe $D_4$ et sa matrice d'adjacence.

Pour $D_4$, $\kappa = 6$, la norme est $\beta = 2\cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ et le vecteur de Perron-Frobenius $P = \left([1]_q, [2]_q, \frac{[2]_q}{[2]_q}, \frac{[2]_q}{[2]_q}\right)$, avec $q = \exp(\frac{i\pi}{6})$. Le graphe $D_4$ ne détermine pas de manière unique la table de multiplication de l'algèbre de graphe $D_4$ : en effet, de l'équation $\sigma_1.\sigma_1 = \sigma_0+\sigma_2+\sigma_2'$, nous savons comment multiplier par $(\sigma_2 + \sigma_2')$, mais les deux vertex $\sigma_2$ et $\sigma_2'$ de la fourche sont indistingables. Nous pouvons remplir toute la table de multiplication, à l'exception de la multiplication des vertex $\sigma_2$ et $\sigma_2'$ entre-eux. Néanmoins, en *imposant* que les coefficients de structures de l'algèbre de graphe $D_4$ soient des entiers non négatifs, nous trouvons une solution *unique*.

| | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_2'$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sigma_0$ | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_2'$ |
| $\sigma_1$ | $\sigma_1$ | $\sigma_0 + \sigma_2 + \sigma_2'$ | $\sigma_1$ | $\sigma_1$ |
| $\sigma_2$ | $\sigma_2$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2'$ | $\sigma_0$ |
| $\sigma_2'$ | $\sigma_2'$ | $\sigma_1$ | $\sigma_0$ | $\sigma_2$ |

TAB. 4.4 – Table de multiplication de l'algèbre de graphe $D_4$.

Les matrices de fusion $G_a$ sont données par :

$$G_0 = \mathbb{1}_{4\times 4} \qquad G_1 = \mathcal{G}_{D_4} \qquad G_2 + G_{2'} = G_1.G_1 - G_0$$

et les matrices des vertex de la fourche s'écrivent :

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_{2'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Contrairement aux cas $E_6$ et $E_8$, les matrices de fusion $G_a$ de $D_4$ ne sont pas symétriques ($G_{2'} = G_2^T$).

**Induction-restriction** Le graphe de la série $A_n$ de même norme que $D_4$ est $A_5$. Les matrices de fusion $N_i$ de $A_5$ et les matrices $F_i$ codant l'action de $A_5$ sur $D_4$ sont calculées par la formule de récurrence tronquée de $SU(2)$ :

$$\begin{array}{lll} N_0 = \mathbb{1}_{5\times 5} & F_0 = \mathbb{1}_{4\times 4} & \\ N_1 = \mathcal{G}_{A_5} & F_1 = \mathcal{G}_{D_4} & \\ N_i = N_1.N_{i-1} - N_{i-2} & F_i = F_1.F_{i-1} - F_{i-2} & 2 \leq i \leq 5 \end{array}$$

Les matrices essentielles $E_a$ de $D_4$ possèdent 5 lignes (labelées par les vertex $\tau$ de $A_5$) et 4 colonnes (labelées par les vertex $\sigma$ de $D_4$). L'*intertwiner* ($E_0$) définissant les règles de branchement $A_5 \hookrightarrow D_4$ et le graphe d'induction $D_4 \hookleftarrow A_5$ sont présentés à la Fig. 4.11.

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & 1 \\ . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

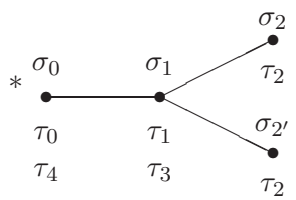



FIG. 4.11 – Matrice essentielle $E_0$ de $D_4$ et graphe d'induction $D_4 \hookleftarrow A_5$.

La valeur de $\hat{T}$ sur les vertex $\tau_i$ de $A_5$ est donnée par $(i+1)^2$ mod 24 : (1, 4, 9, 16, 1). Les vertex $\sigma$ de $D_4$ pour lesquels una valeur de $\hat{T}$ est bien définie sont $\{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_{2'}\}$ : ils forment le sous-espace $J$, qui est une sous-algèbre de l'algèbre de graphe de $D_4$.

**Algèbre d'Ocneanu** Nous serions tentés de définir l'algèbre d'Ocneanu de $D_4$ par $D_4 \otimes_J D_4$. Cette algèbre est engendrée par les six éléments linéairement indépendants suivants :

$$\sigma_0 \dot{\otimes} \sigma_0, \qquad \sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_0, \qquad \sigma_2 \dot{\otimes} \sigma_0, \qquad \sigma_2' \dot{\otimes} \sigma_0, \qquad \sigma_0 \dot{\otimes} \sigma_1, \qquad \sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_1,$$

avec $\sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_0$ et $\sigma_0 \dot{\otimes} \sigma_1$ comme générateurs chiraux gauche et droit. Maintenant, si nous voulons coder cette algèbre dans un graphe, il existe une obstruction :

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_0).(\sigma_0 \dot{\otimes} \sigma_1) &= \sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_1 \\ (\sigma_0 \dot{\otimes} \sigma_1).(\sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_1) &= \sigma_1 \dot{\otimes} (\sigma_0 + \sigma_2 + \sigma_{2'}) = \sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_0 + \sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_0 + \sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_0 \end{aligned}$$

Il y aurait donc une ligne reliant $\sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_1$ à $\sigma_0 \dot{\otimes} \sigma_1$ mais trois lignes dans la direction opposée [17]. Ce problème est contourné en "splittant" le vertex $\sigma_1 \dot{\otimes} \sigma_1$ en trois[4], en introduisant une extension de l'algèbre $D_4 \otimes_J D_4$ par des matrices $2 \times 2$ (voir [25]). La conséquence est

[4]Le fait de devoir splitter le point en trois est particulier au cas $D_4$, qui possède la symétrie $\mathbb{Z}_3$. Pour les cas $D_{2n}, n > 2$, il faut splitter le point en deux, car ces graphes possèdent seulement la symétrie $\mathbb{Z}_2$.

que l'algèbre d'Ocneanu de $D_4$ est non-commutative. Nous allons voir qu'il existe une autre réalisation de $Oc(D_4)$. Les graphes $D_{2n}$ sont des *orbifolds* des graphes $A_{4n-3}$ par la symétrie $\mathbb{Z}_2$. Considérons le graphe $A_5$ possédant 5 vertex $\tau_i, i \in (0,1,2,3,4)$, avec la symétrie classique $\mathbb{Z}_2$ par rapport au vertex central $\tau_2$. Alors le graphe $\mathbb{Z}_2$-orbifold est obtenu en identifiant les vertex symétriques ($\tau_0$ avec $\tau_4$, $\tau_1$ avec $\tau_3$), et en splittant le vertex $\tau_2$ (point fixe par rapport à la symétrie) en deux composantes [39] : nous obtenons le graphe $D_4$, qui est un $\mathbb{Z}_2$-orbifold du graphe $A_5$. Nous définissons l'algèbre d'Ocneanu de $D_4$ par :

$$Oc(D_4) = D_4 \times_\rho \mathbb{Z}_2 \tag{4.28}$$

où $\rho$ est une application qui échange les vertex de la fourche et laisse les autres invariants :

$$\rho(\sigma_0) = \sigma_0, \qquad \rho(\sigma_1) = \sigma_1, \qquad \rho(\sigma_2) = \sigma_2', \qquad \rho(\sigma_2') = \sigma_2.$$

Les éléments de $Oc(D_4)$ sont de la forme $(\sigma_a, +)$ et $(\sigma_a, -)$, la dimension de l'algèbre $Oc(D_4)$ est $4 \times 2 = 8$ et la multiplication dans $Oc(D_4)$ est définie par :

$$\begin{aligned} (\sigma_a, +).(\sigma_b, \pm) &= (\sigma_a.\sigma_b, \pm) \\ (\sigma_a, -).(\sigma_b, \pm) &= (\sigma_a.\rho(\sigma_b), \mp) \end{aligned} \tag{4.29}$$

La table de multiplication de l'algèbre d'Ocneanu de $D_4$ est présentée à la Tab. 4.5 :

| | $\sigma_0^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_2^+$ | $\sigma_{2'}^+$ | $\sigma_0^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_2^-$ | $\sigma_{2'}^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_0^+$ | $\sigma_0^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_2^+$ | $\sigma_{2'}^+$ | $\sigma_0^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_2^-$ | $\sigma_{2'}^-$ |
| $\sigma_1^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_0^+ + \sigma_{2'}^+ + \sigma_{2'}^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_0^- + \sigma_2^- + \sigma_{2'}^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_1^-$ |
| $\sigma_2^+$ | $\sigma_2^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_{2'}^+$ | $\sigma_0^+$ | $\sigma_2^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_{2'}^-$ | $\sigma_0^-$ |
| $\sigma_{2'}^+$ | $\sigma_{2'}^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_0^+$ | $\sigma_2^+$ | $\sigma_{2'}^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_0^-$ | $\sigma_2^-$ |
| $\sigma_0^-$ | $\sigma_0^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_{2'}^-$ | $\sigma_2^-$ | $\sigma_0^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_{2'}^+$ | $\sigma_2^+$ |
| $\sigma_1^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_0^- + \sigma_2^- + \sigma_{2'}^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_0^+ + \sigma_{2'}^+ + \sigma_{2'}^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_1^+$ |
| $\sigma_2^-$ | $\sigma_2^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_0^-$ | $\sigma_{2'}^-$ | $\sigma_2^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_0^+$ | $\sigma_{2'}^+$ |
| $\sigma_{2'}^-$ | $\sigma_{2'}^-$ | $\sigma_1^-$ | $\sigma_2^-$ | $\sigma_0^-$ | $\sigma_{2'}^+$ | $\sigma_1^+$ | $\sigma_2^+$ | $\sigma_0^+$ |

TAB. 4.5 – Table de multiplication de l'algèbre d'Ocneanu de $D_4$.

Cette algèbre est non-commutative. Par exemple, de (4.29) nous avons :

$$(\sigma_2, +).(\sigma_0, -) = (\sigma_2, -) \quad \neq \quad (\sigma_0, -).(\sigma_2, +) = (\sigma_{2'}, -)$$

Les générateurs chiraux gauche et droit de $Oc(D_4)$ sont $(\sigma_1, +)$ et $(\sigma_1, -)$, et nous pouvons vérifier que la multiplication par les générateurs est effectivement codée dans le graphe d'Ocneanu de $D_4$, présenté à la Fig. 4.12.

D'après la définition (4.29) de la multiplication dans $Oc(D_4)$, il est facile de voir que les matrices $O_x$ qui codent cette multiplication sont données, dans la base $\{(\sigma_a, +), (\sigma_a, -)\}$, par :

$$O_{a,+} = \begin{pmatrix} G_a & 0 \\ 0 & G_a \end{pmatrix} \qquad\qquad O_{a,-} = \begin{pmatrix} 0 & G_a^\rho \\ G_a^\rho & 0 \end{pmatrix}$$

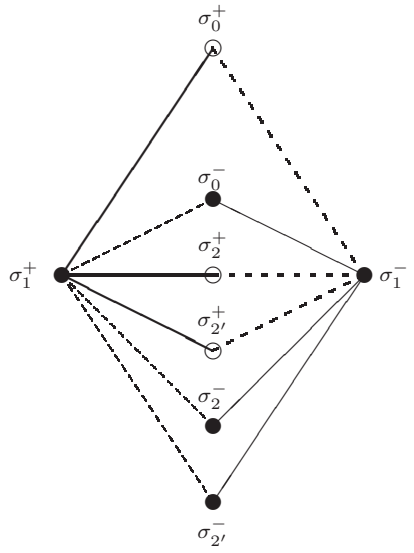



FIG. 4.12 – Le graphe d'Ocneanu de $D_4$.

où les matrices $G_a^\rho$ sont définies à partir des matrices $G_a$ par :

$$\sigma_a.\rho(\sigma_b) = \sum_c (G_a^\rho)_{bc} \qquad\qquad (G_a^\rho)_{bc} = (G_a)_{\rho(b)c}$$

Elles sont obtenues à partir des matrices $G_a$ en permutant les lignes associées à $\sigma_2$ et $\sigma_2'$. L'action de $Oc(D_4)$ sur $D_4$ est définie par :

$$\begin{array}{rcl} (\sigma_a,+).\sigma_b & = & \sigma_a.\sigma_b \\ (\sigma_a,-).\sigma_b & = & \sigma_a.\rho(\sigma_b) \end{array} \tag{4.30}$$

et les matrices $S_x$ ($x = (\sigma_a, \pm)$) qui codent cette action sont données par :

$$S_x = \begin{cases} G_a & x = (\sigma_a,+) \\ G_a^\rho & x = (\sigma_a,-) \end{cases} \tag{4.31}$$

Nous pouvons vérifier que cette action vérifie bien $(y.x).\sigma_a = y.(x.\sigma_a)$ :

$$S_x.S_y = \sum_z (O_y)_{xz} S_z$$

Notons que nous avons les suivantes projections $\psi$ des éléments de $D_4 \otimes D_4$ vers $Oc(D_4)$ :

$$\begin{array}{rclll} \psi(\sigma_a \otimes \sigma_b) & = & (\sigma_a.\sigma_b,+) & & \text{pour } \sigma_b \in J \\ \psi(\sigma_a \otimes \sigma_b) & = & (\sigma_a.\sigma_b,-) & & \text{pour } \sigma_b \notin J \end{array} \tag{4.32}$$

Sous cette projection $\psi$, la multiplication commutative $\mu_1$ dans $D_4 \otimes D_4$ et la multiplication non-commutative $\mu_2$ dans $Oc(D_4)$ commutent :

$$\psi \circ \mu_1 = (\psi \times \psi) \circ \mu_2 \tag{4.33}$$

Ceci est possible du fait que la projection $\psi$ n'est pas bijective. Par exemple :

$$\begin{aligned} \psi(\sigma_1 \otimes \sigma_1) &= (\sigma_0, -) + (\sigma_2, -) + (\sigma_{2'}, -) \\ \psi(\sigma_0 \otimes \sigma_1) = \psi(\sigma_2 \otimes \sigma_1) = \psi(\sigma_{2'} \otimes \sigma_1) &= (\sigma_1, -) \end{aligned}$$

**Dimension des blocs** La dimension $d_i$ des blocs de la bigèbre $\mathcal{B}D_4$ pour la loi de composition ($d_i = \sum_{a,b}(F_i)_{ab}$) est donnée, pour $i$ dans $(0, 1, 2, 3, 4)$, par :

$$d_i : (4, 6, 8, 6, 4)$$

La dimension $d_x$ des blocs de la bigèbre $\mathcal{B}D_4$ pour la loi de convolution ($d_x = \sum_{a,b}(S_x)_{ab}$) est donnée, pour $x$ dans $((\sigma_a, +), (\sigma_a, -))$, par :

$$d_x : (4, 6, 4, 4\,;\ 4, 6, 4, 4)$$

La règle de somme quadratique, définissant la dimension de la bigèbre $\mathcal{B}D_4$ est vérifiée :

$$\dim \mathcal{B}D_4 = \sum_{i \in A_5} d_i^2 = \sum_{x \in Oc(D_4)} d_x^2 = 168.$$

Par contre, la règle de somme linéaire (dont l'interprétation est encore mystérieuse) naïve ne l'est pas : $\sum_i d_i = 28, \sum_x d_x = 36$. Il existe un double comptage dans la sommation sur les éléments $x$ de $Oc(D_4)$, dû à la symétrie originelle de la fourche dans $D_4$. En introduisant un facteur $1/2$ pour les termes $x = (\sigma_2, \pm)$ et $x = (\sigma_{2'}, \pm)$, ou en excluant de la sommation les termes $x = (\sigma_{2'}, \pm)$, alors $\sum_x' d_x = 28$, et la règle de somme linéaire est vérifiée[78].
Les masses quantiques de $D_4$ et $A_5$ sont : $m(D_4) = 6$, $m(A_5) = 12$. Du fait que l'algèbre d'Ocneanu de $D_4$ est définie par : $Oc(D_4) = D_4 \times_\rho \mathbb{Z}_2$, il est naturel de définir la masse quantique de $Oc(D_4)$ par $m(Oc(D_4)) = m(D_4).m(\mathbb{Z}_2)$. L'algèbre du graphe $A_2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, donc nous définissons $m(\mathbb{Z}_2) = m(A_2) = 2$. Alors la relation de masse quantique est vérifiée :

$$m(Oc(D_4)) = m(D_4).m(A_2) = m(A_5) = 12$$

**Matrices toriques généralisées** L'action de $A_5$ sur les éléments de type pair de $Oc(D_4)$ est définie en utilisant les projections (4.32) de $D_4 \otimes D_4$ sur $Oc(D_4)$. Un élément pair $(\sigma_a, +)$ de $Oc(D_4)$ a comme pré-image $(\sigma_a \otimes \sigma_0)$ dans $D_4 \otimes D_4$. Alors l'action de $A_5$ sur un tel élément

est définie, utilisant (4.32), par :

$$\begin{aligned}
\tau_i.(\sigma_a,+).\tau_j &= \tau_i.(\sigma_a\otimes\sigma_0).\tau_j \\
&= \sum_b\sum_c (F_i)_{ab}(F_j)_{0c}(\sigma_b\otimes\sigma_c) \\
&= \sum_b\sum_{c\in J}(F_i)_{ab}(F_j)_{0c}(\sigma_b.\sigma_c,+)+\sum_b\sum_{c\notin J}(F_i)_{ab}(F_j)_{0c}(\sigma_b.\sigma_c,-) \\
&= \sum_b\sum_{c\in J}\sum_d(F_i)_{ab}(F_j)_{0c}(G_d^{'})_{bc}(\sigma_d,+)+\sum_b\sum_{c\notin J}\sum_d(F_i)_{ab}(F_j)_{0c}(G_d^{'})_{bc}(\sigma_d,-) \\
&= \sum_d(W_{a+,d+})_{ij}(\sigma_d,+) \qquad + \qquad \sum_d(W_{a+,d-})_{ij}(\sigma_d,-)
\end{aligned}$$

où les matrices $G_d^{'}$ sont définies par :

$$(G_d^{'})_{bc}=(G_b)_{cd}$$

Notons le fait que l'algèbre d'un graphe $G$ soit commutative implique $(G_b)_{cd}=(G_c)_{bd}$, mais ces matrices ne sont pas forcément symétriques (donc en général $G_d^{'}\neq G_d$).
L'action (à gauche et à droite) de $A_5$ sur les éléments de type impair de $Oc(D_4)$ est définie en utilisant le fait que $(\sigma_a,-)=(\sigma_a,+).(\sigma_0,-)$. Alors :

$$\tau_i.(\sigma_a,-).\tau_j=\tau_i.(\sigma_a,+).(\sigma_0,-).\tau_j=(\tau_i.(\sigma_a,+).\tau_j).(\sigma_0,-),$$

Les matrices toriques $W_{xy}$ du modèle $D_4$ s'obtiennent donc à partir de la formule générale :

$$\boxed{\begin{aligned}
W_{a+,d+} &= \sum_b\sum_{c\in J}(F_i)_{ab}(F_j)_{0c}(G_d^{'})_{bc} &= W_{a-,d-} \\
W_{a+,d-} &= \sum_b\sum_{c\notin J}(F_i)_{ab}(F_j)_{0c}(G_d^{'})_{bc} &= W_{a-,d+}
\end{aligned}} \tag{4.34}$$

Nous pouvons vérifier qu'elles satisfont l'algèbre carrée de Verlinde.
Pour $y=(\sigma_0,+)$, $(G_0^{'})_{bc}=(G_b)_{c0}=\delta_{b,\rho(c)}$, et les matrices toriques $W_{x,0+}$ s'écrivent donc :

$$W_{a+,0+}=\sum_{c\in J}(F_i)_{a\rho(c)}(F_j)_{0c} \qquad\qquad W_{a-,0+}=\sum_{c\notin J}(F_i)_{a\rho(c)}(F_j)_{0c}$$

et l'invariant modulaire $\mathcal{M}=W_{0+,0+}$ est donc égal à :

$$\mathcal{M}_{ij}=\sum_{c\in J}(F_i)_{0\rho(c)}(F_j)_{0c} \qquad\Longrightarrow\qquad \mathcal{M}=\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

La non-commutativité de l'algèbre d'Ocneanu de $D_4$ se manifeste par la présence d'un coefficient 2 dans l'invariant modulaire $\mathcal{M}$ (et donc dans la fonction de partition correspondante).

**Remarque 5** *L'élément de matrice $(F_i)_{ab}$ donne le nombre de chemins essentiels de longueur $i$ partant du vertex $\sigma_a$ et arrivant au vertex $\sigma_b$ sur le graphe $D_4$. Considérant les chemins partant de $\sigma_0$, dû à la symétrie entre les vertex $\sigma_2$ et $\sigma_{2'}$ de la fourche, alors $(F_i)_{0\rho(c)} = (F_i)_{0c}$, et l'invariant modulaire s'écrit donc aussi :*

$$\mathcal{M} = \sum_{c\in J} (F_i)_{0c}(F_j)_{0c}$$

*qui est la formule utilisée notamment dans [25] et [78].*

**Fonctions de partition généralisées** Elles sont définies à partir des matrices toriques généralisées (4.34) par :

$$\mathcal{Z}_{x|y} = \sum_{i\in A_5}\sum_{j\in A_5} \chi_i(q)(W_{xy})_{ij}\,\overline{\chi}_j(q) \tag{4.35}$$

où les $\chi_i$ sont les caractères de l'algèbre $\widehat{su}(2)$. Introduisons les caractères étendus $\hat{\chi}_a(q)$, définis à partir de la matrice essentielle $E_0$, et les caractères étendus généralisés $\hat{\chi}_{ab}(q)$ du modèle $D_4$ :

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}_a(q) &= \sum_{i\in A_5}(E_0)_{ia}\chi_i(q) = \sum_{i\in A_5}(F_i)_{0a}\chi_i(q)\\
\hat{\chi}_{ab}(q) &= \sum_{c\in D_4}(G_a)_{cb}\hat{\chi}_c(q) = \sum_{i\in A_5}(F_i)_{ab}\chi_i(q)
\end{aligned}$$

Les caractères étendus $\hat{\chi}_a(q)$ du modèle $D_4$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}_0 &= \chi_0 + \chi_4 \qquad & \hat{\chi}_2 &= \chi_2\\
\hat{\chi}_1 &= \chi_1 + \chi_3 \qquad & \hat{\chi}_{2'} &= \chi_2
\end{aligned}$$

Les fonctions de partition généralisées du modèle $D_4$ s'écrivent sous la forme compacte suivante :

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{a+,d+} &= \sum_b\sum_{c\in J}\hat{\chi}_{ab}\overline{\hat{\chi}}_c(G'_d)_{bc} &&= \mathcal{Z}_{a-,d-}\\
\mathcal{Z}_{a+,d-} &= \sum_b\sum_{c\notin J}\hat{\chi}_{ab}\overline{\hat{\chi}}_c(G'_d)_{bc} &&= \mathcal{Z}_{a-,d+}
\end{aligned}} \tag{4.36}$$

et les fonctions de partition à une ligne de défauts $\mathcal{Z}_x = \mathcal{Z}_{x0}$ s'écrivent en fonction des caractères étendus :

$$\mathcal{Z}_{a+} = \sum_b\sum_{c\in J}(G_a)_{cb}\hat{\chi}_b\overline{\hat{\chi}}_c \qquad \mathcal{Z}_{a-} = \sum_b\sum_{c\notin J}(G_a)_{cb}\hat{\chi}_b\overline{\hat{\chi}}_c$$

Elles sont données dans [25] en fonction des caractères de $\widehat{su}(2)$, nous les présentons dans l'Annexe **D** en fonction des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ de $D_4$. La fonction de partition invariante

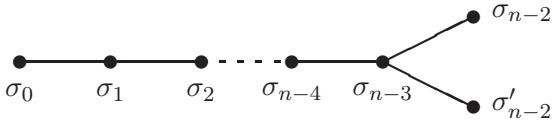
modulaire du modèle $D_4$ s'écrit sous forme diagonale en fonction des caractères étendus :

$$\mathcal{Z}_{D_4} = \sum_{c \in J} |\hat{\chi}_c|^2 = 2\,|\chi_0|^2 \,+\, |\chi_0 + \chi_4| \tag{4.37}$$

et correspond bien à celle de la classification de Cappelli-Itzykson-Zuber [11].

### Formules générales pour $D_{2n}$

**Graphe $D_{2n}$ et matrices de graphe** Le graphe $D_n$, pour $n$ pair $> 4$, est illustré à la Fig. 4.13 avec sa matrice d'adjacence, en adoptant comme ordre de la base des vertex l'ordre suivant : $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-2}, \sigma'_{n-2}\}$.




$$\mathcal{G}_{D_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & \cdots & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & . & \cdots & . & . & . \\ . & 1 & 0 & 1 & \cdots & . & . & . \\ . & . & 1 & 0 & \cdots & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.13 – Le graphe $D_n$ et sa matrice d'adjacence

Pour $D_n$, $\kappa = 2n-2$, la norme du graphe est $\beta = 2\cos(\frac{\pi}{2n-2})$, et les composantes du vecteur normalisé de Perron-Frobenius sont données, par :

$$P = \left([1]_q, [2]_q, [3]_q, \cdots, [n-3]_q, [n-2]_q, \frac{[n-1]_q}{[2]_q}, \frac{[n-1]_q}{[2]_q}\right)$$

Le graphe $D_n$ ne détermine pas de manière unique l'algèbre de graphe : nous pouvons remplir de manière unique la table de multiplication, à l'exception des éléments correspondants à la multiplication des vertex $\sigma_{n-2}, \sigma'_{n-2}$ de la fourche. Mais en *imposant* que les coefficients de structures soient des entiers non négatifs, la solution devient unique : la multiplication des vertex $\sigma_{n-2}, \sigma'_{n-2}$ est donnée par :

– $\frac{n}{2}$ pair :

| | $\sigma_{n-2}$ | $\sigma'_{n-2}$ |
|---|---|---|
| $\sigma_{n-2}$ | $\sigma_2 + \sigma_6 + \cdots + \sigma'_{n-2}$ | $\sigma_0 + \sigma_4 + \cdots + \sigma_{n-4}$ |
| $\sigma'_{n-2}$ | $\sigma_0 + \sigma_4 + \cdots + \sigma_{n-4}$ | $\sigma_2 + \sigma_6 + \cdots + \sigma_{n-2}$ |

– $\frac{n}{2}$ impair :

| | $\sigma_{n-2}$ | $\sigma'_{n-2}$ |
|---|---|---|
| $\sigma_{n-2}$ | $\sigma_0 + \sigma_4 + \cdots + \sigma_{n-2}$ | $\sigma_2 + \sigma_6 + \cdots + \sigma_{n-4}$ |
| $\sigma'_{n-2}$ | $\sigma_2 + \sigma_6 + \cdots + \sigma_{n-4}$ | $\sigma_0 + \sigma_4 + \cdots + \sigma'_{n-2}$ |

Les matrices $G_a$ s'obtiennent par la formule de récurrence tronquée de $SU(2)$ jusqu'au vertex $\sigma_{n-3}$, et les matrices correspondantes aux vertex de la fourche s'obtiennent grâce aux relations ci-dessus. Nous définissons aussi les matrices $G_a^{'}$ et $G_a^{\rho}$ :

$$(G_a^{'})_{bc} = (G_c)_{ab} \qquad\qquad (G_a^{\rho})_{bc} = (G_a)_{\rho(b)c}$$

où $\rho$ est l'application qui permute les vertex $\sigma_{n-2}, \sigma'_{n-2}$ de la fourche et laissent les autres invariants. Notons que nous avons :

$$G_a^{\rho} = G_a \quad \text{si } \frac{n}{2}\text{pair}, \qquad\qquad G_a^{\rho} = G_a^{'} \quad \text{si } \frac{n}{2}.\text{impair}$$

**Induction-restriction** Le graphe de la série $A_n$ correspondant à $D_{2n}$ est $A_{4n-3}$. Les matrices de fusion $N_i$ et les matrices $F_i$ s'obtiennent comme toujours. De la matrice essentielle $E_0$ nous obtenons les règles de branchement $A_{4n-3} \hookrightarrow D_{2n}$, qui définissent le graphe d'induction représenté à la Fig. 4.14.

