



HAL
open science

Sur la perfection de l'ensemble de Julia des fonctions entières transcendantes

Claudio Meneghini

► **To cite this version:**

Claudio Meneghini. Sur la perfection de l'ensemble de Julia des fonctions entières transcendantes. 2004. hal-00002491v3

HAL Id: hal-00002491

<https://hal.science/hal-00002491v3>

Preprint submitted on 25 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur l'ensemble de Julia des fonctions entières transcendantes *

Claudio Meneghini †

October 26, 2004

Résumé: Nous donnons une preuve élémentaire de la perfection (et de la non trivialité) de l'ensemble de Julia des fonctions entières à une variable complexe.

1 Introduction

Le but de cette note-ci est de donner des nouvelles démonstrations, tout-à-fait élémentaires, des résultats suivants, concernant l'ensemble de Julia \mathcal{J} d'une fonction entière transcendante f : A) : $\mathcal{J} \neq \emptyset$, et B) : \mathcal{J} est parfait. Ces résultats sont bien sûr déjà connus: la première preuve remonte à Baker ([1]) et utilisait la théorie des surfaces de recouvrement d'Ahlfors. Plus récemment, des démonstrations plus simples ont été publiées par Schwick ([10]) et Bargmann ([2]).

Ici, nous donnerons une preuve simplifiée de A) par rapport a celle de [2], n'utilisant que le principe du maximum et le théorème de Montel.

De l'autre côté, nous proposerons une approche beaucoup plus simple à démonstration de B), en adaptant un argument de [6] (voir th. 1, p.8) pour les fractions rationnelles, l'outil principal de la démonstration duquel est le lemme de renormalisation de Zalcman, lemme 2.

Parmi les nombreux articles à ce sujet le lecteur pourra consulter aussi [4, 5, 2, 7].

*AMS MSC: 37F25, 37F05

†Dép. de Mathématiques - Univ. de Parma - 85, Str. M.D'Azeglio - 43100 Parma (I)-
courriel: clamengh@bluemail.ch

2 Préliminaires

Le lemme suivant est connu comme le lemme de l'espace métrique (voir [9], p. 256).

Lemme 1 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $M : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ une fonction localement bornée. Soit $\sigma > 0$: alors pour tout $u \in M^{-1}(\mathbb{R}^+)$ il existe $w \in X$ tel que: (i) $d(u, w) \leq 2[\sigma M(u)]^{-1}$; (ii) $M(w) \geq M(u)$ et (iii) $d(x, w) \leq [\sigma M(w)]^{-1} \Rightarrow M(x) \leq 2M(w)$.*

Démonstration Supposons par l'absurde que le lemme soit faux: alors il existe $u \in X$ tel que, pour tout $w \in X$, l'un au moins des énoncés (i), (ii) et (iii) est faux. En particulier, $v_0 := u$ doit violer la condition (iii). Donc on peut trouver $v_1 \in X$ tel que $M(v_1) > 2M(v_0)$ mais $d(v_1, v_0) \leq 1/v_0$. Cela entraîne que (i) et (ii) sont vrais pour $w = v_1$ et, par conséquent, (iii) doit être faux pour $w = v_1$. Donc on peut trouver $v_2 \in X$ tel que $M(v_2) > 2M(v_1)$ mais $d(v_2, v_1) > [\sigma M(v_1)]^{-1}$, et donc $d(v_2, v_0) > \frac{1}{2}[\sigma M(v_0)]^{-1}$. Ceci entraîne que (i) et (ii) sont vrais pour $w = v_2$ et, par conséquent, (iii) doit être faux même pour $w = v_2$.

En continuant ce procédé, on peut construire, par induction, une suite $\{v_n\}$ telle que $v_0 = u$, $M(v_n) \geq 2M(v_{n-1}) \geq 2^n M(v_0)$ et $d(v_n, v_{n-1}) \leq 2^{1-k} [\sigma M(v_0)]^{-1}$. Cette suite-là est de Cauchy: en soit λ la valeur limite. On voit que M n'est pas bornée au voisinage de λ : c'est une contradiction.

■

La preuve ci-décrite du lemme suivant peut se trouver en ([6]); voir aussi [11].

Lemme 2 (Zalcman) *Si une famille $\mathcal{F} := \{f_\alpha\}$ de fonctions méromorphes sur \mathbb{D} n'est pas normale sur aucun voisinage de $v \in \mathbb{D}$, alors il existe des suites $\{v_n\} \rightarrow v$, $\{r_n\} \downarrow 0$, $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ et une fonction méromorphe non constante h sur \mathbb{C} telles que $\{f_n(v_n + r_n z)\} \rightarrow h$ uniformément sur tout compact de \mathbb{C} ; en outre, la dérivée sphérique h^\sharp est bornée sur \mathbb{C} .*

Démonstration Grâce à la non normalité à v , on peut trouver des suites $\{\xi_n\} \rightarrow v$ en \mathbb{D} et $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ telles que $f_n^\sharp(\xi_n) \geq n^3$. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $\{\xi_n\}$ soit contenu dans un sous-ensemble fermé X de \mathbb{D} .

