



**HAL**  
open science

## Point fixe lié à une orbite périodique d'un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$

Boris Kolev

► **To cite this version:**

Boris Kolev. Point fixe lié à une orbite périodique d'un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ . Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1990, 310 (12), pp.831-833. hal-00003274

**HAL Id: hal-00003274**

**<https://hal.science/hal-00003274>**

Submitted on 30 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# POINT FIXE LIÉ À UNE ORBITE PÉRIODIQUE D'UN DIFFÉOMORPHISME DU PLAN

BORIS KOLEV

RÉSUMÉ. Étant donné un difféomorphisme  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$  qui possède une orbite périodique, on montre comment la théorie du point fixe de Nielsen peut être utilisée pour établir directement l'existence d'un point fixe lié à cette orbite périodique.

## 1. INTRODUCTION

Soient  $f$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{O} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  une orbite périodique de  $f$ , de période  $n$ . Supposons que  $f$  possède un point fixe  $P_0$ . On dit que  $P_0$  n'est pas lié à l'orbite périodique  $\mathcal{O}$  s'il existe une courbe de Jordan  $\mathcal{C}$ , bordant un disque  $D$ , telle que :

- (1)  $\mathcal{O} \subset \text{Int}(D)$  ,
- (2)  $P_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus D$  ,
- (3)  $f(\mathcal{C})$  est isotope à  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ .

Dans le cas contraire, on dit que  $P_0$  est lié à  $\mathcal{O}$ .

*Exemple.* Le point fixe d'une rotation d'angle  $2k\pi/n$  est lié à n'importe quelle orbite périodique de cette rotation.

Un des corollaires du théorème de translation plane de Brouwer énonce que tout homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ , qui préserve l'orientation et possède une orbite périodique, a un point fixe ([3, 4]). En utilisant ce résultat et les travaux de Thurston sur la classification des difféomorphismes des surfaces, J.-M. Gambaudo a montré, dans un article récent [5] que tout difféomorphisme  $C^1$  du disque qui préserve l'orientation et possède une orbite périodique, possède également un point fixe lié à cette orbite périodique.

Il nous est apparu que ce résultat était une conséquence directe de la théorie du point fixe de Nielsen. C'est ce que nous proposons de développer ici. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant :

---

*Date:* 2 avril 1990.

*1991 Mathematics Subject Classification.* 55M20; 57N05; 58C30; 58F20.

*Key words and phrases.* Dynamics of surfaces homeomorphisms; Nielsen theory.

Je remercie Jean-Marc Gambaudo pour son aide et ses encouragements précieux durant la préparation de ce travail.

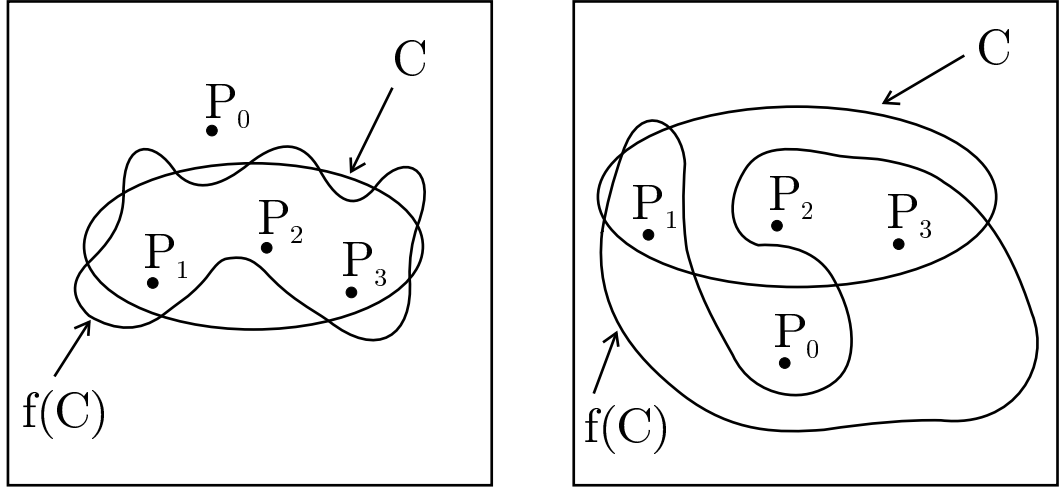


FIG. 1 – A gauche,  $\mathcal{C}$  et  $f(\mathcal{C})$  sont isotopes dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ , à droite, elles ne le sont pas.

**Théorème 1.1.** *Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un difféomorphisme  $C^1$  préservant l'orientation. Si  $f$  possède une orbite périodique  $\mathcal{O}$ , alors  $f$  possède un point fixe lié à  $\mathcal{O}$ .*

*Remarque.* L'hypothèse de différentiabilité est simplement technique et n'intervient qu'au voisinage des points de l'orbite périodique de  $f$ . Une démonstration semblable devrait être valable sans cette hypothèse, voir [4, p. 320].