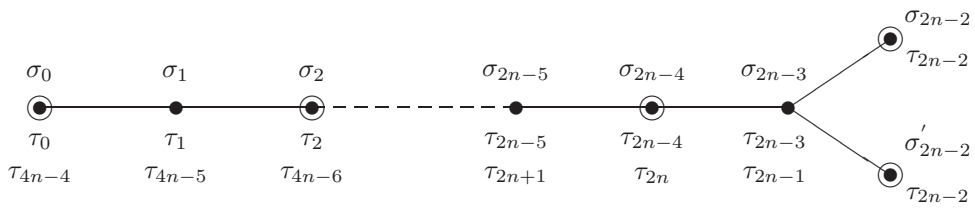



FIG. 4.14 – Le graphe d'induction $D_{2n}$-$A_{4n-3}$.

La valeur de $\hat{T}$ sur les irreps $\{\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_{2n-1}, \tau_{2n}, \tau_{2n+1}, \cdots, \tau_{4n-5}, \tau_{4n-4}\}$ de $A_{4n-3}$ est donnée par :

$$\hat{T}(\tau_0) = \hat{T}(\tau_{4n-4}) \qquad \hat{T}(\tau_2) = \hat{T}(\tau_{4n-6}) \qquad \cdots \qquad \hat{T}(\tau_{2n-4}) = \hat{T}(\tau_{2n})$$

Ces valeurs sont symétriques par rapport au vertex central $\tau_{2n}$. Par le mécanisme d'induction, nous pouvons assigner une valeur déterminée de $\hat{T}$ seulement pour les vertex $(\sigma_0, \sigma_2, \cdots, \sigma_{2n-4}, \sigma_{2n-2}, \sigma_{2n-2}^{'})$ de $D_{2n}$ (ils sont entourés par un cercle sur le diagramme d'induction). Ces vertex engendrent la sous-algèbre $J$. Notons que les vertex de la fourche $\sigma_{2n-2}, \sigma_{2n-2}^{'}$ ne sont pas distingués par les valeurs de $\hat{T}$. Comme $\hat{T}$ pourrait être défini sur une combinaison linéaire de ces vertex, il est naturel de s'attendre à ce que cet arbitraire conduise, au niveau de l'algèbre d'Ocneanu de $D_{2n}$, à la non-commutativité.

**Algèbre d'Ocneanu** De fait, les graphes $D_{2n}$ sont des $\mathbb{Z}_2$-orbifolds des graphes $A_{4n-3}$. Une réalisation de l'algèbre d'Ocneanu de $D_{2n}$ est donnée par un produit semi-direct : c'est le quotient, par $\rho$, du produit de l'algèbre du graphe $D_{2n}$ par $\mathbb{Z}_2$ :

$$Oc(D_{2n}) = D_{2n} \times_{\rho} \mathbb{Z}_2 \tag{4.38}$$

Cette algèbre est de dimension $2 \times 2n$, et ses éléments sont notés :

$$(\sigma_a, +) \qquad\qquad (\sigma_a, -)$$

La multiplication de l'algèbre $Oc(D_{2n})$ est définie par :

$$\begin{array}{rcl} (\sigma_a, +).(\sigma_b, \pm) & = & (\sigma_a.\sigma_b, \pm) \\ (\sigma_a, -).(\sigma_b, \pm) & = & (\sigma_a.\rho(\sigma_b), \mp) \end{array} \tag{4.39}$$

Cette algèbre est bien non-commutative, et la multiplication par les générateurs chiraux gauche et droit (resp. $(\sigma_1, +)$ et $(\sigma_1, -)$ est codée par le graphe d'Ocneanu correspondant. Les matrices $O_x$ qui codent la multiplication dans $Oc(D_{2n})$ sont données, dans la base $\{(\sigma_a, +), (\sigma_a, -)\}$, par :

$$O_{a,+} = \begin{pmatrix} G_a & 0 \\ 0 & G_a \end{pmatrix} \qquad\qquad O_{a,-} = \begin{pmatrix} 0 & G_a^\rho \\ G_a^\rho & a \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

L'action de $Oc(D_{2n})$ sur $D_{2n}$ est définie par :

$$(\sigma_a, +).\sigma_b = \sigma_a.\sigma_b \qquad\qquad (\sigma_a, -).\sigma_b = \sigma_a.\rho(\sigma_b) \tag{4.41}$$

et les matrices $S_x$ qui codent cette action sont données par :

$$S_{a,+} = G_a \qquad\qquad S_{a,-} = G_a^\rho \tag{4.42}$$

Nous avons les projections $\psi$ suivantes entre les éléments de $D_{2n} \otimes D_{2n}$ et $Oc(D_{2n})$ :

$$\begin{array}{rcll} \psi(\sigma_a \otimes \sigma_b) & = & (\sigma_a.\sigma_b, +) & \text{si } \sigma_b \in J \\ \psi(\sigma_a \otimes \sigma_b) & = & (\sigma_a.\sigma_b, -) & \text{si } \sigma_b \notin J \end{array}$$

de manière à ce que les structures multiplicatives $\mu_1$ de $D_{2n} \otimes D_{2n}$ et $\mu_2$ de $Oc(D_{2n})$ commutent :

$$\psi \circ \mu_1 = (\psi \times \psi) \circ \mu_2 \tag{4.43}$$

Les éléments pairs $(\sigma_a, +)$ de $Oc(D_{2n})$ sont représentés dans $D_{2n} \otimes D_{2n}$ par les éléments $\sigma_a \otimes \sigma_0$.

**Dimensions des blocs** Les dimension $d_i$ et $d_x$ des blocs de la digèbre $\mathcal{B}(D_{2n})$ pour les lois $\circ$ et $\odot$ sont données par :

$$d_i = \sum_{a,b} (F_i)_{ab} \qquad\qquad d_x = \sum_{a,b} (S_x)_{ab}$$

et la règle de somme quadratique, définissant la dimension de la digèbre $\mathcal{B}(D_{2n})$ est vérifiée :

$$\sum_{i \in A_{4n-3}} d_i^2 = \sum_{x \in Oc(D_{2n})} d_x^2 = \dim \mathcal{B}(D_{2n})$$

Par contre, pour satisfaire la règle de somme linéaire, la sommation sur les élément $x$ de $Oc(D_{2n})$ ne doit se faire que pour l'un des vertex de la fourche : il faut exclure de la somme les termes $x = (\sigma'_{2n-2}, \pm)$ [78]. La relation de masse quantique entre les graphes $Oc(D_{2n})$ et $\mathcal{A}(D_{2n}) = A_{4n-3}$ est vérifiée :

$$m(Oc(D_{2n})) = m(D_{2n}).m(\mathbb{Z}_2) = m(D_{2n}).2 = m(A_{4n-3})$$

**Matrices toriques et fonctions de partition généralisées** L'action à gauche et à droite de $A_{4n-3}$ sur $Oc(D_{2n})$ est définie sur les éléments de $D_{2n} \otimes D_{2n}$, projetés ensuite sur $Oc(D_{2n})$ par la projection $\psi$. Les matrices $W_{xy}$ s'obtiennent par les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lllll} W_{a+,d+} & = & \sum_b \sum_{c\in J} (F_i)_{ab}(F_j)_{0c}(G'_d)_{bc} & = & W_{a-,d-} \\ W_{a+,d-} & = & \sum_b \sum_{c\notin J} (F_i)_{ab}(F_j)_{0c}(G'_d)_{bc} & = & W_{a-,d+} \end{array}} \tag{4.44}$$

et l'invariant modulaire $\mathcal{M}$ des modèles $D_{2n}$ est donné par :

$$\mathcal{M} = \sum_{c\in J} (F_i)_{0c}\ (F_j)_{0c} \tag{4.45}$$

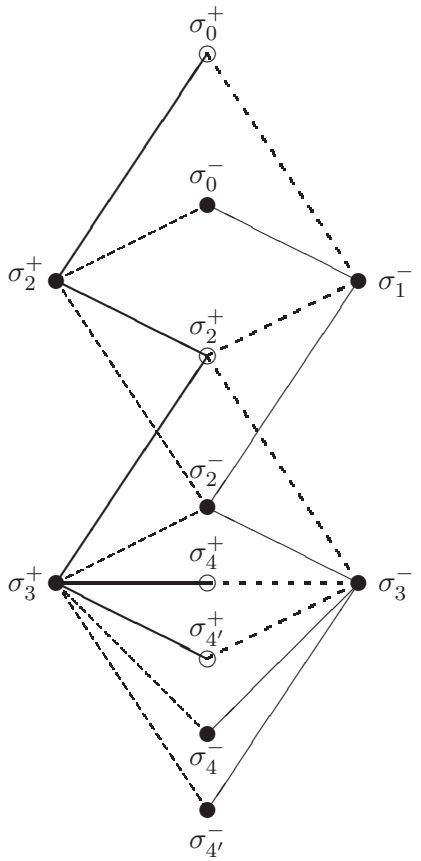
Les fonctions de partition généralisées des modèle $D_{2n}$ s'obtiennent alors par :

$$\mathcal{Z}_{xy} = \sum_{i\in A_{4n-3}} \sum_{j\in A_{4n-3}} \chi_i\ (W_{xy})_{ij}\ \overline{\chi}_j \tag{4.46}$$

en fonction des caractères $\chi_i(q)$ de l'algèbre $\widehat{su}(2)$. Elles s'écrivent de manière plus compacte en fonction des caractères étendus $\hat{\chi}_a(q)$ de $D_{2n}$ définis par :

$$\hat{\chi}_a(q) = \sum_{i\in A_{4n-3}} (E_0)_{ia}\ \chi_i(q) = \sum_{i\in A_{4n-3}} (F_i)_{0a}\ \chi_i(q) \tag{4.47}$$

Nous donnons à la Fig. 4.15 le graphe d'Ocneanu de $D_6$ ainsi que l'invariant modulaire correspondant. Notons que la non-commutativité de l'algèbre d'Ocneanu de $D_{2n}$ se manifeste par la présence d'un facteur 2 dans l'invariant modulaire (provenant de la symétrie des vertex de la fourche du graphe $D_{2n}$), et par conséquent aussi dans la fonction de partition invariante modulaire. Les fonctions de partition à une ligne de défauts $\mathcal{Z}_x = \mathcal{Z}_{x0}$ sont données dans [25] en fonction des caractères $\chi_i$ de $\widehat{su}(2)$, nous les rappelons dans l'Annexe **D** écrites de manière plus compacte en fonction des caractères étendus $\hat{\chi}_a$.



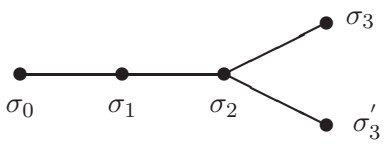

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 2 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.15 – Le graphe d'Ocneanu de $D_6$ et son invariant modulaire.

### 4.2.5 Les cas $D_{2n+1}$

**Le cas $D_5$**

**Graphe $D_5$** Le graphe $D_5$ et sa matrice d'adjacence sont illustrés à la Fig. 4.16, où l'ordre choisi pour les vertex est : $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{3'}\}$.




$$\mathcal{G}_{D_5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.16 – Le graphe $D_5$ et sa matrice d'adjacence.

Pour $D_5$, $\kappa = 8$, la norme du graphe est $\beta = [2]_q = 2\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et les composantes

du vecteur de Perron-Frobenius sont données par : $P = \left([1]_q, [2]_q, [3]_q, \frac{[3]_q}{[2]_q}, \frac{[3]_q}{[2]_q}\right)$. Il n'est pas possible de définir una algèbre associative et commutative possédant des coefficients de structure entiers non-négatifs pour le cas $D_5$ : plus généralement, on montre que les graphes $D_{2n+1}$ ne possèdent pas *self-fusion* [74].

**Induction-restriction** Comme les graphes $D_{2n}$, les graphes $D_{2n+1}$ sont des $\mathbb{Z}_2$-orbifold des graphes $A_{4n-1}$. Le graphe de la série $A_n$ correspondant à $D_5$ est $A_7$. Même si $D_{2n+1}$ ne possède pas de structure algébrique, il est néanmoins un *module* sous l'action de $A_7$. Les matrices de fusion $N_i$ de $A_7$ et les matrices $F_i$ codant l'action de $A_7$ sur $D_5$ sont obtenues comme d'habitude par la formule de récurrence tronquée de $su(2)$, avec $N_1 = \mathcal{G}_{A_7}$ et $F_1 = \mathcal{G}_{D_5}$. Le graphe $A_7$ est présenté à la Fig. 4.17 ainsi que les valeurs de $\hat{T}$ sur ses vertex.



| | $\tau_0$ | $\tau_1$ | $\tau_2$ | $\tau_3$ | $\tau_4$ | $\tau_5$ | $\tau_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{T}$ : | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 4 | 17 |

FIG. 4.17 – Le graphe $A_7$ et les valeurs $\hat{T}$ sur les vertex $\tau_i$.

**Algèbre d'Ocneanu** L'algèbre d'Ocneanu de $A_7$ est définie par $A_7 \otimes_{A_7} A_7$. Cependant, il est possible de définir un autre quotient sur le produit tensoriel $A_7 \otimes A_7$ pour lequel $\hat{T}$ est bien défini. En effet, les valeurs de $\hat{T}$ sont les mêmes ($\hat{T} = 4$) sur les vertex $\tau_1$ et $\tau_5$ de $A_7$. Définissons l'application $\rho$ (*twist*) telle que :

$$\rho(\tau_i) = \tau_i \qquad \text{pour } i = \{0, 2, 3, 4, 6\} \qquad \text{et} \quad \rho(\tau_1) = \tau_5, \quad \rho(\tau_5) = \tau_1.$$

Alors, l'algèbre d'Ocneanu de $D_5$ est définie par :

$$Oc(D_5) = A_7 \otimes_\rho A_7 \tag{4.48}$$

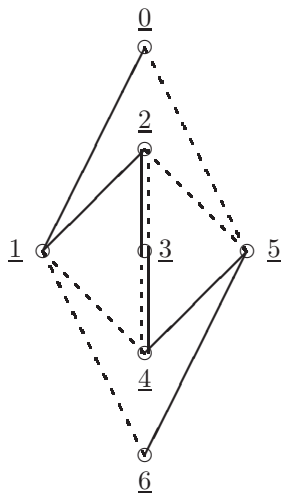
où nous avons les identifications suivantes entre les éléments de $Oc(D_5)$ :

$$\tau_a \dot{\otimes} \tau_b = \tau_a.\rho(\tau_b) \dot{\otimes} \tau_0 \tag{4.49}$$

Une base de $Oc(D_5)$ est donnée par les 7 éléments linéairement indépendants suivants :

$$\begin{aligned}
\underline{0} &= \tau_0 \dot{\otimes} \tau_0, & \underline{4} &= \tau_4 \dot{\otimes} \tau_0 = \tau_0 \dot{\otimes} \tau_4,\\
\underline{1} &= \tau_1 \dot{\otimes} \tau_0 = \tau_0 \dot{\otimes} \tau_5, & \underline{5} &= \tau_5 \dot{\otimes} \tau_0 = \tau_0 \dot{\otimes} \tau_1,\\
\underline{2} &= \tau_2 \dot{\otimes} \tau_0 = \tau_0 \dot{\otimes} \tau_2, & \underline{6} &= \tau_6 \dot{\otimes} \tau_0 = \tau_0 \dot{\otimes} \tau_6.\\
\underline{3} &= \tau_3 \dot{\otimes} \tau_0 = \tau_0 \dot{\otimes} \tau_3,
\end{aligned}$$

$(\tau_1 \dot{\otimes} \tau_0)$ et $(\tau_0 \dot{\otimes} \tau_1)$ $(= (\tau_5 \dot{\otimes} \tau_0))$ sont respectivement les générateurs chiraux gauche et droit. La multiplication par ces générateurs est codée par le graphe d'Ocneanu de $D_5$, représenté à la Fig. 4.18.




$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.18 – Le graphe d'Ocneanu de $D_5$ et son invariant modulaire.

La multiplication dans $Oc(D_5)$ et l'action de $Oc(D_5)$ sur $D_5$ sont codées par les matrices $O_x$ et $S_x$, qui, pour $\underline{x} = \tau_i \otimes \tau_0$, sont données par :

$$O_x = N_i \qquad\qquad S_x = F_i. \tag{4.50}$$

**Dimensions des blocs** La dimension des blocs $d_i$ et $d_x$ est donnée par la somme des éléments des matrices $F_i$ et $S_x$, et comme ces matrices sont identiques, les règles de somme linéaire et quadratiques sont évidemment vérifiées. Nous avons :

$$\dim(\mathcal{B}(D_5)) = \sum_{i \in A_7} d_i^2 = \sum_{x \in Oc(D_5)} d_x^2 = 564. \tag{4.51}$$

**Matrices toriques et fonctions de partition généralisées** Elles sont obtenues par l'action à gauche et à droite de $A_7$ sur un élément $\underline{x} = \tau_x \dot{\otimes} \tau_0$ de $Oc(D_5)$ :

$$\begin{aligned} \tau_i.(\underline{x}).\tau_j = \tau_i.(\tau_x \dot{\otimes} \tau_0).\tau_j &= \sum_k \sum_l (N_i)_{xk} (N_0)_{jl} \, (\tau_k \dot{\otimes} \tau_l) \\ &= \sum_k (N_x)_{ik} (\tau_k.\rho(\tau_j) \ \dot{\otimes} \tau_0) \\ &= \sum_k \sum_y (N_x)_{ik} (N_k)_{\rho(j)y} \, (\tau_y \dot{\otimes} \tau_0) = \sum_k \sum_y (N_x)_{ik} (N_y)_{k\rho(j)} (\underline{y}) \end{aligned}$$

Donc les matrices toriques généralisées $W_{xy}$, pour $\underline{x} = \tau_x \dot{\otimes} \tau_0$ et $\underline{y} = \tau_y \dot{\otimes} \tau_0$ du modèle $D_5$ s'écrivent de manière compacte sous :

$$\boxed{W_{xy} = (N_x.N_y)_{i\rho(j)}} \tag{4.52}$$

et l'invariant modulaire qui commute avec les générateurs $S$ et $T$ du groupe modulaire s'écrit :

$$(\mathcal{M})_{ij} = (\mathbb{1})_{i\rho(j)}$$

Les fonctions de partition généralisées du modèle $D_5$ s'obtiennent alors par :

$$\mathcal{Z}_{xy} = \sum_{i\in A_7}\sum_{j\in A_7} \chi_i(q)\ (W_{xy})_{ij}\ \overline{\chi}_j(q) \tag{4.53}$$

et la fonction de partition invariante modulaire s'écrit :

$$\mathcal{Z}_{D_5} = |\chi_0|^2 + |\chi_2|^2 + |\chi_3|^2 + |\chi_4|^2 + |\chi_6|^2 + (\chi_1.\overline{\chi}_5 + \text{h.c.}) \tag{4.54}$$

Les fonctions de partition à une ligne de défauts sont présentées dans l'Annex **D** en fonction des caractères de l'algèbre $\widehat{su}(2)$.

**Formules générales pour $D_{2n+1}$**

Le graphe $D_n$ général est illustré à la figure (4.13) avec sa matrice d'adjacence. Il n'est pas possible de définir une structure algébrique : les graphes $D_{2n+1}$ ne possèdent pas *self-fusion* (type II). L'espace vectoriel formé par les vertex $\sigma_a$ de $D_{2n+1}$ est cependant un *module* sous l'action de $A_{4n-1}$. Les matrices de fusion $N_i$ et les matrices $F_i$ codant l'action de $A_{4n-1}$ sur $D_{2n+1}$ s'obtiennent comme d'habitude. La valeur de $\hat{T}$ sur les vertex de $A_{4n-1}$ est la même pour les vertex impairs symétriques : $\sigma_1$ et $\sigma_{4n-3}$, $\sigma_3$ et $\sigma_{4n-5}$, .... Ceci permet de définir un quotient de l'algèbre $A_{4n-1} \otimes A_{4n-1}$ par l'application $\rho$, définie par :

$$\begin{array}{rcll} \rho(\sigma_a) & = & \sigma_a & \text{si a pair} \\ \rho(\sigma_a) & = & \sigma_{4n-2-a} & \text{si a impair} \end{array}$$

sur lequel l'opérateur $\hat{T}$ est bien défini. L'algèbre d'Ocneanu de $D_{2n+1}$ est définie par :

$$Oc(D_{2n+1}) = A_{4n-1} \otimes_\rho A_{4n-1} = A_{4n-1} \dot{\otimes} A_{4n-1} \tag{4.55}$$

où nous identifions les éléments $\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$ et $\sigma_a.\rho(\sigma_b) \dot{\otimes} \sigma_0$. Cette algèbre est de dimension $4n-1$. La multiplication dans $Oc(D_{2n+1})$ et l'action de $Oc(D_{2n+1})$ sur $D_{2n+1}$ sont codées par les matrices $O_x$ et $S_x$, qui, pour $\underline{x} = \tau_i \otimes \tau_0$, sont données par :

$$O_x = N_i \qquad\qquad S_x = F_i. \tag{4.56}$$

Les matrices $F_i$ et $S_x$ étant égales, les règles de somme linéaire et quadratique sont bien sur satisfaites. Les matrices toriques généralisées $W_{xy}$ codant l'action de $Oc(D_{2n+1})$ sur $D_{2n-1}$ sont données par :

$$\boxed{W_{xy} = (N_x.N_y)_{i\rho(j)}} \tag{4.57}$$

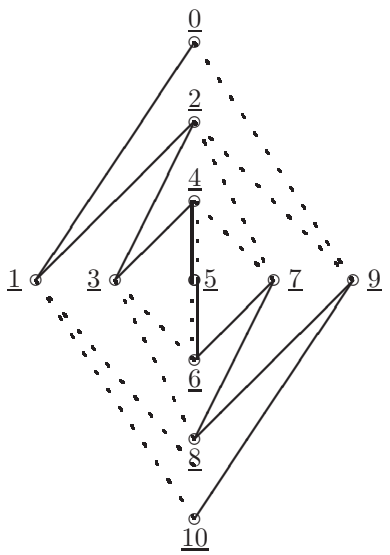
et les fonctions de partition généralisées s'obtiennent par :

$$\mathcal{Z}_{xy} = \sum_{i\in A_{4n-1}} \sum_{j\in A_{4n-1}} \chi_i(q)\ (W_{xy})_{ij}\ \overline{\chi}_j(q) \tag{4.58}$$

Pour le modèle $D_7$, le graphe $A_n$ correspondant est $A_{11}$, et le twist $\rho : A_{11} \to A_{11}$ est défini par :

$$\rho(\tau_i) = \tau_i \quad \text{pour} \quad i \in \{0,2,4,5,6,8,10\} \quad \text{et} \quad \rho(\tau_1) = \tau_9, \quad \rho(\tau_3) = \tau_7, \quad \rho(\tau_7) = \tau_3, \quad \rho(\tau_9) = \tau_1.$$

Le graphe d'Ocneanu de $D_7$ est illustré à la Fig 4.19 avec l'invariant modulaire correspondant. Les fonctions de partition à une ligne de défauts sont publiées dans [25], elles s'obtiennent très facilement par (4.57) et (4.58).



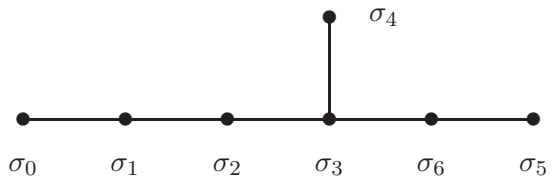

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.19 – Le graphe d'Ocneanu de $D_7$ et son invariant modulaire.

### 4.2.6 Le cas $E_7$

**Graphe $E_7$** Le graphe $E_7$ et sa matrice d'adjacence sont illustrés ci-dessous. Nous choisissons l'ordre suivant pour les vertex : $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_6, \sigma_5, \sigma_4\}$.

Pour $E_7$, $\kappa = 18$, la norme du graphe est $\beta = [2]_q = 2\cos(\frac{\pi}{18})$ et les composantes du vecteur de Perron-Frobenius sont données par : $P = \left([1]_q, [2]_q, [3]_q, [4]_q, \frac{[6]_q}{[2]_q}, \frac{[4]_q}{[3]_q}, \frac{[4]_q}{[2]_q}\right)$, avec




$$\mathcal{G}_{E_7} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.20 – Le graphe $E_7$ et sa matrice d'adjacence.

$q = \exp\left(\frac{i\pi}{18}\right)$. Le graphe $E_7$ ne définit pas une algèbre de graphe à coefficients entiers non-négatifs : il est possible de définir une algèbre mais dont certains coefficients de structure sont négatifs [25] : cette algèbre ne code donc pas en soi une structure de fusion de "représentations irréductibles" (voir Tab. 4.2.6).

| $E_7$ | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_6$ | $\sigma_5$ | $\sigma_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_0$ | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_6$ | $\sigma_5$ | $\sigma_4$ |
| $\sigma_1$ | $\sigma_1$ | $\sigma_0+\sigma_2$ | $\sigma_1+\sigma_3$ | $\sigma_2+\sigma_4+\sigma_6$ | $\sigma_3+\sigma_5$ | $\sigma_6$ | $\sigma_3$ |
| $\sigma_2$ | $\sigma_2$ | $\sigma_1+\sigma_3$ | $\sigma_0+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_6$ | $\sigma_1+2\,\sigma_3+\sigma_5$ | $\sigma_2+\sigma_4+\sigma_6$ | $\sigma_3$ | $\sigma_2+\sigma_6$ |
| $\sigma_3$ | $\sigma_3$ | $\sigma_2+\sigma_4+\sigma_6$ | $\sigma_1+2\,\sigma_3+\sigma_5$ | $\sigma_0+2\,\sigma_2+\sigma_4+2\,\sigma_6$ | $\sigma_1+2\,\sigma_3$ | $\sigma_2+\sigma_4$ | $\sigma_1+\sigma_3+\sigma_5$ |
| $\sigma_6$ | $\sigma_6$ | $\sigma_3+\sigma_5$ | $\sigma_2+\sigma_4+\sigma_6$ | $\sigma_1+2\,\sigma_3$ | $\sigma_0+\sigma_2+\sigma_6$ | $\sigma_1+\sigma_5$ | $\sigma_2+\sigma_4$ |
| $\sigma_5$ | $\sigma_5$ | $\sigma_6$ | $\sigma_3$ | $\sigma_2+\sigma_4$ | $\sigma_1+\sigma_5$ | $\sigma_0-\sigma_4+\sigma_6$ | $\sigma_3-\sigma_5$ |
| $\sigma_4$ | $\sigma_4$ | $\sigma_3$ | $\sigma_2+\sigma_6$ | $\sigma_1+\sigma_3+\sigma_5$ | $\sigma_2+\sigma_4$ | $\sigma_3-\sigma_5$ | $\sigma_0+\sigma_6$ |

TAB. 4.6 – Table de multiplication de l'algèbre de graphe $E_7$.

Les matrices de "*fusion*" $G_a^{E_7}$ codant cette structure algébrique sont données par :

$$\begin{aligned} G_0^{E_7} &= \mathbb{1}_{7\times 7} \\ G_1^{E_7} &= \mathcal{G}_{E_7} \\ G_2^{E_7} &= G_1^{E_7}.G_1^{E_7} - G_0^{E_7} \\ G_3^{E_7} &= G_1^{E_7}.G_2^{E_7} - G_1^{E_7} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G_5^{E_7} &= G_3^{E_7}.G_2^{E_7} - G_1^{E_7} - 2.G_3^{E_7} \\ G_4^{E_7} &= G_5^{E_7}.G_3^{E_7} - G_2^{E_7} \\ G_6^{E_7} &= G_2^{E_7}.G_4^{E_7} - G_2^{E_7} \end{aligned}$$

**Induction-restriction** Le graphe de la série $A_n$ ayant même norme que $E_7$ est $A_{17}$. Les matrices de fusion $N_i$ et les matrices $F_i^{E_7}$ qui codent l'action de $A_{17}$ sur $E_7$ s'obtiennent comme d'habitude par la formule de récurrence tronquée de $SU(2)$, avec $F_1^{E_7} = \mathcal{G}_{E_7}$. Le graphe $D_{10}$ possède aussi la même norme que $A_{17}$ et $E_7$ : nous allons voir que l'algèbre d'Ocneanu de $E_7$ est construite à partir de celle du graphe $D_{10}$ [67, 25]. Les matrices de fusion de l'algèbre de graphe $D_{10}$ sont notées $G_a^{D_{10}}$, et les matrices qui codent l'action de $A_{17}$ sur $D_{10}$ seront notées $F_i^{D_{10}}$, avec $F_1^{D_{10}} = \mathcal{G}_{D_{10}}$. Elles permettent –à travers la matrice essentielle $E_0^{D_{10}}$– de définir l'induction-restriction entre $A_{17}$ et $D_{10}$ : ce graphe d'induction est illustré à la Fig. 4.21.

