



Lemmes de multiplicité associés aux groupes triangulaires de Riemann-Schwarz.

Federico Pellarin

► To cite this version:

Federico Pellarin. Lemmes de multiplicité associés aux groupes triangulaires de Riemann-Schwarz.. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 2005, 114, pp.213-239. hal-00002270

HAL Id: hal-00002270

<https://hal.science/hal-00002270>

Submitted on 22 Jul 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Lemmes de multiplicité associés aux groupes triangulaires de Riemann-Schwarz.

Federico Pellarin

English abstract. In this article, we extend a multiplicity estimate of Nesterenko, valid for quasi-modular forms associated to $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, to non-holomorphic quasi-modular forms associated to certain co-compact Riemann-Schwarz triangular subgroups of $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$.

1 Introduction.

Soient $E_2(z), E_4(z), E_6(z)$ les développements de Fourier complexes des séries d'Eisenstein classiques de poids 2, 4, 6, convergents pour $|z| < 1$.

Nesterenko a démontré que pour tout nombre complexe q tel que $0 < |q| < 1$, le corps $\mathbb{Q}(q, E_2(q), E_4(q), E_6(q))$ a degré de transcendance au moins 3 (voir [8], [10] et [11]). L'ingrédient clé de sa preuve est le lemme de multiplicité ci-dessous (cf. théorème 2.3 p. 33 de [10]).

Théorème 1 (Nesterenko) *Il existe une constante $c_1 > 0$ avec la propriété suivante. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, de degré total au plus N . Alors, la fonction $F(z) = P(z, E_2(z), E_4(z), E_6(z))$ s'annule en $z = 0$ avec une multiplicité au plus $c_1 N^4$.*

Le but de ce texte est de donner des généralisations du théorème 1. Soient α, β, γ des inverses d'entiers naturels non nuls tels que :

$$\gamma > \alpha + \beta, \quad 1 > \gamma > \beta > \alpha > 0. \quad (1)$$

On considère l'équation différentielle hypergéométrique complexe :

$$z(1-z)\frac{d^2V}{dz^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)\frac{dV}{dz} - \alpha\beta V = 0. \quad (2)$$

Le groupe de monodromie projective de l'équation (2) s'identifie à un sous-groupe Ω discret infini de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ (un sous-groupe Fuchsien de première

espèce, cf. [4], chapitre 3), qui agit discontinuement sur le disque $B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$ par transformations homographiques :

$$\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega, \quad \phi(\xi) := \frac{a\xi + b}{c\xi + d}.$$

Il existe un domaine fondamental $\mathcal{T}$ pour l'action de Ω sur B , dont l'adhérence topologique est un triangle hyperbolique compact, de sommets s_0, s_1, s_∞ , et dont les angles aux sommets sont égaux à $\pi(1 - \gamma), \pi(\gamma - \alpha - \beta), \pi(\beta - \alpha)$ (cf. [19] chapitre 3 ou [18] chapitre 5). Posons

$$B^* = \bigcup_{\phi \in \Omega} \phi(\mathcal{T} - \{s_0, s_1, s_\infty\}).$$

Ainsi, B^* est le disque B privé de l'ensemble E dont les éléments sont tous les points ξ tels qu'il existe $\gamma \in \Omega$ avec

$$\gamma(\xi) \in \{s_0, s_1, s_\infty\}.$$

On peut construire (cf. [20]) trois fonctions $Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)$ holomorphes dans B^* et algébriquement indépendantes, qui satisfont des relations d'automorphie de poids 2 par rapport à l'action de Ω sur B . Plus précisément, si $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Omega$, alors on a :

$$Y_i(\phi(t)) = (ct + d)^2 Y_i(t) + \frac{1}{\pi i} c(ct + d), \quad i = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Les conditions ci-dessus déterminent $Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)$ à une constante multiplicative près, et à permutation près.

De plus, les conditions (1) déterminent de manière unique un entier positif non nul q tel que, au voisinage de s_0, s_1, s_∞ , on ait les développements en série de Puiseux-Laurent convergents (dans la suite appelés plus simplement développements en série de Puiseux) :

$$Y_i(t) = \sum_{k=-q}^{\infty} v_{i,k} (t - s_j)^{k/q}, \quad \text{avec } i = 0, 1, 2 \text{ et } j = 0, 1, \infty, \quad (4)$$

où $v_{i,k} \in \mathbb{C}$ et $v_{i,-q} \neq 0$ pour tout $i = 0, 1, 2$.

Les cinq fonctions $t, e^t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)$ sont algébriquement indépendantes (cf. [12], voir aussi [9], ou [20], proposition 5).

Tout polynôme F en t, e^t et les fonctions $Y_i(t)$, ($i = 0, 1, 2$) à coefficients complexes admet un développement en série de Puiseux convergent au voisinage de tout élément $\xi \in \mathcal{T}$:

$$F(t) = \sum_{k=s}^{\infty} v_k (t - \xi)^{k/q},$$

avec $s \in \mathbb{Z}$ et $v_s \neq 0$ (en particulier, $F(\xi + t^q)$ est une fonction méromorphe au voisinage de ξ). On définit alors la multiplicité de F en ξ par :

$$\text{ord}_{\xi}(F) = \frac{s}{q}.$$

Si $\xi \neq s_0, s_1, s_{\infty}$, alors $\text{ord}_{\xi}(F) \in \mathbb{N}$, autrement, $\text{ord}_{\xi}(F) \in \mathbb{Z}/q$ peut être négatif.

Le but de ce texte est de démontrer des estimations de multiplicité généralisant le théorème 1 aux éléments de

$$\mathbb{C}[t, e^t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)],$$

que nous réunissons dans le théorème suivant.

Théorème 2 *Il existe une constante $c_2 > 0$, dépendant seulement de α, β, γ , avec les propriétés suivantes. Soit $\xi \in B$, soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$, posons :*

$$\begin{aligned} M_1 &= \min\{\deg_{X_1}(P), \deg_{X_2}(P)\} + 1 \\ M_2 &= \max\{\deg_{X_1}(P), \deg_{X_2}(P)\} + \max\{\deg_{X_3}(P), \deg_{X_4}(P), \deg_{X_5}(P)\}. \end{aligned}$$

Alors la fonction $F(z) = P(t, e^t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t))$ satisfait

$$\text{ord}_{\xi}(F) \leq c_2 M_1 M_2^4. \quad (5)$$

En particulier, si P est de degré total au plus N , alors la fonction $F(z)$ satisfait

$$\text{ord}_{\xi}(F) \leq c_2 (2N)^5. \quad (6)$$

Si de plus P ne dépend pas de la variable X_1 (ou si P ne dépend pas de la variable X_2), alors

$$\text{ord}_{\xi}(F) \leq c_2 (2N)^4. \quad (7)$$

Ce théorème généralise le théorème 1 de Nesterenko. Il contient aussi un lemme de multiplicité de Bertrand : lemme 3 p. 348 de [1].

Soit $\mathcal{A}$ un anneau muni d'une dérivation $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$; nous dirons que le couple $(\mathcal{A}, \delta)$ est un *anneau différentiel*.

La démonstration du théorème 1 utilise en profondeur le fait que l'anneau

$$\mathcal{Y}_1 = \mathbb{C}[z, E_2(z), E_4(z), E_6(z)],$$

muni de la dérivation $z(d/dz)$, est un anneau différentiel (cf. théorème 5.3 de [7]).

De manière analogue, l'anneau

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[t, e^t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)],$$

muni de la dérivation $\delta = d/dt$, possède une structure d'anneau différentiel (cf. lemme 1 de ce texte).

Rappelons ici qu'un idéal $\mathcal{P}$ d'un anneau différentiel $(\mathcal{A}, \delta)$ est dit δ -stable si pour tout $x \in \mathcal{P}$ on a $\delta x \in \mathcal{P}$. Nesterenko démontre le résultat qui suit, d'intérêt indépendant (cf. proposition 5.1 p. 161 de [10]), et indispensable dans la preuve du théorème 1.

Proposition 1 *Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier non nul et $z(d/dz)$ -stable de $\mathcal{Y}_1$, tel que pour tout $F \in \mathcal{P}$ on ait $F(0) = 0$. Alors $z(E_4(z)^3 - E_6(z)^2) \in \mathcal{P}$.*

Pour démontrer le théorème 2, nous utiliserons la propriété différentielle de $(\mathcal{A}, \delta)$ décrite par la proposition suivante.

Proposition 2 *Il existe un élément non nul $\kappa \in \mathcal{A}$ tel que $\kappa \in \mathcal{P}$ pour tout idéal premier non nul δ -stable $\mathcal{P}$ de $\mathcal{A}$.*

La démonstration de la proposition 1 donnée par Nesterenko utilise de manière essentielle la non compacité du quotient $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est le demi-plan supérieur (existence de développements en série de Fourier de formes modulaires et quasi-modulaires au voisinage de *pointes géométriques*).

Pour démontrer la proposition 2 nous suivons de près nombreuses techniques déjà introduites par Nesterenko dans [10], [11] (voir le plan de l'article ci-dessous). Cependant, dans un point au moins, les méthodes de Nesterenko ne s'étendent pas aux fonctions Y_0, Y_1, Y_2 : sous les hypothèses du théorème 2, $\Omega \backslash B$ est compact, contrairement à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$.

1.1 Plan de l'article et structure des démonstrations.

La démonstration de la proposition 2 occupe tout le paragraphe 2. En absence de pointes dans le quotient $\Omega \backslash B$, nous avons effectué une paramétrisation de Y_0, Y_1, Y_2 qui nous a induit à considérer des fonctions hypergéométriques. Dans ce cadre, nous faisons jouer aux points $0, 1, \infty \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ un rôle similaire à celui de la pointe à l'infini de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$, ce qui nous permet de généraliser le lemme 5.2 p. 161 de [11] (proposition 4 de ce texte). De cette manière nous démontrons la proposition 2 dans le cas particulier où $\mathcal{P}$ est un idéal principal.

Pour traiter le cas des idéaux non principaux dans la proposition 2, nous avons introduit une technique complètement algébrique qui utilise les *crochets de Rankin* issus de la théorie des formes quasi-modulaires. Cette technique permet aussi de raffiner et généraliser les résultats du paragraphe 5 pp. 162-165 de [11] : par exemple, on peut facilement supprimer l'hypothèse $F(0) = 0$ dans la proposition 1 : voir [16].

Passons aux résultats du paragraphe 4. Nous y supposons que $(\mathcal{A}, \delta)$ soit plus généralement un anneau différentiel de fonctions F admettant en tout point ξ d'un certain domaine de $\mathbb{C}$, un développement en série de Puiseux convergent :

$$F(t) = \sum_{k=-s}^{\infty} v_k(t - \xi)^{k/q},$$

pour un certain entier $q > 0$ ne dépendant pas de ξ .

Cet anneau différentiel $(\mathcal{A}, \delta)$ satisfait aussi une « propriété D » (cette propriété est très proche d'une propriété homonyme dans [11] : définition 1.2 p. 150). Sous toutes ces hypothèses, on obtient un lemme de multiplicité : la proposition 6.

Si la propriété D est vérifiée pour l'anneau différentiel $(\mathcal{A}, \delta)$ de la proposition 2, alors on obtient le théorème 2 comme corollaire de la proposition 6. Or, nous vérifierons que la propriété décrite par la proposition 2 (que nous appelons « propriété de Ramanujan ») implique la propriété D pour $(\mathcal{A}, \delta)$.

Les techniques de démonstration de la proposition 6 sont essentiellement les mêmes que celles de [11], bien que nous trouvions préférable de suivre l'approche de [3]. Dans le paragraphe 4 nous détaillerons autant que possible des démonstrations pourtant très voisines de celles des deux références ci-dessus, uniquement dans le souci de traiter un cas apparemment plus général. En effet, les fonctions Y_0, Y_1, Y_2 ne sont pas holomorphes dans $\mathcal{T}$, à cause des

singularités en s_0, s_1, s_∞ . Or dans [3] et [11], on travaille uniquement avec des fonctions holomorphes.

2 Anneaux différentiels.

Dans ce paragraphe nous démontrons la proposition 2. Le polynôme κ sera explicitement déterminé (cf. proposition 3 du paragraphe 3), même si cette donnée supplémentaire n'est pas utilisée dans la démonstration du théorème 2. Nous allons commencer par une étude différentielle des fonctions hypergéométriques.

