



HAL
open science

Sur une question de M.Bergweiler

Claudio Meneghini

► **To cite this version:**

| Claudio Meneghini. Sur une question de M.Bergweiler. 2004. hal-00002490v1

HAL Id: hal-00002490

<https://hal.science/hal-00002490v1>

Preprint submitted on 5 Aug 2004 (v1), last revised 4 Nov 2004 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur une question de M.Bergweiler *

Claudio Meneghini †

August 6, 2004

Abstract

Nous montrons la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia des fonctions méromorphes transcendentelles à une variable complexe, sans utiliser le théorème des cinq îles d'Ahlfors ni la théorie de Nevanlinna.

1 Introduction

Le but de cette note-ci est de montrer la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia des fonctions méromorphes transcendentelles à une variable complexe, sans utiliser le théorème des cinq îles de M.Ahlfors (ceci répond à une question posée par M.Bergweiler, voir [BRG] p.161), ni la théorie de Nevanlinna (voir [BOL], qui utilise le théorème des quatre valeurs complètement ramifiés, lemme 1).

La démonstration sera plutôt directe: on utilisera un théorème de M.Lehto sur la croissance de la dérivée sphérique d'une application holomorphe sur un disque épointé, à valeurs en \mathbb{P} , ayant une singularité essentielle isolée au centre du disque (voir [LEH] th.1); on fera aussi un emploi apparemment à la Zalcman (voir [ZAL], p.216-217) d'un lemme métrique de M.Gromov (voir [GRM], p.256). Cependant, on ne sera pas concerné avec une famille non normale, mais on envisagera une seule application, au voisinage d'une singularité essentielle isolée. La composition à la source avec une famille de contractions bien choisies nous permettra de construire une application entière

*AMS MSC: 37F25, 37F05

†Le courriel de l'auteur: clamengh@bluemail.ch

limite et d'appliquer aux objets ainsi obtenus un raisonnement semblable à celui de [BTD] (voir aussi [BTM], p. 46) pour les applications rationnelles de \mathbb{P} . La différence la plus importante, c'est qu'on envisagera une itérée d'ordre fixe à la fois. On traitera seulement le cas général des fonctions méromorphes avec au moins deux poles ou bien un pole qui n'est pas une valeur omise: dans ce dernier cas, en fait, la démonstration de [BTD] est valable sans modifications.

2 Préliminaires

Rappelons tout d'abord l'énoncé du théorème 1 de [LEH]:

Théorème 1 *Soit $v \in \mathbb{C}$, \mathcal{W} un voisinage de v in \mathbb{C} ; soit g une application holomorphe (à valeurs en \mathbb{P}) sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v et g^\sharp la dérivée sphérique de g . Alors $\limsup_{z \rightarrow v} |z - v| \cdot g^\sharp(z) \geq 1/2$.*

Le lemme suivant est connu comme le **lemme de l'espace métrique** (voir [GRM], p. 256).

Lemme 2 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $M : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ une fonction localement bornée. Soit $\sigma > 0$: alors pour tout $u \in M^{-1}(\mathbb{R}^+)$ il existe $w \in X$ tel que: (i) $d(u, w) \leq [\sigma M(u)]^{-1}$; (ii) $M(w) \geq M(u)$ et (iii) $d(x, w) \leq [\sigma M(w)]^{-1} \Rightarrow M(x) \leq 2M(w)$.*

Preuve: supposons, *ab absurdo*, qu'il n'existe pas un tel w . Alors $v_0 := u$ ne convient pas et il doit violer la condition (iii). Donc on peut trouver $v_1 \in X$ tel que $M(v_1) > 2M(v_0)$ mais $d(v_1, v_0) \leq 1/v_0$.

Par induction, on peut ainsi construire une suite $\{v_n\}$ telle que $v_0 = u$, $M(v_n) \geq 2M(v_{n-1}) \geq 2^n M(v_0)$ et $d(v_n, v_{n-1}) \leq 2^{1-n} [\sigma M(v_0)]^{-1}$.

Cette suite-là serait de Cauchy, donc M ne serait pas bornée au voisinage de la valeur limite σ : c'est une contradiction. ■

Le lemme suivant 'renormalise' une application holomorphe (à valeurs dans la sphère de Riemann) au voisinage d'une singularité essentielle isolée.