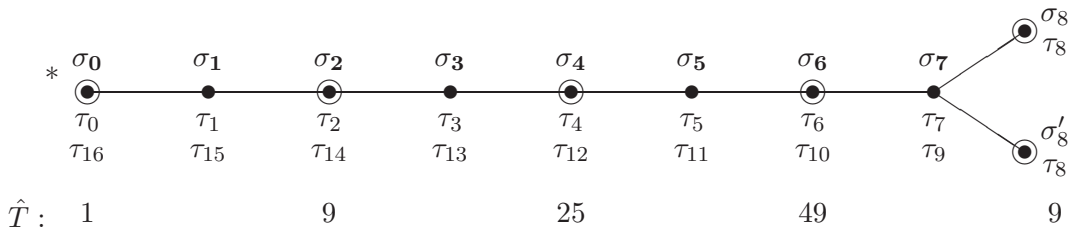



FIG. 4.21 – Le graphe d'induction $D_{10}$-$A_{17}$ et les valeurs $\hat{T}$.

Par le mécanisme d'induction-restriction, le sous-espace $J$ des vertex de $D_{10}$ pour lesquels une valeur de $\hat{T}$ est bien définie est $J = \{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_6, \sigma_8, \sigma_{8'}\}$. Pour $A_{17}$, la valeur de $\hat{T}$ sur le vertex central $\tau_8$ est égale à la valeur de $\hat{T}$ sur les vertex : $\tau_2$ et $\tau_{14}$ : ainsi, la valeur de $\hat{T}$ est la même pour les vertex $\sigma_2$ et ceux constituant la fourche de $D_{10}$. Ceci nous mène à pouvoir définir un *twist* $\rho$ agissant sur les vertex de $D_{10}$ (ce *twist* est "le" *twist* exceptionnel du modèle $su(2)$ ; l'existence de ce *twist* n'est pas nouvelle, mais nous montrons ici sa relation avec les propriétés de l'opérateur modulaire) :

$$\begin{array}{lll} \rho(\sigma_0) = \sigma_0, & \rho(\sigma_4) = \sigma_4, & \rho(\sigma_8) = \sigma_2, \\ \rho(\sigma_2) = \sigma_8, & \rho(\sigma_6) = \sigma_6, & \rho(\sigma_8^{'}) = \sigma_8^{'}. \end{array}$$

**Algèbre d'Ocneanu** L'algèbre d'Ocneanu de $E_7$ est définie par :

$$Oc(E_7) = D_{10} \otimes_\rho D_{10} = D_{10} \dot{\otimes} D_{10} \tag{4.59}$$

où nous avons les suivantes identifications :

$$\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b.\sigma_c = \sigma_a.\rho(\sigma_b) \dot{\otimes} \sigma_c \qquad \text{pour } \sigma_b \in J \tag{4.60}$$

Appelons $\overline{J}$ le sous-espace complémentaire de $J$ dans $D_{10}$. Nous avons :

$$D_{10} = J \oplus \overline{J} \qquad J.J \subset J \qquad J.\overline{J} = \overline{J}.J \subset \overline{J} \qquad \overline{J}.\overline{J} \subset J$$

et un élément $\sigma_a \in \overline{J}$ peut s'écrire comme $\sigma_a^{'}.\sigma_b$, avec $\sigma_a^{'} \in J$ et $\sigma_b \in \overline{J}$ (ou une combinaison linéaire de tels éléments). L'algèbre $D_{10} \otimes D_{10}$ possède $10 \times 10 = 100$ éléments linéairement indépendants. Nous avons les identifications suivantes dans l'algèbre $D_{10} \dot{\otimes} D_{10}$ :

$$\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b = \sigma_a.\rho(\sigma_b) \dot{\otimes} \sigma_0 \qquad \text{pour } \sigma_a \in D_{10}\ , \sigma_b \in J \tag{4.61}$$

et

$$\begin{array}{lcll} \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b & = & \sigma_0 \dot{\otimes} \rho(\sigma_a).\sigma_b & \text{pour } \sigma_a \in J, \sigma_b \notin J \\ \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b & = & \sum_c \sum_d \sigma_c \dot{\otimes} \sigma_c & \text{pour } (\sigma_a, \sigma_b) \notin J, \text{avec } (\sigma_c, \sigma_d) \notin J, \end{array} \tag{4.62}$$

Les identifications (4.61) définissent 10 éléments linéairement indépendants, notés $\underline{a} = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_0$. Les identifications (4.62) définissent 7 éléments linéairement indépendants,

notés $(\underline{a})$. Une base de l'algèbre d'Ocneanu de $E_7$ est donnée par les 17 éléments suivants :

$$
\begin{array}{rcl}
\underline{0} & = & 0 \dot{\otimes} 0 \\
\underline{1} & = & 1 \dot{\otimes} 0 \\
\underline{2} & = & 2 \dot{\otimes} 0 = 0 \dot{\otimes} 8 \\
\underline{3} & = & 3 \dot{\otimes} 0 \\
\underline{4} & = & 4 \dot{\otimes} 0 = 0 \dot{\otimes} 4 \\
\underline{5} & = & 5 \dot{\otimes} 0 \\
\underline{6} & = & 6 \dot{\otimes} 0 = 0 \dot{\otimes} 6 \\
\underline{7} & = & 7 \dot{\otimes} 0 \\
\underline{8} & = & 8 \dot{\otimes} 0 = 0 \dot{\otimes} 2 \\
\underline{8'} & = & 8' \dot{\otimes} 0 = 0 \dot{\otimes} 8'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\underline{(0)} & = & 0 \dot{\otimes} 1 \\
\underline{(1)} & = & 1 \dot{\otimes} 1 \\
\underline{(2)} & = & 2 \dot{\otimes} 1 = 0 \dot{\otimes} 7 \\
\underline{(3)} & = & 3 \dot{\otimes} 1 = 1 \dot{\otimes} 3 \\
\underline{(4)} & = & 0 \dot{\otimes} 3 \\
\underline{(5)} & = & 5 \dot{\otimes} 1 - 3 \dot{\otimes} 1 \\
 & = & 1 \dot{\otimes} 5 - 1 \dot{\otimes} 3 \\
\underline{(6)} & = & 0 \dot{\otimes} 5
\end{array}
$$

$\underline{1}$ et $\underline{(0)}$ sont respectivement les générateurs chiraux gauche et droit. La partie ambichirale est engendrée par $\{\underline{0}, \underline{2}, \underline{4}, \underline{6}, \underline{8}, \underline{8'}\}$. Les éléments $\underline{a}$ engendrent une sous-algèbre de $Oc(E_7)$, isomorphe à l'algèbre de graphe $D_{10}$. Nous appelons "$D_{10}$" le sous-espace engendré par les éléments de type $\underline{a}$. L'algèbre de graphe de $E_7$ n'apparait pas comme une sous-algèbre de $Oc(E_7)$, mais comme un quotient. Nous appelons "$E_7$" le sous-espace engendré par les éléments de type $(\underline{x})$. Nous donnons dans la Tab. 4.7 la multiplication des éléments de $Oc(E_7)$ par ses générateurs.

Nous pouvons voir que la multiplication des éléments de l'algèbre d'Ocneanu de $E_7$ par ses générateurs est en effet codée par le graphe d'Ocneanu de $E_7$, illustré à la Fig. 4.22.

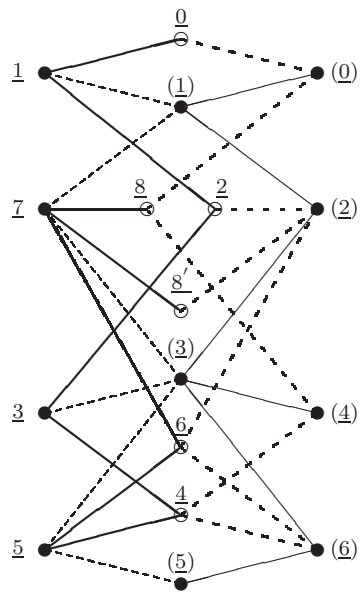



FIG. 4.22 – Le graphe d'Ocneanu de $E_7$

| “$D_{10}$” | $\underline{1}$ |
|---|---|
| $\underline{0}$ | $\underline{1}$ |
| $\underline{1}$ | $\underline{0}+\underline{2}$ |
| $\underline{2}$ | $\underline{1}+\underline{3}$ |
| $\underline{3}$ | $\underline{2}+\underline{4}$ |
| $\underline{4}$ | $\underline{3}+\underline{5}$ |
| $\underline{5}$ | $\underline{4}+\underline{6}$ |
| $\underline{6}$ | $\underline{5}+\underline{7}$ |
| $\underline{7}$ | $\underline{6}+\underline{8}+\underline{8'}$ |
| $\underline{8}$ | $\underline{7}$ |
| $\underline{8'}$ | $\underline{7}$ |

| “$D_{10}$” | $\underline{(0)}$ |
|---|---|
| $\underline{0}$ | $\underline{(0)}$ |
| $\underline{(0)}$ | $\underline{0}+\underline{8}$ |
| $\underline{8}$ | $\underline{(0)}+\underline{(4)}$ |
| $\underline{(4)}$ | $\underline{8}+\underline{4}$ |
| $\underline{4}$ | $\underline{(4)}+\underline{(6)}$ |
| $\underline{(6)}$ | $\underline{4}+\underline{6}$ |
| $\underline{6}$ | $\underline{(6)}+\underline{(2)}$ |
| $\underline{(2)}$ | $\underline{2}+\underline{6}+\underline{8'}$ |
| $\underline{2}$ | $\underline{(2)}$ |
| $\underline{8'}$ | $\underline{(2)}$ |

| “$E_7$” | $\underline{1}$ |
|---|---|
| $\underline{(0)}$ | $\underline{(1)}$ |
| $\underline{(1)}$ | $\underline{(0)}+\underline{(2)}$ |
| $\underline{(2)}$ | $\underline{(1)}+\underline{(3)}$ |
| $\underline{(3)}$ | $\underline{(2)}+\underline{(4)}+\underline{(6)}$ |
| $\underline{(4)}$ | $\underline{(3)}$ |
| $\underline{(6)}$ | $\underline{(3)}+\underline{(5)}$ |
| $\underline{(5)}$ | $\underline{(6)}$ |

| “$E_7$” | $\underline{(0)}$ |
|---|---|
| $\underline{1}$ | $\underline{(1)}$ |
| $\underline{(1)}$ | $\underline{1}+\underline{7}$ |
| $\underline{7}$ | $\underline{(1)}+\underline{(3)}$ |
| $\underline{(3)}$ | $\underline{3}+\underline{5}+\underline{7}$ |
| $\underline{3}$ | $\underline{(3)}$ |
| $\underline{5}$ | $\underline{(3)}+\underline{(5)}$ |
| $\underline{(5)}$ | $\underline{5}$ |

TAB. 4.7 – Multiplication des éléments de l'algèbre d'Ocneanu de $E_7$ par ses générateurs.

La table de multiplication complète de l'algèbre $Oc(E_7)$ possède la structure suivante :

$$\begin{array}{lcl} \text{“}D_{10}\text{”} \times \text{“}D_{10}\text{”} & \to & \text{“}D_{10}\text{”} \\ \text{“}D_{10}\text{”} \times \text{“}E_7\text{”} & \to & \text{“}E_7\text{”} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{“}E_7\text{”} \times \text{“}D_{10}\text{”} & \to & \text{“}E_7\text{”} \\ \text{“}E_7\text{”} \times \text{“}E_7\text{”} & \to & \text{“}D_{10}\text{”} \end{array}$$

Appelons $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ des éléments de la partie “$D_{10}$”, et $(\underline{x}), (\underline{y})$ des éléments de la partie “$E_7$”. La structure multiplicative de la partie “$D_{10}$” $\times$ “$D_{10}$” $\to$ “$D_{10}$” est codée par les matrices de fusion $G^{D_{10}}$ de $D_{10}$, et la structure complète est donnée par :

$$\begin{aligned} \underline{a}.\underline{b} &= \sum_c (G_a^{D_{10}})_{bc}\ \underline{c} & (\underline{x}).\underline{a} &= \sum_y (s'_x)_{ay}\ (\underline{y}) \\ \underline{a}.(\underline{x}) &= \sum_y (s_a)_{xy}\ (\underline{y}) & (\underline{x}).(\underline{y}) &= \sum_a (s''_x)_{ya}\ \underline{a} \end{aligned}$$

où les 10 matrices $7 \times 7$ $s_a$ codent l'action de $D_{10}$ sur $E_7$, et sont des combinaisons linéaires des matrices de fusion de $E_7$[5] :

$$\begin{array}{lllll} s_0 = G_0 & s_2 = G_2 & s_4 = G_4 + G_6 & s_6 = G_6 + G_2 & s_8 = G_0 + G_4 \\ s_1 = G_1 & s_3 = G_3 & s_5 = G_5 + G_3 & s_7 = G_3 + G_1 & s_9 = G_2 \end{array}$$

[5]Bien que les matrices de fusion $G$ de $E_7$ possèdent des coefficients négatifs, les matrices $s_a$ définies comme des combinaisons linéaires de telles matrices sont à coefficients entiers non-négatifs.

Les matrices $s'_x$ et $s''_x$ sont des matrices rectangulaires $10 \times 7$ et $7 \times 10$ définies par :

$$(s'_x)_{ay} = (s''_x)_{ya} = (s_a)_{xy} \qquad\qquad s'' = s^T$$

La structure multiplicative complète de $Oc(E_7)$ est codée par les matrices $O_x$, qui, dans la base $\{x\} = \{\underline{a}, (\underline{y})\}, x = 0, 2, \cdots 16$, sont données par :

$$O_x = \begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} G_x^{D_{10}} & \cdot \\ \hline \cdot & s_x \end{array}\right) & \text{pour } x = 0, 1, \cdots, 9 \\ \\ \left(\begin{array}{c|c} \cdot & s'_{x-10} \\ \hline (s'_{x-10})^T & \cdot \end{array}\right) & \text{pour } x = 10, 11, \cdots, 16 \end{cases}$$

Les matrices $s_a$ définissent l'action de $D_{10}$ sur $E_7$. L'action d'un élément de $Oc(E_7)$ sur $E_7$ est obtenue en utilisant notre réalisation algébrique de $Oc(E_7)$. Pour un élément de $Oc(E_7)$ de la forme $x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$, avec $\sigma_a, \sigma_b \in D_{10}$, alors :

$$x.\sigma_c^{E_7} = \sum_{d \in E_7} (S_x)_{cd}\, \sigma_d^{E_7} \qquad\qquad S_x = s_a.s_b \tag{4.63}$$

**Dimension des blocs** La dimension $d_i$ des blocs de la bigèbre $\mathcal{B}E_7$ pour la loi de composition est donnée par $d_i = \sum_{a,b} (F_i^{E_7})_{ab}$ pour $a, b \in E_7$ et $i \in A_{17}$. Nous avons explicitement :

$$d_i : (7, 12, 17, 22, 27, 30, 33, 34, 35, 34, 33, 30, 27, 22, 17, 12, 7)$$

La dimension des blocs de $\mathcal{B}(E_7)$ pour la loi de convolution est obtenue en sommant les éléments des matrices $S_x$, pour $x \in Oc(E_7)$ :

$$d_x : (7, 12, 17, 22, 27, 30, 33, 34, 18, 17, 12, 24, 34, 44, 30, 16, 22)$$

Les règles de somme linéaire et quadratique sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{B}(E_7)) = \sum_{i \in A_{17}} d_i^2 &= \sum_{x \in Oc(E_7)} d_x^2 = 10905 \\ \sum_i (d_i) &= \sum_x d_x = 399 \end{aligned} \tag{4.64}$$

La relation de masse quantique entre $Oc(E_7)$ et $\mathcal{A}(E_7) = A_{17}$ est satisfaite :

$$m(Oc(E_7)) = \frac{m(D_{10}).m(D_{10})}{m(J)} = m(A_{17}) \tag{4.65}$$

où $m(J) = qdim^2(\sigma_0) + qdim^2(\sigma_2) + qdim^2(\sigma_4) + qdim^2(\sigma_6) + qdim^2(\sigma_8) + qdim^2(\sigma_{8'})$ est la masse quantique de la sous-algèbre $J$ de $D_{10}$. La masse quantique de $Oc(7)$ est définie dans (4.65) en fonction de la réalisation $Oc(E_7) = D_{10} \otimes_{\rho,J} D_{10}$. Notons que nous avons aussi :

$$\frac{m(D_{10}).m(E_7)}{m(J')} = m(A_{17})$$

où $m(J') = qdim^2(\sigma_1) + qdim^2(\sigma_3) + qdim^2(\sigma_5)$, avec $\{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5\} \in E_7$. Cette dernière relation nous suggère que l'algèbre d'Ocneanu de $E_7$ puisse aussi être réalisée par $D_{10} \otimes_{J'} E_7$, ce qui expliquerait mieux pourquoi $E_7$ aparaisse comme un quotient de $Oc(E_7)$.

**Matrices toriques et fonctions de partition généralisées** L'action de $A_{17}$ (à gauche et à droite) sur $Oc(E_7)$ est calculée – utilisant la réalisation $Oc(E_7) = D_{10} \otimes_\rho D_{10}$– à travers l'action de $A_{17}$ sur $D_{10}$, codée par les matrices $F_i^{D_{10}}$. Pour un élément $x = \sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b$ de $Oc(E_7)$ :

$$\tau_i.x.\tau_j = \tau_i.(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b).\tau_j = \sum_{c\in D_{10}} \sum_{d\in D_{10}} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}\ (\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_d) \tag{4.66}$$

Il faut alors projeter les éléments $\sigma_c \dot{\otimes} \sigma_d$ sur la base de $Oc(E_7)$, d'après les identifications (4.61) et (4.62). Pour obtenir l'expression de la matrice $W_{xy}$, il faut calculer les termes proportionnels à l' élément $y$ apres la projection. Il est difficile d'écrire une formule générale pour la matrice $W_{xy}$, cependant, une fois le $y$ choisi, le calcul est simple à travers les identifications. Nous avons par exemple :

$$\begin{aligned}
\tau_i.(\sigma_a \dot{\otimes} \sigma_b).\tau_j &= \sum_c \sum_{d\in J} (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}\ (\sigma_c.\rho(\sigma_d) \dot{\otimes} \sigma_0) + \sum_c \sum_{d\notin J} \cdots \\
&= \sum_c \sum_{d\in J} \sum_e (F_i)_{ac}(F_j)_{bd}(G_c)_{\rho(d)e}\ (\sigma_e \dot{\otimes} \sigma_0) + \sum_c \sum_{d\notin J} \cdots
\end{aligned}$$

et les matrices toriques $W_x = W_{x0}$ et les matrices toriques généralisées sont alors données par :

$$\boxed{\begin{aligned}
W_x &= \sum_{c\in J} (F_i)_{ac}(F_j)_{b\rho(c)} \\
W_{xy} &= \sum_{z\in Oc(E_7)} (O_x)_{yz}\ W_z
\end{aligned}} \tag{4.67}$$

En particulier, l'invariant modulaire est égal à :

$$\mathcal{M} = W_{00} = \sum_{c\in J} (F_i)_{0c}(F_j)_{0\rho(c)}$$

Les fonctions de partition généralisées du modèle $E_7$ sont définies en fonction des caractères $\chi_i(q)$ de $\widehat{su}(2)$ par :

$$\mathcal{Z}_{x|y} = \sum_{i\in A_{17}} \sum_{j\in A_{17}} \chi_i(q)\ (W_{xy})_{ij}\overline{\chi}_j(q)$$

Les fonctions de partition à une ligne de défauts sont publiées dans [25]. Elles s'écrivent de manière plus compacte en fonction des caractères étendus du modèle $D_{10}$ :

$$\mathcal{Z}_{x|0} = \sum_{c\in J} \hat{\chi}_{ac}\overline{\hat{\chi}}_{b\rho(c)}$$

avec :

$$\hat{\chi}_{ab} = \sum_{c\in D_{10}} (G_a^{D_{10}})_{cb}\hat{\chi}_c \qquad\qquad \hat{\chi}_c = \sum_{i\in A_{17}} \chi_i$$

La fonction de partition invariante modulaire est :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{E_7} &= |\hat{\chi}_0|^2 + |\hat{\chi}_4|^2 + |\hat{\chi}_6|^2 + |\hat{\chi}_{8'}|^2 + (\hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_8} + \text{h.c.}) \\ &= |\chi_0 + \chi_{16}|^2 + |\chi_4 + \chi_{12}|^2 + |\chi_6 + \chi_{10}|^2 + |\chi_8|^2 + [(\chi_2 + \chi_{14}).\overline{\chi}_8 + \text{h.c.}]\end{aligned}$$

## 4.3 Quelques exemples du cas $su(3)$

Les diagrammes de Coxeter-Dynkin des cas $su(3)$ sont publiés dans [71]. Nous utilisons les mêmes méthodes que celles introduites dans le cas $su(2)$ pour construir l'algèbre d'Ocneanu des trois cas exceptionnels possédant *self-fusion* du système $su(3)$, et ainsi obtenir les fonctions de partition généralisées associées.

### 4.3.1 Le cas $\mathcal{E}_5$

**Graphe et matrice de fusion** Le graphe $\mathcal{E}_5$ est illustré à la Fig. 4.3.1. Le niveau est $\ell = 5$, l'altitude $\kappa = l + 3 = 8$ et la norme $\beta = 1 + 2\cos(2\pi/8) = 1 + \sqrt{2}$. L'identité est $1_0$, et la fondamentale à laquelle correspond le graphe est $2_1$ (la fondamentale conjuguée est $2_2$). La conjuguaison correspond à la symétrie par rapport à l'axe qui passe par les vertex $1_0$ et $1_3$ (seules irreps réelles) : $1_0^* = 1_0, 1_1^* = 1_5, 1_2^* = 1_4, 1_3^* = 1_3$ ; $2_0^* = 2_3, 2_1^* = 2_2, 2_4^* = 2_5$.

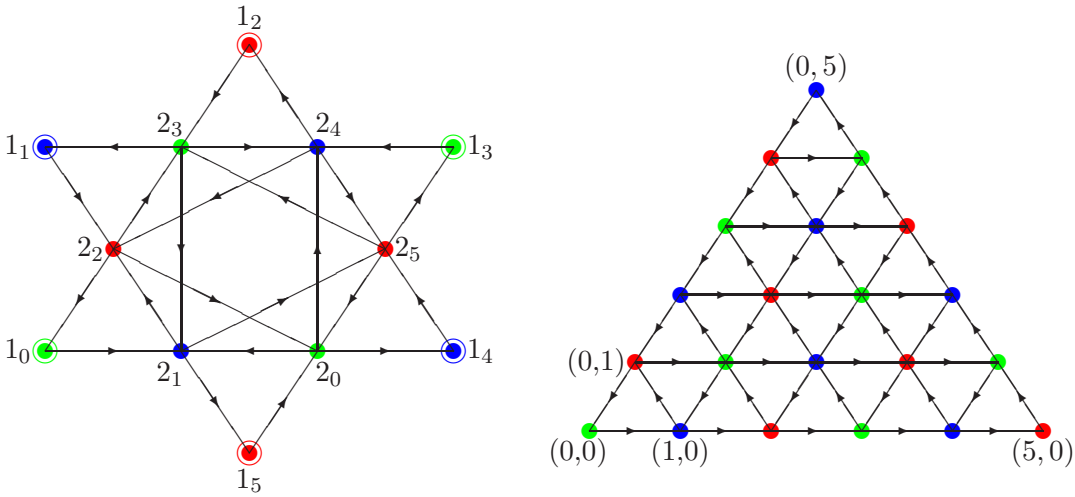



FIG. 4.23 – Les diagrammes de Coxeter-Dynkin généralisés $\mathcal{E}_5$ et $\mathcal{A}_5$.

Le graphe $\mathcal{E}_5$ détermine de manière unique son algèbre de graphe, dont la table de multiplication commutative est donnée par :

$$\begin{aligned} 1_i.1_j &= 1_{i+j} \\ 1_i.2_j = 2_i.1_j &= 2_{i+j} \\ 2_i.2_j &= 2_{i+j} + 2_{i+j-3} + 1_{i+j-3} \end{aligned} \tag{4.68}$$

où les indices $i$ et $j$ varient de 0 à 5 mod 6. Clairement le sous-ensemble $1_i$ forme une sous-algèbre de $\mathcal{E}_5$. La matrice de fusion correspondant à la fondamentale $2_1$ est la matrice d'adjacence du graphe[6]. La conjuguaison se traduit au niveau matriciel par la transposition : $G_{a^*} = G_a^T$. À partir de la table de multiplication (4.68), il est immédiat de calculer les matrices de fusion $G_a$ associées aux vertex $a \in \mathcal{E}_5$.

**Induction-restriction** Le graphe de la série $\mathcal{A}$ de même norme que $\mathcal{E}_5$ est $\mathcal{A}_5$, illustré aussi à la Fig. 4.3.1, à partir de laquelle nous obtenons les matrices de fusion $N_{1,0}$ de la représentation fondamentale $(1,0)$, et de la fondamentale conjuguée : $N_{0,1} = N_{1,0}^T$. Les autres matrices de fusion $N_i$ et les matrices $F_i$ codant l'action de $\mathcal{A}_5$ sur $\mathcal{E}_5$ (pour $i = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{A}_5$) sont déterminées par la formule de récurrence tronquée de $SU(3)$ (avec $F_{1,0} = G_{2_1}$). La matrice essentielle $E_{1_0}$ s'obtient par $(E_{1_0})_{ia} = (F_i)_{1_0 a}$ : elle contient 21 lignes labellées par les vertex $i \in \mathcal{A}_5$ et 12 colonnes labellées par les vertex $a \in \mathcal{E}_5$. De cette matrice, nous lisons les règles de branchement $\mathcal{A}_5 \hookrightarrow \mathcal{E}_5$ ainsi que les règles d'induction, données par :

$$
\begin{array}{ll}
1_0 \hookleftarrow (0,0),(2,2) & 2_0 \hookleftarrow (1,1),(3,0),(2,2),(1,4) \\
1_1 \hookleftarrow (0,2),(3,2) & 2_1 \hookleftarrow (1,0),(2,1),(1,3),(3,2) \\
1_2 \hookleftarrow (1,2),(5,0) & 2_2 \hookleftarrow (0,1),(1,2),(3,1),(2,3) \\
1_3 \hookleftarrow (3,0),(0,3) & 2_3 \hookleftarrow (1,1),(0,3),(2,2),(4,1) \\
1_4 \hookleftarrow (2,1),(0,5) & 2_4 \hookleftarrow (0,2),(2,1),(4,0),(1,3) \\
1_5 \hookleftarrow (2,0),(2,3) & 2_5 \hookleftarrow (2,0),(1,2),(3,1),(0,4)
\end{array}
$$

La valeur de $\hat{T}$ sur les vertex $i = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{A}_5$ est donnée dans la Tab. 4.3.1

| $(\lambda_1, \lambda_2)$ | $(0,0)$ | $(1,0)$ $(0,1)$ | $(2,0)$ $(0,2)$ | $(3,0)$ $(0,3)$ | $(4,0)$ $(0,4)$ | $(5,0)$ $(0,5)$ | $(1,1)$ | $(2,1)$ $(1,2)$ | $(3,1)$ $(1,3)$ | $(4,1)$ $(1,4)$ | $(2,2)$ | $(3,2)$ $(2,3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{T}$ | 5 | 1 | 19 | 11 | 1 | 13 | 20 | 13 | 4 | 17 | 5 | 19 |

TAB. 4.8 – Valeur de $\hat{T}$ sur les vertex $(\lambda_1, \lambda_2)$ du graphe $\mathcal{A}_5$.

Nous pouvons vérifier que les valeurs de $\hat{T}$ sur les vertex $(\lambda_1, \lambda_2)$ dont la restriction donne un vertex $1_i$ sont égales : ceci permet de définir une valeur fixe de $\hat{T}$ aux vertex du type $1_i$. Par contre, pour les vertex de type $2_i$, il n'est pas possible de définir une valeur fixe de $\hat{T}$. Ceci nous donne une caractérisation de la sous-algèbre $J$, engendrée par les éléments $1_i$.