Considérons les nombres rationnels :

$$\begin{aligned} a &= \gamma(1 - \alpha - \beta) + 2\alpha\beta \\ b &= (\alpha + \beta)(\gamma - \alpha - \beta) + 2\alpha\beta - \gamma + 1 \\ c &= \gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1) - 2\alpha\beta. \end{aligned}$$

Un calcul direct permet de vérifier que les fonctions

$$\begin{aligned} u_0(z) &= z^{\gamma/2}(1 - z)^{(\alpha+\beta-\gamma+1)/2} {}_2F_1(a, b; c; z), \\ u_1(z) &= z^{1-\gamma/2}(1 - z)^{(\alpha+\beta-\gamma+1)/2} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; z), \end{aligned}$$

analytiques dans $\mathbb{C} - (\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 1})$, sont $\mathbb{C}$ -linéairement indépendantes et satisfont l'équation différentielle (cf. [4], équation (21) p. 290)

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \left(\frac{a}{4z^2} + \frac{b}{4(z-1)^2} + \frac{c}{4z^2(z-1)^2} \right) U = 0. \quad (8)$$

Pour $z \in \mathbb{C} - (\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 1})$, posons :

$$\begin{aligned} y_0 &= u_0 u'_0, \\ y_1 &= u_0 u'_0 - \frac{u_0^2}{z}, \\ y_2 &= u_0 u'_0 - \frac{u_0^2}{z-1}, \\ \tau &= \frac{u_1}{u_0}, \\ q &= e^\tau. \end{aligned}$$

La fonction $\tau(z)$ est localement inversible sur son domaine d'holomorphic, car le wronskien $\det \begin{pmatrix} u_1 & u_0 \\ u'_1 & u'_0 \end{pmatrix}$ de u_1, u_0 y est constant, égal à $1 - \gamma$, donc non nul. Dans la suite, nous posons $w = 1 - \gamma$.

Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur complexe. On peut montrer que la fonction τ définit un isomorphisme analytique

$$\tau : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{T}^\circ,$$

où $\mathcal{T}^\circ$ désigne le triangle $\mathcal{T}$ privé de son bord topologique; on vérifie aussi $\tau(i) = s_i$ avec $i = 0, 1, \infty$.

Soit $\zeta : \mathcal{T}^\circ \rightarrow \mathcal{H}$ la fonction analytique réciproque de τ : elle admet un prolongement analytique à B^* et définit sur B une fonction algébrique sur le corps des fonctions modulaires Fuchsienues associées à Ω , c'est-à-dire les fonctions $f : B \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ satisfaisant :

$$f(\phi(t)) = f(t), \quad \phi \in \Omega$$

(cf. [4], chapitre 10). Posons

$$Y_i(t) = y_i(\zeta(t))$$

pour $i = 0, 1, 2$. On vérifie que :

$$\begin{aligned} Y_0(t) &= w \frac{d}{dt} \log(u_0), \\ Y_1(t) &= w \frac{d}{dt} \log\left(\frac{u_0}{z}\right), \\ Y_2(t) &= w \frac{d}{dt} \log\left(\frac{u_0}{z-1}\right), \end{aligned}$$

et c'est facile de montrer, à partir de ces formules, que ces fonctions satisfont les relations d'automorphie (3) (cf. [20], proposition 3). Ce sont les fonctions Y_0, Y_1, Y_2 du paragraphe 1.

Soit D la dérivation définie sur l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} - (\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 1})$ par

$$DX = u_0^2 \frac{dX}{dz}.$$

L'anneau

$$\mathcal{N} = \mathbb{C}[\tau, q, y_0, y_1, y_2]$$

est stable pour la dérivation D , comme le montre le lemme qui suit.

Lemme 1 Soit $L = (1/4)(a(y_0 - y_1)^2 + b(y_0 - y_2)^2 + c(y_1 - y_2)^2)$. Les relations suivantes sont satisfaites.

$$D\tau = w, \quad Dq = wq, \quad Dy_i = y_i^2 - L, \quad \text{pour } i = 0, 1, 2.$$

Démonstration. On a

$$D\tau = u_0^2 \tau' = u_0^2 \left(\frac{u_1' u_0 - u_1 u_0'}{u_0^2} \right) = W(u_1, u_0) = w.$$

De même, $Dq = u_0^2 \tau' q = wq$.

Calculons maintenant Dy_0, Dy_1, Dy_2 . On vérifie facilement l'identité :

$$L = \frac{1}{4} u_0^4 \left(\frac{a}{4z^2} + \frac{b}{4(z-1)^2} + \frac{c}{4z^2(z-1)^2} \right).$$

On a, en utilisant (8) :

$$\begin{aligned} Dy_0 &= u_0^2 y_0' \\ &= u_0^2 (u_0 u_0')' \\ &= u_0^2 (u_0'^2 + u_0 u_0'') \\ &= (u_0 u_0')^2 + u_0^3 u_0'' \\ &= y_0^2 - u_0^4 \left(\frac{a}{4z^2} + \frac{b}{4(z-1)^2} + \frac{c}{4z^2(z-1)^2} \right) \\ &= y_0^2 - L. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} Dy_1 &= u_0^2 y_1' \\ &= u_0^2 (u_0 u_0' - u_0^2 z^{-1})' \\ &= u_0^2 (u_0'^2 + u_0 u_0'' - 2u_0 u_0' z^{-1} + u_0^2 z^{-2}) \\ &= (u_0 u_0')^2 - 2u_0^3 u_0' z^{-1} + u_0^4 z^{-2} + u_0^3 u_0'' \\ &= (u_0 u_0' - u_0^2 z^{-1})^2 + u_0^3 u_0'' \\ &= y_1^2 - L, \end{aligned}$$

et pour terminer,

$$\begin{aligned}
Dy_2 &= u_0^2 y_2' \\
&= u_0^2 (u_0 u_0' - u_0^2 (z-1)^{-1})' \\
&= u_0^2 (u_0'^2 + u_0 u_0'' - 2u_0 u_0' (z-1)^{-1} + u_0^2 (z-1)^{-2}) \\
&= (u_0 u_0')^2 - 2u_0^3 u_0' (z-1)^{-1} + u_0^4 (z-1)^{-2} + u_0^3 u_0'' \\
&= (u_0 u_0' - u_0^2 (z-1)^{-1})^2 + u_0^3 u_0'' \\
&= y_2^2 - L.
\end{aligned}$$

Donc la dérivation D laisse stable l'anneau $\mathcal{N}$. On déduit du lemme 1 que l'isomorphisme local ζ induit un isomorphisme d'anneaux différentiels $(\mathcal{N}, D) \cong (\mathcal{A}, \delta)$, où $\delta = w(d/dt)$ et $\mathcal{A} = \mathbb{C}[t, e^t, Y_0, Y_1, Y_2]$.

2.1 Propriétés asymptotiques en $0, 1, \infty$.

Nous étudions les séries de Puiseux des fonctions u_0^2, y_0, y_1, y_2 au voisinage de $0, 1, \infty \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Tout d'abord, introduisons quelques notations. Soit $p \in \mathbb{N}$ le plus petit dénominateur commun des nombres rationnels α, β, γ . Nous allons travailler dans les anneaux de séries de Puiseux formelles :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= \mathbb{C}[[z^{1/p}]], \\
\mathcal{T}_1 &= \mathbb{C}[(1-z)^{1/p}], \\
\mathcal{T}_\infty &= \mathbb{C}[(-z)^{-1/p}].
\end{aligned}$$

Nous notons $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\infty$ les idéaux maximaux des séries de $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_\infty$ sans terme constant, et $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_\infty$ les corps des fractions de $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_\infty$.

Une série Σ_0 de $\mathcal{T}_0$ est dite *localement convergente* si elle s'écrit :

$$\Sigma_0(z) = \sum_{i=0}^{p-1} f_i(z) z^{i/p},$$

avec $f_i \in \mathbb{C}[[z]]$ convergente au voisinage de 0. De même, nous dirons qu'une série Σ_1 de $\mathcal{T}_1$ est *localement convergente* si elle s'écrit :

$$\Sigma_1(z) = \sum_{i=0}^{p-1} f_i(z) (1-z)^{i/p},$$

avec $f_i \in \mathbb{C}[[1-z]]$ convergente au voisinage de 0. De manière équivalente, on peut observer que si $\Sigma_1 \in \mathcal{T}_1$, alors $\Sigma_1(1-z) \in \mathcal{T}_0$; donc Σ_1 est localement convergente si $\Sigma_1(1-z)$ l'est.

Soit Σ_∞ une série de $\mathcal{T}_\infty$. Alors $\Sigma_\infty(-z^{-1}) \in \mathcal{T}_0$. Nous dirons que Σ_∞ est *localement convergente* si $\Sigma_\infty(-z^{-1})$ est localement convergente.

Ces définitions permettent de caractériser également les séries localement convergentes de $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_\infty$.

Notons :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_0 &= \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}, \\ \mathcal{V}_1 &= \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 1}, \\ \mathcal{V}_\infty &= \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}.\end{aligned}$$

Une série localement convergente de $\mathcal{Q}_0$ détermine de manière unique une fonction analytique dans un voisinage non trivial de 0 dans $\mathcal{V}_0$. De même, une série localement convergente de $\mathcal{Q}_1$ détermine de manière unique une fonction analytique dans un voisinage non trivial de 1 dans $\mathcal{V}_1$. Une série localement convergente de $\mathcal{Q}_\infty$ détermine de manière unique une fonction f telle que $f(-1/z)$ soit analytique dans un voisinage non trivial de 0 dans $\mathcal{V}_\infty$.

La fonction $G(z) = z^{\gamma/2}(1-z)^{(\alpha+\beta-\gamma+1)/2}$ est analytique dans $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1$. Dans ce domaine on a :

$$\begin{aligned}G(z) &= z^{\gamma/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\alpha+\beta-\gamma+1)/2)_n}{n!} (-1)^n z^n, \quad \text{si } |z| < 1 \\ &= z^{\gamma/2} (1 + g_1(z)), \\ &= (1-z)^{(\alpha+\beta-\gamma+1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma/2)_n}{n!} (-1)^n (1-z)^n, \quad \text{si } |1-z| < 1 \\ &= (1-z)^{(\alpha+\beta-\gamma+1)/2} (1 + g_2(z)),\end{aligned}$$

où $(x)_n = (x-n+1)(x-n+2)\cdots(x-1)x$ est le symbole de Pochhammer, et où $g_1 \in \mathcal{M}_0$ et $g_2 \in \mathcal{M}_1$. Supposons maintenant que $z \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1$ soit tel que $|z| > 1$. On a :

$$\begin{aligned}G(z) &= e^{\pi i \gamma/2} (-z)^{(\alpha+\beta+1)/2} \left(\frac{1}{(-z)} + 1 \right)^{(\alpha+\beta-\gamma+1)/2} \\ &= \zeta_1 (-z)^{(\alpha+\beta+1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\alpha+\beta-\gamma+1)/2)_n}{n!} (-1)^n (-z)^{-n}.\end{aligned}$$

Il existe donc $g_3 \in \mathcal{M}_\infty$ tel que

$$G(z) = \zeta_1(-z)^{(\alpha+\beta+1)/2}(1 + g_3(z)).$$

Nous démontrons trois lemmes décrivant les séries de Puiseux de u_0^2, y_0, y_1, y_2 au voisinage de $0, 1, \infty$.

2.1.1 Séries de Puiseux en 0.

Lemme 2 *Il existe quatre séries localement convergentes $\epsilon_1, \dots, \epsilon_4 \in \mathcal{M}_0$ telles que l'on ait, pour $z \in \mathcal{V}_0$ et $|z|$ assez petit :*

$$\begin{aligned} u_0^2(z) &= z^\gamma(1 + \epsilon_1(z)), \\ y_0(z) &= \frac{\gamma}{2}z^{\gamma-1}(1 + \epsilon_2(z)), \\ y_1(z) &= \frac{\gamma-2}{2}z^{\gamma-1}(1 + \epsilon_3(z)), \\ y_2(z) &= \frac{\gamma}{2}z^{\gamma-1}(1 + \epsilon_4(z)). \end{aligned}$$

Démonstration. Pour $|z| < 1$ on a ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \kappa_1(z)$ et $\Xi(z) = \gamma^2 + \kappa_2(z)$, avec $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{M}_0$. Donc :

$$\begin{aligned} u_0(z) &= G(z)(1 + \kappa_1(z)) \\ &= z^{\gamma/2}(1 + g_1(z))(1 + \kappa_1(z)) \\ &= z^{\gamma/2}(1 + \kappa_3(z)), \\ u_0'(z) &= \frac{\gamma}{2}z^{(\gamma-2)/2}(1 + \kappa_4(z)), \end{aligned}$$

pour deux séries localement convergentes $\kappa_3, \kappa_4 \in \mathcal{M}_0$. On en déduit l'exis-

tence de séries localement convergentes $\kappa_5, \dots, \kappa_{10} \in \mathcal{M}_0$ telles que :

$$\begin{aligned}
u_0(z)^2 &= z^\gamma(1 + \kappa_5(z)), \\
y_0(z) &= u_0(z)u'_0(z) = \frac{\gamma}{2}z^{\gamma-1}(1 + \kappa_6(z)), \\
y_1(z) &= u_0(z)u'_0(z) - u_0(z)^2/z \\
&= \frac{\gamma}{2}z^{\gamma-1}(1 + \kappa_6(z)) - z^{\gamma-1}(1 + \kappa_7(z)) \\
&= \frac{\gamma-2}{2}z^{\gamma-1}(1 + \kappa_8(z)), \\
y_2(z) &= u_0(z)u'_0(z) - u_0(z)^2/(z-1) \\
&= \frac{\gamma}{2}z^{\gamma-1}(1 + \kappa_6(z)) - z^\gamma(1 + \kappa_9(z)) \\
&= \frac{\gamma}{2}z^{\gamma-1}(1 + \kappa_{10}(z)),
\end{aligned}$$

et nous pouvons poser $\epsilon_1 = \kappa_5, \epsilon_2 = \kappa_6, \epsilon_3 = \kappa_8, \epsilon_4 = \kappa_{10}$.

