



HAL
open science

Une preuve élémentaire de la perfection de l'ensemble de Julia des fonctions entières

Claudio Meneghini

► **To cite this version:**

Claudio Meneghini. Une preuve élémentaire de la perfection de l'ensemble de Julia des fonctions entières. 2004. hal-00002491v1

HAL Id: hal-00002491

<https://hal.science/hal-00002491v1>

Preprint submitted on 5 Aug 2004 (v1), last revised 25 Oct 2004 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une preuve élémentaire de la perfection de l'ensemble de Julia des fonctions entières *

Claudio Meneghini †

August 6, 2004

Abstract

Mous montrons, de façon élémentaire, que l'ensemble de Julia des fonctions entières à une variable complexe est parfait (et non vide).

Mai se-fidà da li aqui plani (dicton de Pos·ciav, Gr·Ch)

1 Introduction

Le but de cette note-ci est de montrer, de façon élémentaire et détaillée, la perfection de l'ensemble de Julia des fonctions (transcendentes) entières à une variable complexe. Pour ce faire, on montrera qu'un point de Julia isolé d'une fonction entière f est forcément périodique (lemme 1): il s'ensuivra (théorème 2) que si f admet un tel point, elle est une application affine du plan complexe.

On démontrera aussi, à complément naturel de la perfection de \mathcal{J}_f , le fait qu'il n'est pas vide, moyennant un lemme de Pólya (lemme 9) qui nous permettra de déduire que \mathbb{C} ne peut pas être le bassin d'attraction à un point pour une fonction (transcendente) entière et de conclure. Cette preuve-ci sera donnée de façon plus synthétique. On utilisera aussi, dans cet article, le lemme de rénormalisation de Zalcman (lemme 7).

*AMS MSC: 37F25, 37F05

†Le courriel de l'auteur: clamengh@bluemail.ch

2 Le Julia est parfait

Rappelons que l'ensemble de Fatou \mathcal{F}_f d'une fonction entière f est défini comme l'ensemble des points au voisinage desquels les itérées de f forment une famille normale de fonctions holomorphes: c'est un ensemble ouvert. L'ensemble de Julia \mathcal{J}_f est le complémentaire de \mathcal{F}_f : c'est un ensemble fermé.

Lemme 1 *Soit h une fonction entière: s'il existe $\xi \in \mathcal{J}_h \cap \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$ tels que $\mathbb{D}(\xi, 2r) \cap \mathcal{J}_h = \{\xi\}$, alors ξ est un point périodique de h .*

Preuve: supposons, sans nuire à la généralité, $\xi = 0$. Si $h(0) = 0$ il n'y a rien à montrer; si 0 est un point exceptionnel (c'est-à-dire, $\cup_{n=0}^{\infty} h^{-n}(0)$ est un ensemble fini) on a $h(z) = z^m e^{\varphi(z)}$, pour une fonction entière φ opportune et un entier m convenable, donc on a de même $h(0) = 0$. Supposons alors $h(0) \neq 0$ et 0 non exceptionnel.

Puisque 0 est un point de non normalité, grâce au lemme de Zalcman (lemme 7), il existe une suite $\{p_k\} \rightarrow 0$, une suite de nombres réels positifs $\{\varrho_k\} \downarrow 0$, une sous-suite $\{h^{o_{n_k}}\}$ d'itérées et une application non constante $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbb{P})$, g tels que $\{h^{o_{n_k}}(p_k + \varrho_k z)\} \rightarrow g$, uniformément sur tout compact de \mathbb{C} ; grâce au lemme de Hurwitz (lemme 5), g ne prend pas la valeur ∞ , donc c'est en fait une fonction entière.

Or, on voit aisément qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ tel que $g(U) \cap \mathcal{J}_h \neq \emptyset$: en effet, $g(\mathbb{C})$ évite au plus une valeur complexe et, comme $h(0) \neq 0$, $\mathcal{J}_h \cap \mathbb{C}$ contient au moins deux points de \mathbb{C} .

Soit E l'ensemble des points exceptionnels de h (rappelons qu'on a pas forcément $E \subset \mathcal{F}_h$ pour les fonctions transcendentales).