**Algèbre d'Ocneanu** Nous conjecturons alors que l'algèbre d'Ocneanu de $\mathcal{E}_5$ est définie par :

$$Oc(\mathcal{E}_5) = \mathcal{E}_5 \otimes_J \mathcal{E}_5 = \mathcal{E}_5 \dot{\otimes} \mathcal{E}_5, \tag{4.69}$$

[6]Dans le livre [33], la matrice d'adjacence de $\mathcal{E}_5$ est incorrecte : la discussion subséquente n'est donc pas à prendre en compte.

où nous identifions les éléments $(a \dot{\otimes} b.c)$ avec $(a.b^* \dot{\otimes} c)$, pour $b \in J = \{1_i\}$. L'algèbre $Oc(\mathcal{E}_5)$ est de dimension $12 \times 2 = 24$, et une base est donnée par les éléments $a \dot{\otimes} 1_0$ et $a \dot{\otimes} 2_0$. Les identifications dans $Oc(\mathcal{E}_5)$ sont données par :

$$\begin{array}{rcccl} 1_i \dot{\otimes} 1_j & = & 1_{i+j^*} \dot{\otimes} 1_0 & = & 1_0 \dot{\otimes} 1_{i^*+j} & A \\ 2_i \dot{\otimes} 1_j & = & 2_{i+j^*} \dot{\otimes} 1_0 & = & 2_0 \dot{\otimes} 1_{i^*+j} & L \\ 1_i \dot{\otimes} 2_j = 1_i \dot{\otimes} 1_j.2_0 & = & 1_{i+j^*} \dot{\otimes} 2_0 & = & 1_0 \dot{\otimes} 2_{i^*+j} & R \\ 2_i \dot{\otimes} 2_j = 2_i \dot{\otimes} 1_j.2_0 & = & 2_{i+j^*} \dot{\otimes} 2_0 & = & 2_0 \dot{\otimes} 2_{i^*+j} & C \end{array}$$

La multiplication dans $Oc(\mathcal{E}_5)$ est définie à travers celle de $\mathcal{E}_5$ et les identifications précédentes. La sous-algèbre chirale gauche est engendrée par $L = \{a \dot{\otimes} 1_0\}$ ; la sous-algèbre chirale droite est engendrée par $R = \{1_0 \dot{\otimes} a\}$. Ces deux sous-algèbres sont de dimension 12. Leur intersection est la sous-algèbre ambichirale $A = \{1_i \dot{\otimes} 1_0 = 1_0 \dot{\otimes} 1_{i^*}\}$ de dimension 6. Le sous-espace supplémentaire est engendré par $C = \{2_i \dot{\otimes} 2_0 = 2_0 \dot{\otimes} 2_{i^*}\}$, aussi de dimension 6. Le graphe d'Ocneanu (de multiplication par les générateurs gauche $2_1 \dot{\otimes} 1_0$ et droit $1_0 \dot{\otimes} 2_1$) est illustré à la Fig. 4.24, comme deux graphes $\mathcal{E}_5$ superposés (rouge et bleu), ayant comme vertex communs les points extérieurs ambichiraux (noir), et la partie supplémentaire à l'intérieur (vert). Les lignes bleues et rouges correspondent à la multiplication par les générateurs chiraux gauche et droit, les lignes vertex proviennent de la superposition de lignes bleus et rouges. Le graphe est orienté, mais nous n'indiquons pas l'orientation des arcs pour ne pas surcharger la figure.

En utilisant les identifications dans $\mathcal{E}_5$, nous pourrions alors facilement obtenir les matrices $O_x$ $(x \in Oc(\mathcal{E}_5))$ qui codent la multiplication dans $Oc(\mathcal{E}_5)$. L'action d'un élément $x = a \dot{\otimes} 1_0$ (resp. $x = a \dot{\otimes} 2_0$) de $Oc(\mathcal{E}_5)$ sur un élément $b$ de $\mathcal{E}_5$ donne l'élément $(a.1_0.b) \in \mathcal{E}_5$ (resp. $(a.2_0.b)$). Les matrices $S_x$ qui codent cette action sont donc égales à :

$$S_x = \begin{cases} S_x = G_a & x = a \dot{\otimes} 1_0 \\ S_x = G_a.G_{2_0} & x = a \dot{\otimes} 2_0 \end{cases} \tag{4.70}$$

**Dimensions des blocs** La dimension des blocs de la digèbre $\mathcal{BE}_5$ pour ses deux lois multiplicatives est donnée par la somme des éléments des matrices $F_i$ et $S_x$. Les règles de somme linéaire et quadratique sont vérifiées :

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_5} d_i = \sum_{x \in (Oc\mathcal{E}_5)} d_x = 720 \qquad \dim(\mathcal{BE}_5) = \sum_i d_i^2 = \sum_x d_x^2 = 29376$$

Les masses quantiques de $\mathcal{E}_5$ et $\mathcal{A}_5$ sont données par : $m(\mathcal{E}_5) = 12(2+\sqrt{2})$ et $m(\mathcal{A}_5) = 48(3+2\sqrt{2})$. Définissons la masse quantique du graphe $Oc(\mathcal{E}_5)$ par $m(\mathcal{E}_5)^2/m(J)$, où $J = \{1_i\}$ et $m(J) = \sum_i qdim^2(1_i) = 6$, alors la relation de masse quantique est satisfaite :

$$m(Oc(\mathcal{E}_5)) = \frac{m(\mathcal{E}_5).m(\mathcal{E}_5)}{m(J)} = m(\mathcal{A}_5) = 48(3+2\sqrt{2})$$

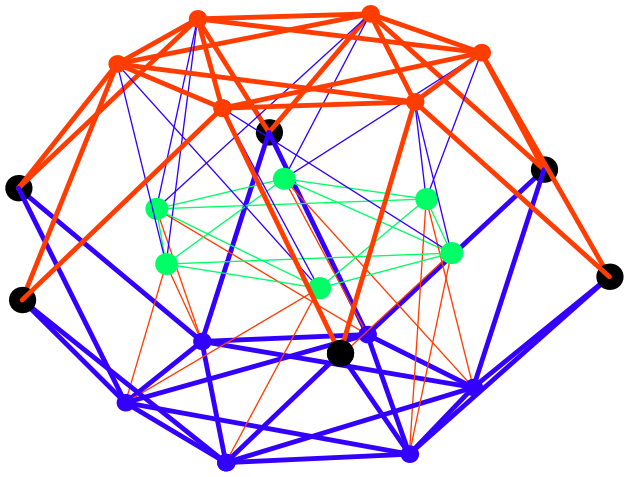


FIG. 4.24 – Graphe d'Ocneanu de $\mathcal{E}_5$

**Matrices toriques et fonctions de partition généralisées** Les matrices toriques généralisées sont définies par l'action de $\mathcal{A}_5$ sur $Oc(\mathcal{E}_5)$. Pour un élément $x \in Oc(\mathcal{E}_5)$ de la forme $a \dot{\otimes} 1_0$, l'action à droite et à gauche d'éléments $i, j \in \mathcal{A}_5$ est :

$$\begin{aligned}
i.(a \dot{\otimes} 1_0).j &= \sum_b \sum_c (F_i)_{ab} (F_j)_{1_0 c} \, (b \otimes c) \\
&= \sum_b \left[ \sum_{c \in J} (F_i)_{ab} (F_j)_{1_0 c} \, (b.c^* \dot{\otimes} 1_0) + \sum_{c \notin J} (F_i)_{ab} (F_j)_{1_0 c} \, (b.\tilde{c}^* \dot{\otimes} 2_0) \right] \\
&= \sum_b \sum_{c \in J} \sum_d (F_i)_{ab} (F_j)_{1_0 c} (G_b)_{c^* d} \, (d \dot{\otimes} 1_0) \\
&+ \sum_b \sum_{c \notin J} \sum_d (F_i)_{ab} (F_j)_{1_0 c} (G_b)_{\tilde{c}^* d} \, (d \dot{\otimes} 2_0)
\end{aligned}$$

où $\tilde{2}_i = 1_i$. Introduisons les matrices $G'_c$ définies par :

$$(G'_c)_{ab} = (G_a)_{bc} \qquad\qquad a.b = \sum_c (G_a)_{bc} \, c = \sum_c (G'_c)_{ab} \, c$$

Nous avons alors par exemple :

$$W_{a \dot{\otimes} 1_0, d \dot{\otimes} 1_0} = \sum_b \sum_{c \in J} (F_i)_{ab} (F_j)_{1_0 c} (G'_d)_{bc^*}$$

Les autres matrices $W_{xy}$ se calculent de la même manière, et les $24.24 = 576$ matrices toriques généralisées de $\mathcal{E}_5$ s'obtiennent par :

$$\boxed{W_{xy} = \begin{cases} \sum_b \sum_{c\in J} (F_i)_{ab}(F_j)_{1_0c}(G'_d)_{bc^*} & x = a \dot{\otimes} 1_0, y = d \dot{\otimes} 1_0 \\ \sum_b \sum_{c\notin J} (F_i)_{ab}(F_j)_{1_0c}(G'_d)_{b\tilde{c}^*} & x = a \dot{\otimes} 1_0, y = d \dot{\otimes} 2_0 \\ \sum_b \sum_{c\in J} (F_i)_{ab}(F_j)_{2_0c}(G'_d)_{bc^*} & x = a \dot{\otimes} 2_0, y = d \dot{\otimes} 1_0 \\ \sum_b \sum_{c\notin J} (F_i)_{ab}(F_j)_{2_0c}(G'_d)_{b\tilde{c}^*} & x = a \dot{\otimes} 2_0, y = d \dot{\otimes} 2_0 \end{cases}} \tag{4.71}$$

Pour $d = 1_0$, nous avons $(G'_d)_{bc^*} = \delta_{bc}$, alors l'invariant modulaire $\mathcal{M}$ est donné par :

$$\mathcal{M} = W_{1_0\dot{\otimes}1_0, 1_0\dot{\otimes}1_0} = \sum_{c\in J} (F_i)_{1_0c}(F_j)_{1_0c} \tag{4.72}$$

Les fonctions de partition généralisées sont données par :

$$\mathcal{Z}_{xy} = \sum_{i\in\mathcal{A}_5} \sum_{j\in\mathcal{A}_5} \chi_i(q)(W_{xy})_{ij}\overline{\chi_j}(q) \tag{4.73}$$

où les $\chi_i$ sont les caractères de l'algèbre $\widehat{su}(3)$. Introduisons les caractères étendus $\hat{\chi}_a(q)$ (un pour chaque point du graphe $\mathcal{E}_5$) :

$$\hat{\chi}_a(q) = \sum_i (F_i)_{1_0a}\ \chi_i(q) = \sum_i (E_{1_0})_{ia}\ \chi_i(q) \tag{4.74}$$

Ils sont entièrement déterminés en fonction des caractères de $\widehat{su}(3)$ par la connaissance de la matrice essentielle $E_0$ : nous les présentons dans l'Annexe **D**. Introduisons aussi les caractères étendus généralisés :

$$\hat{\chi}_{ab}(q) = \sum_c (G_a)_{bc}\hat{\chi}_c(q) = \hat{\chi}_{ba}(q) \tag{4.75}$$

qui sont des combinaisons linéaires des caractères étendus $\chi_a$. Alors, les fonctions de partition généralisées du modèle $\mathcal{E}_5$ sont données par :

$$\boxed{\mathcal{Z}_{xy} = \begin{cases} \sum_b \sum_{c\in J} \hat{\chi}_{ab}\ (G'_d)_{bc^*}\ \overline{\hat{\chi}}_{c1_0} & x = a \dot{\otimes} 1_0, y = d \dot{\otimes} 1_0 \\ \sum_b \sum_{c\notin J} \hat{\chi}_{ab}\ (G'_d)_{bc^*}\ \overline{\hat{\chi}}_{c2_0} & x = a \dot{\otimes} 1_0, y = d \dot{\otimes} 2_0 \\ \sum_b \sum_{c\in J} \hat{\chi}_{ab}\ (G'_d)_{b\tilde{c}^*}\ \overline{\hat{\chi}}_{c1_0} & x = a \dot{\otimes} 2_0, y = d \dot{\otimes} 1_0 \\ \sum_b \sum_{c\notin J} \hat{\chi}_{ab}\ (G'_d)_{b\tilde{c}^*}\ \overline{\hat{\chi}}_{c2_0} & x = a \dot{\otimes} 2_0, y = d \dot{\otimes} 2_0 \end{cases}} \tag{4.76}$$

Les fonctions de partition à une ligne de défauts $\mathcal{Z}_x = \mathcal{Z}_{x,1_0\dot{\otimes}1_0}$ sont données par :

$$\mathcal{Z}_{a\dot{\otimes}1_0} = \sum_{c\in J} \hat{\chi}_{ac}\,\overline{\hat{\chi}}_c = \sum_e \sum_{c\in J} (G_a)_{ce}\,\hat{\chi}_e\,\overline{\hat{\chi}}_c \tag{4.77}$$

$$\mathcal{Z}_{a\dot{\otimes}2_0} = \sum_{c\notin J} \hat{\chi}_{ac}\,\overline{\hat{\chi}}_c = \sum_e \sum_{c\notin J} (G_a)_{ce}\,\hat{\chi}_e\,\overline{\hat{\chi}}_c \tag{4.78}$$

Elles sont explicitement données en fonction des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ dans l'appendice. La fonction de partition invariante modulaire, correspondant à $1_0 \dot{\otimes} 1_0$, s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_5} = \sum_{c\in J} |\hat{\chi}_c|^2 &= |\chi_{(0,0)} + \chi_{(2,2)}|^2 + |\chi_{(0,2)} + \chi_{(3,2)}|^2 + |\chi_{(2,0)} + \chi_{(2,3)}|^2 \\ &+ |\chi_{(2,1)} + \chi_{(0,5)}|^2 + |\chi_{(3,0)} + \chi_{(0,3)}|^2 + |\chi_{(1,2)} + \chi_{(5,0)}|^2\end{aligned}$$

et nous pouvons vérifier qu'elle correspond à la classification de Gannon [44].

### 4.3.2 Le cas $\mathcal{E}_9$

**Graphe et matrices de fusion** Le graphe $\mathcal{E}_9$ est illustré à la Fig. 4.25, son niveau est $\ell = 9$, son altitude $\kappa = 9 + 3 = 12$ et sa norme $\beta = 1 + 2\cos(2\pi/12)$. L'identité est $0_0$ et la fondamentale $0_1$ ($0_2$ est la conjuguée de $0_1$). Ce graphe serait mieux illustré en 3 dimensions, en analogie avec un avion, avec le cockpit central formé par les vertex $0_i$ et $3_i$ , et les deux ailes formées respectivement par les vertex $1_i$ et $2_i$, pour mieux illustrer la symétrie existant entre les deux ailes (l'indice $i = (0, 1, 2)$ représente la trialité des vertex).

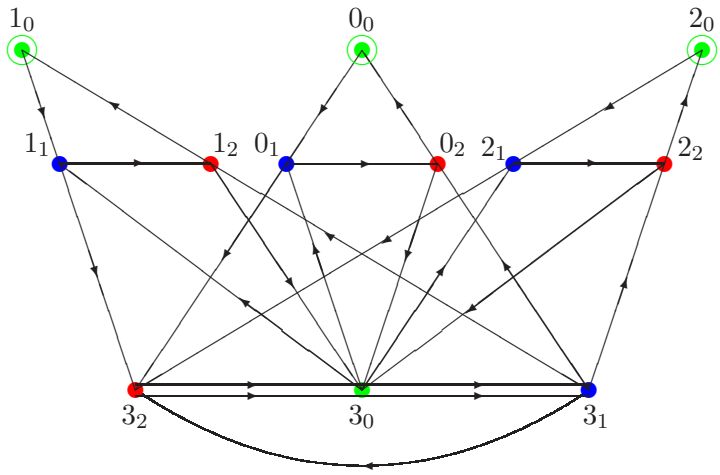



FIG. 4.25 – Diagramme de Dynkin généralisé $\mathcal{E}_9$

La conjuguaison correspond à l'axe passant par les vertex $0_0$ et $3_0$ : $0_0^* = 0_0, 1_0^* = 2_0, 3_0^* = 3_0,\ 0_1^* = 0_2, 1_1^* = 2_2, 1_2^* = 2_1, 3_1^* = 3_2$. Comme pour les cas $D_{2n}$

```
          1                  0                  0
         0 0                0 0                0 0
        0 0 0              0 0 0              0 0 0
       0 0 0 0            0 0 0 0            0 0 0 0
      0 0 0 0 0          0 0 1 0 0          0 0 1 0 0
     0 1 0 0 1 0        0 0 0 0 0 0        0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0    0 0 1 0 0 1 0 0    0 0 1 0 0 1 0 0
  0 0 0 0 1 0 0 0 0  0 0 0 0 0 0 0 0 0  0 0 0 0 0 0 0 0 0
 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

FIG. 4.26 – Induction correspondant aux vertex $0_0, 1_0$ et $2_0$ de $\mathcal{E}_9$.

de $SU(2)$, le graphe $\mathcal{E}_9$ ne détermine pas de manière unique une structure algébrique associative, dûe à la symétrie entre les deux ailes. Cependant, en *imposant* que les coefficients de structure soient des entiers non-négatifs, alors la solution est *unique*. Comme la détermination des matrices de fusion $G_{1_i}$ et $G_{2_i}$ n'est pas directe, nous donnons les matrices de fusion correspondant aux vertex $1_0$ et $2_0$, à partir desquelles les autres se calculent facilement. Dans la base $(0_0, 1_0, 2_0, 3_0; 0_1, 1_1, 2_1, 3_1; 0_2, 1_2, 2_2, 3_2)$, elles sont données par :

$$G_{1_0} = \begin{pmatrix}
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1
\end{pmatrix} \qquad G_{2_0} = \begin{pmatrix}
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1
\end{pmatrix}$$

**Induction-restriction** Le graphe de la série $\mathcal{A}$ de même norme que $\mathcal{E}_9$ est $\mathcal{A}_9$, possédant $10 \times 11/2 = 55$ vertex. L'action de $\mathcal{A}_9$ sur $\mathcal{E}_9$ est codée par les matrices $F_i$, d'où nous obtenons la matrice essentielle $E_0$, dont les colonnes correspondant aux vertex $0_0, 1_0$ et $2_0$ sont présentées à la Fig. 4.26. Nous lisons de la Fig. 4.26 l'induction $\mathcal{E}_9 \hookleftarrow \mathcal{A}_9$ :

$$\begin{aligned}
0_0 &\hookleftarrow (0,0), (4,4), (4,1), (1,4), (9,0), (0,9) \\
1_0 &\hookleftarrow (2,2), (5,2), (2,5) \\
2_0 &\hookleftarrow (2,2), (5,2), (2,5)
\end{aligned}$$

Une valeur déterminée de $\hat{T}$ peut être définie pour les vertex $0_0, 1_0$ et $2_0$ : $\hat{T}(0_0) = 9$ et $\hat{T}(1_0) = \hat{T}(2_0) = 21$, ce qui n'est pas possible pour les autres vertex de $\mathcal{E}_9$. La sous-algèbre $J$ est donc engendrée par $\{0_0, 1_0, 2_0\}$.

**Algèbre d'Ocneanu** Nous serions tentés de définir l'algèbre d'Ocneanu de $\mathcal{E}_9$ par :

$$Oc(\mathcal{E}_9) = \mathcal{E}_9 \otimes_J \mathcal{E}_9 \tag{4.79}$$

et avec cette définition, la relation de masse quantique serait satisfaite : $m(Oc(\mathcal{E}_9)) = m(\mathcal{E}_9).m(\mathcal{E}_9)/m(J) = m(\mathcal{A}_9) = 432(7+4\sqrt{3})$. Cependant, comme pour les cas $D_{2n}$ de $SU(2)$, $\hat{T}$ possède la même valeur sur les vertex symétriques $1_0$ et $2_0$ de $J$. Dans le cas $D_{2n}$, cette particularité conduit à la non-commutativité de l'algèbre $Oc(D_{2n})$. L'algèbre définie en (4.79) est commutative : nous nous atendons à ce que $Oc(\mathcal{E}_9)$ contienne aussi une composante matricielle tenant compte de la non-commutativité. Connaissant le graphe d'Ocneanu de $D_{2n}$, nous sommes parvenus à donner une réalisation de l'algèbre d'Ocneanu. Cependant, dans le cas $\mathcal{E}_9$, sans la connaissance du graphe, nos méthodes basées sur les données provenant de l'opérateur modulaire $\hat{T}$ semblent insuffisantes pour déterminer la structure complète de $Oc(\mathcal{E}_9)$, qui nous permettraient d'obtenir toutes les matrices toriques et fonctions de partition généralisées.

Notons toutefois que l'identité de $Oc(\mathcal{E}_9)$ est $0_0 \dot{\otimes} 0_0$, et nous pouvons calculer la fonction de partition associée à ce point. Définissant les caractères étendus de $\mathcal{E}_9$ suivants :

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_0 &= \chi_{0,0} + \chi_{0,9} + \chi_{9,0} + \chi_{1,4} + \chi_{4,1} + \chi_{4,4} \\ \hat{\chi}_{1_0} = \hat{\chi}_{2_0} &= \chi_{2,2} + \chi_{2,5} + \chi_{5,2} \end{aligned}$$

nous trouvons :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_9} = \mathcal{Z}_{0_0 \dot{\otimes} 0_0} = \sum_{c \in J} (F_i)_{0c} \, (F_j)_{0c} = |\hat{\chi}_{0_0}|^2 + 2\,|\hat{\chi}_{1_0}|^2$$

et cette expression correspond bien à la fonction de partition invariante modulaire de la classification de Gannon [44].

### 4.3.3 Le cas $\mathcal{E}_{21}$

**Graphe et matrices de fusion** Le graphe $\mathcal{E}_{21}$ est illustré à la Fig. 4.27. Son niveau $\ell = 21$, son altitude $\kappa = 21 + 3 = 24$ et sa norme $\beta = 1 + 2\cos(2\pi/24)$. 0 est l'identité, 1 et 2 sont les générateurs (l'orientation du graphe correspond au générateur 1). Le graphe possède 24 vertex. La conjuguaison correspond à la symétrie par rapport à l'axe horizontal passant par les vertex 0 et 21.

Le graphe $\mathcal{E}_{21}$ détermine de manière unique son algèbre de graphe. La multiplication par le générateur 1 est codée par la matrice d'adjacence du graphe : $G_1 = \mathcal{G}_{\mathcal{E}_{21}}$. La conjuguaison se traduit au niveau matriciel par la transposition : $G_{i^*} = G_i^T$. La détermination des matrices de fusion est directe jusqu'au vertex 9. Par exemple, 1.1=2+5 nous donne $G_5 = G_1.G_1 - G_2$. Le graphe est aussi symétrique par rapport au point central (centre de l'étoile) : nous appelons

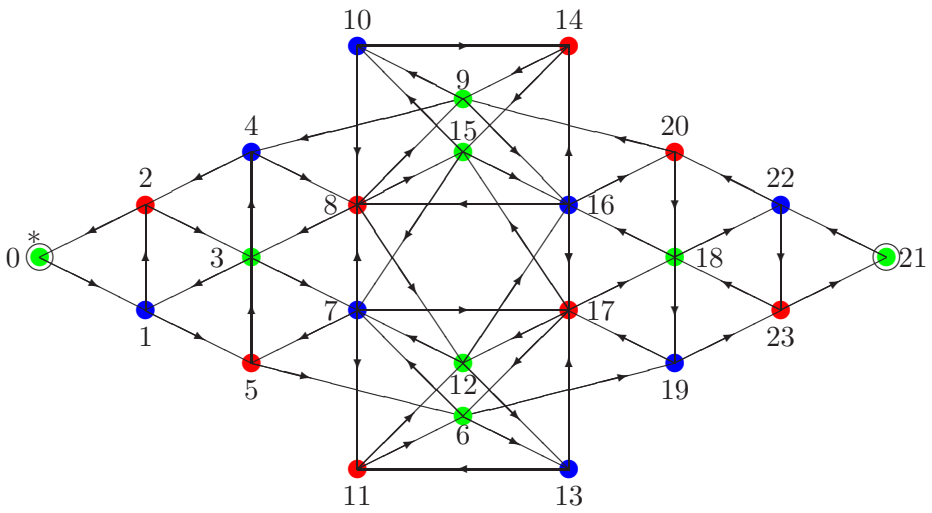



FIG. 4.27 – Le diagramme de Dynkin généralisé $\mathcal{E}_{21}$.

$R$ cette symétrie (par exemple $0^R = 21, 1^R = 22, 11^R = 14$). Au niveau de la multiplication, ceci se traduit par :

$$a.b = a^R.b^R \tag{4.80}$$

Utilisant cette symétrie, il est alors immédiat de compléter la table de multiplication et d'obtenir les autres matrices de fusion. Pour $a = 0$, l'équation (4.80) donne $b = 21.b^R$. En particulier $9 = 21.6$, ce qui nous donne $G_{21} = G_9.G_6^{-1}$. Les autres matrices $G_b$ s'obtiennent alors facilement par $G_b = G_{21}.G_{b^R}$ (par exemple $G_{22} = G_{21}.G_1, G_{23} = G_{21}.G_2$).

**Induction-restriction** Le graphe $\mathcal{A}$ de même norme que $\mathcal{E}_{21}$ est $\mathcal{A}_{21}$, qui possède $22 \times 23/2 = 253$ vertex, labellés par $(\lambda_1, \lambda_2)$. L'action de $\mathcal{A}_{21}$ sur $\mathcal{E}_{21}$ est codée par les 253 matrices $F_i = F_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ obtenues par la relation de récurrence tronquée de $su(3)$, avec $F_1 = F_{(1,0)} = G_1$. Les matrices essentielles – en particulier $E_0$ – s'obtiennent comme d'habitude : elles possèdent 253 lignes labellées par les vertex de $\mathcal{A}_{21}$ et 24 colonnes labellées par les vertex de $\mathcal{E}_{21}$, et $E_0$ nous donne l'induction-restriction entre $\mathcal{A}_{21}$ et $\mathcal{E}_{21}$. Nous illustrons à la Fig 4.28 les lignes de $E_0$ correspondant aux vertex 0 (à gauche) et 21 (à droite).

Nous pouvons vérifier que la valeur de l'opérateur modulaire $\hat{T}$ est constante pour les vertex de $\mathcal{A}_{21}$ dont la restriction donne le vertex 0 ($\hat{T} = 21$ sur éléments non-nuls de la partie gauche de la Fig. 4.28). Ceci est vrai aussi pour le vertex 21 ($\hat{T} = 39$). Par contre, $\hat{T}$ évalué sur les éléments non-nuls des 22 autres colonnes de $E_0$ n'est pas constant : la sous-algèbre $J$ est donc engendrée par les deux vertex extrémaux : $J = \{0, 21\}$.

**Algèbre d'Ocneanu** Nous définissons alors l'algèbre d'Ocneanu $Oc(\mathcal{E}_{21})$ par :

$$Oc(\mathcal{E}_{21}) = \mathcal{E}_{21} \otimes_J \mathcal{E}_{21} = \mathcal{E}_{21} \dot{\otimes} \mathcal{E}_{21} \tag{4.81}$$

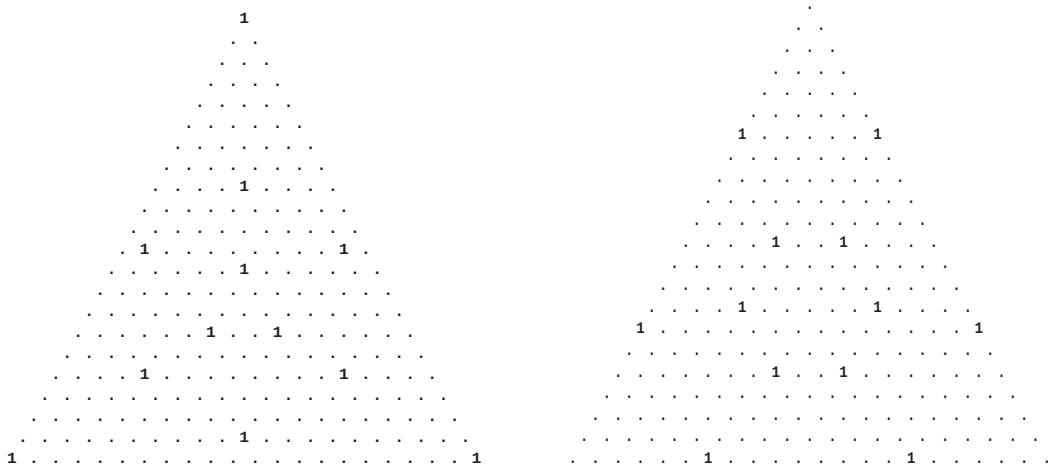


FIG. 4.28 – Induction correspondant aux vertex extrémaux 0 et 21 de $\mathcal{E}_{21}$

où nous identifions les éléments $a \dot{\otimes} b.c$ avec $a.b^* \dot{\otimes} c = a.b \dot{\otimes} c$ pour $b \in J$ $(0^* = 0, 21^* = 21)$. $J$ – ou de manière équivalente la réflexion $R$ – fournit une partition de $\mathcal{E}_{21}$ en classes d'équivalence à deux éléments $\{a, a^R\}$. Nous avons $J = \tilde{0} = \tilde{21} = \{0, 21\}$, $\tilde{1} = \tilde{22} = \{1, 22\}$, etc. Nous choisissons un représentant $\phi(a)$ dans chaque classe d'équivalence :

$$\Phi = \{\phi(b) | b \in \mathcal{E}_{21}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}. \tag{4.82}$$

Pour $b \in \Phi$, $\phi(b) = b$. Un élément $b \notin \Phi$ s'écrit $b = 21.\phi(b)$. Introduisons l'application $\rho$ :

$$\begin{aligned} \rho(b) &= 0 && \text{si } b \in \Phi \\ \rho(b) &= 21 && \text{si } b \notin \Phi \end{aligned}$$

Alors, nous avons les identifications suivantes dans l'algèbre d'Ocneanu $Oc(\mathcal{E}_{21})$ :

$$a \dot{\otimes} b = a.\rho(b) \dot{\otimes} \phi(b) \tag{4.83}$$

et une base de $Oc(\mathcal{E}_{21})$ est donnée par les $24 \times 12 = 288$ éléments linéairement indépendants :

$$a \dot{\otimes} b \qquad a \in \mathcal{E}_{21}, \qquad b \in \Phi. \tag{4.84}$$

La sous-algèbre chirale gauche est engendrée par $L = \{a \dot{\otimes} 0\}$ et la sous-algèbre chirale droite est engendrée par $R = \{0 \dot{\otimes} a = \rho(a) \dot{\otimes} \phi(a)\}$ toutes deux de dimension 24. L'intersection est la sous-algèbre ambichirale, engendrée par les deux éléments $\{0 \dot{\otimes} 0 = 21 \dot{\otimes} 21\}$ et $\{21 \dot{\otimes} 0 = 0 \dot{\otimes} 21\}$. Enfin, l'action d'un élément $x = a \dot{\otimes} b$ de $Oc(\mathcal{E}_{21})$ sur un élément $c$ de $\mathcal{E}_{21}$ donne l'élément $(a.b.c)$ de $\mathcal{E}_{21}$ ; et les matrices qui codent cette action sont égales à :

$$S_x = G_a.G_b \qquad \text{pour } x = a \dot{\otimes} b \in Oc(\mathcal{E}_{21}) \tag{4.85}$$

**Dimensions des blocs** Les dimensions $d_j$, pour $j = (\lambda_1, \lambda_2)$ des 253 blocs de la bigèbre $\mathcal{B}(\mathcal{E}_{21})$, pour la loi de composition, sont obtenues en sommant les éléments de matrice de $F_j$ : elles sont présentées à la Fig. 4.29, disposées en analogie avec le graphe $\mathcal{A}_{21}$.