Lemme 3 *Soient $v \in \mathbb{C}$, \mathcal{W} un voisinage fermé de v , g une application holomorphe, à valeurs en \mathbb{P} , sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v . Alors il existe des suites $\{v_n\} \rightarrow v$, $\{r_n\} \subset \mathbb{R}^+$, avec $\{r_n\} \rightarrow 0$, telles que $\{g(v_n + r_n z)\}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une*

application holomorphe non constante $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}$ dont la dérivée sphérique h^\sharp est uniformément bornée sur \mathbb{C} .

Preuve: grâce au théorème 1, on peut trouver une suite $\{\xi_n\} \rightarrow v$ en \mathcal{W} telle que $g^\sharp(\xi_n) \geq n^3$. Posons $\varrho_n := |\xi_n - v|$ et $X_n := \mathcal{W} \setminus \mathbb{D}(v, \varrho_n/2)$; pour tout n , appliquons le lemme 2 à X_n avec la métrique euclidéenne, $M(x) = g^\sharp(x)$, $u = \xi_n$ et $\sigma = 1/n$. On obtient $v_n \in X_n$ tel que: (i) $d(\xi_n, v_n) \leq 1/n^2$, (ii) $g^\sharp(v_n) \geq n^3$ et (iii) $|x - v_n| \leq \frac{n}{g^\sharp(v_n)} \Rightarrow g^\sharp(x) \leq 2g^\sharp(v_n)$.

Posons maintenant $r_n := [g^\sharp(v_n)]^{-1}$ et $h_n(z) := g(v_n + r_n z)$. Comme: (i) $v_n \rightarrow v$ et (ii) $nr_n \leq 1/n^2$, chaque h_n est bien défini sur $\mathbb{D}(0, n)$, sauf au plus au point $(v - v_n)/r_n$ où il a une singularité essentielle. Cependant, grâce à (iii), $h_n^\sharp \leq 2$ sur $\mathbb{D}(0, n) \setminus \{(v - v_n)/r_n\}$; ainsi le théorème 1 nous assure que $(v - v_n)/r_n \notin \mathbb{D}(0, n)$. Ceci entraîne que h_n est bien défini sur $\mathbb{D}(0, n)$.

La famille $\{h_n\}$ est normale, car, grâce à (iii) $h_n^\sharp \leq 2$ sur $B(0, n)$. Grâce au théorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous-suite uniformément convergente, sur tout compact de \mathbb{C} , vers une limite h telle que $h^\sharp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(0) = 1$; cela prouve que h n'est pas constante. Finalement, par holomorphie, $h^\sharp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(z) \leq 2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. ■

3 Le résultat principal

Soient maintenant: f une fonction méromorphe non constante sur \mathbb{C} , ayant au moins deux poles, ou bien un pole qui n'est pas une valeur omise; \mathcal{F}_f et \mathcal{J}_f les ensembles de Fatou e Julia respectivement (voir par exemple [BRG], p.153-155 pour la définition); \mathcal{C}_f^+ l'ensemble post-critique de f et \mathcal{E}_f son ensemble exceptionnel (voir encore [BRG], p.156). Rappelons qu'on n'a pas forcément $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{F}_f$ pour les fonctions transcendent.

Théorème 4 *Les cycles répulsifs de f sont denses dans \mathcal{J}_f .*

Preuve: rappelons que $\mathcal{J}_f = \overline{O^-(\infty)} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} (\infty)}$. C'est un ensemble parfait (voir [BRG] p.154 et p.161). Comme $\mathcal{C}_f^+ \cup \mathcal{E}_f$ est dénombrable, il suffit d'approcher tout point $p \in \mathcal{J}_f \setminus (\mathcal{C}_f^+ \cup \mathcal{E}_f)$.

Choisissons $p_\lambda \in f^{-\lambda}(\infty)$ tel que $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{N}} \rightarrow p$.

Lemme 5 $\bigcup_{l=0}^{\lambda} f^{-l}(\infty)$ ne peut pas s'accumuler sur p_λ .

Preuve: supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\{p_{\lambda\nu}\} \subset \bigcup_{l=0}^{\lambda} f^{-l}(\infty)$ telle que $p_{\lambda\nu} \rightarrow p_{\lambda}$; on peut en extraire une sous-suite $q_{\lambda\nu} \rightarrow p_{\lambda}$ telle que $\{q_{\lambda\nu}\} \subset f^{-n}(\infty)$, pour un $1 \leq n \leq \lambda$. Alors: **A)** si $1 \leq n \leq \lambda - 1$, $f^{\circ n}$ est holomorphe à p_{λ} , $f^{\circ n}(p_{\lambda}) \in \mathbb{C}$ mais $f(q_{\lambda\nu}) \equiv \infty$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$: c'est une contradiction; **B)** si $n = \lambda$, $f^{\circ n}$ est holomorphe à p_{λ} , $f^{\circ n}(p_{\lambda}) = f(q_{\lambda\nu}) \equiv \infty$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$: ceci entraîne $f^{\circ n} \equiv \infty$, une contradiction. ■ (lemme 5)

Fin de le preuve du théorème 4: Donc, grâce au lemme 5, $f^{\circ\lambda+1}$ a une singularité essentielle isolée à p_{λ} .

