



HAL
open science

Fonctions Holomorphes Cliffordiennes

Guy Laville, Ivan Ramadanoff

► **To cite this version:**

Guy Laville, Ivan Ramadanoff. Fonctions Holomorphes Cliffordiennes. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1998, 326, pp.307-310. hal-00003235

HAL Id: hal-00003235

<https://hal.science/hal-00003235>

Submitted on 3 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fonctions holomorphes Cliffordiennes

Guy Laville et Ivan Ramadanoff

Résumé.- Soit $\mathbb{R}_{0,2m+1}$ l'algèbre de Clifford de \mathbb{R}^{2m+1} muni d'une forme quadratique de signature négative, $D = \sum_{i=0}^{2m+1} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, Δ le Laplacien ordinaire. Les fonctions holomorphes Cliffordiennes f sont les fonctions satisfaisant à $D\Delta^m f = 0$. Nous étudions les solutions polynomiales et singulières, les représentations intégrales et leurs conséquences et enfin le fondement de la théorie des fonctions elliptiques Cliffordiennes.

Cliffordian holomorphic functions

Abstract.- Let $\mathbb{R}_{0,2m+1}$ be the Clifford algebra of \mathbb{R}^{2m+1} with a quadratic form of negative signature, $D = \sum_{i=0}^{2m+1} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, Δ the ordinary Laplacian. The holomorphic Cliffordian functions are solutions of $D\Delta^m f = 0$. We study the polynomial and singular solutions, representation integral formulas and the foundation of the Cliffordian elliptic function theory.

1. INTRODUCTION. – La théorie des fonctions d'une variable complexe (dimension réelle 2) a été développée en dimensions supérieures dans deux directions : les fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes (utilisation du corps \mathbb{C} , dimension réelle $2n$) et la théorie des fonctions monogènes (équation de Dirac, utilisation des algèbres de Clifford, dimension réelle n). Aucune de ces deux théories n'est satisfaisante si l'on veut avoir certaines parties très fécondes de la première théorie : fonctions elliptiques, fonction thêta, etc ... De façon analogue la théorie des fonctions de "plusieurs variables Cliffordiennes" présente certaines difficultés dues au manque de solutions des opérateurs (voir [2], [3], [4]).

Ceci nous conduit de façon naturelle à la théorie présentée.

2. NOTATIONS ET DÉFINITIONS. – Soit $\mathbb{R}_{0,2m+1}$ l'algèbre de Clifford de l'espace vectoriel V de dimension réelle $2m+1$ muni d'une forme quadratique de signature négative. Soit S l'ensemble des scalaires de $\mathbb{R}_{0,2m+1}$,

S peut être identifié avec \mathbb{R} . Soit $\{e_i\}$ $i = 1, \dots, 2m + 1$ une base orthonormale de V et posons $e_0 = 1$. Définissons l'opérateur (dit de Cauchy, Fueter, Dirac, voir [1])

$$D = \sum_{i=0}^{2m+1} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

DÉFINITION 2.1. – Soit Ω un ouvert de $S \oplus V$. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{0,2m+1}$ sera dite holomorphe Cliffordienne à gauche quand

$$D\Delta^m f = 0.$$

Δ^m étant le laplacien ordinaire itéré m fois.

REMARQUE 1 – On pourrait ne considérer que les fonctions $f : \Omega \rightarrow S \oplus V$ satisfaisant à l'équation ci-dessus. Ces fonctions peuvent engendrer les précédentes par combinaisons linéaires à droite.

REMARQUE 2 – Soit $x = \sum_{i=0}^{2m+1} x_i e_i$, $x_i \in \mathbb{R}$ alors f est holomorphe Cliffordienne si et seulement si $\Delta^m f(x) = 0$ et $\Delta^{m+1}(xf(x)) = 0$.

3. SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES – Posons :

$$\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{2m+1}) \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{N} \text{ et } |\alpha| = \sum_{i=0}^{2m+1} \alpha_i.$$

Considérons l'ensemble formé des éléments α_0 fois e_0 , α_1 fois $e_1, \dots, \alpha_{2m+1}$ fois e_{2m+1} ; cet ensemble sera noté $\{e_\nu\}$. Posons :

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{|\alpha|!} \sum_{\mathfrak{G}} \prod_{\nu=1}^{|\alpha|-1} (e_{\sigma(\nu)} x) e_{\sigma(|\alpha|)}$$

la somme étant étendue sur tous les éléments σ du groupe des permutations \mathfrak{G} .

Théorème 3.1. – $P_\alpha(x)$ est un polynôme de degré $|\alpha| - 1$ en x , holomorphe Cliffordien et tout polynôme holomorphe Cliffordien est combinaison linéaire (à coefficients à droite) de tels polynômes.

Soit β un multiindice du même type que α . Posons :

$$S_\beta(x) = \frac{1}{|\beta|!} \sum_{\mathfrak{G}} \prod_{\nu=1}^{|\beta|-1} (x^{-1} e_{\sigma(\nu)}) x^{-1}.$$

Théorème 3.2. – $S_\beta(x)$ est une fonction holomorphe Cliffordienne définie sur $(S \oplus V) \setminus \{0\}$.