```
                                                24
                                              60 60
                                           108 144 108
                                         168 252 252 168
                                       240 384 432 384 240
                                     312 528 636 636 528 312
                                   384 672 852 912 852 672 384
                                 444 804 1056 1188 1188 1056 804 444
                               492 912 1236 1440 1512 1440 1236 912 492
                             528 996 1380 1656 1800 1800 1656 1380 996 528
                          552 1056 1488 1824 2040 2112 2040 1824 1488 1056 552
                        552 1080 1548 1932 2208 2352 2352 2208 1932 1548 1080 552
                      528 1056 1548 1968 2292 2496 2568 2496 2292 1968 1548 1056 528
                    492 996 1488 1932 2292 2544 2676 2676 2544 2292 1932 1488 996 492
                  444 912 1380 1824 2208 2496 2676 2736 2676 2496 2208 1824 1380 912 444
                384 804 1236 1656 2040 2352 2568 2676 2676 2568 2352 2040 1656 1236 804 384
              312 672 1056 1440 1800 2112 2352 2496 2544 2496 2352 2112 1800 1440 1056 672 312
            240 528 852 1188 1512 1800 2040 2208 2292 2292 2208 2040 1800 1512 1188 852 528 240
          168 384 636 912 1188 1440 1656 1824 1932 1968 1932 1824 1656 1440 1188 912 636 384 168
        108 252 432 636 852 1056 1236 1380 1488 1548 1548 1488 1380 1236 1056 852 636 432 252 108
      60  144  252  384  528  672 804 912 996  1056  1080  1056  996  912  804 672 528 384 252 144 60
    24  60  108  168  240  312  384  444  492  528  552   552  528  492 444  384  312  240  168  108  60  24
```

FIG. 4.29 – Dimensions des blocs pour la loi $\circ$ de la bigèbre $\mathcal{BE}_{21}$.

Les blocs de la deuxième structure de la bigèbre (loi de convolution) sont labellés par les 288 points du graphe d'Ocneanu, et les dimensions $d_x$ du bloc $x$ sont obtenues en sommant les éléments de matrice de $S_x$, pour $x \in Oc(\mathcal{E}_{21})$. Nous trouvons (l'indice donne la multiplicité de la dimension) :

| | | |
|---|---|---|
| Ambichirale | : | $(24)_2$ |
| Gauche (pas ambichirale) | : | $(60)_4(108)_4(132)_4(144)_2(168)_2(216)_2(252)_4$ |
| Droite (pas ambichirale) | : | $(60)_4(108)_4(132)_4(144)_2(168)_2(216)_2(252)_4$ |
| Supplément | : | $(168)_8(312)_{16}(384)_{16}(420)_8(492)_8(600)_8(636)_8(744)_{32}(804)_8(936)_8$ |
| | | $(948)_8(996)_8(1080)_2(1188)_8(1236)_8(1272)_4(1440)_{16}(1512)_2(1548)_8$ |
| | | $(1656)_4(1800)_{16}(1932)_8(1968)_4(2292)_8(2568)_2(2988)_8(3480)_8$ |

Les règles de somme linéaire et quadratiques sont vérifiées :

$$\sum_{i\in\mathcal{A}_{21}} d_i = \sum_{x\in Oc(\mathcal{E}_{21})} d_x = 288\,576\,, \qquad \dim(\mathcal{BE}_{21}) = \sum_i d_i^2 = \sum_x d_x^2 = 480\,701\,952.$$

Nous vérifions aussi la relation de masse quantique entre $Oc(\mathcal{E}_{21})$ et $\mathcal{A}_{21}$ :

$$m(Oc(\mathcal{E}_{21})) = \frac{m(\mathcal{E}_{21}).m(\mathcal{E}_{21})}{m(J)} = m(\mathcal{A}_{21}) = 288\left(18 + 10\sqrt{3} + \sqrt{6(97 + 56\sqrt{3})}\right)^2.$$

**Matrices toriques et fonctions de partition généralisées** Nous calculons l'action des éléments $i, j$ de $\mathcal{A}_{21}$ sur un élément $x = a \dot{\otimes} b$ de $Oc(\mathcal{E}_{21})$ en utilisant les identifications (4.83) :

$$\begin{aligned} i.(a \dot{\otimes} b).j &= \sum_c \sum_d (F_i)_{ac}\,(F_j)_{bd}\,(c \dot{\otimes} d) \\ &= \sum_c \sum_d (F_i)_{ac}\,(F_j)_{bd}\,(c.\rho(d) \dot{\otimes} \phi(d)) \\ &= \sum_c \sum_d \sum_e (F_i)_{ac}\,(F_j)_{bd}\,(G'_e)_{c\rho(d)}\,(e \dot{\otimes} \phi(d)) \end{aligned}$$

où les matrices $G'_e$ sont définies par $(G'_e)_{ab} = (G_a)_{be}$. Séparant alors la sommation sur $d$ en une sommation sur les éléments de la même classe d'équivalence, les $288 \times 288 = 82\,944$ matrices toriques généralisées de $\mathcal{E}_{21}$ s'obtiennent sous la forme compacte suivante :

$$\boxed{W_{ab,ef} = \sum_c \sum_{d \in \tilde{f}} (F_i)_{ac} (F_j)_{bd} (G'_e)_{c\rho(d)}} \tag{4.86}$$

où la sommation sur $d$ se fait sur les éléments de la classe d'équivalence de $f$. Pour $e = 0, f = 0$, la sommation sur $d$ devient une sommation sur $J = \{0, 21\}$, alors $\rho(d) = d$ et $(G'_0)_{cd} = \delta_{c,d}$ : l'invariant modulaire $\mathcal{M}$ s'écrit donc :

$$\mathcal{M} = W_{00,00} = \sum_{c \in J} (F_i)_{0c}\,(F_j)_{0c}$$

Les fonctions de partition généralisées s'obtiennent alors par :

$$\mathcal{Z}_{ab,ef} = \sum_{i \in \mathcal{A}_{21}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{21}} \chi_i (W_{ab,ef})_{ij} \overline{\chi}_j = \sum_{c \in \mathcal{E}_{21}} \sum_{d \in \tilde{f}} \hat{\chi}_{ac}\,(G'_e)_{c\rho(d)}\,\overline{\hat{\chi}}_{bd} \tag{4.87}$$

où les $\chi_i$ sont les caractères de l'algèbre $\widehat{su}(3)$ et les $\hat{\chi}_{ab}$ sont les caractères étendus généralisés de $\mathcal{E}_{21}$, combinaisons linéaires des caractères étendus $\hat{\chi}_a$ :

$$\hat{\chi}_{ab} = \sum_{i \in \mathcal{A}_{21}} (F_i)_{ab}\,\chi_i = \sum_c (G_a)_{bc}\,\hat{\chi}_c \qquad \hat{\chi}_c = \sum_i (F_i)_{a0}\,\chi_i \tag{4.88}$$

Les 288 fonctions de partition à une ligne de défaut $\mathcal{Z}_{ab} = \mathcal{Z}_{ab,00}$ s'écrivent :

$$\mathcal{Z}_{ab} = \sum_{c \in J} \hat{\chi}_{ac}\,\overline{\hat{\chi}}_{bc} \tag{4.89}$$

Les caractères étendus $\hat{\chi}_c$ pour $c \in J$ sont :

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_0 &= \chi_{(0,0)} + \chi_{(4,4)} + \chi_{(6,6)} + \chi_{(10,10)} + \chi_{(0,21)} + \chi_{(21,0)} + \chi_{(1,10)} + \chi_{(10,1)} + \chi_{(4,13)} + \chi_{(13,4)} + \chi_{(6,9)} + \chi_{(9,6)} \\ \hat{\chi}_{21} &= \chi_{(0,6)} + \chi_{(6,0)} + \chi_{(0,15)} + \chi_{(15,0)} + \chi_{(4,7)} + \chi_{(7,4)} + \chi_{(4,10)} + \chi_{(10,4)} + \chi_{(6,15)} + \chi_{(15,6)} + \chi_{(7,10)} + \chi_{(10,7)} \end{aligned}$$

et la fonction de partition de $\mathcal{E}_{21}$ écrite en fonction des caractères de $\widehat{su}(3)$ correspond à l'expression obtenues dans la classification de Gannon [44] :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_{21}} = \sum_{c \in J} |\hat{\chi}_c|^2 = |\hat{\chi}_0|^2 + |\hat{\chi}_{21}|^2 \tag{4.90}$$

# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons présenté les profondes relations qui existent entre les classifications des théories conformes à deux dimensions dans divers environnements et les graphes codant les différentes structures d'une algèbre de Hopf faible : celle-ci apparaît ainsi comme la symétrie quantique naturelle associée à ces modèles conformes.

Cette algèbre de Hopf faible a été introduite par A. Ocneanu dans [66, 67]. Plus précisemment, Ocneanu associe à chaque diagramme de Dynkin $G$ de type $ADE$ une *digèbre* $\mathcal{B}(G)$ : elle est constituée de l'espace vectoriel des endomorphismes gradués de chemins essentiels sur $G$ muni de deux lois multiplicatives $\circ$ et $\odot$ donnant lieu à deux autres graphes, appelés respectivement $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$. Ces derniers possèdent toujours une structure multiplicative (algèbre de graphe) : nous obtenons deux algèbres notées par le même symbole que le graphe lui-même. L'algèbre $Oc(G)$ est aussi appelée l'algèbre des symétries quantiques de $G$. Il est assez remarquable que ces trois graphes ($G$, $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$) avec leur structure algébrique codent les informations sur les différents coefficients permettant de définir les fonctions de partition du modèle conforme $\widehat{su}(2)$ associé au graphe $G$.

Le travail central de cette thèse a été la présentation d'une réalisation de l'algèbre $Oc(G)$ construite comme un certain quotient du carré tensoriel de l'algèbre du graphe $G$. Cette réalisation permet d'obtenir un algorithme très simple pour le calcul des divers coefficients définissant les fonctions de partition du modèle conforme $\widehat{su}(2)$ associé au graphe $G$ [25]. Par la suite, nous avons observé que l'algèbre d'Ocneanu peut – dans la plupart des cas – être reconstruite d'après les propriétés modulaires du graphe $G$. Nous avons alors utilisé cette observation pour étudier plusieurs exemples appartenant au modèle conforme $\widehat{su}(3)$ et obtenir ainsi les expressions des fonctions de partition associées [26].

Les modèles minimaux ("usuels") – construits par des irreps de l'algèbre de Virasoro – sont reliés aux modèles $\widehat{su}(2)$. L'algèbre de Virasoro est un cas particulier d'algèbre $\mathcal{W}_n$ : $Vir = \mathcal{W}_2$. Les modèles $\mathcal{W}_n$-minimaux, construits par des irreps de l'algèbre $\mathcal{W}_n$ généralisant l'algèbre de Virasoro, sont eux reliés aux modèles $\widehat{su}(n)$. Les expressions des fonctions de partition associées aux modèles $\widehat{su}(3)$ obtenues dans le chapitre **4** permettent ainsi l'étude des modèles $\widehat{W}_3$-minimaux (voir [28]).

Les graphes d'Ocneanu ont été conceptuellement définis par Ocneanu comme provenant de la diagonalisation de $\mathcal{B}(G)$ pour la loi $\odot$, mais il est intéressant de noter qu'ils n'ont – à notre connaissance – jamais été obtenus de cette manière ... Un autre axe de recherche de cette thèse est l'étude approfondie des structures de la digèbre $\mathcal{B}(G)$ : nous voulons d'une part vérifier que $\mathcal{B}(G)$ satisfait *de facto* les divers axiomes définissant une algèbre de Hopf faible, et d'autre part construire explicitement le graphe d'Ocneanu à partir de la diagonalisation de $\mathcal{B}(G)$. Les premiers résultats obtenus se limitent pour l'instant aux graphes de la série $A$ [27].

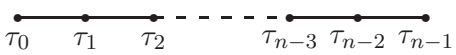
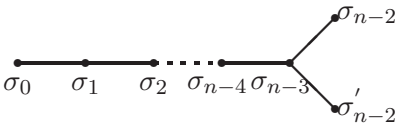
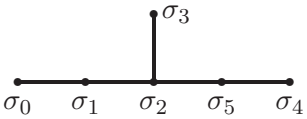
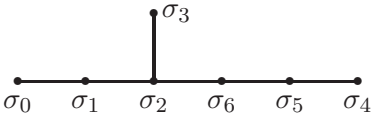
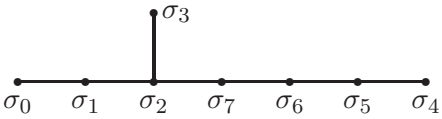
Les relations entre les classifications des modèles conformes $\widehat{su}(2)$ et les graphes correspondants semblent de nos jours bien connues. Cependant, les généralisations de diverses structures à des modèles $\widehat{su}(n)$ restent encore à être formulées de manière précise. Nous avons grand espoir qu'une meilleure compréhension de ces généralisations fassent apparaître de nouvelles structures mathématiques, permettant à leur tout une meilleure compréhension des modèles physiques sous-jascents.

Pour conclure, citons divers problèmes ouverts qui devraient être mieux compris :

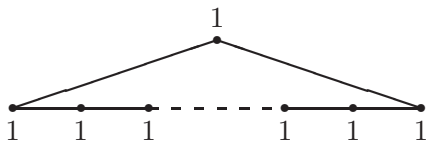
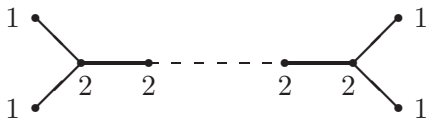
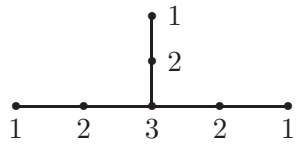
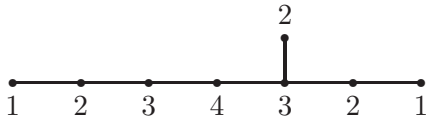
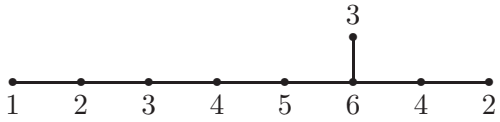
- Peut-on définir une matrice R pour l'algèbre de Hopf faible et obtenir une équation de Yang-Baxter (généralisée) ? Quels seraient les modèles intégrables associés ?
- Trouver une définition simple et directe – valable dans tous les cas – pour le produit de convolution $\odot$. Peut-on obtenir le produit de convolution à partir du carré tensoriel d'un produit $\star$ défini directement sur l'espace des chemins essentiels ?
- Quelle est l'origine de la règle de somme linéaire et de la règle de masse quantique ?
- La généralisation des diagrammes $ADE$ pour les cas $su(3)$ et $su(4)$ est connue, mais une définition rigoureuse des "diagrammes généralisés de Coxeter-Dynkin" devrait être formalisée (et publiée).
- La structure algébrique associée à un diagramme $ADE$ est l'algèbre de Lie. Quelles seraient les structures algébriques (généralisant la notion d'algèbre de Lie) associées à des diagrammes généralisés ?
- Nous avons défini les fonctions de partition pour les modèles affines définis sur le tore, mais une généralisation dans diverses directions est envisageable. En particulier, que se passe-t-il pour des systèmes définis sur des surfaces de genre plus élevé que le tore ?

# Annexe A

# Diagrammes de Dynkin $ADE$ et $ADE^{(1)}$

| | diagramme | $\kappa$ | exposants |
|---|---|---|---|
| $A_n$ |   | $n+1$ | $1, 2, \ldots, n$ |
| $D_n$ |   | $2(n-1)$ | $1, 3, \ldots, 2n-5, 2n-3; n-1$ |
| $E_6$ |   | 12 | $1, 4, 5, 7, 8, 11$ |
| $E_7$ |   | 18 | $1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$ |
| $E_8$ |   | 30 | $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ |

Tab. A.1 – Diagrammes de Dynkin $ADE$, leur nombre de Coxeter $\kappa$ et leurs exposants de Coxeter $m^C$

| | diagramme | $\Gamma$ |
|---|---|---|
| $A_n^{(1)}$ |   | $\mathcal{C}_n$ |
| $D_n^{(1)}$ |   | $\mathcal{D}_{n-2}$ |
| $E_6^{(1)}$ |   | $\mathcal{T}$ |
| $E_7^{(1)}$ |   | $\mathcal{O}$ |
| $E_8^{(1)}$ |   | $\mathcal{I}$ |

TAB. A.2 – Diagrammes de Dynkin $ADE^{(1)}$ et le sous-groupe $\Gamma \subset SU(2)$ correspondant.

# Annexe B

# Correspondance de McKay classique et quantique

## B.1 Correspondance de McKay classique et graphes $ADE^{(1)}$

### B.1.1 Le groupe $SU(2)$ classique

Considérons le groupe $SU(2)$ et ses représentations irréductibles[1]. Ce groupe possède des irreps de dimension $n$, notées $(n)$, pour tout entier positif $n \geq 1$. L'irrep (1) est l'identité, l'irrep (2) est la fondamentale. Nous pouvons former le produit tensoriel $(i) \otimes (j)$, et décomposer le résultat en somme directe d'irreps $(k)$ :

$$(i) \otimes (j) = \bigoplus_k \mathcal{N}_{ij}^k \, (k), \qquad \mathcal{N}_{ij}^k \in \mathbb{N}, \tag{B.1}$$

où $\mathcal{N}_{ij}^k$ est la multiplicité de $(k)$ dans $(i) \otimes (j)$. Un résultat bien connu est la décomposition du produit tensoriel d'une irrep $(n)$ par la fondamentale :

$$(2) \otimes (n) = (n-1) \oplus (n+1). \tag{B.2}$$

**Remarque 6** *En adoptant le langage de spin pour des particules de type fermionique, bien connu des physiciens, l'irrep de spin $j$, $j$ demi-entier, est de dimension $n = 2j+1$. La représentation fondamentale, de dimension deux, correspond au spin $1/2$. Alors, la formule (B.2) correspond simplement au couplage entre une particule de spin $1/2$ et une particule de spin $j$, qui donne la somme de particules de spins $(j-1/2)$ et $(j+1/2)$.*

Tout irrep peut être obtenue à partir d'une certaine puissance du produit tensoriel de la représentation fondamentale. En effet, en écrivant :

$$(2)^{\otimes n} = \underbrace{(2) \otimes (2) \otimes \cdots \otimes (2)}_{n},$$

[1]Nous écrirons par la suite "irrep" comme un abrégé "franglais" pour représentation irréductible.

et utilisant (B.2), nous avons :

$$\begin{aligned}
(2)^{\otimes^2} &= (1) \oplus \underline{(3)} \\
(2)^{\otimes^3} &= (2) \oplus (2) \oplus \underline{(4)} \\
(2)^{\otimes^4} &= (1) \oplus (1) \oplus (3) \oplus (3) \oplus (3) \oplus \underline{(5)}
\end{aligned}$$

En utilisant l'associativité de $\otimes$ et en effectuant les calculs dans l'espace virtuel des représentations (c.à.d. en admettant des signes négatifs dans l'étape intermédiaire des calculs), nous pouvons, à partir de la donnée de (B.2), calculer la décomposition de $(i) \otimes (j)$. Par exemple, $(2)^{\otimes^2} = (1) \oplus (3)$, donc, en écrivant $(3) = (2)^{\otimes^2} - (1)$, nous pouvons calculer la décomposition de $(3) \otimes (n)$, pour tout irrep $(n)$. Un exemple :

$$\begin{aligned}
(3) \otimes (3) &= \Big((2)^{\otimes^2} - (1)\Big) \otimes (3) \\
&= (2) \otimes (2) \otimes (3) - (1) \otimes (3) \\
&= (1) \oplus (3) \oplus (3) \oplus (5) - (3) \\
&= (1) \oplus (3) \oplus (5)
\end{aligned}$$

À la fin du calcul, nous retrouvons seulement des signes $\oplus$. Par la même méthode, nous pouvons ainsi calculer toute décomposition $(i) \otimes (j)$, et obtenir ainsi les coefficients entiers non-négatifs $\mathcal{N}_{ij}^k$ de (B.1).

### B.1.2 Formulation matricielle et graphe $A_\infty$

Le résultat de la décomposition (B.2) peut être codé par le graphe $A_\infty$ de $SU(2)$ :

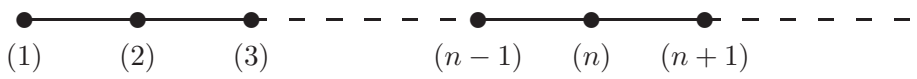



Fig. B.1 – Graphe $A_\infty$ de $SU(2)$.

Les vertex du graphe $A_\infty$ sont labellés par les irreps $(i)$ de $SU(2)$, et $(2) \otimes (i)$ se décompose en la somme directe de irreps $(j)$, tel que $(j)$ soit voisin de $(i)$ sur le graphe (voisin dans le sens qu'un arc relie $(i)$ à $(j)$)[2]. Soit $\mathcal{G}$ la matrice d'adjacence du graphe $A_\infty$, c.à.d. une matrice carrée infinie telle que $(\mathcal{G})_{ij} = 1$ si $(i)$ et $(j)$ sont voisins sur le graphe, et $(\mathcal{G})_{ij} = 0$ sinon. Alors, la formule (B.2) s'écrit aussi :

$$(2) \otimes (i) = \bigoplus_j (\mathcal{G})_{ij}\ (j). \tag{B.3}$$

[2]Il y a un arc reliant $(n)$ à $(n-1)$ car $(2) \otimes (n) = (n-1) \oplus (n+1)$, mais il y a aussi l'arc inverse reliant $(n-1)$ à $(n)$ car $(2) \otimes (n-1) = (n-2) \oplus (n)$ : le graphe $A_\infty$ est donc bi-orienté.

D'une manière générale, nous pouvons coder matriciellement le résultat de la décomposition (B.1) : pour chaque irrep $(i)$, introduisons une matrice carrée infinie $N_i$ telle que $(N_i)_{jk} = \mathcal{N}_{ij}^k$. Alors, (B.1) s'écrit aussi :

$$(i) \otimes (j) = \bigoplus_k (N_i)_{jk}\ (k). \tag{B.4}$$

Nous avons $N_1 = \mathbb{1}$ et $N_2 = \mathcal{G}$. Les autres matrices $N_i$ s'obtiennent à partir de la connaissance de $N_1$ et $N_2$ par la **formule de récurrence pour** $SU(2)$ :

$$N_i = N_2.N_{i-1} - N_{i-2}, \qquad \forall i \geq 3. \tag{B.5}$$

**Conclusion 4** *Le graphe $A_\infty$ (ou sa matrice d'adjacence $\mathcal{G} = N_2$) code la décomposition de $(2) \otimes (i)$ en somme directe de irreps $(j)$. À partir de ces données, nous sommes en mesure de calculer facilement toutes les décompositions $(i) \otimes (j)$.*

### B.1.3 Sous-groupes $\Gamma$ de $SU(2)$ et graphes $ADE^{(1)}$

Les sous-groupes finis $\Gamma$ de $SU(2)$ ont été classifiés il y a plus d'un siècle[3] par Felix Klein [55]. Ils forment deux séries infinies : $\mathcal{C}_n$ (le groupe cyclique d'ordre $n$) et $\mathcal{D}_n$ (le groupe binaire dihédrique d'ordre $4n$) ; et trois cas exceptionnels : $\mathcal{T}, \mathcal{O}$ et $\mathcal{I}$ (respectivement le groupe binaire tétrahédrique, octahédrique et icosahédrique, d'ordre 24, 48 et 120). L'image $(T, O, I) \subset SO(3, \mathbb{R})$ de ces trois groupes exceptionnels sont les groupes de symétries des cinq solides platoniques ($T$ pour le tétrahèdre, $O$ pour l'octahèdre et son dual le cube, et $I$ pour l'icosahèdre et son dual le dodécahèdre). De même, l'image $(C_n, D_n) \subset SO(3, \mathbb{R})$ des groupes cycliques et binaires dihédriques peuvent être vus comme les groupes de symétrie respectivement d'une pyramide et d'un prisme, à $n$ faces. Pour ces sous-groupes finis $\Gamma \subset SU(2)$, nous pouvons aussi considérer leurs représentations irréductibles, qui forment maintenant un ensemble fini, noté $Irr(\Gamma)$, et calculer la décomposition de tout produit tensoriel :

$$(\sigma_i) \otimes (\sigma_j) = \bigoplus_k \mathcal{N}_{ij}^k\ (\sigma_k), \qquad \forall (\sigma_i), (\sigma_j), (\sigma_k) \in Irr(\Gamma). \tag{B.6}$$

De manière parallèle au cas $SU(2)$, formons le produit tensoriel $(2) \otimes (\sigma_i)$, où $(2)$ est la représentation fondamentale induite de $SU(2)$[4] et décomposons le résultat en somme directe de $(\sigma_j)$, où $(\sigma_i)$ et $(\sigma_j) \in Irr(\Gamma)$. Le résultat suivant est dû à J. McKay [60] et est connu sous le nom de **correspondance de McKay** :

**Théorème 10 (McKay)** *Pour tout sous-groupe fini $\Gamma \subset SU(2)$, la décomposition en irreps $(\sigma_j)$ du produit tensoriel $(2) \otimes (\sigma_i)$, où $(2)$ est la représentation fondamentale induite de $SU(2)$ et $(\sigma_i), (\sigma_j) \in Irr(\Gamma)$, est donnée par :*

$$(2) \otimes (\sigma_i) = \bigoplus_j (\mathcal{G}_\Gamma)_{ij}\ (\sigma_j), \tag{B.7}$$

[3] D'une certaine façon cette classification a été réalisée à l'époque de Platon, il y a donc plus de 2000 ans !

[4] $(2) \in Irr(\Gamma)$ pour tous les sous-groupes finis de $SU(2)$, à l'exception de $\mathcal{C}_n$, pour lequel $(2)$ est réductible.

*où $\mathcal{G}_\Gamma$ est la matrice d'adjacence*[5] *d'un diagramme de Dynkin affine $ADE^{(1)}$.*

Les diagrammes $ADE^{(1)}$ sont illustrés dans l'Annexe **A**. Les vertex de ces graphes sont labellés par les irreps $(\sigma_i)$ du sous-groupe fini $\Gamma \subset SU(2)$ correspondant. Pour tout $\Gamma$, la plus grande valeur propre de sa matrice d'adjacence $\mathcal{G}_\Gamma$, notée $\beta$, est égale à 2. Elle correspond à la dimension de la représentation fondamentale $(\sigma_2)$. Le vecteur-propre normalisé correspondant à $\beta$ est appelé vecteur-propre de Perron-Frobenius, noté $P$. La normalisation est telle $P(1) = 1 = \dim(\sigma_1)$, et les composantes de ce vecteur donnent les dimensions des irreps correspondantes : $P(i) = \dim(\sigma_i)$.

Nous connaissons la décomposition de $(\sigma_1) \otimes (\sigma_i)$ (l'identité) et de $(\sigma_2) \otimes (\sigma_i)$ (par la donnée du graphe ou de (B.7)). En utilisant l'associativité de $\otimes$, par des calculs similaires à ceux effectués pour le cas $SU(2)$, nous pouvons alors calculer toute décomposition $(\sigma_i) \otimes (\sigma_j)$ (il faut parfois utiliser des arguments de symétrie pour compléter la table de tensorialisation : voir l'exemple du cas $E_7^{(1)}$). Nous obtenons ainsi les entiers non-négatifs $\mathcal{N}_{ij}^k$ de (B.6).

Soit $r$ le nombre de irreps de $\Gamma$ : à chaque irrep $\sigma_i$ nous lui associons une matrice $r \times r$ $N_i$, telle que $(N_i)_{jk} = \mathcal{N}_{ij}^k$. Nous avons $N_1 = \mathbb{1}_{r\times r}$ et $N_2 = \mathcal{G}_\Gamma$. Ayant calculé la décomposition de $(\sigma_i) \otimes (\sigma_j)$, nous obtenons directement les autres matrices $N_i$. Ces $r$ matrices $N_i$ ainsi obtenues commutent toutes entre-elles : elles peuvent donc être simultanément diagonalisées, à l'aide d'une matrice que nous appelerons $S$. Un fait remarquable est que cette matrice $S$, proprement ordonnée, représente la table des caractères de $\Gamma$ [61, 57]. Nous l'obtenons sans faire appel à la connaissance des classes de conjuguaison ni à la donnée explicite des caractères : ce résultat est connu sous le nom de **correspondance de McKay généralisée**.

