



Des domaines de Fatou-Bieberbach à plusieurs feuillets

Claudio Meneghini

► To cite this version:

| Claudio Meneghini. Des domaines de Fatou-Bieberbach à plusieurs feuillets. 2003. hal-00003225

HAL Id: hal-00003225

<https://hal.science/hal-00003225>

Preprint submitted on 4 Nov 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des domaines de Fatou-Bieberbach à plusieurs feuillets *

Claudio Meneghini

12/12/2003

Résumé: nous définissons l'idée de bassin d'attraction pour l'itération des germes holomorphes attractifs de $(\mathbb{C}^N, 0)$ et la notion de domaine de Riemann-Fatou-Bieberbach: c'est un domaine de Riemann R biholomorphe à \mathbb{C}^N mais recouvrant une région $\Omega \subset \mathbb{C}^N$. Enfin, étant donné un endomorphisme de \mathbb{C}^N admettant un point fixe répulsif en 0 (satisfaisant une hypothèse technique supplémentaire), nous prouvons que le bassin d'attraction du germe inverse admet un recouvrement par un domaine de Riemann-Fatou-Bieberbach.

1 Introduction

Rappelons qu'un domaine de Fatou-Bieberbach est un ouvert de \mathbb{C}^N biholomorphe à \mathbb{C}^N ; le bassin d'attraction Ω d'un point fixe d'un automorphisme f de \mathbb{C}^N a cette propriété dans le cas attractif (voir [RR], appendice), et, parfois, dans le cas des applications tangentes à l'identité (voir [Wck]). Pour plus d'exemples de tels domaines, voir [BS], [BF], [FS], [G], [K], [My], [Si], [Ste] et [Stn].

Nous proposons une généralisation de ce concept, consistant en un domaine de Riemann (M, π) tel que M est biholomorphe à \mathbb{C}^N et pourtant $\pi(M)$ est un ouvert propre Ω de \mathbb{C}^N .

Nous montrerons que, étant donné un endomorphisme h de \mathbb{C}^N avec un point fixe répulsif régulier en 0 (voir déf. 6), le bassin potentiel d'attraction (déf. 5) de 0 pour l'inverse local h_0^{-1} peut être recouvert par un domaine de Riemann (M, π) biholomorphe à \mathbb{C}^N . Pour ce qui concerne les notions

*AMS MSC: 37F25, 37F05

fondamentales sur l'extension analytique, le lecteur pourra consulter [N], chap.2,6 ou [Ma] chap. 1(iv); pour la définition de domaine de Riemann, voir par exemple [GR], p.43; enfin, le théorème de Poincaré-Dulac peut être trouvé dans [RR], appendice, lemme 3.

2 Préliminaires

Soient \mathbf{N} et \mathbf{M} deux variétés complexes: rappelons que un **élément d'application holomorphe** de \mathbf{N} dans \mathbf{M} est une paire (U, f) , où U est un ouvert connexe de \mathbf{N} and f une application holomorphe définie sur U et à valeurs dans \mathbf{M} . Une **extension analytique** (S, π, j, F) d'un élément d'application holomorphe consiste en un domaine de Riemann connexe (S, π) au-dessus d'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{N}$ tel que $U \subset \pi(S)$, en une immersion holomorphe $j: U \rightarrow S$ telle que $\pi \circ j = \text{id}|_U$ et en une application holomorphe $F: S \rightarrow \mathbf{M}$ telle que $F \circ j = f$.

Un **morphisme** entre deux extensions analytiques $\mathcal{S} = (S, \pi, j, F)$ et $\mathcal{T} = (T, \varrho, \ell, G)$ du même élément (U, f) est une application holomorphe $h: T \rightarrow S$ telle que $h \circ \ell = j$. La composition de deux morphismes est un morphisme; si un morphisme admet une application holomorphe comme inverse, elle est encore un morphisme: dans ce cas, nous parlerons d'un **isomorphisme** d'extensions analytiques.

Définition 1 Une extension analytique $\mathcal{S} = (S, \pi, j, F)$ de l'élément (U, f) est **maximale** si, pour chaque extension analytique $\mathcal{T} = (T, \varrho, \ell, G)$ de (U, f) il existe un morphisme $h: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$.