## 2. CLASSES DE NIELSEN

Nous résumons les éléments de la théorie dont nous avons besoin et que l'on peut trouver dans [6] et [7].

Soient  $M$  une surface compacte et  $\pi : \overline{M} \rightarrow M$  son revêtement universel. Considérons un homéomorphisme  $\tau : M \rightarrow M$ . Deux points fixes de  $\tau$ ,  $P_0$  et  $P_1$  sont *Nielsen-équivalents* s'il existe un relèvement  $t$  de  $\tau$  fixant à la fois un point  $\overline{P}_0 \in \pi^{-1}(P_0)$  et un point  $\overline{P}_1 \in \pi^{-1}(P_1)$  ou, de façon équivalente, s'il existe un arc  $c$  joignant  $P_0$  à  $P_1$  et homotope à l'arc  $\tau(c)$  relativement à  $P_0, P_1$ . Les classes d'équivalence pour cette relation sont les *classes de Nielsen* de  $\tau$ . Chaque classe de Nielsen est un sous-ensemble isolé de  $Fix(\tau) = \{P \in M; \tau(P) = P\}$ , on peut donc définir son indice, qui est un entier relatif, et il existe seulement un nombre fini de classes ayant un indice non nul. Ce sont les classes essentielles; leur nombre  $N(\tau)$ , appelé nombre de Nielsen de  $\tau$ , est un invariant d'homotopie, de sorte que toute application homotope à  $\tau$  possède au moins  $N(\tau)$  points fixes. En désignant ces classes par

$F_1, F_2, \dots, F_N$  et par  $j_1, j_2, \dots, j_N$  leur indice respectif, on a la relation :

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^N j_k = L(\tau)$$

où

$$L(\tau) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \operatorname{tr} (\tau_{*i} : H_i(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_i(M; \mathbb{Q}))$$

est le nombre de Lefschetz de  $\tau$ .

Dans le cas où  $\chi(M) < 0$  ( $\chi(M)$  étant la caractéristique d'Euler de  $M$ ) et  $\tau$  un homéomorphisme qui préserve l'orientation, Nielsen a montré que  $j_k \leq 1$  ( $k = 1, \dots, N$ ), voir [7, pp. 17-19], et c'est là le résultat essentiel dont nous aurons besoin par la suite.

### 3. PREUVE DU THÉORÈME

Pour commencer, nous identifions  $\mathbb{R}^2$  au complémentaire du pôle Nord  $P_\infty$  de la sphère unité  $S^2$  grâce à la projection stéréographique.  $f$  s'étend alors en un homéomorphisme  $\hat{f}$  de  $S^2$  qui fixe  $P_\infty$ .

Soient  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  l'ensemble des points de l'orbite périodique  $\mathcal{O}$  de  $f$  et  $M$  la surface obtenue en compactifiant  $S^2 \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  de la façon suivante. On remplace chaque  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) par un cercle  $S_i$ , le cercle des vecteurs unitaires tangents en ce point.  $\hat{f}$  étant de classe  $C^1$  au voisinage des points  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , la restriction de  $\hat{f}$  à  $S^2 \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  induit un homéomorphisme  $\tau : M \rightarrow M$  qui coïncide avec  $f|_{S^2 \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_n\}}$  en dehors du bord de  $M$  (voir [2]).

Remarquons que  $\hat{f}$  et  $\tau$  ont les mêmes points fixes et que les points fixes de  $\hat{f}$ , en dehors de  $P_\infty$ , sont exactement les points fixes de  $f$ .

**Lemme 3.1.** *Soit  $P_0$  un point fixe de  $f$  non lié à  $\mathcal{O}$ . Alors  $P_0$  et  $P_\infty$  sont dans la même classe de Nielsen de  $\tau$ .*

*Démonstration.*  $P_0$  n'étant pas lié à  $\mathcal{O}$ , il existe une courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  dans  $S^2$ , séparant  $\{P_0, P_\infty\}$  de  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  et telle que  $\hat{f}(\mathcal{C})$  soit isotope à  $\mathcal{C}$  dans  $S^2 \setminus \{P_0, P_\infty, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ .

Cette courbe de Jordan borde, dans  $M$ , un disque  $\Delta$  qui contient  $P_0$  et  $P_\infty$ . De même  $\mathcal{C}' = \tau(\mathcal{C})$  borde un disque  $\Delta' = \tau(\Delta)$  qui contient  $\tau(P_0) = P_0$  et  $\tau(P_\infty) = P_\infty$ .