Pour tout n , appliquons le lemme 1 à X avec la métrique euclidéenne, $M = f_n^\sharp$, $u = \xi_n$ et $\sigma = 1/n$; on obtient $v_n \in X$ tel que: (i) $d(\xi_n, v_n) \leq 1/n^2$, (ii) $f_n^\sharp(v_n) \geq n^3$ et (iii) $|x - v_n| \leq n[f_n^\sharp(v_n)]^{-1} \Rightarrow f_n^\sharp(x) \leq f_n^\sharp(v_n)$.

Posons maintenant $r_n := [f_n^\sharp(v_n)]^{-1}$ et $h_n(w) := f_n(v_n + r_n w)$. Chaque h_n est bien défini sur $\mathbb{D}(0, n)$ car: (i) $v_n \rightarrow v$ et (ii) $nr_n \leq 1/n^2$. La famille $\{h_n\}$ est normale, car, grâce à (iii) $(h_n)^\sharp \leq 2$ sur $B(0, n)$: grâce au théorème d'Ascoli, on peut extraire de $\{h_n\}$ une sous-suite uniformément convergente, sur tout compact de \mathbb{C} , vers une fonction méromorphe limite h telle que $h^\sharp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(0) = 1$; cela prouve que h n'est pas constante. Finalement, par holomorphicité, $h^\sharp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(z) \leq 2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
■

3 Le Julia n'est pas vide

Notation: dans la suite, f indiquera une fonction entière, $r \mapsto M_r$ sera défini par $M_r(f) := \max_{|z|=r} \{|f(z)|\}$ et on posera $\mathbb{D}_r := \mathbb{D}(0, r)$, $\mathbb{T}_r := \partial\mathbb{D}(0, r)$.

Rappelons que *l'ensemble de Fatou* \mathcal{F}_f de f est défini comme l'ensemble des points au voisinage desquels les itérées de f forment une famille normale de fonctions holomorphes; *l'ensemble de Julia* \mathcal{J}_f est le complémentaire de \mathcal{F}_f .

Théorème 3 *Soit f une fonction entière non affine: alors $\mathcal{J}_f \neq \emptyset$.*

Démonstration Quitte à remplacer f par $f^{\circ 2}$, on peut supposer que f ait au moins un point fixe (voir par exemple [4], p.157).

Cas a): f a au moins deux points fixes p_1 et p_2 : on peut supposer $p_i \in \mathcal{F}_f$, $i = 1, 2$, car sinon il n'y a rien à montrer. Il existe donc au moins deux composantes de Fatou \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 : donc $\emptyset \neq \partial\mathcal{C}_i \subset \mathcal{J}_f$.

Cas b): f a exactement un point fixe p . Supposons par l'absurde $\mathcal{F}_f = \mathbb{C}$: la théorie classique prouve que la suite $\{f^{\circ n}\}$, converge vers p uniformément sur tout compact de \mathbb{C} (voir par exemple [8], lemme 2.24, valable aussi pour les fonctions transcendentes). Or, montrons que ceci mène à une contradiction (supposons sans nuire à la généralité, $p = 0$).

Lemme 4 *Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{D}_r)$ contient l'une au moins des conférences $\mathbb{T}_{k,r}$, ($k = 1, 2, 3$).*

Démonstration. si c'était faux, on pourrait trouver, pour chaque r des $x_{r,k} \in \mathbb{T}_{k,r}$ tels que $x_{r,k} \notin f(\mathbb{D}_r)$ ($k = 1, 2, 3$).

Soit $\psi_r := f(rz)/r$: chaque ψ_r omet un point pour chacune des circonférences \mathbb{T}_k , $k = 1, 2, 3$: grâce à une conséquence immédiate du théorème de Montel (voir par exemple [3] th. 3.3.5), la famille de fonctions holomorphes $\{\psi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ est normale sur \mathbb{D} . Or, $M_r(f)$ croît plus vite que n'importe quelle puissance de r : en particulier, $M_{\sqrt{n}}(f) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Ceci entraîne qu'on peut trouver des $\{\zeta_n\} \in \mathbb{T}_{\sqrt{n}}$ tels que $f(\zeta_n) = M_{\sqrt{n}}(f) \geq n$. Ainsi $\{\zeta_n/n\} \rightarrow 0$ et $\psi_n(\zeta_n/n) = f(\zeta_n)/n \geq 1$: c'est une contradiction, car $\psi_n(0) \equiv 0$ et $\{\psi_n\}$ admet une sous-suite convergente. ■ (lemme 4)