On peut alors appliquer le lemme 3 avec $g := f^{\circ\lambda+1}$, $v = p_{\lambda}$ et trouver des suites $\{p_{\lambda,n}\} \rightarrow p_{\lambda}$ et $\{r_{\lambda,n}\} \downarrow 0$ telles que $\{f^{\circ\lambda+1}(p_{\lambda,n} + r_{\lambda,n}z)\}$ converge uniformément sur tout compact (pour $n \rightarrow \infty$) de \mathbb{C} vers une application holomorphe non constante $h_{\lambda} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h_{\lambda}^{\sharp}(z) \leq 2$.

À extraction près, on peut donc supposer que $h_{\lambda} \rightarrow h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbb{P})$ pour $\lambda \rightarrow \infty$.

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert tel que $h(U) \cap \mathcal{J}_f \neq \emptyset$; puisque $\bigcup_{q \geq 1} f^{\circ q}(h(U)) \supset \mathcal{J}_f \setminus \mathcal{E}_f$, il existe $z_0 \in U$ et $\eta \in \mathbb{N}$ tels que $p = f^{\circ\eta} \circ h(z_0)$; on peut supposer, sans nuire à la généralité, $h(U) \subset \mathbb{C}$ et $h' \neq 0$ sur U .

Or, $f^{\circ\eta} \circ f^{\circ\lambda}(p_{\lambda,n} + r_{\lambda,n}z) - (p_{\lambda,n} + r_{\lambda,n}z)$ converge, après éventuelle extraction (pour $\lambda, n \rightarrow \infty$), vers $f^{\circ\eta} \circ h - p$, donc, le lemme de M.Hurwitz (voir par exemple [BTM], p.8) nous passe une suite de points $\{z_{\lambda,n}\} \rightarrow z_0$ (pour $\lambda, n \rightarrow \infty$) telle que $f^{\circ\eta} \circ f^{\circ\lambda}(p_{\lambda,n} + r_{\lambda,n}z_{\lambda,n}) = (p_{\lambda,n} + r_{\lambda,n}z_{\lambda,n})$: ainsi les points $q_{\lambda,n} := p_{\lambda,n} + r_{\lambda,n}z_{\lambda,n}$ forment une suite $\{q_{\lambda,n}\} \rightarrow v$ de points périodiques de f . Ces points sont répulsifs (pour λ et n assez grands), puisque on, d'un coté,

$$r_{\lambda,n} \cdot (f^{\circ\eta+\lambda})'(p_{\lambda,n} + r_{\lambda,n}z_{\lambda,n}) \rightarrow [(f^{\circ\eta})' h(z_0)] \cdot h'(z_0),$$

et de l'autre coté, $r_{\lambda,n} \rightarrow 0$, $h'(z_0) \neq 0$ et $h(z_0)$ n'est pas un point critique de $f^{\circ\eta}$: en effet, $f^{\circ\eta} \circ h(z_0) = p \notin \mathcal{C}_f^+$. Cela conclut la démonstration. ■

Il reste à montrer le cas d'une fonction méromorphe ayant un pole qui est une valeur omise: mais pour ce faire, il suffit d'appliquer la méthode de renormalisations des itérées dépeinte en [BTD].

References

[BOL] A.Bolsch, *Repulsive periodic points of meromorphic functions* Complex variables 31 (1996) 75-79

- [BRG] Walter Bergweiler, *Iteration of meromorphic functions* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 29 (1993) 151-188
- [BTD] François Berteloot, Julien Duval *Une démonstration directe de la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia* Progress in Mathematics, vol. 188 Birkhäuser Verlag (2000), 221-222
- [BTM] François Berteloot, Volker Mayer *Rudiments de dynamique holomorphe* Société Mathématique de France, EDP Sciences, 2001
- [GRM] M.Gromov, *Foliated plateau problem: part II: harmonic maps of foliations* GAFA, Vol. 1, No. 3 (1991), 253-320
- [LEH] Olli Lehto, *The spherical derivative of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity* Commentarii Mathematici Helvetici, vol 33 p.196-205
- [ZAL] L.Zalcman *Normal Families: new perspectives* Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1998)