

Sur la perfection de l'ensemble de Julia des fonctions entières transcendantes *

Claudio Meneghini †

August 25, 2004

Résumé: Nous donnons une preuve élémentaire de la perfection (et de la non trivialité) de l'ensemble de Julia des fonctions entières à une variable complexe.

1 Introduction

Le but de cette note-ci est de montrer, de façon élémentaire, que l'ensemble de Julia \mathcal{J} des fonctions entières transcendantes (à une variable complexe) est parfait et non vide. La perfection sera une conséquence du fait qu'un point isolé en \mathcal{J} est forcément périodique (lemme 4) et que, si une fonction admet un tel point, elle est affine (th. 3). Au fin de montrer que $\mathcal{J} \neq \emptyset$, il suffira de prouver que \mathbb{C} ne peut pas être le bassin d'attraction à un point pour une fonction transcendante entière. Ceci s'ensuivra (th. 5-c, lemme 6) d'une application presque immédiate du principe du maximum et du théorème de Montel.

Parmi les nombreux articles à ce sujet le lecteur pourra consulter, par exemple, [3, 4, 1, 6, 9].

2 Préliminaires

Le lemme suivant est connu comme le lemme de l'espace métrique (voir [8], p. 256).

*AMS MSC: 37F25, 37F05

†Dép. de Mathématiques - Univ. de Parma - 85, Str. M.D'Azeglio - 43100 Parma (I)-
courriel: clamengh@bluemail.ch

Lemme 1 Soit (X, d) un espace métrique complet et $M : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ une fonction localement bornée. Soit $\sigma > 0$: alors pour tout $u \in M^{-1}(\mathbb{R}^+)$ il existe $w \in X$ tel que: (i) $d(u, w) \leq 2[\sigma M(u)]^{-1}$; (ii) $M(w) \geq M(u)$ et (iii) $d(x, w) \leq [\sigma M(w)]^{-1} \Rightarrow M(x) \leq 2M(w)$.

Démonstration Supposons par l'absurde que le lemme soit faux: alors il existe $u \in X$ tel que, pour tout $w \in X$, l'un au moins des énoncés (i), (ii) et (iii) est faux. En particulier, $v_0 := u$ doit violer la condition (iii). Donc on peut trouver $v_1 \in X$ tel que $M(v_1) > 2M(v_0)$ mais $d(v_1, v_0) \leq 1/v_0$. Cela entraîne que (i) et (ii) sont vrais pour $w = v_1$ et, par conséquent, (iii) doit être faux pour $w = v_1$. Donc on peut trouver $v_2 \in X$ tel que $M(v_2) > 2M(v_1)$ mais $d(v_2, v_1) > [\sigma M(v_1)]^{-1}$, et donc $d(v_2, v_0) > \frac{1}{2}[\sigma M(v_0)]^{-1}$. Ceci entraîne que (i) et (ii) sont vrais pour $w = v_2$ et, par conséquent, (iii) doit être faux même pour $w = v_2$.

En continuant ce procédé, on peut construire, par induction, une suite $\{v_n\}$ telle que $v_0 = u$, $M(v_n) \geq 2M(v_{n-1}) \geq 2^n M(v_0)$ et $d(v_n, v_{n-1}) \leq 2^{1-k} [\sigma M(v_0)]^{-1}$. Cette suite-là est de Cauchy: en soit λ la valeur limite. On voit que M n'est pas bornée au voisinage de λ : c'est une contradiction.

■

La preuve ci-décrite du lemme suivant est due à Berteloot ([5]); voir aussi [10].

Lemme 2 (Zalcman) Si une famille $\mathcal{F} := \{f_\alpha\}$ de fonctions méromorphes sur \mathbb{D} n'est pas normale sur aucun voisinage de $v \in \mathbb{D}$, alors il existe des suites $\{v_n\} \rightarrow v$, $\{r_n\} \downarrow 0$, $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ et une fonction méromorphe non constante h sur \mathbb{C} telles que $\{f_n(v_n + r_n z)\} \rightarrow h$ uniformément sur tout compact de \mathbb{C} ; en outre, la dérivée sphérique $h^\#$ est bornée sur \mathbb{C} .