Grâce au théorème de Montel, $\cup_{q \geq 1} h^{o_q}(g(U)) \supset \mathcal{J}_h \setminus E$; comme on vient de supposer $0 \notin E$, il existe $z_0 \in U$ et $\nu \in \mathbb{N}$ tels que $0 = h^{o_\nu} \circ g(z_0)$.

Or, $h^{o_\nu} \circ h^{o_{n_k}}(p_k + \varrho_k z) - (p_k + \varrho_k z) \rightarrow h^{o_\nu} \circ g$, donc, grâce au lemme de Hurwitz, la fonction $h^{o_{n_k+\nu}}(p_k + \varrho_k z) - (p_k + \varrho_k z)$ prend elle même la valeur 0 pour tout k assez grand, c'est-à-dire, $h^{o_{n_k+\nu}}$ admet un point fixe $p \in \mathbb{D}(0, r)$.

On a forcément $p = 0$, car, grâce au principe du maximum, $\{h^{o_n}\} \rightarrow \infty$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}(0, 2r) \setminus \{0\}$. Ainsi $h^{o_{n_k+\nu}}(0) = 0$, ce qui conclut la démonstration. ■

Voilà le résultat principal:

Théorème 2 *Soit f une fonction entière: s'il existe $\xi \in \mathcal{J}_f \cap \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathbb{D}(\xi, 2r) \cap \mathcal{J}_f = \{\xi\}$, alors f est une application affine du plan complexe.*

Preuve: supposons encore $\xi = 0$; grâce au lemme 1, c 'est un point périodique de f , dont nous appellerons ν l'ordre. Posons $\psi := f^\nu$: grâce au principe du maximum,

$$\{\psi^{\circ n}\} \rightarrow \infty \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{D}(0, 2r) \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Montrons maintenant que $\psi^{-1}(0) = \{0\}$. En effet, supposons $\beta \in \psi^{-1}(0)$:

Lemme 3 β est un point isolé de \mathcal{J}_ψ .

Preuve: tout d'abord, on a $\beta \in \mathcal{J}_\psi$, car $\beta \in \psi^{-1}(\mathcal{J}_\psi) = f^{-\nu}(\mathcal{J}_\psi) = f^{-\nu}(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f = \mathcal{J}_\psi$. Soit maintenant $s \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(\mathbb{D}(\beta, s)) \subset \mathbb{D}(0, 2r)$ et $\psi^{-1}(0) \cap \psi(\mathbb{D}(\beta, s)) = \{\beta\}$: alors, grâce à (1), $\{\psi^{\circ n}\} \rightarrow \infty$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}(0, s) \setminus \{\beta\}$, c'est-à-dire $\mathbb{D}(\beta, s) \setminus \{\beta\} \subset \mathcal{F}_\psi$. ■ (lemme 3)

Fin de la preuve du théorème 2: grâce au lemme 1, (avec $h = \psi$, $\beta = \xi$) β est un point périodique de ψ : comme $\psi(\beta) = 0$ et $\psi(0) = 0$, on a forcément $\beta = 0$. Grâce à (1), on a aussi: $\{\psi^{\circ n}(\partial\mathbb{D}(0, r))\} \rightarrow \infty$. Soit maintenant R un nombre réel arbitraire; choisissons $q \in \mathbb{N}$ tel que $\psi^q(\partial\mathbb{D}(0, r)) \cap \overline{\mathbb{D}(0, 2R)} = \emptyset$.

Comme $\psi(0) = 0$, il existe une composante de $\psi^{-q}(\mathbb{D}(0, R))$ telle que $\mathcal{U} \subset \mathbb{D}(0, r)$: appelons-la \mathcal{U} . Or, par compacité, $\psi^{\circ q}$ est un revêtement ramifié de \mathcal{U} sur $\mathbb{D}(0, R)$: c'est à un feuillet, car on vient de montrer que la valeur 0 est prise une fois seulement, avec multiplicité 1. Ainsi $\psi^{\circ q}$ est injectif sur \mathcal{U} et, par conséquent, ψ l'est aussi sur $\psi^{\circ q-1}(\mathcal{U})$.