Remarquons que deux extensions maximales du même élément sont forcément isomorphes et donc l'extension analytique maximale est unique à isomorphismes près.

Théorème 2 Tout élément (U, f) d'application holomorphe admet une extension analytique maximale ■

Pour une démonstration, on pourra consulter [N], chap. 2.6 ou ou bien [Ma] chap. 1(iv).

Le lemme suivant établit une liaison entre les extensions analytiques maximales de deux éléments qui sont inverses l'un de l'autre.

Lemme 3 Soient (\mathcal{U}, f) et (\mathcal{V}, g) deux éléments d'applications holomorphes entre ouverts de \mathbb{C}^N , inverses l'un de l'autre; soient (R, π, j, Φ) et (S, ρ, ℓ, Ψ) leur extensions analytiques maximales: alors, si $\mathcal{C} = \{\text{points critiques de } \Phi\}$ et $\mathcal{D} = \{\text{points critiques de } \Psi\}$, on a $\Phi(R \setminus \mathcal{C}) = \rho(S \setminus \mathcal{D})$.

Démonstration. **A)** $\Phi(R \setminus \mathcal{C}) \subset \rho(S \setminus \mathcal{D})$: soit $\xi \in R \setminus \mathcal{C}$ et $\Phi(\xi) = \eta$: il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_1 de ξ , ouverts $\mathcal{U}_2 \subset \pi(\mathcal{U}_1)$, $\mathcal{V}_2 \subset \Phi(\mathcal{U}_1)$ et une fonction biholomorphe $g_2 : \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{U}_2$ (avec inverse $f_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2$) tels que (\mathcal{U}_2, f_2) et (\mathcal{U}, f) soient l'un prolongement analytique de l'autre, aussi que (\mathcal{V}_2, g_2) et (\mathcal{V}, g) . Par construction il existe des immersions holomorphes $\tilde{j} : \mathcal{U}_2 \rightarrow R$ et $\tilde{\ell} : \mathcal{V}_2 \rightarrow S$ telles que $\pi \circ \tilde{j} = \text{id}$ et $\rho \circ \tilde{\ell} = \text{id}$. Soit $\mathcal{V}_1 = \Phi(\mathcal{U}_1)$ et

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_2 : \Phi(x) = y\}.$$

Définissons $J : \mathcal{V}_2 \rightarrow \Sigma$ en posant $J(v) = (\tilde{j} \circ g_2(v), v)$. Or $(\Sigma, pr_2, J, \pi \circ pr_1)$ est une extension analytique de (\mathcal{V}_2, g_2) car $\pi \circ pr_1 \circ J = \pi \circ \tilde{j} \circ g_2 = g_2$. Mais (\mathcal{V}_2, g_2) est un prolongement analytique de (\mathcal{V}, g) , donc $(\Sigma, pr_2, J, \pi \circ pr_1)$ est une extension analytique de (\mathcal{V}, g) .

Grâce à la maximalité, cela entraîne qu'il existe une fonction holomorphe $h : \Sigma \rightarrow S$ telle que $\rho \circ h = pr_2$, donc $\eta = pr_2(\xi, \eta) = \rho \circ h(\xi, \eta) \in \rho(S)$.

Enfin, par différentiation composée, aucun point de $\rho^{-1}(\eta)$ ne peut être critique pour Ψ .