**Conclusion 5** *Il existe une correspondance entre les irreps $(\sigma_i)$ des sous-groupes finis $\Gamma$ de $SU(2)$ et les vertex des graphes $ADE^{(1)}$. Ces graphes codent la décomposition du produit tensoriel $(2) \otimes (\sigma_i)$, où $(2)$ est la représentation fondamentale induite de $SU(2)$. La simple donnée du graphe nous permet alors de déterminer les dimensions des représentations (à travers les composantes du vecteur de Perron-Frobenius), de reconstruire la table de tensorialisation $(\sigma_i) \otimes (\sigma_j)$, et d'obtenir la table des caractères de $\Gamma$.*

### B.1.4 Exemple : le groupe binaire octahédrique $\mathcal{O}$ et le graphe $E_7^{(1)}$

L'exemple du groupe binaire tétrahédrique $\mathcal{T}$ est largement traité dans [20] (voir aussi [21]) ; nous traiterons ici brièvement l'exemple du groupe binaire octahédrique $\mathcal{O}$. Considérons le groupe de symétrie $O$ du cube, ou de son dual l'octahèdre. $O$ est isomorphe[6]

[5] Il faut choisir un ordre pour représenter la base des irreps $\sigma_i$ : nous prendrons toujours comme premier élément la représentation identité $(\sigma_1)$ et comme deuxième élément la représentation fondamentale $(\sigma_2)$.

[6] Attention, nous parlons ici du groupe $O$ défini comme sous-groupe de $SO(3)$ (toutes les transformations ont un déterminant égal à 1), et non pas du groupe complet des symétries du cube (ou de l'octahèdre), qui est un sous-groupe de $O(3)$, de dimension 48 (on inclut les réflexions). Le groupe binaire octahédrique $\mathcal{O}$ que nous considérons ici est également d'ordre 48, mais il n'est pas isomorphe au précédent ; de plus, c'est un sous-groupe de $SU(2)$, non de $O(3)$.

au groupe symétrique de permutations à 4 éléments, $S_4$, d'ordre $4! = 24$. La théorie des représentations des groupes symétriques de permutation est bien connue : $S_4$ possède 5 irreps notées $(\sigma_1, \sigma_{1'}, \sigma_{2''}, \sigma_3, \sigma_{3'})$, respectivement de dimension : (1,1,2,3,3). Nous avons bien sûr : $Ordre(O) = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$. Comme sous-groupe de $SO(3)$, $O$ possède 5 irreps : ce sont aussi des irreps de sa pré-image dans $SU(2)$, le groupe binaire octahédrique $\mathcal{O}$. Mais celui-ci en possède trois autres, de dimension 2, 4 et 2. En tout, $\mathcal{O}$ possède 8 irreps, notées $\{\sigma_1, \sigma_{1'}, \sigma_2 = f, \sigma_{2'}, \sigma_{2''}, \sigma_3, \sigma_{3'}, \sigma_4\}$. On vérifie que $Ordre(\mathcal{O}) = (1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2) + (2^2 + 4^2 + 2^2) = 48$. Formons le graphe ayant comme vertex les irreps $\sigma_i \in Irr(\mathcal{O})$, et tel que $\sigma_j$ soit voisin de $\sigma_i$ si $\sigma_j$ apparait dans la décomposition de $f \otimes \sigma_i$. Nous obtenons alors le graphe suivant, qui est le diagramme de Dynkin affin $E_7^{(1)}$ (correspondance de McKay) :

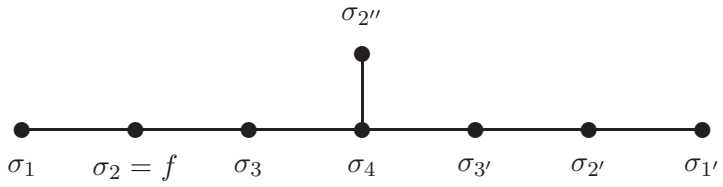



FIG. B.2 – Graphe $E_7^{(1)}$

Par exemple, du graphe, nous lisons : $f \otimes \sigma_4 = \sigma_3 \oplus \sigma_{3'} \oplus \sigma_{2''}$, $f \otimes \sigma_{2''} = \sigma_4$. Choisissons comme ordre des irreps : $\{\sigma_1, \sigma_{1'}, \sigma_2, \sigma_{2'}, \sigma_{2''}, \sigma_3, \sigma_{3'}, \sigma_4\}$, alors la matrice d'adjacence du graphe dans cette base s'écrit :

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . \end{pmatrix}$$

La norme du graphe est définie comme étant égale à sa plus grande valeur propre, et vaut $\beta = 2$. Les composantes du vecteur-propre correspondant (Perron-Frobenius), normalisées telles que $P(\sigma_1) = 1$ sont :

$$P = (1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4)$$

Nous reconnaissons les dimensions des irreps. Par des calculs similaires à celui effectué pour le cas $SU(2)$, nous pouvons remplir la table de tensorialisation des irreps. Mais il faut aussi utiliser la symétrie $\mathbb{Z}_2$ du graphe par rapport au vertex $\sigma_4$ pour compléter la table. Appelons $\theta$ la réflexion par rapport au vertex $\sigma_4$. Alors, $\theta(\sigma_i) = \sigma_{i'}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$, et $\theta(\sigma_4) = \sigma_4$,

$\theta(\sigma_{2''}) = \sigma_{2''}$, et nous avons :

$$\sigma_i \otimes \theta(\sigma_j) = \theta(\sigma_i) \otimes \sigma_j, \qquad \sigma_i \otimes \sigma_j = \theta(\sigma_i) \otimes \theta(\sigma_j).$$

Nous pouvons alors compléter la table de tensorialisation, présentée dans la Tab.B.1 (pour une meilleure visualisation, les irreps $\sigma_i$ sont indiquées simplement par leur indice $i$, et $\oplus$ est remplacé par le signe $+$) :

| $\otimes$ | $1$ | $1'$ | $2''$ | $3$ | $3'$ | $2$ | $2'$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $1'$ | $2''$ | $3$ | $3'$ | $2$ | $2'$ | $4$ |
| $1'$ | $1'$ | $1$ | $2''$ | $3'$ | $3$ | $2'$ | $2$ | $4$ |
| $2''$ | $2''$ | $2''$ | $1+1'+2''$ | $3+3'$ | $3+3'$ | $4$ | $4$ | $2+2'+4$ |
| $3$ | $3$ | $3'$ | $3+3'$ | $1+2''+3+3'$ | $1'+2''+3+3'$ | $2+4$ | $2'+4$ | $2+2'+4+4$ |
| $3'$ | $3'$ | $3$ | $3+3'$ | $1'+2''+3+3'$ | $1+2''+3+3'$ | $2'+4$ | $2+4$ | $2+2'+4+4$ |
| $2$ | $2$ | $2'$ | $4$ | $2+4$ | $2'+4$ | $1+3$ | $1'+3'$ | $2''+3+3'$ |
| $2'$ | $2'$ | $2$ | $4$ | $2'+4$ | $2+4$ | $1'+3'$ | $1+3$ | $2''+3+3'$ |
| $4$ | $4$ | $4$ | $2+2'+4$ | $2+2'+4+4$ | $2+2'+4+4$ | $2''+3+3'$ | $2''+3+3'$ | $1+1'+2''+3+3+3'+3'$ |

TAB. B.1 – Décomposition du produit tensoriel $\sigma_i \otimes \sigma_j$ pour les irreps $\sigma$ du groupe binaire octahédrique $\mathcal{O}$.

Dans cette table, nous avons visuellement séparé des trois autres les irreps $(\sigma_1, \sigma_{1'}, \sigma_{2''}, \sigma_3, \sigma_{3'})$ qui sont aussi des irreps de $O$, et qui se décomposent entre-elles. À partir de cette table, nous obtenons immédiatement les huit matrices $8 \times 8$ $N_i$ qui codent la décomposition dans $\mathcal{O}$ (et aussi les cinq matrices $5 \times 5$ codant la décomposition dans $O$). Proprement ordonnées, les matrices $S(O)$ et $S(\mathcal{O})$ qui diagonalisent ces matrices sont données par :

$$S(O) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S(\mathcal{O}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 3 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons vérifier que $S(O)$ représente la table des caractères de $O$ [81] et $S(\mathcal{O})$ représente celle de $\mathcal{O}$ [41, 61]. Nous les obtenons facilement sans faire appel aux classes de conjuguaison ou à la donnée explicite des caractères.

### B.1.5 $\widehat{\Gamma}$ comme module sur $\widehat{SU}(2)$ et règles de branchement $SU(2) \hookrightarrow \Gamma$

Soient $(i)$ une irrep de $SU(2)$ et $(\sigma_j)$ une irrep de $\Gamma \subset SU(2)$. Nous avons vu que $(i)$ peut être obtenue à partir de l'irrep fondamentale $(2)$ de $SU(2)$. D'autre part, le graphe $ADE^{(1)}$

correspondant à $\Gamma$ code la décomposition de $(2)\otimes(\sigma_i)$ en irreps $(\sigma_j)$ de $\Gamma$. Nous sommes donc en mesure de calculer facilement toute décomposition de la forme :

$$(i)\otimes(\sigma_j)=\bigoplus_k \mathcal{F}_{ij}^k\,(\sigma_k), \tag{B.8}$$

où $\mathcal{F}_{ij}^k$ est la multiplicité de $(\sigma_k)$ dans $(i)\otimes(\sigma_j)$. En d'autres termes, nous dirons que les irreps $(\sigma_i)$ de $\Gamma$ forment un module sous l'action (B.8) des irreps $(i)$ de $SU(2)$.

Nous savons tensorialiser les irreps $(\sigma_i)$ de $\Gamma$ entre-elles : l'action (B.8) de $SU(2)$ sur $\Gamma$ peut aussi être obtenue par les règles de branchement $SU(2)\hookrightarrow\Gamma$. La tensorialisation par (1) et (2) est immédiate et nous donne les règles de branchement $(1)\hookrightarrow(\sigma_1)$ et $(2)\hookrightarrow(\sigma_2)$. Pour obtenir les autres, il suffit de comparer les puissances des représentations fondamentales (2) et $(\sigma_2)$. Prenons l'exemple de $E_7^{(1)}$. Nous avons :

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
(2)^{\otimes 2} & = & (1)\oplus(3) & (\sigma_2)^{\otimes 2} & = & (\sigma_1)\oplus(\sigma_3)\\
(2)^{\otimes 3} & = & (2)\oplus(2)\oplus(4) & (\sigma_2)^{\otimes 3} & = & (\sigma_2)\oplus(\sigma_2)\oplus(\sigma_4)\\
(2)^{\otimes 4} & = & (1)\oplus(1)\oplus(3)\oplus(3)\oplus(3)\oplus(5) & (\sigma_2)^{\otimes 4} & = & (\sigma 1)\oplus(\sigma_1)\oplus(\sigma_3)\oplus(\sigma_3)\oplus(\sigma_{2''})\oplus(\sigma_{3'})
\end{array}$$

Nous en déduisons les règles de branchement suivantes :

$$(3)\hookrightarrow(\sigma_3),\qquad (4)\hookrightarrow(\sigma_4),\qquad (5)\hookrightarrow(\sigma_{2''})\oplus(\sigma_{3'}).$$

À partir de la connaissance des règles de branchement $SU(2)\hookrightarrow\Gamma$ et de la tensorialisation des irreps de $\Gamma$, nous pouvons alors calculer toute décomposition $(i)\otimes(\sigma_k)$ en irreps $\sigma_l$. Si $(i)\hookrightarrow\oplus_j(\sigma_j)$, alors $(i)\otimes(\sigma_k)=\oplus_j(\sigma_j)\otimes(\sigma_k)$.

**Conclusion 6** *Soient $(i)$ une irrep de $SU(2)$ et $(\sigma_j)$ une irrep de $\Gamma\subset SU(2)$. Les règles de branchement $SU(2)\hookrightarrow\Gamma$ nous permettent de calculer la décomposition de $(i)\otimes(\sigma_j)$ en irreps $\sigma_k$. Nous dirons par la suite que les irreps de $\Gamma$ forment un module sous l'action des irreps de $SU(2)$, ou plus simplement que $\widehat{\Gamma}$ est un module sur $\widehat{SU}(2)$.*

## B.2 Correspondance de McKay quantique et graphes $ADE$

Nous voulons maintenant généraliser les résultats précédents au cas "quantique".

### B.2.1 Le groupe quantique $U_q(sl(2))$

L'algèbre $U_q(sl(2))$ est l'algèbre engendrée par les éléments $\{K,K^{-1},X_\pm\}$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
K\cdot K^{-1} &= K^{-1}\cdot K=1\\
K\cdot X_\pm &= q^{\pm 2}X_\pm\cdot K\\
[X_+,X_-] &= \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}
\end{aligned}$$

Définissant la comultiplication ($\Delta$), la counité ($\epsilon$) et l'antipode ($S$) sur les générateurs par :

$$\begin{array}{rclrcl}
\Delta(X_+) & = & X_+ \otimes 1 + K \otimes X_+ & \Delta(K) & = & K \otimes K \\
\Delta(X_-) & = & X_- \otimes K^{-1} + 1 \otimes X_- & \Delta(K^{-1}) & = & K^{-1} \otimes K^{-1} \\
S(X_+) & = & -K^{-1} \cdot X_+ & S(K) & = & K^{-1} \\
S(X_-) & = & -X_- \cdot K & S(K^{-1}) & = & K \\
\epsilon(X_\pm) & = & 0 & \epsilon(K^{\pm 1}) & = & 1
\end{array}$$

munissent $U_q(sl(2))$ d'une structure d'algèbre de Hopf [52] (pour une définition générale des relations définissant une algèbre de Hopf, voir l'Annexe **C**). Nous dirons aussi par la suite que $U_q(sl(2))$ est un groupe quantique. Une manière élégante d'obtenir les relations précédentes est de voir $U_q(sl(2))$ comme le dual de $Fun_q(SL(2))$. Considérons deux éléments $x$ et $y$, satisfaisant la relation suivante, appelée **relation de plan quantique** :

$$xy = qyx, \qquad q \in \mathbb{C}. \tag{B.9}$$

Alors $Fun_q(SL(2))$ est l'algèbre des transformations de coordonnées, de déterminant égal à 1, qui préservent la relation (B.9). Les relations définissant la structure d'algèbre de Hopf de $Fun_q(SL(2))$ sont définies de manière naturelle sur ses générateurs. $Fun_q(SL(2))$ et $U_q(sl(2))$ sont duales (suivant la notion de dualité introduite par M. Takeushi [84]) dans le sens qu'il existe une forme bilinéaire $\langle \ , \ \rangle \to \mathbb{C}$, appelée *pairing*, reliant leurs structures. La donnée du *pairing* entre $U_q(sl(2))$ et $Fun_q(SL(2))$ et des relations de $Fun_q(SL(2))$ permettent de retrouver de manière élégante les relations définissant $U_q(sl(2))$ [82]. Notons que ces deux groupes quantiques – $U_q(sl(2))$ et $Fun_q(SL(2))$ – sont de dimension infinie.

### B.2.2 Quotient de $U_q(sl(2))$ et graphe $A_n$

Considérons maintenant la relation de plan quantique dans le cas où $q$ est une racine N$^{\text{ième}}$ de l'unité : $q^N = 1, q \neq 1$. Le **plan quantique réduit** est défini par la relation (B.9) et les relations suivantes :

$$x^N = 1, \qquad y^N = 1. \tag{B.10}$$

L'algèbre des transformations de coordonnées, de déterminant égal à 1, qui préservent les relations de plan quantique réduit est appelée $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ est obtenue en quotientant $Fun_q(SL(2))$ par des idéaux bilatères, qui sont des idéaux de Hopf. $\mathcal{F}$ est donc aussi un groupe quantique, mais de dimension finie : $dim(\mathcal{F}) = N^3$. Le dual de $\mathcal{F}$, appelé $\mathcal{H}$ (et souvent noté $u_q(sl(2))$ dans la littérature), est aussi un groupe quantique de dimension finie. Il est obtenu en quotientant $U_q(sl(2))$ par les idéaux bilatères engendrés par les relations suivantes [7] :

$$K^N = \mathbb{1}, \qquad X_+^N = 0, \qquad X_-^N = 0. \tag{B.11}$$

[7] Ces relations de quotient sont strictement valables pour le cas $N$ impair. Pour le cas N pair, elles dépendent de la parité de $\frac{N}{2}$, et la discussion est un peu plus délicate (pour une discussion de ce problème, voir [1]).

L'étude de la représentation régulière (à gauche) de $U_q(sl(2))$ , avec q racine de l'unité, est présentée dans [1]. Une autre manière d'étudier les représentations de $\mathcal{H}$ est présentée dans [82, 24], à travers un isomorphisme entre $\mathcal{H}$ et un groupe quantique construit à partir de variables anticommutantes [72] (variables de Grassmann). Cet isomorphisme a été explicitement décrit dans [22] pour le cas N=3 (voir aussi [24]), et de façon plus générale dans une des sections de [72].

**Exemple : cas N=5**

Soit $\mathcal{H}$ le quotient de $U_q(sl(2))$, pour $q^5 = 1$. Alors, $\mathcal{H}$ est isomorphe à [72] :

$$\mathcal{H} \cong M_5 \oplus (M_{4|1}(\Lambda^2))_0 \oplus (M_{3|2}(\Lambda^2))_0 = \mathrm{M}^5_\Lambda$$

Un élément $h$ de $\mathrm{M}^5_\Lambda$ est de la forme suivante :

$$h = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

où nous avons introduit les notations suivantes :

- $*$ pour un élément de $\mathbb{C}$
- $\bullet$ pour un élément de la forme $\alpha + \beta\theta_1\theta_2$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- $\circ$ pour un élément de la forme $\gamma\theta_1 + \delta\theta_2$ $\qquad \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

et où $\theta_1$ et $\theta_2$ sont deux éléments (variables de Grassmann) qui vérifient les relations suivantes :

$$\theta_1^2 = \theta_2^2 \qquad\qquad \theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1 \tag{B.12}$$

Cet isomorphisme permet de construire les représentations de $\mathcal{H}$, et notamment d'obtenir ses représentations irréductibles. Si nous négligeons les représentations de q-dimension nulle (ce sont les représentations projectives indécomposables) et que nous dessinions le diagramme de tensorialisation par la représentation de dimension 2, nous obtenons alors le graphe $A_4$ [23]. Ce résultat se généralise du moins pour le cas $N$ impair, et nous obtenons ainsi le graphe $A_{N-1}$.

### B.2.3 "Sous-groupes" finis de $U_q(sl(2))$ et graphes $ADE$

Le groupe quantique $U_q(sl(2))$ possède, pour $q^N = 1$, des quotients de Hopf de dimension finie : ces quotients sont des algèbres non semi-simples mais possèdent des représentations irréductibles en nombre fini. L'une d'entre-elles, de dimension classique $N$, est de q-dimension nulle, les autres sont de q-dimension non nulle. De la même manière que les irreps de $SU(2)$ sont labellées par les vertex du graphe $A_\infty$, le quotient de $U_q(sl(2))$ pour $q^N = 1$

possède des irreps de q-dimension non nulle labellées par les vertex du graphe $A_{N-1}$, notés $(\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_{N-2})$ : ce graphe code la tensorialisation des irreps $\tau_i$ par la fondamentale $\tau_1$, de q-dimension 2. Nous avons donc un analogue quantique du cas $SU(2)$, les graphes $A_{N-1}$ pouvant être vus comme la correspondance quantique du graphe $A_\infty$.

Nous voudrions, d'une manière analogue à ce qui a été vu pour le cas du groupe $SU(2)$, classifier les "sous-groupes" finis de $U_q(sl(2))$. Évidemment, le problème ici est très différent, $U_q(sl(2))$ n'étant pas un groupe, il faut trouver une formulation adéquate de ce problème. Une présentation de la correspondance de McKay quantique, utilisant le langage des catégories, est présentée dans [54].

Rappelons ici les résultats énoncés dans le chapitre **3**) :

- Les représentations irréductibles $\sigma$ des "sous-groupes" finis de $U_q(sl(2))$ sont labellées par les vertex des diagrammes de Dynkin $A_n$, $D_{2n}$, $E_6$ et $E_8$. Les irreps $\sigma$ peuvent être tensorialisées entre-elles, nous dirons que les cas en question possèdent la propriété de *self-fusion*.
- À côté de ces "sous-groupes", il existe aussi des "modules", pour lesquels les irreps peuvent être tensorialisées par les irreps du quotient de $U_q(sl(2))$ correspondant, mais qui ne peuvent pas être tensorialisées entre-elles. Les "modules" qui ne sont pas des "sous-groupes" sont décrits par les diagrammes $D_{2n+1}$ et $E_7$.

Les diagrammes $ADE$, apparaissant ainsi dans l'analogue quantique de la correspondance de McKay, sont illustrés dans l'Annexe **A**.

Aucun lien direct entre les résultats que nous venons de rappeler (liés aux groupes quantiques aux racines de l'unité) et les bigèbres $\mathcal{B}(G)$ (liées à des chemins sur des diagrammes de Coxeter-Dynkin) n'est connu à ce jour. C'est une direction qu'il serait intéressant d'explorer.

# Annexe C

# Quelques définitions algébriques

## C.1 Algèbre de Hopf

Une algèbre $(A, +, \cdot; k)$ sur un corps $k$ est un espace vectoriel sur $k$, muni d'un produit associant à tout couple $(a, b) \in A \times A$ un élément $a \cdot b$ de $A$, de manière compatible avec l'addition :

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \qquad \forall a, b, c \in A$$

et avec l'action de $k$ :

$$\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b) \qquad \forall a, b \in A, \ \ \forall \alpha \in k$$

Ces deux propriétés peuvent être résumées en imposant que le produit – qui sera aussi noté $\mu$ – soit une application linéaire de $A \otimes A \longrightarrow A$. Nous avons : $\mu(a \otimes b) = a \cdot b$, pour $a, b \in A$. De même, l'existence d'un neutre $1_A \in A$ pour le produit se traduit par l'existence d'une application linéaire $\eta : k \longrightarrow A$ telle que $\eta(1) = 1_A$. Par la suite, nous allons considérer des algèbres associatives et unitales. Le fait que le produit soit associatif $(a \cdot (b \cdot c) = ((a \cdot b) \cdot c)$ et possède un neutre à gauche et à droite $(a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a)$ s'écrit sous la forme de diagrammes commutants, introduits par Manin [59].

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd} \qquad \text{associativité}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes k \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

unité

L'écriture de ces diagrammes a été faite pour faciliter l'introduction de la notion de cogèbre. Une cogèbre est un espace vectoriel, muni d'applications linéaires $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ et $\epsilon : A \longrightarrow k$, qui vérifient les propriétés de coassociativité et de counité obtenues en inversant le sens des flèches dans les diagrammes précédents.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"'] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}$$

coassociativité

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\epsilon \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \epsilon"] & A \otimes k \\
& A \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

counité

Nous pouvons maintenant énoncer les définitions d'algèbre et de cogèbre de manière concise :

**Définition 15** *Une* ***algèbre*** *est un triplet* $(A, \mu, \eta)$*, où* $A$ *est un espace vectoriel, et :*

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A \,, \qquad\qquad \eta : k \longrightarrow A \,,$$

*sont des applications linéaires, appelées produit et unité, satisfaisant les relations suivantes :*

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\mu \otimes id) &= \mu \circ (id \otimes \mu) \\
\mu \circ (\eta \otimes id) &= \mu \circ (id \otimes \eta) \quad = \quad id
\end{aligned}$$

**Définition 16** *Une* ***cogèbre*** *est un triplet* $(A, \Delta, \epsilon)$*, où* $A$ *est un espace vectoriel, et :*

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A \,, \qquad\qquad \epsilon : A \longrightarrow k \,,$$

*sont des applications linéaires, appelées coproduit et counité, satisfaisant les relations suivantes :*

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id) \circ \Delta &= (id \otimes \Delta) \circ \Delta \\
(\epsilon \otimes id) \circ \Delta &= (id \otimes \epsilon) \circ \Delta \quad = \quad id
\end{aligned}$$

**Notation de Sweedler** : nous introduisons une convention de notation, introduite par Sweedler [83], très utile pour la clarté des calculs. Soit $A$ une cogèbre et un élément $a \in A$. Nous avons $\Delta(a) \in A \otimes A$, que nous notons :

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \sum_i a_{(1)_{(i)}} \otimes a_{(2)_{(i)}} \\ &= a_{(1)} \otimes a_{(2)} \qquad\qquad \text{sommation implicite} \end{aligned}$$

**Définition 17** *Le produit tensoriel de deux algèbres $A_1$ et $A_2$ est une algèbre dont l'espace vectoriel est le produit tensoriel des espaces vectoriels de $A_1$ et de $A_2$, et dont le produit $\mu' : (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) \longrightarrow A \otimes A$ est une application linéaire telle que :*

$$\mu' = (\mu \circ \mu) \circ (id \otimes \tau \otimes id) \ ,$$

*où $\tau$ est l'opérateur de flip : $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Nous pouvons écrire le produit plus simplement comme :*

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (a \cdot c) \otimes (c \cdot d) \ ,$$

**Définition 18** *Le produit tensoriel de deux cogèbres $A_1$ et $A_2$ est une cogèbre dont l'espace vectoriel est le produit tensoriel des espaces vectoriels de $A_1$ et de $A_2$, et dont le coproduit $\Delta' : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A \otimes A \otimes A$ est une application linéaire telle que :*

$$\begin{aligned} \Delta' &= (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ \textit{i.e.} \qquad \Delta'(a \otimes b) &= a_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes b_{(2)} \end{aligned}$$