2.1.2 Séries de Puiseux en 1.

Lemme 3 *Posons $\theta = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$. Il existe quatre séries localement convergentes $\eta_1, \dots, \eta_4 \in \mathcal{M}_1$ telles que l'on ait, pour $z \in \mathcal{V}_1$ et $|1-z|$ assez petit :*

$$\begin{aligned}
u_0^2(z) &= \theta^2(1-z)^{1+\alpha+\beta-\gamma}(1 + \eta_1(z)), \\
y_0(z) &= -\frac{\theta^2}{2}(1+\alpha+\beta-\gamma)(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}(1 + \eta_2(z)), \\
y_1(z) &= -\frac{\theta^2}{2}(1+\alpha+\beta-\gamma)(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}(1 + \eta_3(z)), \\
y_2(z) &= -\frac{\theta^2}{2}(-1+\alpha+\beta-\gamma)(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}(1 + \eta_4(z)).
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après [17] 14.53 p. 290, si $z \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1$, alors on a la relation :

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta){}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \\
&= \Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\gamma(\gamma-\alpha-\beta){}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z) + \\
&\quad \Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\gamma(\alpha+\beta-\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \times \\
&\quad {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1 - z) = & \quad (9) \\
& \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; z) + \\
& \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma - \alpha - \beta + 1; z).
\end{aligned}$$

L'hypothèse $\gamma > \alpha + \beta$ implique que le deuxième terme de (9) s'identifie, au voisinage de $z = 0$, à une série localement convergente de $\mathcal{M}_0$. Ainsi on obtient, pour $|z|$ assez petit :

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1 - z) = \theta(1 + \kappa_{11}(z)),$$

avec $\kappa_{11} \in \mathcal{M}_0$.

Pour $|1 - z|$ assez petit et $z \in \mathcal{V}_1$ on a :

$$\begin{aligned}
u_0(z) &= \theta(1 - z)^{(\alpha + \beta - \gamma + 1)/2} (1 + \lambda_2(z)) \\
u'_0(z) &= -\frac{\theta}{2} (1 - z)^{(\alpha + \beta - \gamma - 1)/2} (\alpha + \beta - \gamma + 1) (1 + \lambda_3(z)),
\end{aligned}$$

où $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{M}_1$. Ainsi on obtient les expressions (avec des séries localement convergentes $\lambda_4, \dots, \lambda_9 \in \mathcal{M}_1$) :

$$\begin{aligned}
u_0^2(z) &= \theta^2(1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma + 1} (1 + \lambda_4(z)), \\
y_0(z) &= -\theta^2 \frac{(\alpha + \beta - \gamma + 1)}{2} (1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma} (1 + \lambda_5(z)) \\
y_1(z) &= -\theta^2 \frac{(\alpha + \beta - \gamma + 1)}{2} (1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma} (1 + \lambda_5(z)) - \\
&\quad \theta^2(1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma + 1} (1 + \lambda_6(z)) \\
&= -\theta^2 \frac{(\alpha + \beta - \gamma + 1)}{2} (1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma + 1} (1 + \lambda_7(z)), \\
y_2(z) &= -\theta^2 \frac{(\alpha + \beta - \gamma + 1)}{2} (1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma} (1 + \lambda_5(z)) - \\
&\quad \theta^2(1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma - 1} (1 + \lambda_8(z)) \\
&= -\theta^2 \frac{(\alpha + \beta - \gamma - 1)}{2} (1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma + 1} (1 + \lambda_9(z)),
\end{aligned}$$

et nous pouvons poser $\eta_1 = \lambda_4, \eta_2 = \lambda_5, \eta_3 = \lambda_7, \eta_4 = \lambda_9$.

2.1.3 Séries de Puiseux en ∞ .

Lemme 4 Posons $\omega = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}$ et $\zeta_1 = e^{\pi i \gamma/2}$. Il existe quatre séries localement convergentes $\mu_1, \dots, \mu_4 \in \mathcal{M}_\infty$ telles que l'on ait, pour $z \in \mathcal{V}_\infty$ et $|z|$ assez grand :

$$\begin{aligned} u_0^2(z) &= (\zeta_1 \omega)^2 (-z)^{(1-\alpha+\beta)} (1 + \mu_1(z)), \\ y_0(z) &= \frac{(\zeta_1 \omega)^2 (\alpha - \beta - 1)}{2} (-z)^{\beta-\alpha} (1 + \mu_2(z)) \\ y_1(z) &= \frac{(\zeta_1 \omega)^2 (\alpha - \beta + 1)}{2} (-z)^{\beta-\alpha} (1 + \mu_3(z)) \\ y_2(z) &= \frac{(\zeta_1 \omega)^2 (\alpha - \beta + 1)}{2} (-z)^{\beta-\alpha} (1 + \mu_4(z)). \end{aligned}$$

Démonstration. On suppose que $z \in \mathcal{V}_\infty$. D'après [17] 14·51 p. 289, On a la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} {}_2F_1(\alpha, 1-\gamma+\alpha; 1-\beta+\alpha; z^{-1}) + \\ &\quad \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} {}_2F_1(\beta, 1-\gamma+\beta; 1-\alpha+\beta; z^{-1}). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)} (-z)^{-\alpha} {}_2F_1(\alpha, 1-\gamma+\alpha; 1-\beta+\alpha; z^{-1}) + \\ &\quad \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)} (-z)^{-\beta} {}_2F_1(\beta, 1-\gamma+\beta; 1-\alpha+\beta; z^{-1}), \end{aligned} \tag{10}$$

Pour $|z|$ assez grand et $z \in \mathcal{V}_\infty$:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \omega (-z)^{-\alpha} ({}_2F_1(\alpha, 1-\gamma+\alpha; 1-\beta+\alpha; z^{-1}) + \\ &\quad (-z)^{\alpha-\beta} \omega_1 \omega^{-1} {}_2F_1(\beta, 1-\gamma+\beta; 1-\alpha+\beta; z^{-1})) \\ &= \omega (-z)^{-\alpha} (1 + \nu_1(z)), \end{aligned}$$

avec $\omega = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}$, $\omega_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}$, et $\nu_1 \in \mathcal{M}_\infty$ localement convergente.

On a :

$$\begin{aligned} u_0(z) &= \zeta_1(-z)^{(1+\alpha+\beta)/2}(1+g_3(z))\omega(-z)^{-\alpha}(1+\nu_1(z)) \\ &= \zeta_1\omega(-z)^{(1-\alpha+\beta)/2}(1+\nu_8(z)), \\ u'_0(z) &= \frac{\zeta_1\omega}{2}(-z)^{(\beta-\alpha-1)/2}(\alpha-\beta-1)(1+\nu_9(z)), \end{aligned}$$

où les ν_i sont des séries localement convergentes de $\mathcal{M}_\infty$. D'ici on obtient :

$$\begin{aligned} u_0^2(z) &= (\zeta_1\omega)^2(-z)^{(1-\alpha+\beta)}(1+\nu_{10}(z)) \\ y_0(z) &= u_0(z)u'_0(z) \\ &= \frac{(\zeta_1\omega)^2(\alpha-\beta-1)}{2}(-z)^{\beta-\alpha}(1+\nu_{11}(z)) \\ y_1(z) &= u_0(z)u'_0(z) + \frac{u_0(z)^2}{(-z)} \\ &= y_0(z) + (\zeta_1\omega)^2(-z)^{\beta-\alpha}(1+\nu_{12}(z)) \\ &= \frac{(\zeta_1\omega)^2(\alpha-\beta+1)}{2}(-z)^{\beta-\alpha}(1+\nu_{13}(z)) \\ y_2(z) &= u_0(z)u'_0(z) + \frac{u_0(z)^2}{(-z+1)} \\ &= y_0(z) + (\zeta_1\omega)^2(-z)^{\beta-\alpha}(1+\nu_{14}(z)) \\ &= \frac{(\zeta_1\omega)^2(\alpha-\beta+1)}{2}(-z)^{\beta-\alpha}(1+\nu_{15}(z)). \end{aligned}$$

Nous pouvons poser $\mu_1 = \nu_{10}$, $\mu_2 = \nu_{11}$, $\mu_3 = \nu_{13}$ et $\mu_4 = \nu_{15}$.

Noter que les nombres θ et ω sont des coefficients (non nuls) de *matrices de connexion* (cf. [5]).

3 Ideaux stables.

Nous démontrons la proposition suivante.

Proposition 3 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier de $\mathcal{N}$ non nul et D -stable. Alors $\mathcal{I}$ contient au moins un des éléments $q, y_0 - y_1, y_0 - y_2, y_1 - y_2$.*

Ainsi, le polynôme κ de la proposition 2 est égal à

$$q(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)(y_1 - y_2).$$

Pour démontrer la proposition 3, nous devons procéder en plusieurs étapes. Commençons avec les idéaux principaux D -stables.

3.1 Idéaux principaux stables.

On associe à y_i le poids $p(y_i) = 1$, $i = 0, 1, 2$ et à τ, q le poids 0. Un élément de $\mathcal{N}$ est dit *isobare de poids s* s'il est somme de monômes

$$c\tau^a q^b y_0^{t_0} y_1^{t_1} y_2^{t_2},$$

avec $t_0 + t_1 + t_2 = s$ et $c \in \mathbb{C}^\times$. Si $X \in \mathcal{N}$, nous notons $p(X)$ le plus grand poids d'un monôme de X . Dans la suite, nous posons aussi

$$\mathcal{R} = \mathbb{C}[y_0, y_1, y_2], \quad \mathcal{L} = \mathbb{C}[\tau, q].$$

On remarque que si $X \in \mathcal{R}$ est non nul et isobare de poids s , alors DX est isobare, et $p(DX) = p(X) + 1$. Si $X \notin \mathcal{R}$ ou si X n'est pas isobare, on a seulement $p(DX) \leq p(X) + 1$ (car les éléments de poids 0 de $\mathcal{N}$ ne sont pas forcément tous annulés par D). D'autre part, pour $X \in \mathcal{N}$ non nul, on a clairement $\deg_q(DX) \leq \deg_q(X)$ et $\deg_\tau(DX) \leq \deg_\tau(X)$.

Proposition 4 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier principal non nul, D -stable de $\mathcal{N}$. Alors $\mathcal{I}$ est égal à l'un des idéaux principaux $(q), (y_0 - y_1), (y_0 - y_2), (y_1 - y_2)$.*

Cette proposition généralise le lemme 5.2 p. 161 de [11].

Démonstration. En utilisant les formules explicites du lemme 1, on remarque pour commencer que

$$\begin{aligned} Dq &= wq, \\ D(y_0 - y_1) &= (y_0 - y_1)(y_0 + y_1), \\ D(y_0 - y_2) &= (y_0 - y_2)(y_0 + y_2), \\ D(y_1 - y_2) &= (y_1 - y_2)(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Donc les idéaux principaux $(q), (y_0 - y_1), (y_0 - y_2), (y_1 - y_2)$ de $\mathcal{N}$, qui sont premiers, sont aussi D -stables.

Soit $P \in \mathcal{N}$ un polynôme non nul et irréductible tel que

$$DP = FP \quad (11)$$

avec $F \in \mathcal{N}$. Nous devons démontrer que P est proportionnel à l'un des polynômes $q, y_0 - y_1, y_0 - y_2, y_1 - y_2$, avec une constante de proportionnalité dans $\mathbb{C}^\times$.