B) $\Phi(R \setminus \mathcal{C}) \supset \rho(S \setminus \mathcal{D})$: soit $s \in S$ un point régulier de Ψ : il existe un voisinage V de s ne contenant que points réguliers de Ψ . Ça signifie que, pour chaque $s' \in V$, il existe un élément d'application holomorphe $(\mathcal{V}', \tilde{g}_{s'})$ (avec $\rho(s') \in \mathcal{V}'$) qui est un prolongement analytique de (\mathcal{V}, g) ; en outre, il existe une immersion holomorphe $\tilde{\ell} : \mathcal{V}' \rightarrow V$. Par **A)** désormais prouvé, $\Psi(s) \in \pi(R \setminus \mathcal{C})$, donc il existe $p \in R \setminus \mathcal{C}$ et un voisinage W de p dans $R \setminus \mathcal{C}$ tels que $\pi(p) = \Psi(s)$ et $\pi^{-1}(\tilde{g}(\mathcal{V}')) \cap W \neq \emptyset$. Posons $W' = \pi^{-1}(\tilde{g}(\mathcal{V}')) \cap W$: on peut supposer, sans perte de généralité, que π soit inversible dans W' : alors il existe une immersion holomorphe $\tilde{j} : \tilde{g}(\mathcal{V}') \rightarrow W$. Donc, pour chaque $\zeta \in \tilde{j}(\tilde{g}(\mathcal{V}'))$, il existe $\eta \in \tilde{\ell}(\mathcal{V}')$ tel que $\Phi(\zeta) = \Phi(\tilde{j} \circ \tilde{g} \circ \rho(\eta))$. Or par la définition de extension analytique, on a $\Phi \circ \tilde{j} \circ \tilde{g} = \text{id}$, c'est-à-dire $\Phi(\zeta) = \rho(\eta)$. Considérons maintenant la fonction holomorphe $\Xi : W \times V \rightarrow \mathbb{C}^N$ définie en posant $\Xi(w, v) = \Phi(w) - \rho(v)$: on a $\Xi \equiv 0$ dans $\tilde{j}(\tilde{g}(\mathcal{V}')) \times \tilde{\ell}(\mathcal{V}')$: cet ensemble est ouvert dans $W \times V$, donc $\Xi \equiv 0$ dans $W \times V$. Cela implique finalement $\Phi(p) = \rho(s)$, ce qui conclut la démonstration. ■

Le lemme suivant, dont la démonstration est élémentaire, décrit le comportement d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe attractif P (dans la suite on supposera toujours $P = 0$).

Lemme 4 *Soit V un voisinage de 0 en \mathbb{C}^N et $F : V \rightarrow \mathbb{C}^N$ une application holomorphe avec un point fixe attractif en 0: alors il existe $\alpha < 1$ et un voisinage ouvert $\mathbf{R} \subset V$ de P tel que $F^{\text{on}}(\mathbf{R}) \subset \alpha^n \mathbf{R}$.*

3 Le théorème principal

Définition 5 Soit (\mathbf{R}, F) un élément d'application holomorphe avec un point fixe attractif en 0; on dira que p est dans le bassin potentiel d'attraction de 0 pour la dynamique de F (dans la suite: $p \in \text{BPA}(F, 0)$) s'il existe une suite finie de points $\{x_\nu\}_{\nu=0\dots N}$ et des prolongements analytiques (V_ν, F_ν) de F tels que $x_0 = p$, $x_\nu \in V_\nu$, $F_\nu(x_\nu) = x_{\nu+1}$, $F_\nu(V_\nu) \subset V_{\nu+1}$ et $\bigcirc_{\nu=0}^N F_\nu(V_0) \subset \mathbf{R}$.

Définition 6 Soit h un endomorphisme de \mathbb{C}^N avec un point fixe répulsif en 0; le point fixe est régulier s'il admet un voisinage \mathbf{R} sur lequel h est inversible, $[h|_{\mathbf{R}}]^{-k} \subset \alpha^k \mathbf{R}$ pour $0 < \alpha < 1$ et, pour chaque k , $h^{\circ k}$ est un revêtement topologique; on appellera \mathbf{R} un voisinage de régularité de 0.

Lemme 7 *Soit $0 \in \mathbb{C}^N$ un point fixe répulsif régulier pour h , \mathbf{R} un voisinage de régularité de 0 et $F := [h|_{\mathbf{R}}]^{-1}$. Alors $p \in \text{BPA}(F, 0)$ si et seulement si il existe $k \geq 1$ et un prolongement analytique (V_k, F_k) de $F^{\circ k}$ tel que $F_k(V_k) \subset \mathbf{R}$. Par conséquent, pour tout $k \geq 1$, $h^{\circ k}(\mathbf{R}) \subset \text{BPA}(F, 0)$.*