$\mathcal{C}$  se relève donc dans  $\overline{M}$ , le revêtement universel de  $M$ , en une courbe fermée  $\overline{\mathcal{C}}$  bordant un disque  $\overline{\Delta}$  tel que  $\pi(\overline{\Delta}) = \Delta$ . Par ailleurs, une isotopie  $\mathcal{C}_s$  ( $s \in [0, 1]$ ) entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  se relève en une isotopie  $\overline{\mathcal{C}}_s$  entre  $\overline{\mathcal{C}}$  et un relèvement  $\overline{\mathcal{C}'}$  de  $\mathcal{C}'$  bordant un disque  $\overline{\Delta}'$  tel que  $\pi(\overline{\Delta}') = \Delta'$ .

Soit  $t$  l'unique relèvement de  $\tau$  tel que  $t(\Delta) = \overline{\Delta}'$ .  $\overline{\Delta}$  (resp.  $\overline{\Delta}'$ ) contient un unique point  $\overline{P}_\infty \in \pi^{-1}(P_\infty)$  [resp.  $\overline{P}'_\infty \in \pi^{-1}(P_\infty)$ ] et l'on a, par construction,  $t(\overline{P}_\infty) = \overline{P}'_\infty$ . Or  $\overline{P}_\infty \in \overline{\Delta}'$  : sinon il existerait

$s \in [0, 1]$  tel que  $\overline{P}_\infty \in \overline{\mathcal{C}}_s$ , ce qui est exclu puisque l'isotopie  $\mathcal{C}_s$  évite  $P_\infty$  par hypothèse. Donc  $\overline{P}'_\infty = \overline{P}_\infty = t(\overline{P}_\infty)$ .

Le même argument valant pour  $\overline{P}_0 = \pi^{-1}(P_0) \cap \overline{\Delta}$ , il en résulte que  $t(\overline{P}_0) = \overline{P}_0$ . Donc  $P_0$  et  $P_\infty$  sont dans la même classe de Nielsen de  $\tau$ .  $\square$

**Lemme 3.2.**  $N(\tau) \geq 2$ .

*Démonstration.* Remarquons que  $L(\tau) = 1 - \text{tr}(\tau_{*1}) = 2$ . Ceci étant, nous distinguons deux cas suivant que la période  $n$  de  $\mathcal{O}$  est égale ou strictement supérieure à 2.

Si  $n = 2$ ,  $M$  est un anneau dont  $\tau$  permute les bords. En considérant un revêtement à deux feuillets, on peut montrer par un argument classique, voir [3] et [4], que  $\tau$  possède exactement deux classes de Nielsen, chacune ayant un indice égal à 1.

Si  $n \geq 3$ ,  $\chi(M) < 0$  et d'après la remarque faite à la fin du paragraphe précédent et la relation (2.1), on a nécessairement  $N(\tau) \geq 2$ .  $\square$

*Preuve du Théorème 1.1.* D'après le lemme 3.2,  $\tau$  possède au moins deux points fixes dont un au moins n'est pas dans la même classe que  $P_\infty$ . Il résulte alors du lemme 3.1 que ce point est un point fixe de  $f$  lié à  $\mathcal{O}$ .  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] M. Bonino, *Nielsen theory and linked periodic orbits of homeomorphisms of  $\mathbb{S}^2$* , Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **140** (2006), 425–430.
- [2] R. Bowen, *Entropy and the fundamental group*, The Structure of Attractors in Dynamical Systems (Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N.d., 1977), Lecture Notes in Math., vol. 668, Springer, Berlin, 1978, pp. 21–29. MR 80d :58049
- [3] P. Boyland, *Notes on dynamics of surface homeomorphisms : lectures by p. boyland and j. franks*, 1989, notes by C. Carroll, J. Guaschi and T. Hall, August 1989, Warwick, pp. 1–48.
- [4] Albert Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Enseign. Math. (2) **33** (1987), 315–322. MR MR925994 (89d :55004)
- [5] J.-M. Gambaudo, *Periodic orbits and fixed points of a  $C^1$  orientation-preserving embedding of  $D^2$* , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **108** (1990), 307–310. MR MR1074717 (91h :57008)
- [6] B. J. Jiang, *Lectures on Nielsen fixed point theory*, Contemporary Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983, ISBN 0-8218-5014-8. MR MR685755 (84f :55002)
- [7] J. Nielsen, *Surface transformation classes of algebraically finite type*, Danske Vid. Selsk. Math.-Phys. Medd. **21** (1944), 89. MR MR0015791 (7,469c)

CMI, 39, RUE F. JOLIOT-CURIE, 13453 MARSEILLE CEDEX 13, FRANCE  
*E-mail address:* kolev@cmi.univ-mrs.fr