Par abus de langage, nous noterons souvent le produit et le coproduit $(\mu', \Delta')$ aussi par $(\mu, \Delta)$.

**Théorème 11** *Supposons que $A$ possède une structure d'algèbre $(A, \mu, \eta)$ et une structure de cogèbre $(A, \Delta, \epsilon)$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes [52] :*

- *$\mu$ et $\eta$ sont des morphismes de cogèbres.*
- *$\Delta$ et $\epsilon$ sont des morphismes d'algèbres.*

Par exemple, pour satisfaire la deuxième assertion, il faut vérifier que :

$$\begin{aligned} \Delta(a \cdot b) &= \Delta(a) \cdot \Delta(b) & \qquad \Delta(1_A) &= 1_A \otimes 1_A \\ \epsilon\,(a \cdot b) &= \epsilon\,(a) \cdot \epsilon\,(b) & \qquad \epsilon\,(1_A) &= 1 \end{aligned}$$

**Définition 19** *Une **bigèbre** est un quintuple $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, où $(A, \mu, \eta)$ est une algèbre, $(A, \Delta, \epsilon)$ est une cogèbre, et qui vérifie une des deux conditions équivalentes précédentes.*

Etant données une algèbre $(B, \mu, \eta)$ et une cogèbre $(C, \Delta, \epsilon)$, considérons deux applications linéaires f et g de $C$ vers $B$. Nous définissons alors la **convolution** $f \star g$ qui est la composition des applications suivantes : $C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} B \otimes B \xrightarrow{\mu} B$, qui s'écrit :

$$f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

Lorsque nous avons une bigèbre $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, nous pouvons considérer le cas $B = C = A$ et définir la convolution sur l'espace vectoriel des endomorphismes de $A$ :

**Définition 20** *Un endomorphisme $S : A \longrightarrow A$ est appelé* ***antipode****, si :*

$$\begin{array}{rrcl} & S \star id & = & id \star S & = & \eta \circ \epsilon \\ i.e. & \mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta & = & \mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta & = & \eta \circ \epsilon \end{array}$$

Une bigèbre avec antipode est une bigèbre de Hopf, comunément appelée **algèbre de Hopf**.

**Définition 21** *Le* ***dual*** *d'une algèbre de Hopf $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ est l'espace dual $\widehat{A} = Hom_k(A, k)$ muni des structures $(\widehat{\mu}, \widehat{\eta}, \widehat{\Delta}, \widehat{\epsilon}, \widehat{S})$ définies à partir de celles de $A$ par la donnée d'un pairing $\langle\, , \,\rangle : \widehat{A} \times A \to k$ tel que, pour $x, y \in A$ et $\psi, \phi \in \widehat{A}$ :*

$$\begin{array}{rcl} \langle \widehat{\mu}(\psi \otimes \phi), x \rangle & = & \langle \psi \otimes \phi, \Delta(x) \rangle \\ \langle \widehat{\Delta}(\psi), x \otimes y \rangle & = & \langle \psi, \mu(x \otimes y) \rangle \\ \langle \widehat{\eta}(1), x \rangle & = & \epsilon(x) \\ \widehat{\epsilon}(\psi) & = & \langle \psi, \eta(1) \rangle \\ \langle \widehat{S}(\psi), x \rangle & = & \langle \psi, S(x) \rangle \end{array}$$

## C.2 Algèbre de Hopf faible

Nous présentons ici les axiomes d'une algèbre de Hopf faible, tels qu'ils ont été présentés dans [9].

**Définition 22** *Une algèbre de Hopf faible (WHA) est un sextuple $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ satisfaisant les axiomes 1 à 4 suivants :*

***Axiome 1*** *$(A, \mu, \eta)$ est une algèbre :*

$$\begin{array}{rcl} \mu \circ (\mu \otimes id) & = & \mu \circ (id \otimes \mu) \\ \mu \circ (\eta \otimes id) & = & \mu \circ (id \otimes \eta) \quad = \quad id \end{array}$$

***Axiome 2*** *$(A, \Delta, \epsilon)$ est une cogèbre :*

$$\begin{array}{rcl} (\Delta \otimes id) \circ \Delta & = & (id \otimes \Delta) \circ \Delta \\ (\epsilon \otimes id) \circ \Delta & = & (id \otimes \epsilon) \circ \Delta \quad = \quad id \end{array}$$

***Axiome 3*** *Les deux structures sont compatibles selon :*

*(i) $\Delta$ est multiplicatif :*

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta \circ \mu & = & (\mu \circ \mu) \circ (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ i.e., & \Delta(x \cdot y) & = & \Delta(x) \cdot \Delta(y) \end{array}$$

*(ii) $\epsilon$ est faiblement multiplicatif :*

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes \epsilon) \circ (\mu \otimes \mu) \circ (id \otimes \Delta \otimes id) &= \epsilon \circ \mu \circ (\mu \otimes id) \\ (\epsilon \otimes \epsilon) \circ (\mu \otimes \mu) \circ (id \otimes \Delta^{op} \otimes id) &= \epsilon \circ \mu \circ (\mu \otimes id)\end{aligned}$$

*où $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$. Utilisant la convention de Sweedler, ces deux équations s'écrivent plus simplement :*

$$\begin{aligned}\epsilon(x \cdot y \cdot z) &= \epsilon(x \cdot y_{(1)}) \cdot \epsilon(y_{(2)} \cdot z) \\ \epsilon(x \cdot y \cdot z) &= \epsilon(x \cdot y_{(2)}) \cdot \epsilon(y_{(1)} \cdot z)\end{aligned}$$

*(iii) $\eta$ est faiblement multiplicatif :*

$$\begin{aligned}\Delta^2(1_A) &= (\Delta(1_A) \otimes 1_A) \cdot (1_A \otimes \Delta(1_A)) \\ \Delta^2(1_A) &= (1_A \otimes \Delta(1_A)) \cdot (\Delta(1_A) \otimes 1_A)\end{aligned}$$

*où $\Delta^2 = (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$*

***Axiome 4*** *Existence d'une antipode $S$ satisfaisant :*

$$S(x) = S(x_{(1)}) \cdot x_{(2)} \cdot S(x_{(3)}) \tag{C.1}$$

$$x_{(1)} \cdot S(x_{(2)}) = \epsilon(1_{(1)} \cdot x) \cdot 1_{(2)} \tag{C.2}$$

$$S(x_{(1)}) \cdot x_{(2)} = 1_{(1)} \cdot \epsilon(x 1_{(2)}) \tag{C.3}$$

Une WHA devient une algèbre de Hopf (usuelle) si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $\Delta(1_A) = 1_A \otimes 1_A$
- $\epsilon(x \cdot y) = \epsilon(x) \cdot \epsilon(y)$

## C.3 Divers

Considérons le groupe de permutations $S_n$ sur $n$ objets, engendré par les transpositions $t_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$, qui permutent les objets $i$ et $i+1$. En considérant une combinaison linéaire dans $\mathbb{C}$ de tels éléments, nous obtenons l'algèbre de permutations $\mathbb{C}S_n$ :

**Définition 23** *Soit un entier $n \geq 1$. L'algèbre du groupe de permutations $\mathbb{C}S_n$ est l'algèbre associative unitale engendrée par $n$ générateurs $(1, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ satisfaisant aux relations suivantes :*

$$\begin{array}{lrcll} (i) & t_i^2 & = & 1 & \\ (ii) & t_i\, t_j & = & t_j\, t_i & \textit{pour } |i-j| \geq 2 \\ (iii) & t_{i+1}\, t_i\, t_{i+1} & = & t_i\, t_{i+1}\, t_i & \end{array}$$

**Définition 24** *Soit un entier $n \geq 1$. L'algèbre du groupe des tresses $\mathbb{C}B_n$ est l'algèbre associative unitale engendrée par $n$ générateurs $(1, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$ satisfaisant aux relations suivantes :*

$$\begin{array}{lrcll} (i) & b_i\, b_j & = & b_j\, b_i & \textit{pour } |i-j| \geq 2 \\ (ii) & b_{i+1}\, b_i\, b_{i+1} & = & b_i\, b_{i+1}\, b_i & \end{array}$$

**Définition 25** *Soit un entier $n \geq 1$ et un paramètre $q \in \mathbb{C}$. L' algèbre de Hecke $H_n(q)$ est l'algèbre associative unitale engendrée par $n$ générateurs $(1, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$ satisfaisant aux relations suivantes :*

$$\begin{array}{lrcll} (i) & g_i^2 & = & (q-1)g_i + q & \\ (ii) & g_i\, g_j & = & g_j\, g_i & \textit{pour } |i-j| \geq 2 \\ (iii) & g_{i+1}\, g_i\, g_{i+1} & = & g_i\, g_{i+1}\, g_i & \end{array}$$

Pour $q \to 1$, l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ se réduit à $\mathbb{C}S_n$. Nous pouvons donc voir l'algèbre de Hecke comme une déformation de l'algèbre du groupe des permutations.
Dans $H_n(q)$, effectuons le chagement de base suivant :

$$g_i = (\hat{q}^2 + 1)\hat{e}_i - 1 \qquad \text{où } \hat{q}^2 = q$$

Dans cette nouvelle base de $n$ générateurs $1, \hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_{n-1}$, les relations s'écrivent :

$$\begin{array}{lrcll} (i) & \hat{e}_i^2 & = & \hat{e}_i & \\ (ii) & \hat{e}_i\, \hat{e}_j & = & \hat{e}_j\, \hat{e}_i & \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ (iii) & \hat{e}_{i+1}\, \hat{e}_i\, \hat{e}_{i+1} - \dfrac{\hat{q}^2}{(1+\hat{q}^2)^2}\hat{e}_{i+1} & = & \hat{e}_i\, \hat{e}_{i+1}\, \hat{e}_i - \dfrac{\hat{q}^2}{(1+\hat{q}^2)^2}\hat{e}_i & \end{array}$$

Jusqu'ici, nous n'avons fait que reformuler la définition de l'algèbre de Hecke $H_n(q)$.
Maintenant, imposons la **relation de Jones** :

$$\hat{e}_{i+1}\, \hat{e}_i\, \hat{e}_{i+1} - \tau \hat{e}_{i+1} = 0$$

où $\tau = \frac{1}{\beta^2} = \frac{\hat{q}^2}{(1+\hat{q}^2)^2}$ est le paramètre de Jones. Nous obtenons alors l'algèbre de Temperley-Lieb $T_n(\hat{q})$ :

**Définition 26** *Soit un entier $n \geq 1$ et un paramètre $\tau \in \mathbb{C}$. L'algèbre de Temperley-Lieb $T_n(\tau)$ est l'algèbre associative unitale engendrée par $n$ générateurs $(1, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ satisfaisant aux relations suivantes :*

$$\begin{array}{lrcll} (i) & e_i^2 & = & e_i & \\ (ii) & e_i\, e_j & = & e_j\, e_i & \textit{pour } |i-j| \geq 2 \\ (iii) & e_i\, e_{i\pm 1}\, e_i & = & \tau e_i & \end{array}$$

Nous voudrions obtenir une $C^*-$algèbre en imposant la **condition de Jones** :

$$e_i^* = e_i \tag{C.4}$$

**Théorème 12 (Jones)** *Il n'est possible d'imposer la relation (C.4) que pour les valeurs suivantes de $\beta$ :*

- $\beta \geq 2$
- $\beta = 2\cos(\frac{\pi}{N})$ *pour un entier* $N > 2$

# Annexe D

# Fonctions de partition généralisées

## D.1 Cas $\widehat{su}(2)$

### D.1.1 Le cas $A_4$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\mathcal{Z}_{11}$ | $=$ | $\mathcal{Z}_{00} + \mathcal{Z}_{20}$ |
| $\mathcal{Z}_{A_4} = \mathcal{Z}_{00}$ | $=$ | $\sum_{i=0}^{3} \lvert\chi_i\rvert^2$ | $\mathcal{Z}_{12} = \mathcal{Z}_{21}$ | $=$ | $\mathcal{Z}_{10} + \mathcal{Z}_{30}$ |
| $\mathcal{Z}_{10} = \mathcal{Z}_{01}$ | $=$ | $(\chi_0\overline{\chi}_1 + \chi_1\overline{\chi}_2 + \chi_2\overline{\chi}_3) + \text{h.c.}$ | $\mathcal{Z}_{13} = \mathcal{Z}_{31}$ | $=$ | $\mathcal{Z}_{20}$ |
| $\mathcal{Z}_{20} = \mathcal{Z}_{02}$ | $=$ | $\lvert\chi_1\rvert^2 + \lvert\chi_2\rvert^2 + [(\chi_0\overline{\chi}_2 + \chi_1\overline{\chi}_3) + \text{h.c.}]$ | $\mathcal{Z}_{22}$ | $=$ | $\mathcal{Z}_{00} + \mathcal{Z}_{20}$ |
| $\mathcal{Z}_{30} = \mathcal{Z}_{03}$ | $=$ | $(\chi_0\overline{\chi}_3 + \chi_1\overline{\chi}_2) + \text{h.c.}$ | $\mathcal{Z}_{23}$ | $=$ | $\mathcal{Z}_{10}$ |
| | | | $\mathcal{Z}_{33}$ | $=$ | $\mathcal{Z}_{00}$ |

Tab. D.1 – Fonctions de partition généralisées du modèle $A_4$.

### D.1.2 Le cas $E_6$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\chi}_0$ | $=$ | $\chi_0 + \chi_6$ | $\hat{\chi}_3$ | $=$ | $\chi_3 + \chi_7$ |
| $\hat{\chi}_1$ | $=$ | $\chi_1 + \chi_5 + \chi_7$ | $\hat{\chi}_4$ | $=$ | $\chi_4 + \chi_{10}$ |
| $\hat{\chi}_2$ | $=$ | $\chi_2 + \chi_4 + \chi_6 + \chi_8$ | $\hat{\chi}_5$ | $=$ | $\chi_3 + \chi_5 + \chi_9$ |

Tab. D.2 – Caractères étendus du modèle $E_6$ en fonction des caractères de $A_{11}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{E_6} = \mathcal{Z}_{\underline{0}} &= |\hat{\chi}_0|^2 + |\hat{\chi}_3|^2 + |\hat{\chi}_4|^2 & \mathcal{Z}_{\underline{11'}} &= |\hat{\chi}_1|^2 + |\hat{\chi}_2|^2 + |\hat{\chi}_5|^2 \\
\mathcal{Z}_{\underline{3}} &= (\hat{\chi}_0 + \hat{\chi}_4)\overline{\hat{\chi}_3} + \hat{\chi}_3(\overline{\hat{\chi}_0} + \overline{\hat{\chi}_4}) & \mathcal{Z}_{\underline{21'}} &= (\hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_5)\overline{\hat{\chi}_2} + \hat{\chi}_2(\overline{\hat{\chi}_1} + \overline{\hat{\chi}_5}) \\
\mathcal{Z}_{\underline{4}} &= |\hat{\chi}_3|^2 + \hat{\chi}_0 \cdot \overline{\hat{\chi}_4} + \hat{\chi}_4 \cdot \overline{\hat{\chi}_0} & \mathcal{Z}_{\underline{51'}} &= |\hat{\chi}_2|^2 + \hat{\chi}_1 \cdot \overline{\hat{\chi}_5} + \hat{\chi}_5 \cdot \overline{\hat{\chi}_1} \\
\mathcal{Z}_{\underline{1}} &= \hat{\chi}_1 \cdot \overline{\hat{\chi}_0} + \hat{\chi}_2 \cdot \overline{\hat{\chi}_3} + \hat{\chi}_5 \cdot \overline{\hat{\chi}_4} & \mathcal{Z}_{\underline{1'}} &= \mathcal{Z}^*_{\underline{1}} \\
\mathcal{Z}_{\underline{2}} &= \hat{\chi}_2(\overline{\hat{\chi}_0} + \overline{\hat{\chi}_4}) + (\hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_5)\overline{\hat{\chi}_3} & \mathcal{Z}_{\underline{31'}} &= \mathcal{Z}^*_{\underline{2}} \\
\mathcal{Z}_{\underline{5}} &= \hat{\chi}_1 \cdot \overline{\hat{\chi}_4} + \hat{\chi}_2 \cdot \overline{\hat{\chi}_3} + \hat{\chi}_5 \cdot \overline{\hat{\chi}_0} & \mathcal{Z}_{\underline{41'}} &= \mathcal{Z}^*_{\underline{5}}
\end{aligned}
$$

Tab. D.3 – Fonctions de partition (à une ligne de défauts) du modèle $E_6$.

### D.1.3 Le cas $E_8$

$$
\begin{aligned}
\hat{\chi}_0 &= \chi_0 + \chi_{10} + \chi_{18} + \chi_{28} \\
\hat{\chi}_1 &= \chi_1 + \chi_9 + \chi_{11} + \chi_{17} + \chi_{19} + \chi_{27} \\
\hat{\chi}_2 &= \chi_2 + \chi_8 + \chi_{10} + \chi_{12} + \chi_{16} + \chi_{18} + \chi_{20} + \chi_{26} \\
\hat{\chi}_3 &= \chi_3 + \chi_7 + \chi_9 + \chi_{11} + \chi_{13} + \chi_{15} + \chi_{17} + \chi_{19} + \chi_{21} + \chi_{25} \\
\hat{\chi}_4 &= \chi_4 + \chi_6 + \chi_8 + \chi_{10} + \chi_{12} + 2\chi_{14} + \chi_{16} + \chi_{18} + \chi_{20} + \chi_{22} + \chi_{24} \\
\hat{\chi}_5 &= \chi_5 + \chi_9 + \chi_{13} + \chi_{15} + \chi_{19} + \chi_{23} \\
\hat{\chi}_6 &= \chi_6 + \chi_{12} + \chi_{16} + \chi_{22} \\
\hat{\chi}_7 &= \chi_5 + \chi_7 + \chi_{11} + \chi_{13} + \chi_{15} + \chi_{17} + \chi_{21} + \chi_{23}
\end{aligned}
$$

Tab. D.4 – Caractères étendus du modèle $E_8$ en fonction des caractères de $A_{29}$.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{Z}_{E_8} = \mathcal{Z}_{00} & = & |\hat{\chi}_0|^2 + |\hat{\chi}_6|^2 \\
\mathcal{Z}_{60} & = & |\hat{\chi}_6|^2 + \hat{\chi}_0.\overline{\hat{\chi}_6} + \hat{\chi}_6.\overline{\hat{\chi}_0} \\
\mathcal{Z}_{11} & = & |\hat{\chi}_1|^2 + |\hat{\chi}_7|^2 \\
\mathcal{Z}_{71} & = & |\hat{\chi}_7|^2 + \hat{\chi}_1.\overline{\hat{\chi}_7} + \hat{\chi}_7.\overline{\hat{\chi}_1} \\
\mathcal{Z}_{22} & = & |\hat{\chi}_2|^2 + |\hat{\chi}_4|^2 \\
\mathcal{Z}_{42} & = & |\hat{\chi}_4|^2 + \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_4} + \hat{\chi}_4.\overline{\hat{\chi}_2} \\
\mathcal{Z}_{55} & = & |\hat{\chi}_3|^2 + |\hat{\chi}_5|^2 \\
\mathcal{Z}_{35} & = & |\hat{\chi}_3|^2 + \hat{\chi}_5.\overline{\hat{\chi}_3} + \hat{\chi}_3.\overline{\hat{\chi}_5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathcal{Z}_{10} & = & \hat{\chi}_1.\overline{\hat{\chi}_0} + \hat{\chi}_7.\overline{\hat{\chi}_6} = \mathcal{Z}^*_{01} \\
\mathcal{Z}_{70} & = & \hat{\chi}_7.\overline{\hat{\chi}_0} + (\hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_7).\overline{\hat{\chi}_6} = \mathcal{Z}^*_{07} = \mathcal{Z}^*_{61} \\
\mathcal{Z}_{20} & = & \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_0} + \hat{\chi}_4.\overline{\hat{\chi}_6} = \mathcal{Z}^*_{02} \\
\mathcal{Z}_{40} & = & \hat{\chi}_4.\overline{\hat{\chi}_0} + (\hat{\chi}_2 + \hat{\chi}_4).\overline{\hat{\chi}_6} = \mathcal{Z}^*_{04} = \mathcal{Z}^*_{62} \\
\mathcal{Z}_{50} & = & \hat{\chi}_5.\overline{\hat{\chi}_0} + \hat{\chi}_3.\overline{\hat{\chi}_6} = \mathcal{Z}^*_{05} \\
\mathcal{Z}_{30} & = & \hat{\chi}_3.\overline{\hat{\chi}_0} + (\hat{\chi}_3 + \hat{\chi}_5).\overline{\hat{\chi}_6} = \mathcal{Z}^*_{03} = \mathcal{Z}^*_{65} \\
\mathcal{Z}_{21} & = & \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_1} + \hat{\chi}_4.\overline{\hat{\chi}_7} = \mathcal{Z}^*_{12} \\
\mathcal{Z}_{41} & = & \hat{\chi}_4.\overline{\hat{\chi}_1} + (\hat{\chi}_2 + \hat{\chi}_4).\overline{\hat{\chi}_7} = \mathcal{Z}^*_{14} = \mathcal{Z}^*_{72} \\
\mathcal{Z}_{52} & = & \hat{\chi}_5.\overline{\hat{\chi}_2} + \hat{\chi}_3.\overline{\hat{\chi}_4} = \mathcal{Z}^*_{25} \\
\mathcal{Z}_{32} & = & \hat{\chi}_3.\overline{\hat{\chi}_2} + (\hat{\chi}_3 + \hat{\chi}_5).\overline{\hat{\chi}_4} = \mathcal{Z}^*_{23} = \mathcal{Z}^*_{45} \\
\mathcal{Z}_{15} & = & \hat{\chi}_1.\overline{\hat{\chi}_5} + \hat{\chi}_7.\overline{\hat{\chi}_3} = \mathcal{Z}^*_{51} \\
\mathcal{Z}_{75} & = & \hat{\chi}_7.\overline{\hat{\chi}_5} + (\hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_7).\overline{\hat{\chi}_3} = \mathcal{Z}^*_{57} = \mathcal{Z}^*_{31}
\end{array}
$$

TAB. D.5 – Fonctions de partition (à une ligne de défauts) du modèle $E_8$.

### D.1.4 Le cas $D_4$

$$
\hat{\chi}_0 = \chi_0 + \chi_4 \qquad \hat{\chi}_1 = \chi_1 + \chi_3 \qquad \hat{\chi}_2 = \hat{\chi}_{2'} = \chi_2
$$

TAB. D.6 – Caractères étendus du modèle $D_4$ en fonction des caractères de $A_5$.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{Z}_{D_4} = \mathcal{Z}_{0,+} & = & |\hat{\chi}_0|^2 + |\hat{\chi}_2|^2 + |\hat{\chi}_{2'}|^2 \\
\mathcal{Z}_{1,+} & = & \hat{\chi}_1.(\overline{\hat{\chi}_0} + \overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_{2'}}) \\
\mathcal{Z}_{2,+} & = & \hat{\chi}_0.\overline{\hat{\chi}_2} + \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_{2'}} + \hat{\chi}_{2'}.\overline{\hat{\chi}_0} \\
\mathcal{Z}_{2',+} & = & \hat{\chi}_0.\overline{\hat{\chi}_{2'}} + \hat{\chi}_{2'}.\overline{\hat{\chi}_2} + \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_0} = \mathcal{Z}_{2,+}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathcal{Z}_{0,-} & = & |\hat{\chi}_1|^2 \\
\mathcal{Z}_{1,-} & = & \mathcal{Z}^*_{1,+} \\
\mathcal{Z}_{2,-} & = & |\hat{\chi}_1|^2 \\
\mathcal{Z}_{2',-} & = & |\hat{\chi}_1|^2
\end{array}
$$

TAB. D.7 – Fonctions de partition (à une ligne de défauts) du modèle $D_4$.

### D.1.5 Le cas $D_6$

| | | |
|---|---|---|
| $\hat{\chi}_0 = \chi_0 + \chi_8$ | $\hat{\chi}_2 = \chi_2 + \chi_6$ | $\hat{\chi}_4 = \chi_4$ |
| $\hat{\chi}_1 = \chi_1 + \chi_7$ | $\hat{\chi}_3 = \chi_5 + \chi_5$ | $\hat{\chi}_{4'} = \chi_{4'}$ |

TAB. D.8 – Caractères étendus du modèle $D_6$ en fonction des caractères de $A_9$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{D_6} = \mathcal{Z}_{0,+} &= |\hat{\chi}_0|^2 + |\hat{\chi}_2|^2 + |\hat{\chi}_4|^2 + |\hat{\chi}_{4'}|^2 & \mathcal{Z}_{0,-} &= |\hat{\chi}_1|^2 + |\hat{\chi}_3|^2 \\
\mathcal{Z}_{1,+} &= \hat{\chi}_1.(\overline{\hat{\chi}_0} + \overline{\hat{\chi}_2}) + \hat{\chi}_3.(\overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_{4'}}) & \mathcal{Z}_{1,-} &= \mathcal{Z}^*_{1,+} \\
\mathcal{Z}_{2,+} &= |\hat{\chi}_2|^2 + (\hat{\chi}_0.\overline{\hat{\chi}_2} + \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_4} + \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_{4'}} + \hat{\chi}_4.\overline{\hat{\chi}_{4'}} + \text{h.c.}) & \mathcal{Z}_{2,-} &= |\hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_3|^2 + |\hat{\chi}_3|^2 \\
\mathcal{Z}_{3,+} &= \hat{\chi}_1.(\overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_{4'}}) + \hat{\chi}_3.(\overline{\hat{\chi}_0} + 2\overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_{4'}}) & \mathcal{Z}_{3,-} &= \mathcal{Z}^*_{3,+} \\
\mathcal{Z}_{4,+} &= |\hat{\chi}_2|^2 + |\hat{\chi}_4|^2 + (\hat{\chi}_0.\overline{\hat{\chi}_4} + \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_{4'}} + \text{h.c.}) & \mathcal{Z}_{4,-} &= |\hat{\chi}_3|^2 + (\hat{\chi}_1.\overline{\hat{\chi}_3} + \text{h.c.}) \\
\mathcal{Z}_{4',+} &= |\hat{\chi}_2|^2 + |\hat{\chi}_{4'}|^2 + (\hat{\chi}_0.\overline{\hat{\chi}_{4'}} + \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_4} + \text{h.c.}) = \mathcal{Z}_{4,+} & \mathcal{Z}_{4',-} &= \mathcal{Z}_{4,-}
\end{aligned}
$$

TAB. D.9 – Fonctions de partition (à une ligne de défauts) du modèle $D_6$.

### D.1.6 Le cas $D_5$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{D_5} = \mathcal{Z}_0 &= |\chi_0|^2 + |\chi_2|^2 + |\chi_3|^2 + |\chi_4|^2 + |\chi_6|^2 + (\chi_1.\overline{\chi_5} + \text{h.c.}) \\
\mathcal{Z}_1 &= (\chi_0 + \chi_2).\overline{\chi_1} + \chi_4.(\overline{\chi_0} + \overline{\chi_2}) + \chi_1.(\overline{\chi_4} + \overline{\chi_6}) + (\chi_4 + \chi_6).\overline{\chi_5} + [(\chi_2.\overline{\chi_3} + \chi_3.\overline{\chi_4}) + \text{h.c.}] \\
\mathcal{Z}_2 &= |\chi_2 + \chi_4|^2 + |\chi_3|^2 + [(\chi_0.\overline{\chi_2} + \chi_1.\overline{\chi_3} + \chi_1.\overline{\chi_5} + \chi_3.\overline{\chi_5} + \chi_4.\overline{\chi_6}) + \text{h.c.}] \\
\mathcal{Z}_3 &= [(\chi_0 + \chi_2 + \chi_4 + \chi_6).\overline{\chi_3} + (\chi_1 + \chi_5).(\overline{\chi_2} + \chi_4) + \text{h.c.}] \\
\mathcal{Z}_4 &= |\chi_1|^2 + |\chi_3|^2 + |\chi_5|^2 + |\chi_2 + \chi_4|^2 + [(\chi_0.\overline{\chi_4} + \chi_1.\overline{\chi_3} + \chi_2.\overline{\chi_6} + \chi_3.\overline{\chi_5}) + \text{h.c.}] \\
\mathcal{Z}_5 &= \mathcal{Z}^*_1 \\
\mathcal{Z}_6 &= |\chi_1|^2 + |\chi_3|^2 + |\chi_5|^2 + [(\chi_0.\overline{\chi_6} + \chi_2.\overline{\chi_4}) + \text{h.c.}]
\end{aligned}
$$

TAB. D.10 – Fonctions de partition (à une ligne de défauts) du modèle $D_5$.

### D.1.7 Le cas $E_7$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{\chi}_0 = \chi_0 + \chi_{16}$ | $\hat{\chi}_2 = \chi_2 + \chi_{14}$ | $\hat{\chi}_4 = \chi_4 + \chi_{12}$ | $\hat{\chi}_6 = \chi_6 + \chi_{10}$ | $\hat{\chi}_8 = \chi_8$ |
| $\hat{\chi}_1 = \chi_1 + \chi_{15}$ | $\hat{\chi}_3 = \chi_3 + \chi_{13}$ | $\hat{\chi}_5 = \chi_5 + \chi_{11}$ | $\hat{\chi}_7 = \chi_7 + \chi_9$ | $\hat{\chi}_{8'} = \chi_8$ |

TAB. D.11 – Caractères étendus du modèle $D_{10}$ (et $E_7$) en fonction des caractères de $A_{17}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{E_7} = \mathcal{Z}_0 &= |\hat{\chi}_0|^2 + |\hat{\chi}_4|^2 + |\hat{\chi}_6|^2 + |\hat{\chi}_{8'}|^2 + (\hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_8} + \text{h.c.}) \\
\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}^*_{(0)} &= \hat{\chi}_1.(\overline{\hat{\chi}_0} + \overline{\hat{\chi}_8}) + \hat{\chi}_3.(\overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_8}) + \hat{\chi}_5.(\overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_6}) + \hat{\chi}_7.(\overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) \\