Démonstration: (\Rightarrow) étant trivial, on prouvera (\Leftarrow) . Pour chaque $0 < \nu \leq k$ et $x \in h^\nu(\mathbf{R})$ il existe un inverse locale $\phi_{\nu,x}$ de h^ν et un voisinage $\mathcal{U}_{\nu,x}$ de x tels que $\phi_{\nu,x}(\mathcal{U}_{\nu,x}) \subset \mathbf{R}$. Posons $x_0 := p$, $x_{\nu+1} := h^{\circ(k-\nu+1)} \circ \phi_{k-\nu,x_\nu}(x_\nu)$ et $F_\nu := h^{\circ(k-\nu+1)} \circ \phi_{k-\nu,x_\nu}$ pour $0 \leq \nu < k$. Alors $F_\nu(x_\nu) = x_{\nu+1}$, $F_\nu(\mathcal{U}_{\nu,x_\nu}) \subset \mathcal{U}_{\nu-1,x_{\nu+1}}$ et $\bigcirc_{\nu=0}^k F_\nu(\mathcal{U}_{k,p}) \subset \mathbf{R}$. On conclut en posant, selon la notation de la définition 5, $V_\nu := \mathcal{U}_{k-\nu,x_\nu}$. ■

Définition 8 *Un domaine de Riemann-Fatou-Bieberbach au-dessus d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ est un domaine de Riemann (R, π) au-dessus de Ω , tel que R est biholomorphe à \mathbb{C}^N .*

Théorème 9 Soit h un endomorphisme de \mathbb{C}^N avec un point fixe répulsif régulier en 0, \mathbf{R} un voisinage de régularité de 0, Ω le bassin potentiel d'attraction de 0 pour la dynamique de $F := [h|_{\mathbf{R}}]^{-1}$. Alors il existe un domaine de Riemann-Fatou-Bieberbach \mathbf{M} au-dessus de Ω .

Démonstration: rappelons que $F^{\circ n}(\mathbf{R}) \subset \alpha^n \mathbf{R}$ pour $0 < \alpha < 1$ convenable. Grâce au théorème de Poincaré-Dulac, on prouve, comme dans la démonstration du **théorème** de l'appendice de [RR], qu'il existe un automorphisme polynomial triangulaire G (avec $G(0) = 0$ et $G_*|_0 = F_*(0)$) de \mathbb{C}^N et une application polynomiale $T : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, avec $T = 0$, $T_*|_0 = \text{id}$ tels que la suite d'applications holomorphes $\{(G^{-k} \circ T \circ F^{\circ k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de \mathbf{R} , pour $k \rightarrow \infty$, vers une application holomorphe $\Psi_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$, satisfaisant

$$\Psi_0(0) = 0, (\Psi_0)_* = \text{id} \text{ et } G^{-n} \circ \Psi_0 = \Psi_0 \circ h^n. \quad (1)$$

Considérons le prolongement analytique maximal $(\mathbf{M}, \pi, j, \Psi)$ de Ψ_0 .

Lemme 10 Si $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ et $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$, on a $\pi(x_1) = \pi(x_2)$.

Démonstration: comme $\pi(x_1), \pi(x_2) \in \Omega$, il existe des voisinages \mathcal{U}_i de $\pi(x_i)$, des points $\{x_{ik}\}_{k=0 \dots N}$ (avec $x_{i0} = \pi(x_i)$, $i = 1, 2$) et des éléments d'applications holomorphes (W_{ik}, f_{ik}) , $i = 1, 2$, chacun desquels prolonge analytiquement F , tels que $x_{ik} \in W_{ik}$, $f_{ik}(x_{ik}) = x_{i,k+1}$ et $\bigcup_{l=0}^N f_{il}(W_{i0}) \subset \mathbf{R}$, ($i = 1, 2$) En outre, on peut supposer, sans perte de généralité, que j admet des prolongements analytiques j_{ik} sur tous les W_{ik} , de façon telle que $\{j_{ik}(W_{ik})\}$ ($i=1,2$) soient deux chaînes d'ouverts en \mathbf{M} connectant respectivement $j(0)$ avec x_1 et $j(0)$ avec x_2 . On peut aussi supposer que, pour k assez grand, $W_{ik} \equiv \mathbf{R}$ et $j_{ik} \equiv j$, $i = 1, 2$.