Nous déterminons une expression plus précise de F . Comme $p(DP) = p(F) + p(P)$, on a que $p(F) \leq 1$. Comme de plus $\deg_q(DP) = \deg_q(F) + \deg_q(P)$ et $\deg_\tau(DP) = \deg_\tau(F) + \deg_\tau(P)$, on a que $\deg_q(F) = \deg_\tau(F) = 0$ et donc

$$F = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3, \quad (12)$$

avec $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. On a aussi $F \neq 0$ car P étant irréductible, il est non constant.

Notre premier objectif est de montrer que dans (12) on a $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $i = 0, \dots, 3$.

Lemme 5 *Sous l'hypothèse (11), on a $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ dans (12).*

Démonstration. Ecrivons :

$$P = P_h + P_{h+1} + \dots + P_k, \quad (13)$$

avec P_i isobare de poids i , P_h non nul isobare de poids minimal $h \leq k$, et P_k non nul isobare de poids maximal k . Ecrivons aussi :

$$P_k = \sum_{j=1}^t f_j V_j,$$

avec $V_1, \dots, V_t$ isobares dans $\mathcal{R}$ de poids k , et $f_j \in \mathcal{L}$. On a que DP_k est somme d'un élément isobare de $\mathcal{N}$ de poids $k+1$ et d'un élément isobare de $\mathcal{N}$ de poids k ; de plus P satisfait (11). Nous obtenons, en tenant compte des termes de poids k et $k+1$ de FP :

$$\begin{aligned} DP_k &= \sum_{j=1}^t f_j DV_j + \sum_{j=1}^t (Df_j)V_j \\ &= \lambda_3 P_k + P_{k-1} \sum_{i=0}^2 \lambda_i y_i + P_k \sum_{i=0}^2 \lambda_i y_i. \end{aligned}$$

En comparant les poids des termes isobares de poids $k + 1$, on voit que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^t f_j DV_j &= \frac{\partial P_k}{\partial y_0} Dy_0 + \frac{\partial P_k}{\partial y_1} Dy_1 + \frac{\partial P_k}{\partial y_2} Dy_2 \\ &= P_k \sum_{i=0}^2 \lambda_i y_i. \end{aligned}$$

Soit D' la dérivation de $\mathcal{N}$ définie par $D' = D$ sur $\mathcal{R}$ et D' nulle sur $\mathcal{L}$. On a donc démontré que

$$D'P_k = P_k \sum_{i=0}^2 \lambda_i y_i. \quad (14)$$

Nous étudions l'influence de la relation (14) sur des séries de Puiseux formelles. Nous allons déduire de (14) et des lemmes 2, 3 et 4 les trois relations suivantes :

$$\lambda_0 \gamma + \lambda_1 (\gamma - 2) + \lambda_2 \gamma \in \mathbb{Q}, \quad (15)$$

$$\lambda_0 (\alpha + \beta - \gamma + 1) + \lambda_1 (\alpha + \beta - \gamma + 1) + \lambda_2 (\alpha + \beta - \gamma - 1) \in \mathbb{Q}, \quad (16)$$

$$\lambda_0 (\alpha - \beta - 1) + \lambda_1 (\alpha - \beta + 1) + \lambda_2 (\alpha - \beta + 1) \in \mathbb{Q}. \quad (17)$$

Démontrons l'égalité (15). D'après le lemme 2 et l'indépendance algébrique sur $\mathbb{C}$ de y_0, y_1, y_2 , il existe un homomorphisme injectif naturel :

$$\Phi_0 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{Q}_0,$$

qui est défini en associant à tout élément de $\mathcal{R}$ la série de Puiseux donnée à partir du lemme 2.

Soit $\mathcal{R}_0$ le sous-anneau de $\mathcal{Q}_0$ image de Φ_0 ; on a un isomorphisme d'anneaux $\Phi_0 : \mathcal{R} \cong \mathcal{R}_0$. Soient U, V deux indéterminées et posons :

$$\mathcal{N}_0 = \mathbb{C}[U, V, \Phi_0(y_0), \Phi_0(y_1), \Phi_0(y_2)].$$

Autrement dit, $\mathcal{N}_0$ est le sous-anneau des séries de Puiseux formelles en les puissances entières de $z^{1/p}$ à coefficients des polynômes en U, V , qui est engendré par les séries de Puiseux de y_0, y_1, y_2 données par le lemme 2.

L'isomorphisme $\Phi_0 : \mathcal{R} \cong \mathcal{R}_0$ se prolonge en un isomorphisme $\Phi_0 : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_0$ en posant $\Phi_0(\tau) = U$ et $\Phi_0(q) = V$, car τ, q, y_0, y_1, y_2 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, comme nous l'avons rappelé dans l'introduction.

La dérivation $D : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ décrite dans le lemme 1 détermine une dérivation $D_0 : \mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_0$ définie sur les séries de Puiseux formelles de la manière suivante. Notons σ_0 la série de Puiseux formelle de u_0^2 donnée par le lemme 2, soit $\varphi = \sum_m f_m z^{m/p}$ une série de Puiseux de $\mathcal{R}_0$ (ou plus généralement de $\mathcal{Q}_0$). On pose :

$$D_0(\varphi) = \sigma_0 \sum_m (m/p) f_m z^{(m/p)-1}. \quad (18)$$

La dérivation $D_0 : \mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_0$ induit une dérivation $D_0 : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{N}_0$ en posant $D_0(U) = D_0(V) = 0$: elle se calcule sur les séries formelles en utilisant (18), et en permettant que f_m appartienne aussi à $\mathbb{C}[U, V]$. On vérifie facilement que si $s \in \mathcal{N}$, alors $\Phi_0(D'(s)) = D_0(\Phi_0(s))$: on a ainsi construit un isomorphisme d'anneaux différentiels :

$$\Phi_0 : (\mathcal{N}, D') \rightarrow (\mathcal{N}_0, D_0). \quad (19)$$

Posons :

$$\Phi_0(P_k) = \sum_{m \geq m_0} a_m z^{m/p}$$

avec $a_m \in \mathbb{C}[U, V]$ et a_{m_0} non nul. On a, d'après le lemme 2 :

$$\begin{aligned} D_0 \left(\sum_{m \geq m_0} a_m z^{m/p} \right) &= \sigma_0 \sum_{m \geq m_0} (m/p) a_m z^{(m/p)-1} \\ &= z^\gamma (1 + \Phi_0(\epsilon_1(z))) \sum_{m \geq m_0} (m/p) a_m z^{(m/p)-1} \\ &= (1 + \epsilon_5(z)) (m_0/p) a_{m_0} z^{\gamma + (m_0/p)-1}, \end{aligned}$$

avec $\epsilon_5 \in \mathcal{M}_0 \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_0$. L'égalité (14), l'isomorphisme (19) et le lemme 2 impliquent :

$$\begin{aligned} D_0 \left(\sum_{m \geq m_0} a_m z^{m/p} \right) &= \sum_i \lambda_i \Phi_0(y_i) \sum_{m \geq m_0} a_m z^{m/p} \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_0 \gamma + \lambda_1 (\gamma - 2) + \lambda_2 \gamma + \epsilon_6(z)) \times \\ &\quad z^{\gamma-1} \sum_{m \geq m_0} a_m z^{m/p}, \end{aligned}$$

où $\epsilon_6(z)$ est un autre élément de $\mathcal{M}_0\mathcal{N}_0$. On en déduit l'identité formelle :

$$z^\gamma(m_0/p)a_{m_0}z^{(m_0/p)-1} = \frac{1}{2}(\lambda_0\gamma + \lambda_1(\gamma - 2) + \lambda_2\gamma)z^{\gamma-1}a_{m_0}z^{m_0/p},$$

d'où la relation (15), car $a_{m_0} \neq 0$ et $m_0 \in \mathbb{Z}$.

Les relations (16) et (17) se démontrent de manière similaire. Soit $\mathcal{R}_1$ le sous-anneau de $\mathcal{Q}_1$ engendré par les séries de Puiseux formelles de y_0, y_1, y_2 du lemme 3, notons

$$\mathcal{N}_1 = \mathbb{C}[U, V, \Phi_1(y_0), \Phi_1(y_1), \Phi_1(y_2)],$$

soit $\sigma_1 \in \mathcal{Q}_1$ la série de Puiseux de u_0^2 au voisinage de 1 donnée par le lemme 3, soit D_1 la dérivation de $\mathcal{N}_1$ définie de la manière suivante. Pour $\varphi = \sum_m f_m(1-z)^{m/p}$ un élément de $\mathcal{N}_1$, on pose :

$$D_1(\varphi) = -\sigma_1 \sum_m (m/p) f_m(1-z)^{(m/p)-1}.$$

On a un isomorphisme d'anneaux différentiels $\Phi_1 : (\mathcal{N}, D') \cong (\mathcal{N}_1, D_1)$.

Posons :

$$\Phi_1(P_k) = \sum_{m \geq m_1} b_m(1-z)^{m/p},$$

avec $b_m \in \mathbb{C}[U, V]$ et $b_{m_1} \neq 0$. L'égalité (14) implique :

$$D_1 \left(\sum_{m \geq m_1} b_m(1-z)^{m/p} \right) = \sum_i \lambda_i \Phi_1(y_i) \sum_{m \geq m_1} b_m(1-z)^{m/p}$$

d'où l'on déduit, en suivant les mêmes techniques que nous avons employé pour obtenir la relation (15), et en appliquant les formules du lemme 3 :

$$\begin{aligned} -\theta^2(1-z)^{1+\alpha+\beta-\gamma}(m_1/p)b_{m_1}(1-z)^{(m_1/p)-1} &= -\frac{\theta^2}{2}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} \times \\ &(\lambda_0(1+\alpha+\beta-\gamma) + \lambda_1(1+\alpha+\beta-\gamma) + \lambda_2(-1+\alpha+\beta-\gamma)) \times \\ &b_{m_1}(1-z)^{m_1/p}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{m_1}{p} = (1/2)(\lambda_0(1+\alpha+\beta-\gamma) + \lambda_1(1+\alpha+\beta-\gamma) + \lambda_2(-1+\alpha+\beta-\gamma)),$$

car $\theta, b_{m_1} \neq 0$, ce qui implique la relation (16).

Pour démontrer la relation (17) on introduit le sous-anneau $\mathcal{R}_\infty$ de $\mathcal{Q}_\infty$ engendré par les séries de Puiseux formelles de y_0, y_1, y_2 du lemme 4, et on note

$$\mathcal{N}_\infty = \mathbb{C}[U, V, \Phi_\infty(y_0), \Phi_\infty(y_1), \Phi_\infty(y_2)],$$

puis on désigne par $\sigma_\infty \in \mathcal{Q}_\infty$ la série de Puiseux de u_0^2 au voisinage de ∞ donnée par le lemme 4. Nous construisons, comme nous l'avons fait pour D_0 et D_1 , une dérivation $D_\infty : \mathcal{N}_\infty \rightarrow \mathcal{N}_\infty$ telle qu'on ait un isomorphisme $\Phi_\infty : (\mathcal{N}, D') \cong (\mathcal{N}_\infty, D_\infty)$. Explicitement, soit $\varphi = \sum_m f_m(-z)^{-m/p}$ un élément de $\mathcal{N}_\infty$; on pose :

$$D_\infty(\varphi) = -\sigma_\infty \sum_m (m/p) f_m(-z)^{-(m/p)-1}.$$

Ecrivons :

$$\Phi_\infty(P_k) = \sum_{m \geq m_\infty} f_m(-z)^{-m/p}.$$

L'égalité (14) équivaut à :

$$D_\infty \left(\sum_{m \geq m_\infty} f_m(-z)^{-m/p} \right) = \sum_i \lambda_i \Phi_\infty(y_i) \sum_{m \geq m_\infty} f_m(-z)^{-m/p}$$

d'où l'on déduit, en appliquant les formules du lemme 4 :

$$\begin{aligned} & -(\zeta_1 \omega)^2 (-z)^{1-\alpha+\beta} (m_\infty/p) f_{m_\infty}(-z)^{(m_\infty/p)-1} = \\ & = \frac{(\zeta_1 \omega)^2}{2} (\lambda_0(\alpha - \beta - 1) + \lambda_1(\alpha - \beta + 1) + \lambda_2(\alpha - \beta + 1)) (-z)^{\beta-\alpha} \times \\ & \quad f_{m_\infty}(-z)^{m_\infty/p}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{m_\infty}{p} = -(1/2)(\lambda_0(\alpha - \beta - 1) + \lambda_1(\alpha - \beta + 1) + \lambda_2(\alpha - \beta + 1)),$$

car $f_{m_\infty} \neq 0$ et $\zeta_1 \omega \neq 0$. Nous avons obtenu aussi la relation (17).