Démonstration Grâce à la non normalité à v , on peut trouver des suites $\{\xi_n\} \rightarrow v$ en \mathbb{D} et $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ telles que $f_n^\#(\xi_n) \geq n^3$. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $\{\xi_n\}$ soit contenu dans un sous-ensemble fermé X de \mathbb{D} .

Pour tout n , appliquons le lemme 1 à X avec la métrique euclidéenne, $M = f_n^\#$, $u = \xi_n$ et $\sigma = 1/n$; on obtient $v_n \in X$ tel que: (i) $d(\xi_n, v_n) \leq 1/n^2$, (ii) $f_n^\#(v_n) \geq n^3$ et (iii) $|x - v_n| \leq n[f_n^\#(v_n)]^{-1} \Rightarrow f_n^\#(x) \leq f_n^\#(v_n)$.

Posons maintenant $r_n := [f_n^\#(v_n)]^{-1}$ et $h_n(w) := f_n(v_n + r_n w)$. Chaque h_n est bien défini sur $\mathbb{D}(0, n)$ car: (i) $v_n \rightarrow v$ et (ii) $nr_n \leq 1/n^2$. La famille $\{h_n\}$ est normale, car, grâce à (iii) $(h_n)^\# \leq 2$ sur $B(0, n)$: grâce

au théorème d'Ascoli, on peut extraire de $\{h_n\}$ une sous-suite uniformément convergente, sur tout compact de \mathbb{C} , vers une fonction méromorphe limite h telle que $h^\sharp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(0) = 1$; cela prouve que h n'est pas constante. Finalement, par holomorphie, $h^\sharp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(z) \leq 2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. ■

3 Le Julia est parfait

Notation: dans la suite, f indiquera une fonction entière, $r \mapsto M_r$ sera défini par $M_r(f) := \max_{|z|=r} \{|f(z)|\}$ et on posera $\mathbb{D}_r := \mathbb{D}(0, r)$, $\mathbb{T}_r := \partial\mathbb{D}(0, r)$.

Rappelons que *l'ensemble de Fatou* \mathcal{F}_f de f est défini comme l'ensemble des points au voisinage desquels les itérées de f forment une famille normale de fonctions holomorphes; *l'ensemble de Julia* \mathcal{J}_f est le complémentaire de \mathcal{F}_f . Le théorème suivant montre que l'ensemble de Julia ne contient pas de points isolés:

Théorème 3 *S'il existe $\xi \in \mathcal{J}_f$ et $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathbb{D}(\xi, 2r) \cap \mathcal{J}_f = \{\xi\}$, alors f est une application affine.*

Démonstration Il faudra le lemme suivant:

Lemme 4 a) $\{f^{on}\} \rightarrow \infty$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}(\xi, 2r) \setminus \{\xi\}$; b) ξ est un point périodique de f ; c) si λ est la période de ξ , $\psi := f^{\circ\lambda}$ et $\beta \in \psi^{-1}(\xi)$, alors β est un point isolé de \mathcal{J}_ψ .

Démonstration a): c'est une conséquence immédiate du principe du maximum. b): si $f(\xi) = \xi$ il n'y a rien à montrer; si ξ est un point exceptionnel (c'est-à-dire, $\cup_{n=\xi}^\infty f^{-n}(\xi)$ est un ensemble fini) on a $f(z) = (z - \xi)^m e^{\varphi(z)}$, pour φ et m convenables, donc $f(\xi) = \xi$.

Supposons alors $f(\xi) \neq \xi$ et ξ non exceptionnel. Grâce au lemme 2, il existe des suites $\{v_k\} \rightarrow \xi$, $\{r_k\} \downarrow 0$, $\{f^{\circ n_k}\} \subset \{f^{\circ n}\}$ et une fonction méromorphe non constante h sur \mathbb{C} telles que $\{f^{\circ n_k}(v_k + r_k z)\} \rightarrow h$ uniformément sur tout compact de \mathbb{C} ; grâce au lemme de Hurwitz, h ne prend pas la valeur ∞ : c'est donc une fonction entière. Or, on voit aisément qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ tel que $h(U) \cap \mathcal{J}_f \neq \emptyset$: en effet, $h(\mathbb{C})$ évite au plus une valeur complexe et, comme $f(\xi) \neq \xi$, $\mathcal{J}_f \cap \mathbb{C}$ contient au moins deux points de \mathbb{C} . Soit E l'ensemble des points exceptionnels de f (rappelons qu'on n'a pas forcément $E \subset \mathcal{F}_f$ si f est transcendant). Grâce au théorème de Montel,