Posons $F_{ik} = \bigcup_{l=0}^k f_{il}$, $i = 1, 2$; on a $\Psi \circ j_{ik} \circ F_{ik} \circ \pi = G^k \circ \Psi$, donc

$$\Psi j_{1k} F_{1k} \pi(x_1) = G^k \Psi(x_1) = G^k \Psi(x_2) = \Psi j_{2k} F_{2k} \pi(x_2). \quad (2)$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que j soit inversible dans \mathbf{R} et Ψ injective dans $j(\mathbf{R})$. On a alors que (2) entraîne, pour $k = N$ $j_{1N} \circ F_{1N} \circ \pi(x_1) = j_{2N} \circ F_{2N} \circ \pi(x_2)$; en appliquant $h^{\circ N} \circ \pi$ on obtient $\pi(x_1) = \pi(x_2)$.

■ (lemme 10)

Lemme 11 On a: (i) $\Omega = \pi(\mathbf{M})$; (ii) π est un revêtement topologique et (iii) ψ est un revêtement topologique.

Démonstration. (i): grâce au lemme 7, $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} [h^{\circ k}(\mathbf{R})]$. Comme $\mathbf{R} \subset h(\mathbf{R})$ on a $h(\Omega) = \Omega$. Prouvons d'abord que $\Omega \subset \pi(\mathbf{M})$. Si $p \in \Omega$, il existe, encore grâce au lemme 7, $n \in \mathbb{N}$ et un prolongement analytique (V, F_n) de (\mathbf{R}, F^n) à un voisinage V de p , tel que $F_n(V) \subset \mathbf{R}$.

Cela entraîne que la suite d'applications holomorphes

$$\left\{ (G^{-k} \circ T \circ F^{\circ k-n}) \circ F_n \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (3)$$

(où T est l'application polynomiale de \mathbb{C}^N introduite avant l'équation (1)) converge (par rapport à k) uniformément sur les compacts de V vers une application holomorphe Ψ_p , qui est visiblement un prolongement analytique de Ψ_0 car F_n est un prolongement analytique de F^n . Ainsi $p \in \pi(\mathbf{M})$.

Soit $p \in \pi(\mathbf{M})$: il existe un prolongement analytique (\mathcal{U}_p, Ψ_p) de Ψ_0 à un voisinage \mathcal{U}_p de p .

On peut supposer Ψ_0 inversible sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}$: en soit $(\mathcal{V}, \Psi_0^{-1})$ l'inverse. On peut toujours supposer $\mathcal{V} \subset \mathbf{R}$. Comme

$$\Psi_0^{-1} \circ G^n \circ \Psi_0 = F^n \quad (4)$$

sur \mathbf{R} pour tout n et, par le lemme 1 de l'appendice de [RR], $\lim_{k \rightarrow \infty} G^{\circ k} = 0$ uniformément sur les compacts de \mathbb{C}^N , on voit que, pour chaque compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}_p$ et n assez grand, $G^n \Psi_p(\mathcal{K}) \subset \mathbf{R}$. On peut donc prolonger le membre gauche de (4) sur \mathcal{U}_p , en gagnant l'élément $\Psi_0^{-1} \circ G^n \circ \Psi_p$. Par conséquent, F^n aussi peut être prolongé sur \mathcal{U}_p à un élément (\mathcal{U}_p, F_n) et $F_n(p) \in \mathbf{R}$. Ainsi $p \in h^{\circ n}(\mathbf{R})$ et, grâce au lemme 7, $p \in \Omega$.

(ii): prouvons que π jouit de la propriété du relèvement des courbes. Soit $\gamma : I \rightarrow \pi(\mathbf{M})$ un chemin et $x \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Par construction de \mathbf{M} il existe un chemin $\beta : I \rightarrow \pi(\mathbf{M})$ tel que $\beta(0) = 0$, $\beta(1) = \gamma(0)$ admettant un relèvement $\tilde{\beta} : I \rightarrow \mathbf{M}$ tel que $\tilde{\beta}(0) = j(0)$ et $\tilde{\beta}(1) = x$. Soit $\Gamma := \beta * \gamma$: comme $\pi(\mathbf{M}) = \Omega$ par (i), $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} [h^{\circ k}(\mathbf{R})]$ et $h^k(\mathbf{R}) \subset h^{k+1}(\mathbf{R})$, on a $\Gamma(I) \subset h^N(\mathbf{R})$ pour N assez grand.