Posons :

$$M := \begin{pmatrix} \gamma & \gamma - 2 & \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma + 1 & \alpha + \beta - \gamma + 1 & \alpha + \beta - \gamma - 1 \\ \alpha - \beta - 1 & \alpha - \beta + 1 & \alpha - \beta + 1 \end{pmatrix}.$$

Les relations (15), (16), (17) que nous avons démontré, impliquent qu'il existe des nombres rationnels μ_0, μ_1, μ_2 tels que (le symbole t désigne la transposée de matrice) :

$$^t(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = M \cdot ^t(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2).$$

La matrice M a déterminant $8\alpha \neq 0$ et a tous ses coefficients rationnels. Soit N son inverse. Alors :

$$^t(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = N \cdot ^t(\mu_0, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{Q}^3,$$

nous avons donc démontré que $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$.

Lemme 6 *sous l'hypothèse (11), on a $\lambda_3 \in \mathbb{Q}$ dans (12).*

Démonstration. Considérons à nouveau l'expression (13), où nous avons supposé $P_h \neq 0$ et écrivons :

$$P_h = \sum_{j=1}^t d_j U_j,$$

avec $U_1, \dots, U_t$ éléments isobares de $\mathcal{R}$ de poids h , et $d_j \in \mathcal{L}$. Si $h = 0$, alors $P_0, DP_0 \in \mathcal{L}$. Si $h \neq 0$, alors on a que DP_h est somme d'un élément de poids h et un élément de poids $h + 1$. En regardant les termes de poids h et $h + 1$ dans l'expression de FP comme somme d'éléments isobares, nous trouvons que :

$$\begin{aligned} DP_h &= \sum_{j=1}^t (Dd_j)U_j + \sum_{j=1}^t d_j DU_j \\ &= \lambda_3 P_h + \lambda_3 P_{h+1} + P_h \sum_{i=0}^2 \lambda_i y_i. \end{aligned}$$

Si $h = 0$, alors nous trouvons la relation plus simple $DP_0 = \lambda_3 P_0$. Dans tous les cas, en comparant les termes isobares de poids h :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^t (Dd_j)U_j &= w \left(\frac{\partial P_h}{\partial \tau} + \frac{\partial P_h}{\partial q} q \right) \\ &= \lambda_3 P_h. \end{aligned}$$

Soit H la dérivation de $\mathcal{N}$ définie par $H(\mathcal{R}) = 0$ et $H = D$ sur $\mathcal{L}$. Nous avons :

$$H(P_h) = \lambda_3 P_h.$$

Ecrivons P_h explicitement :

$$\begin{aligned} P_h &= \sum_{a,b \geq 0} c_{a,b} \tau^a q^b \\ &= \sum_{a,b > 0} c_{a,b} \tau^a q^b + \sum_{b > 0} d_b q^b + \sum_{a > 0} e_a \tau^a + f_0, \quad c_{a,b}, d_b, e_a, f_0 \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} w^{-1}H(P_h) &= \sum_{a,b} c_{a,b} (a\tau^{a-1}q^b + b\tau^a q^b) \\ &= \sum_{a,b > 0} (bc_{a,b} + (a+1)c_{a+1,b})\tau^a q^b + \sum_{b > 0} (bd_b + c_{1,b})q^b + \\ &\quad \sum_{a > 0} (a+1)e_{a+1}\tau^a + e_1. \end{aligned}$$

Soit a_0 maximal avec $c_{a_0,b_0} \neq 0$ pour quelques $b_0 \geq 0$. Si $a_0 = 0$, alors $P_h \in \mathcal{R}[q]$. Donc

$$P_h = U_0 + U_1 q + \cdots + U_r q^r$$

avec $U_j \in \mathcal{R}$. Si $r = 0$ alors $P_h \in \mathcal{R}$ et $\lambda_3 = 0$. Sinon, $r > 0$, $U_r \neq 0$, et $w^{-1}H(P_h) = k_1 q + \cdots + r k_r q^r$, d'où $r k_r = w \lambda_3 k_r$ ce qui implique $\lambda_3 = r w^{-1} \in \mathbb{Q}$.

Si $a_0 > 0$ alors $b_0 > 0$, car sinon, $\deg_\tau(H(P_h)) < \deg_\tau(P_h)$ et nous ne pouvons pas avoir $H(P_h) = \lambda_3 P_h$. Dans ce cas, $c_{a_0+1,b_0} = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} w^{-1}b_0 c_{a_0,b_0} &= b_0 c_{a_0,b_0} + (a_0 + 1) c_{a_0+1,b_0} \\ &= \lambda_3 c_{a_0,b_0}, \end{aligned}$$

d'où $\lambda_3 = w^{-1}b_0$ et $\lambda_3 \in \mathbb{Q}$.

3.1.1 Fin de la preuve de la proposition 4.

Soit P un polynôme irréductible de $\mathcal{N}$ satisfaisant (11), avec F comme dans (12), c'est-à-dire, tel que $DP = (\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3)P$. A présent, nous avons démontré que $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ pour $i = 0, \dots, 3$. Donc

$$\frac{DP}{P}, \frac{D(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_1)}, \frac{D(y_0 - y_2)}{(y_0 - y_2)}, \frac{D(y_1 - y_2)}{(y_1 - y_2)}, \frac{Dq}{q}$$

sont $\mathbb{Q}$ -linéairement dépendants, et il existe des entiers rationnels non tous nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ tels que :

$$\alpha_1 \frac{DP}{P} + \alpha_2 \frac{D(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_1)} + \alpha_3 \frac{D(y_0 - y_2)}{(y_0 - y_2)} + \alpha_4 \frac{D(y_1 - y_2)}{(y_1 - y_2)} + \alpha_5 \frac{Dq}{q} = 0.$$

Ainsi $D(P^{\alpha_1}(y_0 - y_1)^{\alpha_2}(y_0 - y_2)^{\alpha_3}(y_1 - y_2)^{\alpha_4}q^{\alpha_5}) = 0$, d'où

$$P^{\alpha_1}(y_0 - y_1)^{\alpha_2}(y_0 - y_2)^{\alpha_3}(y_1 - y_2)^{\alpha_4}q^{\alpha_5} \in \mathbb{C}^\times.$$

Comme P est irréductible, ceci implique que P est proportionnel à l'un des polynômes $y_0 - y_1, y_0 - y_2, y_1 - y_2, q$. La démonstration du lemme est maintenant terminée.

3.2 Idéaux non principaux stables.

Nous introduisons ici les crochets de Rankin, qui sont des opérateurs différentiels définis uniquement sur des polynômes isobares de $\mathcal{R}$, mais pas sur des polynômes quelconque de $\mathcal{N}$: il permettent d'éviter les arguments du paragraphe 5 pp. 162-165 de [11].

Le crochet de Rankin $[U, V]$ de deux polynômes isobares U, V de $\mathcal{R}$ est défini par

$$[U, V] = p(U)UD(V) - p(V)VD(U).$$

Voici les propriétés principales du crochet.

Lemme 7 *Soient X, Y, P des éléments isobares de $\mathcal{R}$.*

- *Si $X \in \mathcal{R}$ est de poids x et Y est de poids y , alors $[X, Y] = -[Y, X]$ est isobare de poids $x + y + 1$.*
- *Si X, Y ont même poids, alors l'application $d_P(X) := [X, P]$ satisfait $d_P(X + Y) = d_P(X) + d_P(Y)$.*
- *On a $d_P(XY) = d_P(X)Y + Xd_P(Y)$.*
- *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{R}$ qui est D -stable, et $X \in \mathcal{I}$, alors $d_P(X) \in \mathcal{I}$.*

Les premières deux propriétés sont triviales. Démontrons la troisième propriété. On a :

$$\begin{aligned} d_P(XY) &= [XY, P] = p(XY)XYDP - p(P)PD(XY) \\ &= (p(X) + p(Y))XYDP - p(P)P((DX)Y + XDY) \\ &= (p(X)XDP - p(P)PDX)Y + \\ &\quad X(p(Y)YDP - p(P)PDY) \\ &= d_P(X)Y + Xd_P(Y). \end{aligned}$$

Démontrons la quatrième propriété. Si $X \in \mathcal{I}$ et P est isobare, alors $DX \in \mathcal{I}$ car $\mathcal{I}$ est D -stable. Donc $XD P, PDX \in \mathcal{I}$, et $d_P(X) = p(X)XD P - p(P)PDX \in \mathcal{I}$.

3.2.1 Idéaux stables isobares.

Nous démontrons maintenant le lemme suivant.

Lemme 8 *Tout idéal premier isobare de $\mathcal{R}$, D -stable, contient au moins un des éléments $y_0 - y_1, y_0 - y_2, y_1 - y_2$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{I}$ un idéal comme dans les hypothèses du lemme. Si $\mathcal{I}$ est principal alors $\mathcal{IN}$ est premier, principal et D -stable, et au moins un des polynômes $y_0 - y_1, y_0 - y_2, y_1 - y_2$ appartient à $\mathcal{I}$, d'après la proposition 4. Supposons donc que $\mathcal{I}$ ne soit pas principal : nous avons deux cas.

(1). Supposons que $\mathcal{I} \cap (\mathbb{C}[y_0] \cup \mathbb{C}[y_1] \cup \mathbb{C}[y_2]) \neq \{0\}$. Supposons par exemple que $\mathcal{I} \cap \mathbb{C}[y_0] \neq (0)$. Comme $\mathcal{I}$ est premier, il existe $v \in \mathbb{C}$ tel que $y_0 - v \in \mathcal{I}$: comme $\mathcal{I}$ est isobare, on a $v = 0$.

Donc $y_0 \in \mathcal{I}$ et $Dy_0 \in \mathcal{I}$. Ainsi le polynôme H obtenu en substituant $y_0 \mapsto 0$ dans le polynôme Dy_0 appartient aussi à $\mathcal{I}$. Explicitement :

$$H = -\frac{1}{4}(ay_1^2 + by_2^2 + c(y_1 - y_2)^2) \in \mathcal{I}.$$

Aussi le polynôme DH appartient à $\mathcal{I}$, et le polynôme K obtenu en substituant $y_0 \mapsto 0$ dans DH appartient à $\mathcal{I}$. On a :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{8}(a^2y_1^3 + b(b-4)y_2^3 - c(y_1 - y_2)^2(4y_1 + y_2(4-b)) + \\ &\quad ay_1((c-4)y_1^2 + (b-2c)y_1y_2 + (b+c)y_2^2)) \\ &\in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Les résultants $R_1 = \text{Rés}_{y_1}(H, K)$ et $R_2 = \text{Rés}_{y_2}(H, K)$ appartiennent à $\mathcal{I}$. Explicitement, on trouve $R_1 = -\frac{1}{256}\kappa y_2^6$ et $R_2 = -\frac{1}{256}\kappa y_1^6$, avec

$$\eta = (a+b)(a+c)(b+c)(ab+bc+ac).$$

On vérifie que $\eta \neq 0$ (voir le lemme 10, à la fin de ce paragraphe), donc si $y_0 \in \mathcal{I}$, alors aussi $y_1, y_2 \in \mathcal{I}$. On parvient au même résultat si on suppose que $y_1 \in$

$\mathcal{I}$ ou $y_2 \in \mathcal{I}$. Pour faire les calculs on peut exploiter les symétries évidentes du système différentiel. Ainsi, on a que si $\mathcal{I} \cap (\mathbb{C}[y_0] \cup \mathbb{C}[y_1] \cup \mathbb{C}[y_2]) \neq \{0\}$, alors $y_0, y_1, y_2 \in \mathcal{I}$, et dans ce cas on obtient la conclusion du lemme, car on trouve même plus, à savoir que $\mathcal{I} \supset (y_0 - y_1, y_0 - y_2, y_1 - y_2) = (y_0 - y_1, y_0 - y_2)$.

(2). Supposons que $\mathcal{I} \cap (\mathbb{C}[y_0] \cup \mathbb{C}[y_1] \cup \mathbb{C}[y_2]) = \{0\}$. Alors $\mathcal{I}$ contient un polynôme isobare P tel que $\frac{\partial P}{\partial y_1} \neq 0$ et $\frac{\partial P}{\partial y_2} = 0$. En d'autres termes, $\mathcal{I} \cap \mathbb{C}[y_0, y_1] \neq (0)$. Nous pouvons aussi supposer que P ait degré minimal en y_1 : donc $\frac{\partial P}{\partial y_1} \notin \mathcal{I}$. Nous calculons le crochet de Rankin $[P, y_0]$, qui est un polynôme non nul appartenant à $\mathcal{I}$ (car P n'est pas une puissance de y_0). On obtient :

$$\begin{aligned} [P, y_0] &= \frac{\partial P}{\partial y_0}[y_0, y_0] + \frac{\partial P}{\partial y_1}[y_1, y_0] + \frac{\partial P}{\partial y_2}[y_2, y_0] \\ &= \frac{\partial P}{\partial y_1}[y_1, y_0] \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

car $[y_0, y_0] = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial y_2} = 0$. Comme $\frac{\partial P}{\partial y_1} \notin \mathcal{I}$, on a $[y_1, y_0] \in \mathcal{I}$.