$\cup_{q \geq 1} f^{\circ q}(h(U)) \supset \mathcal{J}_f \setminus E$; comme on vient de supposer $\xi \notin E$, il existe $z_0 \in U$ et $\nu \in \mathbb{N}$ tels que $f^{\circ \nu} \circ h(z_0) = \xi$. Or, $f^{\circ \nu + n_k}(v_k + r_k z) - (v_k + r_k z) \rightarrow f^{\circ \nu} \circ h$, donc, grâce au lemme de Hurwitz, la fonction $f^{\circ \nu + n_k}(v_k + r_k z) - (v_k + r_k z)$ prend la valeur 0 pour k assez grand, c'est-à-dire, $f^{\circ n_k + \nu}$ admet un point fixe $q \in \mathbb{D}(\xi, r)$: grâce à a), on a forcément $q = \xi$.

c): tout d'abord, on a $\beta \in \mathcal{J}_\psi$, car $\beta \in \psi^{-1}(\mathcal{J}_\psi) = f^{-\nu}(\mathcal{J}_\psi) = f^{-\nu}(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f = \mathcal{J}_\psi$. Soit maintenant $s \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(\mathbb{D}(\beta, s)) \subset \mathbb{D}(\xi, 2r)$ et $\psi^{-1}(\xi) \cap \psi(\mathbb{D}(\beta, s)) = \{\beta\}$: alors, grâce à a), $\{\psi^{\circ n}\} \rightarrow \infty$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}(\xi, s) \setminus \{\beta\}$, c'est-à-dire $\mathbb{D}(\beta, s) \setminus \{\beta\} \subset \mathcal{F}_\psi$ ce qui conclut la démonstration. ■ (lemme 4)

Fin de la démonstration du théorème 3 Grâce au lemme 4, (avec $f = \psi$, $\beta = \xi$) β est un point périodique de ψ : comme $\psi(\beta) = \xi$ et $\psi(\xi) = \xi$, on a forcément $\beta = \xi$. On a aussi: $\{\psi^{\circ n}(\partial \mathbb{D}(\xi, r))\} \rightarrow \infty$. Soit maintenant R un nombre réel arbitraire; choisissons $q \in \mathbb{N}$ tel que $\psi^q(\partial \mathbb{D}(\xi, r)) \cap \overline{\mathbb{D}(\xi, 2R)} = \emptyset$. Comme $\psi(\xi) = \xi$, il existe une composante \mathcal{U} de $\psi^{-q}(\mathbb{D}(\xi, R))$ telle que $\mathcal{U} \subset \mathbb{D}(\xi, r)$. Or, par compacité, $\psi^{\circ q}$ est un revêtement ramifié de \mathcal{U} sur $\mathbb{D}(\xi, R)$: c'est à un feuillet, car on vient de montrer que la valeur ξ est prise une fois seulement, avec multiplicité 1. Ainsi $\psi^{\circ q}$ est injectif sur \mathcal{U} et, par conséquent, ψ l'est aussi sur $\psi^{\circ q-1}(\mathcal{U})$. Donc $\psi^{-1} : \mathbb{D}(\xi, R) \rightarrow \psi^{\circ q-1}(\mathcal{U})$ est un inverse bien défini de ψ sur $\mathbb{D}(\xi, R)$. Grâce à l'arbitrairété de R , ψ est biholomorphe sur \mathbb{C} , c'est-à-dire une application affine. ■

4 Le Julia n'est pas vide

Théorème 5 *Soit f une fonction entière non affine: alors $\mathcal{J}_f \neq \emptyset$.*

Démonstration Cas a): f n'a pas de points fixes. Considérons $z \mapsto (f^{\circ 2}(z) - z)/(f(z) - z)$: c'est une fonction entière ne prenant pas la valeur 1, donc elle prend la valeur 0 une infinité de fois, grâce au théorème de Picard. Ainsi il existe un nombre infini de points $\{z_n\}$ tels que $f^{\circ 2}(z_n) = z_n$.