Démonstration – Les démonstrations de ces deux théorèmes se font soit par un calcul direct, soit par l'établissement du lien entre la structure algébrique et la dérivation.

Théorème 3.3 (fraction rationnelle) – Soit P un entier, $\{a_p\}$, $p = 1, \dots, P$, $\{b_q\}$, $q = 1, \dots, P + 1$ avec a_p et b_q éléments de $S \oplus V$. Alors il existe une fraction rationnelle, holomorphe Cliffordienne hors de ses singularités ayant les $\{a_p\}$ parmi ses zéros et les $\{b_q\}$ parmi ses pôles.

4. REPRÉSENTATION INTÉGRALE ET FORMULE DE TAYLOR –

Posons
$$N(x) = (-1)^m \frac{m+1}{2^{2m+1} m! \pi^{m+1}} x^{-1}.$$

Théorème 4.1. – Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{0,2m+1}$ une fonction holomorphe Cliffordienne et Γ un ouvert borné à bord régulier, $\bar{\Gamma} \subset \Omega$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\partial\Gamma} \Delta^m N(y-x) f(y) d\sigma(y) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \int_{\partial\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{m-k} N(y-x) D \Delta^{k-1} f(y) d\sigma(y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \int_{\partial\Gamma} \Delta^{m-k} N(y-x) \frac{\partial}{\partial n} D \Delta^{k-1} f(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Démonstration – La démonstration se fait par les méthodes classiques de théorie du potentiel et on en déduit le théorème suivant :

Théorème (formule de Taylor) – Soit f une fonction holomorphe Cliffordienne au voisinage d'un point $a \in S \oplus V$. Alors la série suivante est uniformément convergente dans un voisinage de a et on a l'égalité suivante dans ce voisinage

$$f(x) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(x - a)c_{\alpha}$$

la sommation étant faite pour tous les multiindices α et $c_{\alpha} \in \mathbb{R}_{0,2m+1}$.

5. DÉVELOPPEMENT DE LAURENT –

Théorème 5.1. – Soit B une boule de centre a et de rayon R dans $S \oplus V$ et f une fonction holomorphe Cliffordienne dans $B \setminus \{a\}$. Alors pour tout $x \in B \setminus \{a\}$ on a :

$$f(x) = \sum_a P_{\alpha}(x)c_{\alpha} + \sum_{\beta} S_{\beta}(x)d_{\beta}$$

où α et β sont de multiindices définis dans le paragraphe 3.

Démonstration – La démonstration de ce théorème est une application directe du théorème de représentation intégrale.

6. FONCTIONS ELLIPTIQUES CLIFFORDIENNES

Définition. – On appelle fonction elliptique Cliffordienne une fonction holomorphe Cliffordienne $2m + 2$ périodique définie sur $(S \oplus V) \setminus E$ où E est un ensemble de points tel que $E \cap K$ soit fini pour tout compact K .

Les théorèmes de la théorie classique des fonctions elliptiques se généralisent quand ceux-ci ne font intervenir implicitement ou explicitement que la structure vectorielle de l'ensemble de ces fonctions.

Construisons l'analogie de la fonction ζ de Weierstrass : soient $\omega_0, \dots, \omega_{2m+1}$, $2m + 2$ éléments de $S \oplus V$, \mathbb{R} -linéairement indépendants. Posons :

$$\Omega_K = 2 \sum_{j=0}^{2m+1} k_j \omega_j \quad \text{avec} \quad K = (k_0, \dots, k_{2m+1}) \in \mathbb{Z}^{2m+2}.$$

Théorème 6.1. – La fonction

$$\zeta_{2m+2}(x) = x^{-1} + \sum_{K \neq 0} \left((x - \Omega_K)^{-1} + \sum_{p=0}^{2m+1} (\Omega_K^{-1} x)^p \Omega_K^{-1} \right)$$

est bien définie par une série uniformément convergente sur tout compact ne contenant pas les singularités, est holomorphe Cliffordienne hors de ses singularités. Ses dérivées d'ordre supérieur ou égal à $2m + 1$ sont des fonctions elliptiques Cliffordiennes.

Comme dans le cas classique, cette fonction peut être mise comme fondement de la théorie des fonctions elliptiques Cliffordiennes (voir [5]).

Références bibliographiques

- [1] **F. BRACKS, R. DELANGHE, F. SOMMEN** - Clifford analysis ; *Pitman* (1982).
- [2] **G. LAVILLE** - Une famille de solutions de l'équation de Dirac avec champ électromagnétique quelconque ; *CRAS, t. 296, pp. 1029-1032* (1983).
- [3] **G. LAVILLE** - Sur l'équation de Dirac avec champ électromagnétique quelconque ; *Lecture notes n° 1165, pp. 130-149* (1985).
- [4] **V.P. PALAMODOV** - On "holomorphic" functions of several quatermonic variables C.A. Aytama (ed.) ; *Linear topological spaces and complex analysis II Ankara* (1995), pp 67-77.
- [5] **J. TANNERY, J. MOLK** - Eléments de la théorie des fonctions elliptiques ; *Gauthier-Villars* (1893-1902).

UPRES-A 6081 Département de Mathématiques
 Université de Caen
 14032 CAEN Cedex France
 glaville@math.unicaen.fr
 rama@math.unicaen.fr