De même, $\mathcal{I} \cap \mathbb{C}[y_0, y_2] \neq (0)$. Soit Q un polynôme isobare de $\mathcal{I}$ tel que $\frac{\partial Q}{\partial y_2} \neq 0$ et $\frac{\partial Q}{\partial y_1} = 0$. Nous pouvons aussi supposer que Q soit tel que $\frac{\partial Q}{\partial y_2} \notin \mathcal{I}$. En suivant les mêmes arguments que ci-dessus, on trouve que $[y_2, y_0] \in \mathcal{I}$. Donc $[y_1, y_0], [y_2, y_0] \in \mathcal{I}$, et $[y_1, y_0] - [y_2, y_0] \in \mathcal{I}$. Mais :

$$\begin{aligned} [y_1, y_0] - [y_2, y_0] &= [y_1 - y_2, y_0] \\ &= (y_1 - y_2)y_0. \end{aligned}$$

comme $y_0 \notin \mathcal{I}$, on obtient $y_1 - y_2 \in \mathcal{I}$, et la démonstration du lemme est terminée.

Remarque. Les symétries du système différentiel permettent en fait de démontrer que si $\mathcal{I}$ est un idéal non principal satisfaisant les hypothèses du lemme 8, alors $\mathcal{I} \supset (y_0 - y_1, y_0 - y_2)$.

Afin de démontrer la proposition 3, nous devons encore établir un lemme élémentaire. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{R}$; on note $\tilde{\mathcal{I}}$ l'idéal engendré par les polynômes isobares de $\mathcal{I}$.

Lemme 9 *Nous avons les propriétés suivantes.*

1. Si $\mathcal{I}$ est premier, alors $\tilde{\mathcal{I}}$ est premier.
2. Si $\mathcal{I}$ est D -stable, alors $\tilde{\mathcal{I}}$ est D -stable.
3. Si $\mathcal{I}$ n'est pas principal, alors $\tilde{\mathcal{I}} \neq (0)$.

Démonstration. 1. C'est bien connu.

2. Soit $U \in \tilde{\mathcal{I}}$; alors $U = U_0 + \cdots + U_k$ pour certains polynômes isobares $U_0, \dots, U_k \in \mathcal{I}$. Pour tout j on a $DU_j \in \mathcal{I}$ car $\mathcal{I}$ est D -stable. De plus DU_j est isobare, donc $DU = DU_0 + \cdots + DU_k \in \tilde{\mathcal{I}}$.

3. Introduisons une inconnue y_3 de poids 1, et notons, pour tout polynôme non nul $F \in \mathcal{R}$:

$${}^hF = y_3^p F\left(\frac{y_0}{y_3}, \frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right),$$

où p est le plus grand poids d'un monôme non nul de P .

Il faut montrer que $\mathcal{I}$ contient un polynôme isobare non nul. Par hypothèse il existe $U, V \in \mathcal{I}$ premiers entre eux; donc hU et hV sont premiers entre eux.

Le résultant $R = \text{Rés}_{y_3}({}^hU, {}^hV) \in \mathcal{R}$ est non nul et on vérifie qu'il est isobare. De plus $R \in \mathcal{I}$, car il existe $A, B \in \mathcal{R}[y_3]$ tels que $R = A({}^hU) + B({}^hV)$ d'où, en substituant $y_3 = 1$, $R = \tilde{A}U + \tilde{B}V$ pour $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{R}$: donc $R \in \mathcal{I}$.

3.3 Fin de la démonstration de la proposition 3.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal premier de $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{J} \cap \mathcal{R}[q] = (0)$, alors $\mathcal{J}$ est principal et ne peut pas être D -stable d'après la proposition 4 (il ne peut contenir ni q ni l'un des polynômes $y_0 - y_1, y_0 - y_2, y_1 - y_2$).

Supposons que $\mathcal{J}$ soit D -stable. Alors $\mathcal{Y} := \mathcal{J} \cap \mathcal{R}[q] \neq (0)$. On a que $\mathcal{Y}$ est un idéal premier D -stable de $\mathcal{R}[q]$.

Si $\mathcal{Y} \cap \mathcal{R} = (0)$ alors $\mathcal{Y}$ est principal, donc $\mathcal{YN}$ est un idéal premier principal D -stable de $\mathcal{N}$, et la proposition 4 implique $q \in \mathcal{J}$.

Sinon, $\mathcal{I} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{R} \neq (0)$ est un autre idéal premier D -stable, cette fois dans $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{I}$ est principal alors $\mathcal{IN}$ est principal et D -stable, et une autre application de la proposition 4 implique que l'un des polynômes $y_0 - y_1, y_0 - y_2, y_1 - y_2$ appartient à $\mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I}$ n'est pas principal alors, d'après le lemme 9, $\tilde{\mathcal{I}}$ est un idéal premier non nul isobare et D -stable de $\mathcal{R}$, et il contient un des polynômes $y_0 - y_1, y_0 - y_2, y_1 - y_2$ d'après le lemme 8.

Il nous reste à justifier la non nullité de η .

Lemme 10 On a $\eta \neq 0$.

Esquisse de démonstration. On doit utiliser les hypothèses faites sur les rationnels α, β, γ . Analysons les facteurs définissant le produit η . On a :

$$a + b = 1 - (\alpha - \beta)^2.$$

ce nombre est nul si et seulement si $\alpha = \beta - 1$ ou $\alpha = \beta + 1$, mais ceci est clairement impossible car $1 > \beta > \alpha > 0$. On a :

$$a + c = \gamma(2 - \gamma).$$

ce nombre est clairement non nul, car $0 < \gamma < 1$. Le troisième facteur est :

$$b + c = 1 - (\alpha + \beta)^2 + \gamma(2(\alpha + \beta) - \gamma).$$

Ce nombre est nul si et seulement si $\gamma = -1 + \alpha + \beta$ ou $\gamma = 1 + \alpha + \beta$. Si $\gamma = 1 + \alpha + \beta$, alors $\gamma > 1$, et cette éventualité est exclue. Si $\gamma = \alpha + \beta - 1$, alors $\gamma - \alpha - \beta = -1$, mais $\gamma - \alpha - \beta > 0$ par hypothèse. Donc ce troisième facteur est non nul.

Etudions, mais de manière esquissée, le quatrième facteur :

$$\begin{aligned} ab + ac + bc &= 2(\gamma^2(-1 + \alpha + \beta - 2\alpha\beta) + \\ &\quad \gamma(1 + \alpha + \beta)(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta) - 2(\alpha\beta)^2). \end{aligned}$$

On vérifie directement que la fonction

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = ab + ac + bc$$

est positive si α, β, γ sont soumis aux contraintes $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$.

La vérification de cette propriété passe par une étude élémentaire assez calculatoire, que nous ne reporterons pas ici. Les points critiques (c'est-à-dire les points qui annulent toutes les dérivées partielles de f d'ordre 1) de f sont donnés par les conditions simultanées :

$$\begin{aligned} (2\alpha - \gamma)(2\beta^2 + \gamma - 2\beta\gamma) &= 0 \\ (2\beta - \gamma)(2\alpha^2 + \gamma - 2\alpha\gamma) &= 0 \\ (1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta)(1 + \alpha + \beta - 2\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

On vérifie que les points critiques ne satisfont pas les inégalités $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$ ⁽¹⁾. On passe ensuite à l'étude de la restriction de f au bord du domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$. Les points critiques des fonctions restriction sont alors encore donnés essentiellement par les conditions ci-dessus. Après avoir examiné tous les cas, on pourra conclure que $ab + ac + bc > 0$.

4 Démonstration du théorème 2.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, soient $F_1(t), \dots, F_m(t)$ des fonctions algébriquement indépendantes sur $K = \mathbb{C}(t)$, admettant en tout point $\xi \in \mathcal{O}$ un développement en série de Puiseux convergent :

$$F_i(t) = \sum_{k=s}^{\infty} v_{i,k}(t - \xi)^{k/q}, \quad (20)$$

avec $s \in \mathbb{Z}$, et pour un certain entier $q > 0$ ne dépendant pas de ξ .

Soit P_0 un polynôme de $\mathbb{C}[t]$ non nul, et supposons que l'anneau $\mathcal{A} = \mathbb{C}[F_1, \dots, F_m]$ soit stable pour la dérivation $\delta = P_0(t) \frac{d}{dt}$. Il existe alors des polynômes $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$ tels que :

$$\delta F_i = P_i(F_1, \dots, F_m).$$

Soit d le plus grand degré total des P_i . Soit X_0 une nouvelle inconnue, notons $\mathcal{B} = K[X_0, \dots, X_m]$ posons :

$$B_i(X_0, \dots, X_m) = X_0^d P_i\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_m}{X_0}\right) \in \mathcal{B}, \quad i = 1, \dots, m,$$

et $B_0 = X_0^d P_0(t) \in K[X_0]$. Définissons l'opérateur de dérivation homogène :

$$\mathcal{D} = B_0 \frac{\partial}{\partial t} + X_0 \sum_{i=1}^m B_i \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

¹Il y a un seul point critique satisfaisant $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 1$ qui est le point $(1/2, 1/2, 1)$. En calculant la matrice hessienne, on voit facilement que $f(1/2, 1/2, 1) = 3/4$ est un maximum relatif.

On a donc, pour tout $Q \in \mathcal{B}$,

$$(\mathcal{D}Q)(1, F_1, \dots, F_m) = \delta(Q(1, F_1, \dots, F_m)).$$

De plus, si $Q \in \mathcal{B}$ est un élément homogène, alors $\mathcal{D}Q$ est aussi homogène. Nous appelons l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ l'*anneau différentiel associé* à $(\mathcal{A}, \delta)$.

Définition. L'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait la *propriété de Ramanujan* s'il existe un polynôme homogène non nul $l \in \mathcal{B}$ tel que pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{B}$ qui est $\mathcal{D}$ -stable, on a $l \in \mathfrak{P}$.

Fixons un élément $\xi \in \mathcal{O}$ et soit $\mathcal{K}$ le complété d'une clôture algébrique du complété de K à la place déterminée par ξ , soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier homogène de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{V} = Z(\mathfrak{P})$ la sous-variété de $\mathbb{P}_m(\mathcal{K})$ des zéros de $\mathfrak{P}$. Notons $|\cdot|$ la valeur absolue de $\mathcal{K}$: si $F \in \mathcal{K}$, alors :

$$|F| = \exp\{-\text{ord}_\xi(F)\}. \quad (21)$$

Nous posons

$$\overline{\omega} = (1 : F_1 : \dots : F_m) \in \mathbb{P}_m(\mathcal{K}).$$

Notons

$$\text{Dist}(\overline{\omega}, \mathcal{V}) = \text{Dist}_{(1, \dots, 1)}(\overline{\omega}, \mathcal{V})$$

la *distance de $\overline{\omega}$ à $\mathcal{V}$* de Philippon (voir p. 88 de [13]), associée à la valeur absolue de $\mathcal{K}$. Cette distance s'étend par multiplicativité aux cycles algébriques équidimensionnels de $\mathbb{P}_m(K)$ ⁽²⁾ ; elle dépend de ξ , et nous utiliserons parfois la notation $\text{Dist}_\xi(\overline{\omega}, \mathcal{V})$ lorsque la dépendance en ξ doit être mise en relief.

Posons

$$\|\overline{\omega}\| = \max\{1, |F_1|, \dots, |F_m|\},$$

et pour un polynôme homogène $U \in K[X_0, X_1, \dots, X_m]$,

$$U = \sum_{\underline{\lambda}} c_{\underline{\lambda}} X^{\underline{\lambda}}, \quad (22)$$

posons aussi :

$$|U| = \max_{\underline{\lambda}} \{|c_{\underline{\lambda}}|\}.$$

²Tous les cycles algébriques seront positifs et équidimensionnels : nous n'avons donc plus à préciser systématiquement cet attribut.

On peut calculer facilement la distance de $\bar{\omega}$ à $\mathcal{V}$ si $\mathcal{V}$ est une hypersurface. Soit U comme dans (22), homogène, avec $c_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{C}[t]$, et supposons que $\mathcal{V} = \mathcal{Z}(U)$. Les formules p. 64 de [6] impliquent :

$$\log \text{Dist}(\bar{\omega}, \mathcal{V}) = \log |U(\bar{\omega})| - \log |U| - \deg_{\underline{\lambda}}(U) \log \|\bar{\omega}\|. \quad (23)$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned} \log \text{Dist}(\bar{\omega}, \mathcal{V}) = & -\text{ord}_{\xi}(U(\bar{\omega})) + \min_{\underline{\lambda}} \{\text{ord}_{\xi}(c_{\underline{\lambda}})\} + \\ & \deg(U) \min_{i=1, \dots, m} \{0, \text{ord}_{\xi}(F_i)\}. \end{aligned}$$

On rappelle également que l'image de l'application $\text{Dist}(\bar{\omega}, \cdot)$ est contenue dans l'intervalle $[0, 1]$ ([15], proposition 4.1 p. 119).