Or h^N est un revêtement, donc (\mathbf{R}, F^N) admet un prolongement analytique le long de Γ jusqu'à un élément (V, F_n) dans un voisinage de $\gamma(1) = \Gamma(1)$.

On peut définir un prolongement analytique de Ψ_0 le long de Γ à l'aide de (3).

Cela entraîne que Γ admet un relèvement $\tilde{\Gamma} : I \rightarrow \mathbf{M}$ tel que $\tilde{\Gamma}(0) = j(0)$ et $\tilde{\Gamma}(1/2) = x$. Posons $\tilde{\gamma}(t) := \tilde{\Gamma}((t+1)/2)$: on voit que $\tilde{\gamma}(0) = x$ et $\pi\tilde{\gamma} = \gamma$, donc γ admet un relèvement respectivement à π commençant à x , c'est-à-dire π est un revêtement topologique.

(iii): notons que la définition de Ψ_p par (3) entraîne que cette application est une limite de biholomorphismes locaux, donc soit Ψ_p est dégénérée au voisinage de p , soit elle y est biholomorphe. Le premier cas ne peut pas se présenter, car sinon, par prolongement analytique, même Ψ_0 serait dégénérée, ce qui contredit (1).

En outre, au voisinage de 0 on a

$$\Psi_0^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} h^k \circ S \circ G^k, \quad (5)$$

où S dénote l'inverse local de T au voisinage de 0. cette définition-là peut être prolongée à une application holomorphe Θ sur \mathbb{C}^N , car $\lim_{k \rightarrow \infty} G^k = 0$ uniformément sur les compacts de \mathbb{C}^N .

Or, au voisinage de chaque point $p \in \mathbb{C}^N$, la suite (5) est une suite de biholomorphismes locaux, car les $\{h^k\}$ le sont sur \mathbb{R} , donc soit Θ est dégénérée au voisinage de p soit p n'est pas un point critique pour Θ . Le premier cas ne peut pas se présenter, car sinon Θ serait dégénérée sur \mathbb{C}^N , ce qui contredit $\Theta_*(0) = \Psi_*(0)^{-1} = id$. Grâce au lemme 3 et à (ii), $\Theta(\mathbb{C}^N) = \Omega$.

Montrons que ψ jouit de la propriété du relèvement des courbes. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}^N$ un chemin et $y \in \psi^{-1}(\gamma(0))$: grâce au lemme 10, $y \in \pi^{-1}(\Theta(\gamma(0)))$. Puisque π est, par (iii), un revêtement, il existe un relèvement $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{M}$ de $\Theta\gamma$ commençant à y ; comme on a aussi $\psi\tilde{\gamma} = \gamma$, on voit que $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de γ par respectivement à Ψ , commençant à y , c'est à dire Ψ est un revêtement topologique.

■ (lemme 11)

Fin de la démonstration du théorème 9: montrons que Ψ est surjective: on peut recouvrir \mathbb{M} par un ensemble dénombrable d'ouverts $\{\mathcal{V}_l\}$ tels que $\pi|_{\mathcal{V}_l}$ est inversible; posons $\mathcal{U}_l := \pi(\mathcal{V}_l)$. Grâce au lemme 11 (i) et au fait que $h(\Omega) = \Omega$, pour tout n et tout l on aura aussi $h^n(\mathcal{U}_l) \subset \bigcup_{\lambda \in L(l,n)} \mathcal{U}_\lambda$, pour un certain ensemble d'indices $L(l,n)$.

Par construction $\Psi(M) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \Psi_l(\mathcal{U}_l)$, où chacun des (\mathcal{U}_l, Ψ_l) est un prolongement analytique de Ψ_0 , et donc $G^{-n}\Psi(\mathbb{M}) = \bigcup_{l=1}^{\infty} G^{-n}\Psi_l(\mathcal{U}_l)$. Par prolongement analytique de (1), on a, pour chaque l, n , $G^{-n}\Psi_l(\mathcal{U}_l) = \bigcup_{\lambda \in L(l,n)} \Psi_\lambda h(\mathcal{U}_l) \subset \Psi(M)$; en considérant la réunion sur l , on obtient $G^{-n}\Psi(M) \subset \Psi(M)$; mais alors, grâce au théorème de Poincaré- Dulac $\mathbb{C}^N = \bigcup_{n=1}^{\infty} G^{-n}\Psi(M) \subset \Psi(M)$, donc $\Psi(M) = \mathbb{C}^N$.