Donc $\psi^{-1} : \mathbb{D}(0, R) \rightarrow \psi^{\circ q-1}(\mathcal{U})$ est un inverse bien défini de ψ sur $\mathbb{D}(0, R)$.

Grâce à l'arbitrairété de R , ψ est biholomorphe sur \mathbb{C} : c'est une application affine du plan complexe. ■

3 Le Julia n'est pas vide

Théorème 4 Soit f une fonction entière non affine: alors $\mathcal{J}_f \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$.

Preuve: supposons par l'absurde $\mathcal{F}_f = \mathbb{C}$. Il ne peut pas se passer que la suite des itérées $\{f^{\circ n}\}$ ait comme valeur d'adhérence une fonction holomorphe φ , non constante: en effet, dans ce cas, la théorie classique (voir par exemple [BTM], lemme 2.24, valable aussi pour les fonctions transcendentes) prouve que f est un automorphisme de \mathbb{C} . Ainsi, toute sous-suite convergente de $\{f^n\}$ a limite constante $a \in \mathbb{P}$.

Or, montrons par l'absurde que f a au moins un point périodique d'ordre deux. En effet, si ce point n'existait pas, f n'aurait aucun point fixe, donc

la fonction $z \mapsto \frac{f^{\circ 2}(z) - z}{f(z) - z}$ serait une fonction entière ne prenant pas les valeurs $0, 1, \infty$. Elle serait donc une constante $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, alors f serait soit l'identité, soit une constante; dans les autres cas, on aurait $f^{\circ 2}(z) - z = \lambda(f(z) - z)$: par dérivation, cela entraînerait que f' ne prend pas les valeurs 0 et λ . Ainsi f' serait elle-même constante et f affine.

Donc, grâce à l'existence de points périodiques, la valeur d'adhérence a n'est pas l'application constante ∞ : on peut supposer $a = 0$: c'est un point fixe de f , car, si $\{f^{m_j}\} \rightarrow 0$, alors $\{f^{\circ m_{j+1}}\} = \{f \circ f^{\circ m_j}\} \rightarrow f(0)$ et $\{f^{\circ m_{j+1}}\} = \{f^{\circ m_j} \circ f\} \rightarrow 0$.

La théorie classique (voir par exemple [BTM], lemme 4.2) nous montre aussi que la suite $\{f^{\circ n}\}$, toute entière, elle converge vers 0 . Ainsi \mathbb{C} est le bassin d'attraction à 0 pour la dynamique de f .

Or, montrons que ceci mène à une contradiction: tout d'abord, notons que la fonction $r \mapsto M_r(g)$ (voir l'appendice pour la définition de la fonction M) est croissante sur $[0, +\infty)$. Pour s assez grand on a, grâce au lemme 9, $M_s(f^{\circ 2}) \geq M_s(f)$, et par induction, $M_s(f^{\circ 2^n}) \geq M_s(f)$: donc l'orbite du compact $|z| = s$ ne converge pas sur 0 le long de la sous-suite $\{f^{2^n}\}$. Cela conclut la démonstration. ■

4 Appendice

Lemme 5 (Hurwitz) *Si la suite $\{f_n\}$ d'applications holomorphes sur le disque unité \mathbb{D} et à valeurs dans une surface de Riemann \mathbb{S} converge uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{S})$, et g prend la valeur $\alpha \in \mathbb{S}$ sans être constante, alors, pour tout n assez grand, f_n prend la valeur α .*

Preuve: soit \mathfrak{Z} une carte locale sur un voisinage \mathcal{V} de α telle que $\mathfrak{Z}(\alpha) = 0$; soit $\zeta \in \mathbb{D}$ tel que $\mathfrak{Z} \circ g(\zeta) = 0$; ζ étant isolé, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\mathfrak{Z} \circ g(\zeta + \varepsilon e^{i\vartheta}) \neq 0$ pour tout $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Quitte à diminuer ε , on a, pour tout n assez grand, $f_n(\mathbb{D}(\zeta, \varepsilon)) \subset \mathcal{V}$ et $\sup_{\vartheta \in [0, 2\pi]} [\mathfrak{Z} \circ f_n(\zeta + \varepsilon e^{i\vartheta})]^{-1} \leq 2 \sup_{\vartheta \in [0, 2\pi]} [\mathfrak{Z} \circ g(\zeta + \varepsilon e^{i\vartheta})]^{-1} < \infty$; comme $\mathfrak{Z} \circ f_n(\zeta) \rightarrow 0$, $\mathfrak{Z} \circ f_n$ doit s'annuler sur $\mathbb{D}(\zeta, \varepsilon)$, grâce au principe du maximum appliqué à $1/[\mathfrak{Z} \circ f_n]$. ■