De plus, comme $F_1, \dots, F_m$ satisfont (20) dans $\mathcal{O}$, on a que pour tout cycle algébrique non nul $\mathcal{Z}$ de $\mathbb{P}_m(K)$ (différent de $\mathbb{P}_m(K)$), le nombre

$$-\log \text{Dist}(\bar{\omega}, \mathcal{Z})$$

est un élément positif de $\mathbb{Z}/q$; ceci se voit directement dans (23) si $\mathcal{Z} = Z(Q)$ avec $Q \in \mathcal{B} - \{0\}$. Par convention, nous posons $-\log \text{Dist}(\bar{\omega}, Z(0)) := +\infty$ pour tout $\xi \in \mathcal{O}$.

Par convention, le cycle nul 0 est de dimension -1 , et $-\log \text{Dist}(\bar{\omega}, 0) = 0$ pour tout ξ .

Nous devons introduire une autre propriété d'anneaux différentiels, que nous appelons « propriété D ».

Définition. On dit que l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait la *propriété D en ξ d'exposant $\leq \rho(\xi)$* , si la constante $\rho(\xi) \geq 0$ ne dépend que de ξ , et est telle que tout idéal premier homogène $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{B}$ contenant un idéal premier non nul D -stable, on ait :

$$-\log \text{Dist}(\bar{\omega}, Z(\mathfrak{P})) \leq \rho(\xi) \deg(\mathfrak{P}).$$

S'il existe une constante $\rho \geq 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathcal{O}$ l'anneau $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfasse la propriété D en ξ d'exposant $\leq \rho$, alors nous dirons que $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait la *propriété D uniforme sur $\mathcal{O}$* .

4.1 La propriété de Ramanujan et la propriété D .

Lemme 11 *Supposons que l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfasse la propriété de Ramanujan. Alors il satisfait la propriété D en tout point $\xi \in \mathcal{O}$. Soit l le polynôme fourni par la propriété de Ramanujan. Si :*

$$\rho = \sup_{\xi \in \mathcal{O}} \{-\log \text{Dist}_{\xi}(\bar{\omega}, Z(l))\} \in \frac{\mathbb{N}}{q},$$

alors $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait la propriété D uniforme sur $\mathcal{O}$ (d'exposant $\leq \rho$).

Démonstration. C'est l'analogie du lemme 3.4 p. 155 de [11]. Fixons $\xi \in \mathcal{O}$, posons :

$$\rho(\xi) = -\log \text{Dist}_{\xi}(\bar{\omega}, Z(l)).$$

Sous les hypothèses du lemme, $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait la propriété D d'exposant $\leq \rho(\xi)$: voici la preuve.

Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier homogène non nul de $\mathcal{B}$, supposons que :

$$-\log \text{Dist}(\bar{\omega}, Z(\mathfrak{P})) > \rho(\xi) \deg(\mathfrak{P}).$$

Soit p un élément homogène non nul de $\mathfrak{P}$. L'inégalité suivante se démontre en suivant les arguments du paragraphe 5 de [13], ou en combinant les propositions 3.24 et 3.25 de [3] :

$$-\log \text{Dist}(\bar{\omega}, Z(p)) \geq -\frac{1}{\deg(\mathfrak{P})} \log \text{Dist}(\bar{\omega}, Z(\mathfrak{P})). \quad (24)$$

L'inégalité (24) implique que $-\log \text{Dist}(\bar{\omega}, Z(p)) > \rho(\xi)$, donc $p \neq l$. Ainsi $l \notin \mathfrak{P}$, et d'après la propriété de Ramanujan, $\mathfrak{P}$ ne contient pas d'idéal premier non nul $\mathcal{D}$ -stable.

Faisons varier $\xi \in \mathcal{O}$. Si le supremum ρ est fini, il est clair que $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait la propriété D uniforme d'exposant $\leq \rho$.

Nous démontrons maintenant :

Proposition 5 *Si $\mathcal{A} = \mathbb{C}[t, e^t, Y_0, Y_1, Y_2]$ est muni de la dérivation δ , alors l'anneau différentiel homogène associé $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait la propriété de Ramanujan, et la propriété D uniforme.*

Démonstration. Nous avons $\mathcal{B} = K[X_0, X_1, \dots, X_4]$, $K = \mathbb{C}(t)$ et

$$\mathcal{D} = wX_0^2 \frac{\partial}{\partial t} + wX_0^2 X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + X_0 \sum_{i=2}^4 (X_i^2 - U) \frac{\partial}{\partial X_i},$$

avec

$$U = \frac{1}{4}(a(X_2 - X_3)^2 + b(X_2 - X_4)^2 + c(X_3 - X_4)^2).$$

Posons :

$$\mathcal{A}^\sharp = K[e^t, Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)], \quad \bar{\omega} = (1 : e^t : Y_0(t) : Y_1(t) : Y_2(t)) \in \mathbb{P}_4(\mathcal{K}).$$

on a un morphisme $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^\sharp$ qui associe à tout polynôme homogène $P \in \mathcal{B}$ l'élément $\psi(P) = P(\bar{\omega}) \in \mathcal{A}^\sharp$. Clairement :

$$\psi(\mathcal{D}P) = \delta(\psi(P)),$$

pour tout polynôme homogène $P \in \mathcal{B}$, d'après le lemme 1.

Démontrons que si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier homogène non nul de $\mathcal{B}$ qui est $\mathcal{D}$ -stable, alors $l \in \mathfrak{P}$ avec :

$$l = X_0 X_1 (X_3 - X_2)(X_4 - X_2)(X_4 - X_3).$$

Notons $\mathcal{P}^\sharp$ l'idéal de $\mathcal{A}^\sharp$ engendré par les éléments de $\psi(\mathfrak{P})$; c'est un idéal premier δ -stable non nul. L'idéal $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\sharp \cap \mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ est un idéal premier non nul δ -stable de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{P} = \mathcal{A}$, alors $X_0 \in \mathfrak{P}$ et $l \in \mathfrak{P}$. Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{A}$, au moins une des fonctions $e^t, Y_2(t) - Y_0(t), Y_1(t) - Y_0(t), Y_2(t) - Y_1(t)$ appartient à $\mathcal{P}$, d'après la proposition 3. On en déduit qu'au moins un des polynômes homogènes $X_1, X_3 - X_2, X_4 - X_2, X_4 - X_3$ appartient à $\mathfrak{P}$; finalement, $l \in \mathfrak{P}$. Donc l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfait la propriété D d'après le lemme 11.

Le lemme 1 implique :

$$\begin{aligned} \delta\kappa &= \delta(q(Y_0 - Y_1)(Y_0 - Y_2)(Y_1 - Y_2)) \\ &= (q + 2(Y_0 + Y_1 + Y_2))\kappa. \end{aligned}$$

De plus, la fonction $\kappa = l(\bar{\omega})$ ne s'annule pas dans B^* , car (κ) est un idéal principal δ -stable de $(\mathcal{A}, \delta)$, et Y_0, Y_1, Y_2 sont holomorphes sur B^* .

Le nombre ρ du lemme 11 est bien défini (le calcul du supremum se réduit à un calcul de maximum), et d'après ce même lemme, $(\mathcal{A}, \delta)$ satisfait la propriété D uniforme (On peut même montrer que l'exposant est ≤ 1).

4.2 Une estimation de multiplicité provenant de la propriété D .

Proposition 6 *Supposons que l'anneau $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfasse la propriété D d'exposant $\leq \rho(\xi)$ en ξ . Il existe une constante $c_3 > 0$, dépendant uniquement de $\rho(\xi)$, avec la propriété suivante. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[Z, X_1, \dots, X_m]$ et posons :*

$$N_0 = \max\{1, \deg_Z P\}, \quad N_1 = \max\{1, \deg_{X_1, \dots, X_m} P\}.$$

Alors la fonction $F(z) = P(z, F_1(z) \dots, F_m(z))$ satisfait

$$\text{ord}_\xi F(z) \leq c_3 N_0 N_1^m.$$

La démonstration de cette proposition est essentiellement la même que celle du théorème 2.2 p. 154 de [11]. Nous suivons essentiellement l'approche de [3], qui consiste à utiliser les formes résultantes (formes de Chow), plutôt que les formes éliminantes (comme dans [11]) : cette approche est plus flexible lorsque l'on travaille avec des cycles algébriques dans des espaces projectifs.

On note $h : K^\times \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ la *hauteur logarithmique de Weil*, que l'on étend de la manière usuelle à $\mathbb{P}_s(K)$, puis aux sous-variétés et aux cycles de $\mathbb{P}_s(K)$ via les formes de Chow (cf. paragraphe 3 de [13]). On note $\deg(\mathcal{Z})$ le *degré* d'un cycle défini sur K (paragraphe 2 de loc. cit.).

Nous appellerons *idéal $\mathcal{D}$ -instable* tout idéal premier homogène non nul $\mathfrak{P}$ ne contenant aucun idéal premier non nul $\mathcal{D}$ -stable.

La proposition suivante est essentiellement la proposition 4.11 de [3], et peut être aussi démontrée en utilisant les arguments de [11] pp. 154-159.

Proposition 7 *Il existe une constante $c_4 > 0$, ne dépendant que de $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$, mais pas de ξ , satisfaisant la propriété suivante. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier homogène non nul $\mathcal{D}$ -instable de $\mathcal{B}$, soit $p \in \mathfrak{P} \cap \mathbb{C}[t][X_0, \dots, X_m]$ un polynôme homogène non nul tel que la quantité*

$$\nu(\mathfrak{P}) = \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg_{\underline{X}}(p) + \deg(\mathfrak{P}) \deg_t(p)$$

soit minimale. Alors il existe un entier N avec $1 \leq N \leq c_4$, tel que pour tout $n < N$ on ait $\mathcal{D}^n p \in \mathfrak{P}$, et tel que $\mathcal{D}^N p \notin \mathfrak{P}$.

Les arguments p. 158 de [11] permettent de montrer qu'un idéal premier non nul $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{D}$ -instable si et seulement si pour tout idéal non nul $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{P}$ on a $\mathcal{D}\mathfrak{I} \not\subset \mathfrak{I}$. En particulier, pour tout $p \in \mathfrak{P} - \{0\}$ il existe un entier n tel que $\mathcal{D}^n p \notin \mathfrak{P}$: la proposition 7 fournit un choix privilégié pour p , de telle manière que son degré soit minimal.

L'inégalité (34), ou l'inégalité (35) p. 144 de [2], ou encore le lemme 3.1 p. 154 de [11] (ce sont essentiellement des majorations explicites de fonctions de Hilbert bi-homogènes), impliquent que p satisfait :

$$\begin{aligned} \deg(p) &\leq c_5 \deg(\mathfrak{P})^{1/(m-g)} \\ h(p) &= \deg_t(p) \\ &\leq c_5 \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{-(m-g-1)/(m-g)}, \end{aligned} \quad (25)$$

où $g = \dim(\mathfrak{P})$ et c_5 est une constante positive : on a l'égalité (25) car p est irréductible dans $\mathbb{C}[t, X_0, \dots, X_m]$, d'après la minimalité de $\nu(\mathfrak{P})$. La définition de la dérivation $\mathcal{D}$ implique que $\deg(\mathcal{D}^N p) \leq \deg(p) + Nd \leq (d+1)c_4 \deg(p)$, et $h(\mathcal{D}^N p) \leq \deg_t(\mathcal{D}^N p) \leq h(p) + Nd \leq (d+1)c_4 h(p)$. Donc :

$$\deg(\mathcal{D}^N p) \leq c_6 \deg(\mathfrak{P})^{1/(m-g)} \quad (26)$$

$$h(\mathcal{D}^N p) \leq c_6 \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{-(m-g-1)/(m-g)}, \quad (27)$$

avec $c_6 = (d+1)c_4$. Nous utilisons toutes ces propriétés dans la proposition suivante.