Finalement, grâce au lemme 11 (ii), Ψ est un revêtement topologique, donc, grâce à la connexité simple de \mathbb{C}^N , il s'agit d'une application biholomorphe.

■ (théorème 9)

4 Exemples

Soit $\mathcal{E} := \mathbb{C}_{(z,w)}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$: construisons une application holomorphe propre $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{E}$ avec un point fixe répulsif et $Jh \neq 0$ sur \mathcal{E} . Pour ce faire on pourra partir de l'application biholomorphe sur \mathbb{C}^2 , prenant valeurs en \mathcal{E} , de [RR], p.76 où 77, que nous allons appeler G . Soit $G(1,1) = (a,b) (\in \mathcal{E})$; or, pour α, β convenables l'application H définie en posant

$$H(z,w) := G(\alpha z - \alpha a + 1, \beta w - \beta b + 1)$$

a un point fixe répulsif en $p := (a,b)$. Enfin, on pourra considerer $h := H(a^{1-n}z^n, w)$, qui jouit évidemment des propriétés énoncées au debut du paragraphe.

Or, pour chaque voisinage V de p en \mathcal{E} et pour chaque entier positif k , on a $h^k(V) \subset \mathcal{E}$ par construction. Par ailleurs, $h^k|_V$ est un biholomorphisme local propre, et donc un revêtement topologique. Ainsi le point fixe p est régulier. Donc la construction du théorème 9 nous donne un domaine de Riemann \mathbf{M} biholomorphe à \mathbb{C}^N qui recouvre le bassin potentiel d'attraction de p par respect à un inverse local de h . Par construction, ce bassin est contenu en \mathcal{E} , et donc il est un sousensemble propre de \mathbb{C}^2 .

References

- [BF] G.T.Buzzard,J.E.Fornaess *An embedding of \mathbb{C} into \mathbb{C}^2 with hyperbolic complement* Math.Ann.306 (1996)
- [BS] E.Bedford,J.Smillie *Fatou-Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms* Indiana Univ.Math.J. 40 (1991)
- [FS] J.E.Fornaess,N.Sibony *Complex Hénon mappings in \mathbb{C}^2 and Fatou-Bieberbach domains* Duke Math.J. 65 (1992)
- [G] J.Globevnik *On Fatou-Bieberbach domains* Math.Zeitschrift 229 (1997)
- [GR] R.C. Gunning, H.Rossi *'Analytic functions of several complex variables'* Prentice Hall, 1965

- [K] Kimura,T. *On Fatou-Bieberbach domains in \mathbb{C}^2* J.Fac.Sci.Univ.Tokyo Sect. IA Math. 35 (1988)
- [Ma] B.Malgrange, '*Lectures on the theory of functions of several complex variables*' Tata institute of fundamental research, Bombay 1958
- [My] Myrberg.P.J *Über ganze analytische Funktionen zweier Variablen, welche eine schlichte und volumentreue gelöcherte Abbildung vermitteln* Ann.Acad.Sci.Fenn.Ser.A1 540 (1973)
- [N] R. Narasimhan, '*Several complex variables*' The university of Chicago Press, Chigago and London, 1971
- [RR] J.-P.Rosay and W.Rudin *Holomorphic maps from \mathbb{C}^n to \mathbb{C}^n* Trans. of the A.M.S. 310/1, November 1988
- [Si] Sibony,N.,Wong,P.M. *Remarks on the Casorati-Weierstrass theorem* Ann.Pol.Math. 39 (1981)
- [Ste] Stehlé, J.-L. *Plongements du disque dans \mathbb{C}^2* Séminaire P.Lelong (Analyse) 1970-71 Lectures Notes in Math.Vol 275 Springer,Berlin 1972
- [Stn] B.Stensönes *Fatou-Bieberbach domains with C^∞ -smooth boundary* Annals of Mathematics, 145 (1997)
- [Wck] B.J.Weickert *Attracting basins for automorphisms of \mathbb{C}^2* Invent.math. 132, (1998)