Le lemme suivant est connu comme le lemme de l'espace métrique (voir [GRM], p. 256).

Lemme 6 Soit (X, d) un espace métrique complet et $M : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ une fonction localement bornée. Soit $\sigma > 0$: alors pour tout $u \in M^{-1}(\mathbb{R}^+)$ il existe $w \in X$ tel que: (i) $d(u, w) \leq 2[\sigma M(u)]^{-1}$; (ii) $M(w) \geq M(u)$ et (iii) $d(x, w) \leq [\sigma M(w)]^{-1} \Rightarrow M(x) \leq 2M(w)$.

Preuve: supposons, *ab absurdo*, qu'il n'existe pas un tel w . Alors $v_0 := u$ ne convient pas et il doit violer la condition (iii). Donc on peut trouver $v_1 \in X$ tel que $M(v_1) > 2M(v_0)$ mais $d(v_1, v_0) \leq 1/v_0$.

Par induction, on peut ainsi construire une suite $\{v_n\}$ telle que $v_0 = u$, $M(v_n) \geq 2M(v_{n-1}) \geq 2^n M(v_0)$ et $d(v_n, v_{n-1}) \leq 2^{1-k} [\sigma M(v_0)]^{-1}$.

Cette suite-là serait de Cauchy, donc M ne serait pas bornée au voisinage de la valeur limite σ : c'est une contradiction. ■

Lemme 7 (Zalcman) Si une famille $\mathcal{F} := \{f_\alpha\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{P})$ n'est pas normale à $v \in \mathbb{D}$ (c'est-à-dire, s'il n'existe aucun voisinage de $v \in \mathbb{D}$ tel que \mathcal{F} y soit normale), alors il existe des suites $\{v_n\} \subset \mathbb{D}$, $\{v_n\} \rightarrow v$, $\{r_n\} \subset \mathbb{R}^+$, avec $\{r_n\} \rightarrow 0$, et $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ telles que $\{f_n(v_n + r_n w)\}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une application holomorphe non constante $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\|h'(z)\| \leq 1$, où $\|\cdot\|$ est la métrique sphérique sur \mathbb{P} (voir [ZAL]).

Preuve: grâce à la non normalité à v , on peut trouver des suites $\{\xi_n\} \rightarrow v$ en \mathbb{D} et $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ telles que $\|f'_n(\xi_n)\| \geq n^3$. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $\{\xi_n\}$ soit contenue dans un sous-ensemble fermé X de \mathbb{D} .

Pour tout n , appliquons le lemme 6 à X avec la métrique euclidéenne, $M(x) = \|f'_n(x)\|$, $u = \xi_n$ et $\sigma = 1/n$.

On obtient $v_n \in X$ tel que: (i) $d(\xi_n, v_n) \leq 1/n^2$, (ii) $\|f'_n(v_n)\| \geq n^3$ et (iii) $|x - v_n| \leq \frac{n}{\|f'_n(v_n)\|} \Rightarrow \|f'_n(x)\| \leq \|f'_n(v_n)\|$.

Posons maintenant $r_n := \|(f_n)'(v_n)\|^{-1}$ et $h_n(w) := f_n(v_n + r_n w)$. Chaque h_n est bien défini sur $\mathbb{D}(0, n)$ car: (i) $v_n \rightarrow v$ et (ii) $nr_n \leq 1/n^2$.