Soient $p_1 \neq p_2$ deux tels points: on peut supposer $p_i \in \mathcal{F}_f$, $i = 1, 2$, car sinon il n'y a rien à montrer. Il existe donc au moins deux composantes de Fatou \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 : donc $\emptyset \neq \partial \mathcal{C}_i \subset \mathcal{J}_f$.

Cas b): f a au moins deux points fixes: c'est analogue.

Cas c): f a exactement un point fixe p . Supposons par l'absurde $\mathcal{F}_f = \mathbb{C}$: la théorie classique prouve que la suite $\{f^{\circ n}\}$, converge vers p uniformément sur tout compact de \mathbb{C} (voir par exemple [7], lemme 2.24 et 4.2, valables

aussi pour les fonctions transcendentes). Or, montrons que ceci mène à une contradiction (supposons sans nuire à la généralité, $p = 0$).

Lemme 6 *Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{D}_r)$ contient l'une au moins des conférences $\mathbb{T}_{k,r}$, ($k = 1, 2, 3$).*

Démonstration. si c'était faux, on pourrait trouver, pour chaque r des $x_{r,k} \in \mathbb{T}_r$ tels que $x_{r,k} \notin f(\mathbb{D}_r)$ ($k = 1, 2, 3$).

Soit $\psi_r := f(rz)/r$: chaque ψ_r omet un point pour chacune des conférences \mathbb{T}_k , $k = 1, 2, 3$: grâce à une conséquence immédiate du théorème de Montel (voir par exemple [2] th. 3.3.5), la famille de fonctions holomorphes $\{\psi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ est normale sur \mathbb{D} . Or, $M_r(f)$ croit plus vite que n'importe quelle puissance de r : en particulier, $M_{\sqrt{n}}(f) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Ceci entraîne qu'on peut trouver des $\{\zeta_n\} \in \mathbb{T}_{\sqrt{n}}$ tels que $f(\zeta_n) = M_{\sqrt{n}}(f) \geq n$. Ainsi $\{\zeta_n/n\} \rightarrow 0$ et $\psi_n(\zeta_n/n) = \{f(\zeta_n)\}/n \geq 1$: c'est une contradiction, car $\psi_n(0) \equiv 0$ et $\{\psi_n\}$ admet une sous-suite convergente. ■ (lemme 6)

Fin de la démonstration du théorème 5. Soient: $r \in \mathbb{R}$ comme au lemme 6, $\sigma(r)$ le rayon du cercle contenu dans $f(\mathbb{D}_r)$: alors, grâce au principe du maximum, $M_r(f^{n+1}) = \max_{w \in f(\mathbb{T}_r)} |f^{n+1}(w)| \geq \max_{w \in \mathbb{T}_{\sigma(r)}} |f^{n+1}(w)| \geq M_r(f^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: donc l'orbite du compact \mathbb{T}_r ne converge pas sur 0: c'est une contradiction. ■

References

- [1] D.Bargmann, *Simple proofs of some fundamental properties of the Julia set* Ergodic theory Dynamical Systems 19 (1999), 553-558
- [2] A.F.Beardon, *Iteration of rational functions* Springer Verlag, 1991
- [3] W.Bergweiler, *Iteration of meromorphic functions* Bull. Amer. Math. Soc. NS 29 (1993)
- [4] W.Bergweiler, *Comments et corrections to "Iteration of meromorphic functions"* 7 Dec. 2001
- [5] F.Berteloot, *Méthodes de changement d'échelles en analyse complexe* preprint

- [6] F.Berteloot, J.Duval *Une démonstration directe de la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia* Basel, Birkhäuser Prog. Math. 188, 221-222 (2000)
- [7] F.Berteloot, V.Mayer *Rudiments de dynamique holomorphe* Société Mathématique de France, EDP Sciences, 2001
- [8] M.Gromov, *Foliated plateau problem: part II: harmonic maps of foliations* GAFA, Vol. 1, No. 3 (1991), 253-320
- [9] W.Schwick *Repelling points in the Julia set* Bull. London Math. Soc. 29 (1997), 314-316
- [10] L.Zalcman *Normal Families: new perspectives* Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1998)