\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}^*_8 &= |\hat{\chi}_4 + \hat{\chi}_6|^2 + \hat{\chi}_2.(\overline{\hat{\chi}_0} + \overline{\hat{\chi}_4}) + \hat{\chi}_8.(\overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) + (\hat{\chi}_0 + \hat{\chi}_4).\overline{\hat{\chi}_8} + (\hat{\chi}_6 + \hat{\chi}_{8'}).\overline{\hat{\chi}_2} \\
&+ \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_8} + (\hat{\chi}_6.\overline{\hat{\chi}_{8'}} + \text{h.c.}) \\
\mathcal{Z}_3 = \mathcal{Z}^*_{(4)} &= \hat{\chi}_1.(\overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_8}) + \hat{\chi}_3.(\overline{\hat{\chi}_0} + \overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_8}) + \hat{\chi}_5.(\overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_8} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) \\
&+ \hat{\chi}_7.(\overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_4} + 2\,\overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) \\
\mathcal{Z}_4 &= |\hat{\chi}_4 + \hat{\chi}_6|^2 + |\hat{\chi}_6|^2 + |\hat{\chi}_{8'}|^2 + [\hat{\chi}_0.\overline{\hat{\chi}_4} + \hat{\chi}_2.(\overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_8}) + (\hat{\chi}_4 + \hat{\chi}_6).(\overline{\hat{\chi}_8} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) + \text{h.c.}] \\
\mathcal{Z}_5 = \mathcal{Z}^*_{(6)} &= \hat{\chi}_1.(\overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_6}) + \hat{\chi}_3.(\overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_4} + \overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_8} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) + \hat{\chi}_5.(\overline{\hat{\chi}_0} + \overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_4} + 2\,\overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_8} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) \\
&+ \hat{\chi}_7.(\overline{\hat{\chi}_2} + 2\,\overline{\hat{\chi}_4} + 2\,\overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_8} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) \\
\mathcal{Z}_6 &= |\hat{\chi}_2 + \hat{\chi}_4 + \hat{\chi}_6|^2 + |\hat{\chi}_6|^2 + |\hat{\chi}_8|^2 + \left[\hat{\chi}_0.\overline{\hat{\chi}_6} + \hat{\chi}_2.\overline{\hat{\chi}_{8'}} + \hat{\chi}_4.\overline{\hat{\chi}_6} + (\hat{\chi}_4 + \hat{\chi}_6).(\overline{\hat{\chi}_8} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) + \text{h.c.}\right] \\
\mathcal{Z}_7 = \mathcal{Z}^*_{(2)} &= \hat{\chi}_1.(\overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) + \hat{\chi}_3.(\overline{\hat{\chi}_2} + \overline{\hat{\chi}_4} + 2\,\overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) + \hat{\chi}_5.(\overline{\hat{\chi}_2} + 2\,\overline{\hat{\chi}_4} + 2\,\overline{\hat{\chi}_6} + \overline{\hat{\chi}_8} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) \\
&+ \hat{\chi}_7.(\overline{\hat{\chi}_0} + \overline{\hat{\chi}_2} + 2\,\overline{\hat{\chi}_4} + 2\,\overline{\hat{\chi}_6} + 2\,\overline{\hat{\chi}_8} + \overline{\hat{\chi}_{8'}}) \\
\mathcal{Z}_{8'} &= |\hat{\chi}_2|^2 + |\hat{\chi}_4 + \hat{\chi}_6|^2 + |\hat{\chi}_8|^2 + |\hat{\chi}_{8'}|^2 + [(\hat{\chi}_0 + \hat{\chi}_4).\overline{\hat{\chi}_{8'}} + (\hat{\chi}_2 + \hat{\chi}_8).\overline{\hat{\chi}_6} + \text{h.c.}] \\
\mathcal{Z}_{(1)} &= |\hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_7|^2 + |\hat{\chi}_3 + \hat{\chi}_5 + \hat{\chi}_7|^2 + |\hat{\chi}_5|^2 \\
\mathcal{Z}_{(3)} &= |\hat{\chi}_3 + \hat{\chi}_5 + \hat{\chi}_7|^2 + |\hat{\chi}_5 + \hat{\chi}_7|^2 + |\hat{\chi}_7|^2 + [\hat{\chi}_1.(\overline{\hat{\chi}_3} + \overline{\hat{\chi}_5} + \overline{\hat{\chi}_7}) + \hat{\chi}_3.(\overline{\hat{\chi}_5} + \overline{\hat{\chi}_7}) + \hat{\chi}_5.\overline{\hat{\chi}_7} + \text{h.c.}] \\
\mathcal{Z}_{(5)} &= |\hat{\chi}_3 + \hat{\chi}_7|^2 + |\hat{\chi}_5|^2 + [\hat{\chi}_1.\overline{\hat{\chi}_5} + \hat{\chi}_5.\overline{\hat{\chi}_7} + +\text{h.c.}]
\end{aligned}
$$

TAB. D.12 – Fonctions de partition (à une ligne de défauts) du modèle $E_7$.

## D.2 Cas $\widehat{su}(3)$ : $\mathcal{E}_5$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\hat{\chi}_{1_0} = \chi_{0,0} + \chi_{2,2}$ | $\hat{\chi}_{1_3} = \chi_{0,3} + \chi_{3,0}$ | $\hat{\chi}_{2_0} = \chi_{1,1} + \chi_{1,4} + \chi_{2,2} + \chi_{3,0}$ | $\hat{\chi}_{2_3} = \chi_{1,1} + \chi_{1,4} + \chi_{2,2} + \chi_{3,0}$ |
| $\hat{\chi}_{1_1} = \chi_{0,2} + \chi_{3,2}$ | $\hat{\chi}_{1_5} = \chi_{2,0} + \chi_{2,3}$ | $\hat{\chi}_{2_1} = \chi_{1,0} + \chi_{1,3} + \chi_{2,1} + \chi_{3,2}$ | $\hat{\chi}_{2_2} = \chi_{0,1} + \chi_{3,1} + \chi_{1,2} + \chi_{2,3}$ |
| $\hat{\chi}_{1_2} = \chi_{1,2} + \chi_{5,0}$ | $\hat{\chi}_{1_4} = \chi_{2,1} + \chi_{0,5}$ | $\hat{\chi}_{2_4} = \chi_{0,2} + \chi_{1,3} + \chi_{2,1} + \chi_{4,0}$ | $\hat{\chi}_{2_5} = \chi_{2,0} + \chi_{3,1} + \chi_{2,1} + \chi_{3,2}$ |

TAB. D.13 – Caractères étendus du modèle $\mathcal{E}_5$ en fonction des caractères de $\mathcal{A}_5$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_5} = \mathcal{Z}_{1_0 \dot{\otimes} 1_0} &= |\hat{\chi}_{1_0}|^2 + |\hat{\chi}_{1_1}|^2 + |\hat{\chi}_{1_2}|^2 + |\hat{\chi}_{1_3}|^2 + |\hat{\chi}_{1_4}|^2 + |\hat{\chi}_{1_5}|^2 \\
\mathcal{Z}_{1_3 \dot{\otimes} 1_0} &= \hat{\chi}_{1_0}.\overline{\hat{\chi}_{1_3}} + \hat{\chi}_{1_1}.\overline{\hat{\chi}_{1_4}} + \hat{\chi}_{1_2}.\overline{\hat{\chi}_{1_5}} + \text{h.c.} \\
\mathcal{Z}_{1_1 \dot{\otimes} 1_0} &= \hat{\chi}_{1_0}.\overline{\hat{\chi}_{1_1}} + \hat{\chi}_{1_1}.\overline{\hat{\chi}_{1_2}} + \hat{\chi}_{1_2}.\overline{\hat{\chi}_{1_3}} + \hat{\chi}_{1_3}.\overline{\hat{\chi}_{1_4}} + \hat{\chi}_{1_4}.\overline{\hat{\chi}_{1_5}} + \hat{\chi}_{1_5}.\overline{\hat{\chi}_{1_0}} &&= \mathcal{Z}^*_{1_5 \dot{\otimes} 1_0} \\
\mathcal{Z}_{1_2 \dot{\otimes} 1_0} &= \hat{\chi}_{1_0}.\overline{\hat{\chi}_{1_2}} + \hat{\chi}_{1_1}.\overline{\hat{\chi}_{1_3}} + \hat{\chi}_{1_2}.\overline{\hat{\chi}_{1_4}} + \hat{\chi}_{1_3}.\overline{\hat{\chi}_{1_5}} + \hat{\chi}_{1_4}.\overline{\hat{\chi}_{1_0}} + \hat{\chi}_{1_5}.\overline{\hat{\chi}_{1_1}} &&= \mathcal{Z}^*_{1_4 \dot{\otimes} 1_0} \\
\mathcal{Z}_{2_0 \dot{\otimes} 1_0} &= \hat{\chi}_{2_0}.\overline{\hat{\chi}_{1_3}} + \hat{\chi}_{2_1}.\overline{\hat{\chi}_{1_4}} + \hat{\chi}_{2_2}.\overline{\hat{\chi}_{1_5}} + \hat{\chi}_{2_3}.\overline{\hat{\chi}_{1_0}} + \hat{\chi}_{2_4}.\overline{\hat{\chi}_{1_1}} + \hat{\chi}_{2_5}.\overline{\hat{\chi}_{1_2}} &&= \mathcal{Z}^*_{1_0 \dot{\otimes} 2_0} \\
\mathcal{Z}_{2_1 \dot{\otimes} 1_0} &= \hat{\chi}_{2_0}.\overline{\hat{\chi}_{1_4}} + \hat{\chi}_{2_1}.\overline{\hat{\chi}_{1_5}} + \hat{\chi}_{2_2}.\overline{\hat{\chi}_{1_0}} + \hat{\chi}_{2_3}.\overline{\hat{\chi}_{1_1}} + \hat{\chi}_{2_4}.\overline{\hat{\chi}_{1_2}} + \hat{\chi}_{2_5}.\overline{\hat{\chi}_{1_3}} &&= \mathcal{Z}^*_{1_5 \dot{\otimes} 2_0} \\
\mathcal{Z}_{2_2 \dot{\otimes} 1_0} &= \hat{\chi}_{2_0}.\overline{\hat{\chi}_{1_5}} + \hat{\chi}_{2_1}.\overline{\hat{\chi}_{1_0}} + \hat{\chi}_{2_2}.\overline{\hat{\chi}_{1_1}} + \hat{\chi}_{2_3}.\overline{\hat{\chi}_{1_2}} + \hat{\chi}_{2_4}.\overline{\hat{\chi}_{1_3}} + \hat{\chi}_{2_5}.\overline{\hat{\chi}_{1_4}} &&= \mathcal{Z}^*_{1_4 \dot{\otimes} 2_0} \\
\mathcal{Z}_{2_3 \dot{\otimes} 1_0} &= \hat{\chi}_{2_0}.\overline{\hat{\chi}_{1_0}} + \hat{\chi}_{2_1}.\overline{\hat{\chi}_{1_1}} + \hat{\chi}_{2_2}.\overline{\hat{\chi}_{1_2}} + \hat{\chi}_{2_3}.\overline{\hat{\chi}_{1_3}} + \hat{\chi}_{2_4}.\overline{\hat{\chi}_{1_4}} + \hat{\chi}_{2_5}.\overline{\hat{\chi}_{1_5}} &&= \mathcal{Z}^*_{1_3 \dot{\otimes} 2_0} \\
\mathcal{Z}_{2_4 \dot{\otimes} 1_0} &= \hat{\chi}_{2_0}.\overline{\hat{\chi}_{1_1}} + \hat{\chi}_{2_1}.\overline{\hat{\chi}_{1_2}} + \hat{\chi}_{2_2}.\overline{\hat{\chi}_{1_3}} + \hat{\chi}_{2_3}.\overline{\hat{\chi}_{1_4}} + \hat{\chi}_{2_4}.\overline{\hat{\chi}_{1_5}} + \hat{\chi}_{2_5}.\overline{\hat{\chi}_{1_0}} &&= \mathcal{Z}^*_{1_2 \dot{\otimes} 2_0} \\
\mathcal{Z}_{2_5 \dot{\otimes} 1_0} &= \hat{\chi}_{2_0}.\overline{\hat{\chi}_{1_2}} + \hat{\chi}_{2_1}.\overline{\hat{\chi}_{1_3}} + \hat{\chi}_{2_2}.\overline{\hat{\chi}_{1_4}} + \hat{\chi}_{2_3}.\overline{\hat{\chi}_{1_5}} + \hat{\chi}_{2_4}.\overline{\hat{\chi}_{1_0}} + \hat{\chi}_{2_5}.\overline{\hat{\chi}_{1_1}} &&= \mathcal{Z}^*_{1_1 \dot{\otimes} 2_0} \\
\mathcal{Z}_{2_0 \dot{\otimes} 2_0} &= |\hat{\chi}_{2_0}|^2 + |\hat{\chi}_{2_1}|^2 + |\hat{\chi}_{2_2}|^2 + |\hat{\chi}_{2_3}|^2 + |\hat{\chi}_{2_4}|^2 + |\hat{\chi}_{2_5}|^2 \\
\mathcal{Z}_{2_3 \dot{\otimes} 2_0} &= \hat{\chi}_{2_0}.\overline{\hat{\chi}_{2_3}} + \hat{\chi}_{2_1}.\overline{\hat{\chi}_{2_4}} + \hat{\chi}_{2_2}.\overline{\hat{\chi}_{2_5}} + \text{h.c.} \\
\mathcal{Z}_{2_1 \dot{\otimes} 2_0} &= \hat{\chi}_{2_0}.\overline{\hat{\chi}_{2_1}} + \hat{\chi}_{2_1}.\overline{\hat{\chi}_{2_2}} + \hat{\chi}_{2_2}.\overline{\hat{\chi}_{2_3}} + \hat{\chi}_{2_3}.\overline{\hat{\chi}_{2_4}} + \hat{\chi}_{2_4}.\overline{\hat{\chi}_{2_5}} + \hat{\chi}_{2_5}.\overline{\hat{\chi}_{2_0}} &&= \mathcal{Z}^*_{2_5 \dot{\otimes} 2_0} \\
\mathcal{Z}_{2_2 \dot{\otimes} 2_0} &= \hat{\chi}_{2_0}.\overline{\hat{\chi}_{2_2}} + \hat{\chi}_{2_1}.\overline{\hat{\chi}_{2_3}} + \hat{\chi}_{2_2}.\overline{\hat{\chi}_{2_4}} + \hat{\chi}_{2_3}.\overline{\hat{\chi}_{2_5}} + \hat{\chi}_{2_4}.\overline{\hat{\chi}_{2_0}} + \hat{\chi}_{2_5}.\overline{\hat{\chi}_{2_1}} &&= \mathcal{Z}^*_{2_4 \dot{\otimes} 2_0}
\end{aligned}
$$

TAB. D.14 – Fonctions de partition (à une ligne de défauts) du modèle $\mathcal{E}_5$.

# Bibliographie


[1] A. Yu. Alekseev, D. V. Gluschenkov, A. V. Lyakhovskaya, *Regular representation of the quantum group $Sl_q(2)$ (q is a root of unity)*, Algebra i Analiz **6** (1994) 88–125.

[2] E. Bannai, T. Ito, *Algebraic combinatorics I : Association schemes*, Benjamin/Cummings, 1984.

[3] R. E. Behrend, P. A. Pearce, V. Petkova, J.-B. Zuber, *On the classification of Bulk and Boundary Conformal Field Theories*, Phys. Lett. **B444** (1998) 163–166.

[4] R. E. Behrend, P. A. Pearce, V. Petkova, J.-B. Zuber, *Boundary Counditions in Rational Conformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B579** (2000) 707–773.

[5] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333–380.

[6] J. Böckenhauer, D. E. Evans, *Modular invariants, graphs and $\alpha$-induction for nets of subfactors I*, Commun. Math. Phys. **197** (1998) 361–386 ; *II*, Commun. Math. Phys. **200** (1999) 57–103 ; *III*, Commun. Math. Phys. **205** (1999) 183–200.

[7] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *On $\alpha$-induction, chiral generators and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999) 429–487.

[8] G. Böhm, K. Szlachányi, *A coassociative $C^\star$ quantum group with non-integral dimensions*, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 437–456.

[9] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, *Weak Hopf Algebras I. Integral theory and $C^\star$ structure*, J. Algebra **221** (1999) 385–438.

[10] A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Modular invariant partition functions in two dimensions*, Nucl. Phys. **B280** (1987) 445–465.

[11] A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *The ADE classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1–26.

[12] J. L. Cardy, *Conformal invariance and surface critical behavior*, Nucl. Phys. **B240** (1984) 514–532.

[13] J. L. Cardy, *Operator content of two-dimensional conformally invariant theories*, Nucl. Phys. **B270** (1986) 186–204.

[14] J. L. Cardy, *Effect of boundary conditions on the operator content of two-dimensional conformally invariant theories*, Nucl. Phys. **B275** (1986) 200–218.

[15] J. L. Cardy, *Boundary conditions, fusions rules and the Verlinde formula*, Nucl. Phys. **B324** (1989) 581–596.

[16] P. Cartier, *André Weil (1906-1998) : adieu à un ami*, Séminaire de Philosophie et de Mathématiques, École Normale Supérieure (1998).

[17] C.H.O. Chui, C. Mercat, P. Pearce, *Integrable and conformal twisted boundary conditions for $sl(2)$ A-D-E lattice models*, J. Phys. **A36** (2003) 2623–2662.

[18] A. Connes, D. Kreimer, *Lessons from Quantum Field Theory – Hopf Algebras and Spacetime Geometries*, Lett. Math. Phys. **48** (1999) 85–96 ; *Hopf algebras, renormalization and non-commutative geometry*, Commun. Math. Phys. **199** (1998) 203–242.

[19] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Commun. Math. Phys. **210** (2000) 249–273 ; *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II : the $\beta$ function, diffeomorphisms and the renormalization group*, Commun. Math. Phys. **216** (2001) 215–241.

[20] R. Coquereaux, *Notes on the classical and quantum tetrahedron*, unpublished.

[21] R. Coquereaux, *Classical and quantum polyhedra : A fusion graph algebra point of view*, Lectures given at the Karpacz Winter School 2001, AIP Conf. Proc. **589** (2001) 181–203.

[22] R. Coquereaux, *On the finite dimensional quantum group $M_3 \oplus (M_{2|1}(\Lambda^2))_0$*, Lett. Math. Phys. **42**, (1997) 309–328.

[23] R. Coquereaux, *Notes on the quantum tetrahedron*, Moscow Math. J. **2**, no.1 (2002) 41–80.

[24] R. Coquereaux, G. Schieber, *Action of a finite quantum group on the algebra of complex $N \times N$ matrices*, Particles, Fields and Gravitation, Lodz Conference, AIP Conf. Proc. **453** (1998) 9–23.

[25] R. Coquereaux, G. Schieber, *Twisted partition functions for ADE boundary conformal field theories and Ocneanu algebra of quantum symmetries*, J. of Geom. and Phys. **781** (2002) 1–43.

[26] R. Coquereaux, G. Schieber, *Determination of quantum symmetries for higher ADE systems from the modular $T$ matrix*, J. of Math. Physics **44** (2003) 3809–3837.

[27] R. Coquereaux, G. Schieber, R. Trinchero, *Coxeter-Dynkin diagrams, Ocneanu bigebras and quantum groupoids*, in preparation.

[28] R. Coquereaux, M. Huerta, *Torus structure on graphs and twisted partition functions for minimal and affine models*, hep-th/0301215, to appear in J. of Geom. and Phys.

[29] R. Coquereaux, *About cells*, unpublished.

[30] P. Di Francesco, *Integrable lattice models, graphs and modular invariant conformal field theories* , Int. J. of Mod. Phys. **A7**, no. 3 (1992) 407–500.

[31] F. Di Francesco, J.-B. Zuber, *SU(N) Lattice integrable models associated with graphs*, Nucl. Phys **B338** (1990) 602–646.

[32] P. Di Francesco, J.-B. Zuber, *$SU(N)$ Lattice Integrable Models and Modular Invariance*, Recents Developments in Conformal Field Theories, Trieste Conference (1989), S. Randjbar-Daemi, E. Sezgin, J.-B. Zuber eds., World Scientific (1990).

[33] P. Di Francesco, P. Matthieu, D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Springer, 1997.

[34] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, *Modular invariance and the fusion algebra*, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **5B** (1998) 87–97.

[35] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians, Berkeley, A. M. Gleason ed. (1986) 798–820.

[36] F. J. Dyson, *Missed opportunities*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972) 635–652.

[37] D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *Quantum symmetries on operator algebras*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[38] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, Takhtajan, *Quantum inverse problem method*, Theor. Math. Phys. **40** (1979) 194–220.

[39] P. Fendley, P. Ginsparg, *Non-critical orbifolds*, Nucl. Phys. **B324** (1989) 549–580.
P. Fendley, *New exactly solvable models*, J. Phys. **A22** (1989) 4633–4642.

[40] B. L. Feigin, D. B. Fuchs, *Skew-symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra*, Funct. Anal. and Appl. **16** (1982) 114–126.

[41] J. S. Frame, *Charasteristic vectors for a product of $n$ reflections*, Duke Math. J. **18** (1951) 783–785.

[42] J. Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1992.

[43] H. Garland, *Arithmetic theory of loop algebras*, J. Algebra **53** (1978) 480–551.

[44] T. Gannon, *The classification of affine su(3) modular invariants*, Commun. Math. Phys. **161** (1994) 233–263.

[45] P. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, Les Houches, session XLIX, Champs, cordes et phénomènes critiques, E. Brézin, J. Zinn-Justin eds., Elsevier, New York, 1989.

[46] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, *Virasoro algebras and coset space models*, Phys. Lett. **152B** (1985) 88–92.

[47] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **103** (1986) 105–119.

[48] F.M. Goodman, P. de la Harpe and V.F.R Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, MSRI publications **14**, Springer, 1989.

[49] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Two-dimensional conformal invariant theories on a torus*, Nucl. Phys. **B275** (1986) 580–616.

[50] V. G. Kac, *Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras*, Lect. Notes in Phys. **94** (1979) 441–445.

[51] V. G. Kac, *Infinite dimensional algebras*, Cambridge University Press, 1990.

[52] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, 1995, Graduate Texts in Mathematics.

[53] S. V. Ketov, *Conformal field theory*, World Scientific, Singapore, 1994.

[54] A. Kirillov Jr., V. Ostrik, *On a q-analog of the McKay correspondence and the ADE classification of $\widehat{sl}_2$ conformal field theories*, Adv. Math. **171** (2002) 183–227.

[55] F. Klein, *Lectures on the Icosahedron and the solution of the equation of the fifth degree*, Dover Publ., New York, 1956.

[56] V. Kodiyalam, V. S. Sunder, *Flatness and fusion coefficients*, Pacific J. of Math. **201** (2001).

[57] B. Konstant, *The McKay correspondence, the Coxeter element and representation theory*, The Mathematical heritage of Élie Cartan, Astérisque (1985) 209–255.

[58] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 303–334.

[59] Yu. I. Manin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, Preprint Montreal University, CRM-1561, 1988.

[60] J. McKay, *Graphs, singularities and finite groups*, Proc Symp. Pure Math., **37** (1980) 183–186.

[61] J. McKay, *Representations and Coxeter graphs*, The Geometric Vein, Springer-Verlag (1982) 549–554.

[62] G. Moore, N. Seiberg, *Naturality in conformal field theory*, Nucl. Phys. **B313** (1989) 16–40.

[63] G. Moore, N. Seiberg, *Classical and quantum conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **123** (1989) 177–254.

[64] W. Nahm, *Conformal field theory : a bridge over troubled waters*, in Quantum Field Theory – A Twentieth Century Profile, Hindustani Book Agency and Indian National Science Academy (2000) 571–604.

[65] A. Ocneanu, *Quantum symmetries, operator algebras and invariant for manifolds*, Talk given at the First Caribbean Spring School of Mathematical and Theoretical Physics, Saint-François-Guadeloupe, 1993.

[66] A. Ocneanu, *Paths on Coxeter diagrams : from Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors*, Talks given at the Centre de Physique Théorique, Luminy, Marseille, 1995.

[67] A. Ocneanu, *Paths on Coxeter diagrams : from Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors*, Notes taken by S. Goto, AMS Fields Institute Monographs **13** (1999), Rajarama Bhat et al eds.

[68] A. Ocneanu, *Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras*, Operator algebras and Appl., Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., **136**, Cambridge Univ. Press (1988) 119–172.

[69] A. Ocneanu, (Lecture Notes written by Y. Kawahigashi), *Quantum Symmetry, Differential Geometry of Finite Graphs and Classification of Subfactors*, Univ. of Tokyo Seminar Notes (1990).

[70] A. Ocneanu, *Higher Coxeter systems*, Talk given at MSRI, http ://www.msri.org/publications/ln/msri/2000/subfactors/ocneanu.

[71] A. Ocneanu, *The Classification of subgroups of quantum SU(N)*, Lectures at Bariloche Summer School, Argentina, Jan. 2000, AMS Contemp. Math. **294**, R. Coquereaux, A. García and R. Trinchero eds.

[72] O. Ogievetsky, *Uses of quantum spaces*, Lectures at Bariloche Summer School, Argentina, Jan. 2000, AMS Contemp. Math. **294**, R. Coquereaux, A. García and R. Trinchero eds.

[73] V. Pasquier, *Two-dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams*, Nucl.Phys. **B285** (1987) 162–172.

[74] V. Pasquier, *Operator content of the ADE lattice models*, J. Phys. **A 20** (1987) 5707–5717.

[75] V.B. Petkova, J.-B. Zuber, *From CFT's to Graphs*, Nucl Phys. **B463** (1996) 161–193.

[76] V.B. Petkova, J.-B. Zuber, *Conformal field theory and graphs*, Talk given at the 21st Intern. Coll. on Group Theor. Methods in Physics, Goslar, Germany, July 1996, hep-th/9701103.

[77] V.B. Petkova, J.-B. Zuber, *Generalised twisted partition functions*, Phys. Lett. **B504** (2001) 157–164.

[78] V.B. Petkova, J.B. Zuber, *The many faces of Ocneanu cells*, Nucl. Phys. **B603** (2001) 449–496.

[79] V. Petkova, J.-B. Zuber, *Conformal field theories, graphs and quantum algebras*, hep-th/0108236.

[80] P. Roche, *Ocneanu cell calculus and integrable lattice models*, Commun. Math. Phys. **127** (1990) 395–424.

[81] N. C. Saldanha and C. Tomei, *Spectra of semi-regular polytopes*, Informes de Matemática, Série A-109-Julho/94, IMPA.

[82] G. Schieber, *Action d'un groupe quantique de dimension finie sur l'espace des matrices complexes*, Mémoire de DEA, Faculté de Sciences de Luminy, Marseille, 1998.

[83] M. Sweedler, *Hopf Algebras*, W.A. Benjamin, 1969.

[84] M. Takeuchi, *Matched pairs of groups and bismash products of Hopf Algebras*, Commun. Algebra **9** (1981) 841–882.

[85] R. Trinchero, private notes.

[86] R. Trinchero, private communication.

[87] I. T. Todorov, *Two-dimensional conformal field theory and beyond. Lessons from a continuing fashion*, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste (1999).

[88] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2-D conformal field theory*, Nucl. Phys. **B300** (1988) 360–376.

[89] J.-B. Zuber, *CFT, BCFT, ADE and all that*, Lectures at Bariloche Summer School, Argentina, Jan. 2000, AMS Contemp. Math. **294**, R. Coquereaux, A. García and R. Trinchero eds.