La famille $\{h_n\}$ est normale, car, grâce à (iii) $\|(h_n)'\| \leq 2$ sur $B(0, n)$. Grâce au théorème de M. Ascoli, on peut extraire de $\{h_n\}$ une sous-suite uniformément convergente, sur tout compact de \mathbb{C} , vers une limite h telle que $\|h'(0)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n'\| = 1$; cela prouve que h n'est pas constante. Finalement, par holomorphie, $\|h'(z)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n'(z)\| \leq 2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. ■

Rappelons que, pour chaque g holomorphe entière, on définit $M_r(g) := \max_{|z|=r} \{|g(z)|\}$.

Lemme 8 (Bohr) Soit \mathcal{K} l'ensemble des fonctions holomorphes $h : \mathbb{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $h(0) = 0$ et $M_{1/2}(h) \geq 1$; pour chaque h , soit $c(h) := \sup\{r > 0 : \partial\mathbb{D}(0, r) \subset h(\mathbb{D}(0, 1))\}$: alors $\inf\{c(h) : h \in \mathcal{K}\} > 0$ (voir [BOH]).

Preuve: supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\{h_n\} \subset \mathcal{K}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} c(h_n) = 0$; alors, pour tout n assez grand, les cercles $\mathbb{D}(0, 1)$, $\mathbb{D}(0, 1/2)$ et $\mathbb{D}(0, 1/4)$ ne sont pas contenus en $h_n(\mathbb{D}(0, 1))$; ainsi la famille $\{h_n\}$ est telle que, pour tout n assez grand, $h_n(\mathbb{D}(0, 1))$ évite un ensemble a_n, b_n, c_n de trois points; on a aussi $\min\{|a_n - b_n|, |b_n - c_n|, |c_n - a_n|\} \geq 1/4$ pour tout n ; grâce au théorème de Montel généralisé, (voir [BEA] th. 3.3.5), $\{h_n\}$ est normale. À extraction près, on peut supposer que $\{h_n\}$ converge à une fonction holomorphe $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$: grâce au lemme de Hurwitz (lemme 5), $h \in \mathcal{K}$, h n'est pas constant et il existe $r > 0$ tel que $\partial\mathbb{D}(0, r) \subset h(\mathbb{D}(0, 1/2))$. En appliquant encore le lemme de Hurwitz, on obtient, pour tout n assez grand, $c(h_n) \geq r$: c'est une contradiction. ■

Lemme 9 Soient φ et η des fonctions entières, avec $\eta(0) = 0$ et $h := \varphi \circ \eta$: il existe c , $0 < c < 1$, tel que $M_r(h) \geq M_{cM_{r/2}(\eta)}(\varphi)$ (voir [POL]).

Preuve: pour chaque $r > 0$, appliquons le lemme de Bohr (lemme 8) à $\Phi(z) := \eta(rz)/M_{r/2}(\eta)$: on a $\partial\mathbb{D}(0, c) \subset \Phi(\mathbb{D}(0, 1))$ et donc

$$S := \partial\mathbb{D}(0, cM_{r/2}(\eta)) \subset \eta(\mathbb{D}(0, r)).$$

Soit $x_0 \in S$ tel que $|\varphi(x_0)| = M_{|x_0|}(\varphi)$: alors, il existe un point $y_0 \in \mathbb{D}(0, r)$ tel que $\eta(y_0) = x_0$. Ainsi $M_{cM_{r/2}(\eta)}(\varphi) \leq M_{|x_0|}(\varphi) = |\varphi(x_0)| = |\varphi(\eta(y_0))| \leq M_r(h)$. ■

References

- [BEA] A.F.Beardon, *Iteration of rational functions* Springer Verlag, 1991
- [BOH] H.Bohr, *Über einen satz von Edmund Landau* Scripta Univ. Hirosolymitanarum 1,(1923)
- [BTM] François Berteloot, Volker Mayer *Rudiments de dynamique holomorphe* Société Mathématique de France, EDP Sciences, 2001
- [GRM] M.Gromov, *Foliated plateau problem: part II: harmonic maps of foliations* GAFA, Vol. 1, No. 3 (1991), 253-320

[POL] G.Pólya, *On an integral function of an integral function* J.London
Math.Soc.1, 1926 12-15

[ZAL] L.Zalcman *Normal Families: new perspectives* Bull. Amer. Math. Soc.
35 (1998)