Fin de la démonstration du théorème 3. Soient: $r \in \mathbb{R}$ comme au lemme 4, $\sigma(r)$ le rayon du cercle contenu dans $f(\mathbb{D}_r)$: alors, grâce au principe du maximum, $M_r(f^{on+1}) = \max_{w \in f(\mathbb{T}_r)} |f^{on}(w)| \geq \max_{w \in \mathbb{T}_{\sigma(r)}} |f^{on}(w)| \geq M_r(f^{on})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: donc l'orbite du compact \mathbb{T}_r ne converge pas sur 0: c'est une contradiction. ■

4 Le Julia est parfait

Le théorème suivant est une adaptation du théorème 1, p.8 de [6] au cas transcendant.

Théorème 5 *L'ensemble de Julia \mathcal{J} d'une fonction entière transcendante f est parfait.*

Démonstration Montrons d'abord que \mathcal{J} est infini: si \mathcal{J} contient au moins deux points, alors, grâce au théorème de Picard, $f^{-1}(\mathcal{J})$ est infini et on conclut en observant que $f^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$. Montrons par ailleurs que l'hypothèse que \mathcal{J} contienne exactement un point x , elle mène à une contradiction: en effet, $f(x) \in \mathcal{J}$, donc $f(x) = x$. Analoguement, $f^{-1}(x) = \{x\}$. Donc $z \mapsto (f(z) - x)/(z - x)$ est une fonction entière transcendante ne prenant pas la valeur 0, donc elle prend la valeur 1 une infinité de fois, grâce au théorème de Picard. Ainsi f a une infinité de points fixes. Si un nombre infini de ceux-ci sont contenus dans \mathcal{J} , on a terminé; si, au contraire, il y en a seulement un nombre fini, alors il existe un nombre infini de composantes de Fatou, ce qui entraîne aisément que \mathcal{J} est également infini.

Soit maintenant $\xi \in \mathcal{J}$: grâce au lemme 2, il existe des suites $\{v_k\} \rightarrow \xi$, $\{r_k\} \downarrow 0$, $\{f^{on_k}\} \subset \{f^{on}\}$ et une fonction méromorphe non constante h sur \mathbb{C}

telles que $\{f^{o_{n_k}}(v_k + r_k z)\} \rightarrow h$ uniformément sur tout compact de \mathbb{C} ; grâce au lemme de Hurwitz, h ne prend pas la valeur ∞ : c'est donc une fonction entière.

On peut trouver $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ tels que $h(z_0)$ et $h(z_1)$ soient deux points distincts de \mathcal{J} : grâce au lemme de Hurwitz, il existe deux suites $\{z_{0k}\} \rightarrow z_0$ et $\{z_{1k}\} \rightarrow z_1$ telles que $f^{o_{n_k}}(v_k + r_k z_{0k}) = h(z_0)$ et $f^{o_{n_k}}(v_k + r_k z_{1k}) = h(z_1)$. L'une des deux suites $\{(v_k + r_k z_{0k})\}$ et $\{(v_k + r_k z_{1k})\}$ n'est pas stationnaire et converge vers ξ dans \mathcal{J} . Cela conclut la démonstration. ■

References

- [1] I.N.Baker *Repulsive fixpoints of entire functions* Math.Z. 104 (1968)
- [2] D.Bargmann, *Simple proofs of some fundamental properties of the Julia set* Ergodic theory Dynamical Systems 19 (1999), 553-558
- [3] A.F.Beardon, *Iteration of rational functions* Springer Verlag, 1991
- [4] W.Bergweiler, *Iteration of meromorphic functions* Bull. Amer. Math. Soc. NS 29 (1993)
- [5] W.Bergweiler, *Comments et corrections to "Iteration of meromorphic functions"* 7 Dec. 2001
- [6] F.Berteloot, *Méthodes de changement d'échelles en analyse complexe* preprint
- [7] F.Berteloot, J.Duval *Une démonstration directe de la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia* Basel, Birkhäuser Prog. Math. 188, 221-222 (2000)
- [8] F.Berteloot, V.Mayer *Rudiments de dynamique holomorphe* Société Mathématique de France, EDP Sciences, 2001
- [9] M.Gromov, *Foliated plateau problem: part II: harmonic maps of foliations* GAFA, Vol. 1, No. 3 (1991), 253-320
- [10] W.Schwick *Repelling points in the Julia set* Bull. London Math. Soc. 29 (1997), 314-316

- [11] L.Zalcman *Normal Families: new perspectives* Bull. Amer. Math. Soc.
35 (1998)