Proposition 8 *Supposons que l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfasse la propriété D en ξ d'exposant $\leq \rho(\xi)$.*

Il existe deux constantes $c_7, c_8 > 0$, ne dépendant que de $\rho(\xi)$, telles que la propriété suivante soit satisfaite. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier homogène non nul de $\mathcal{B}$, soit $g = \dim(\mathfrak{P})$, supposons que

$$\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\mathfrak{P})) \leq -c_7 (\max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{(g+1)/(m-g)} + \deg(\mathfrak{P})^{m/(m-g)}). \quad (28)$$

Alors il existe un polynôme homogène $\phi \in K[X_0, \dots, X_m] \cap \mathbb{C}[t, X_0, \dots, X_m]$ n'appartenant pas à $\mathfrak{P}$, satisfaisant

$$\deg_{\underline{X}}(\phi) \leq c_8 \deg(\mathfrak{P})^{1/(m-g)} \quad (29)$$

$$h(\phi) \leq c_8 \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{-(m-g-1)/(m-g)}, \quad (30)$$

et tel que pour tout $\bar{v} \in \mathbb{P}_m(\mathcal{K})$, $\bar{v} \in Z(\mathfrak{P})$ on ait :

$$\text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\phi)) \leq \text{Dist}(\overline{\omega}, \{\bar{v}\}). \quad (31)$$

Démonstration. Ceci correspond à la proposition 3.6 p. 156 de [11], ou à la proposition 4.18 de [3], mais nous donnons les détails de la démonstration, car nous avons supposé que les fonctions $F_1, \dots, F_m$ satisfont (20), alors que dans ces dernières références les fonctions sont toutes holomorphes en ξ .

Si l'inégalité (28) est satisfaite pour une certaine constante c_7 , alors on a aussi les deux inégalités :

$$\begin{aligned} \log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\mathfrak{P})) &\leq -c_7(\max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{1/(m-g)} + \deg(\mathfrak{P})) \quad (32) \\ &\leq -c_7 \deg(\mathfrak{P}). \end{aligned}$$

Si $c_7 \geq \rho(\xi)$, alors l'idéal $\mathfrak{P}$ est $\mathcal{D}$ -instable (propriété D), et la proposition 7 peut être appliquée. Soient donc p, N comme dans cette proposition. On a que $\tilde{p} = \mathcal{D}^{N-1}p \in \mathfrak{P}$ d'après la minimalité de N , et $-\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{p})) \geq c_7$, d'après l'inégalité (24). Posons aussi $\tilde{q} = \mathcal{D}\tilde{p} = \mathcal{D}^N p$. On a $\tilde{q} \notin \mathfrak{P}$, $\tilde{q} \in \mathbb{C}[t][X_0, \dots, X_m]$, et :

$$\begin{aligned} \tilde{q}(\overline{\omega}) &= (\mathcal{D}\tilde{p})(\overline{\omega}) \\ &= \delta(\tilde{p}(\overline{\omega})) \\ &= P_0(t) \frac{d}{dt} \tilde{p}(\overline{\omega}), \end{aligned}$$

d'après la définition de $\mathcal{D}$. Donc, puisque P_0 est un polynôme :

$$\text{ord}_\xi(\tilde{q}(\overline{\omega})) \geq \text{ord}_\xi(\tilde{p}(\overline{\omega})) - 1.$$

En posant $U = \tilde{q}$ dans l'inégalité (23) on obtient :

$$\begin{aligned} -\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{q})) &\geq -\log |\tilde{p}(\overline{\omega})| + \log |\tilde{p}| + \deg(\tilde{p}) \log \|\overline{\omega}\| - \\ &\quad \log |\tilde{p}| - \deg(\tilde{p}) \log \|\overline{\omega}\| + \\ &\quad \log |\tilde{q}| + \deg(\tilde{q}) \log \|\overline{\omega}\| - 1 \\ &\geq -\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{p})) + \log |\tilde{q}| - \log |\tilde{p}| + \\ &\quad (\deg(\tilde{q}) - \deg(\tilde{p})) \log \|\overline{\omega}\| - 1 \\ &\geq -\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{p})) + \log |\tilde{q}| + \\ &\quad d \log \|\overline{\omega}\| - 1 \\ &\geq -\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{p})) + \log |\tilde{q}| - 1, \end{aligned}$$

(noter que $\log \|\overline{\omega}\|$ est un nombre positif ou nul).

On montre facilement que

$$\log |\tilde{q}| - 1 \geq (1/2) \log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{p}))$$

(on utilise les mêmes arguments p. 159 de [11]), et on parvient à l'inégalité

$$-\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{q})) \geq -(1/2) \log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{p})).$$

Soit $\overline{v} \in Z(\mathfrak{P}) \subset \mathbb{P}_m(\mathcal{K})$. D'après le corollaire 4.9 p. 42 de [10], ou la proposition 3.25 de [3], on a que

$$-\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{p})) \geq -\log \text{Dist}(\overline{\omega}, \{\overline{v}\}).$$

Posons $\phi = \tilde{q}^2$. On a $\phi \notin \mathfrak{P}$ et :

$$\begin{aligned} -\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\phi)) &= -2 \log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{q})) \\ &\geq -\log \text{Dist}(\overline{\omega}, Z(\tilde{p})) \\ &\geq -\log \text{Dist}(\overline{\omega}, \{\overline{v}\}). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les inégalités (26) et (27), on a $\deg(\phi) \leq 2c_6 \deg(\mathcal{D}^N p)$ et $h(\phi) \leq 2c_6 h(\mathcal{D}^N p)$. En posant $c_8 = 2c_6$, on voit que les inégalités (29) et (30) sont satisfaites, et toutes les constantes ne dépendent que de $\rho(\xi)$, ce qui complète la démonstration de la proposition 8.

Nous démontrons la proposition 6, en démontrant le résultat encore plus général suivant (cf. théorème 2.2 p. 154 de [11]).

Proposition 9 *Supposons que l'anneau différentiel $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ satisfasse la propriété D en ξ d'exposant $\leq \rho(\xi)$. Alors il existe une constante $c_9 > 0$, ne dépendant que de $\rho(\xi)$, telle que pour tout cycle algébrique $\mathcal{Z} \subset \mathbb{P}_m(\mathcal{K})$ de dimension $g < m$, l'inégalité suivante soit satisfaite :*

$$\log \text{Dist}(\overline{\omega}, \mathcal{Z}) \geq -c_9 (\max\{1, h(\mathcal{Z})\} \deg(\mathcal{Z})^{(g+1)/(m-g)} + \deg(\mathcal{Z})^{m/(m-g)}). \quad (33)$$

Démonstration. On fait une démonstration par récurrence sur g . Pour $g = -1$, la proposition est trivialement vraie car $\mathcal{Z}$ est le cycle nul. En suivant des arguments similaires à ceux pp. 159-160 de [11], ou en suivant [3] (on utilise les propriétés d'additivité de $h(\cdot)$ et $\deg(\cdot)$ sur les cycles), on suppose que la proposition 9 soit vraie pour tout cycle $\mathcal{Z}$ de dimension $g \geq -1$, et nous la

démontrons uniquement pour une variété $\mathcal{V} \subset \mathbb{P}_m(\mathcal{K})$ de dimension $g + 1$. Supposons par l'absurde que la proposition 9 soit fausse pour les variétés de dimension $g + 1$ de $\mathbb{P}_m(\mathcal{K})$. Alors, pour toute constante $c_9 > 0$ assez grande, il existe un idéal premier homogène non nul $\mathfrak{P}$ de dimension $g + 1$ de $\mathcal{B}$ tel que

$$\log \text{Dist}(\overline{w}, Z(\mathfrak{P})) < -c_9(\max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{(g+2)/(m-g-1)} + \deg(\mathfrak{P})^{m/(m-g-1)}).$$

Nous pouvons choisir $c_9 > c_7$ et travailler avec un idéal premier $\mathfrak{P}$ (associé au choix de la constante c_9) qui satisfait les conditions de la proposition 8. Soit ϕ le polynôme fourni par cette proposition, considérons l'idéal $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{P}, w)$: il est pur de dimension g . Soit $\mathcal{Z}$ le cycle associé : nous pouvons appliquer les théorèmes de Bézout géométrique et arithmétique (cf. paragraphe 4 de [13] pour des versions archimédiennes).

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{Z}) &\leq \deg(\mathfrak{P}) \deg(\phi) \\ &\leq c_9 \deg(\mathfrak{P})^{1+1/(m-g-1)} \\ &\leq c_9 \deg(\mathfrak{P})^{(m-g)/(m-g-1)}, \\ h(\mathcal{Z}) &\leq h(\mathfrak{P}) \deg(\phi) + h(\phi) \deg(\mathfrak{P}) \\ &\leq c_9(h(\mathfrak{P}) \deg(\mathfrak{P})^{1/(m-g-1)} + \\ &\quad \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{1-(m-g-2)/(m-g-1)}) \\ &\leq 2c_9 \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{1/(m-g-1)}. \end{aligned}$$

Donc nous avons l'inégalité :

$$\begin{aligned} \max\{1, h(\mathcal{Z})\} \deg(\mathcal{Z})^{(g+1)/(m-g)} + \deg(\mathcal{Z})^{m/(m-g)} &\leq \\ &\leq 2c_9 \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{1/(m-g-1)} \times \\ &\quad (c_9 \deg(\mathfrak{P})^{(m-g)/(m-g-1)})^{(g+1)/(m-g)} + \\ &\quad (c_9 \deg(\mathfrak{P})^{(m-g)/(m-g-1)})^{m/(m-g)} \\ &\leq 2c_9^{1+r/(m-g)} \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{(g+2)/(m-g-1)} + \\ &\quad c_9^{m/(m-g)} \deg(\mathfrak{P})^{m/(m-g-1)} \\ &\leq c_{12}(\max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{(g+2)/(m-g-1)} + \deg(\mathfrak{P})^{m/(m-g-1)}), \quad (34) \end{aligned}$$

pour une certaine constante c_{10} , dépendant uniquement de c_9 et m . En combinant avec l'inégalité (33), l'inégalité (34) implique :

$$\log \text{Dist}(\overline{w}, \mathcal{Z}) \geq -c_{11}(\max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{(g+2)/(m-g-1)} + \deg(\mathfrak{P})^{m/(m-g-1)}) \quad (35)$$

pour une constante $c_{11} > 0$ dépendant de c_6, c_9 et m .

D'autre part, la condition métrique (31) permet d'appliquer le premier théorème de Bézout métrique (cf. [14], paragraphe 7 pour une version archimédienne). On a :

$$\begin{aligned}
\log \text{Dist}(\bar{\omega}, \mathcal{Z}) &\leq \log \text{Dist}(\bar{\omega}, Z(\mathfrak{P})) + h(\phi) \deg(\mathfrak{P}) + \deg(\phi) h(\mathfrak{P}) \\
&\leq \log \text{Dist}(\bar{\omega}, Z(\mathfrak{P})) + 2c_9 \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{1/(m-g-1)} \\
&\leq -c_{12} (h(\mathfrak{P}) \deg(\mathfrak{P})^{(g+2)/(m-g-1)} + \deg(\mathfrak{P})^{m/(m-g-1)}) + \\
&\quad 2c_9 \max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{1/(m-g-1)}. \tag{36}
\end{aligned}$$

En combinant les inégalités (35) et (36) nous trouvons que, pour tout $c_{12} > c_7$, il existe un idéal premier homogène $\mathfrak{P}$ de dimension $g + 1$, tel que :

$$\begin{aligned}
c_{12} (\max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{(g+2)/(m-g-1)} + \deg(\mathfrak{P})^{m/(m-g-1)}) &\leq \\
\leq c_{13} (\max\{1, h(\mathfrak{P})\} \deg(\mathfrak{P})^{(g+2)/(m-g-1)} + \deg(\mathfrak{P})^{m/(m-g-1)}),
\end{aligned}$$

pour une constante $c_{13} > 0$ qui elle, ne dépend pas de c_{12} , d'où une contradiction.

Voici comment la proposition 9 implique la proposition 6. Soit $P \in \mathbb{C}[Z, X_1, \dots, X_m]$: alors $P \in K[X_1, \dots, X_m]$. Soit $U \in \mathcal{B}$ l'homogénéisé de P et posons $\mathcal{Z} = Z(U) \subset \mathbb{P}_m(K)$. Nous pouvons supposer que $\deg_{\underline{X}}(P) \neq 0$. On a :

$$h(\mathcal{Z}) \leq N_0, \quad \deg(\mathcal{Z}) \leq N_1, \quad g = m - 1.$$

La proposition 9 implique :

$$\begin{aligned}
-\log \text{Dist}(\bar{\omega}, \mathcal{Z}) &\leq c_{12} (N_0 N_1^m + N_1^m) \\
&\leq 2c_{12} N_0 N_1^m \tag{37}
\end{aligned}$$

Comme $\log |U| \geq -\deg_Z(U)$, on a :

$$\begin{aligned}
\text{ord}_{\xi}(U(\bar{\omega})) + \log |U| + \deg_{\underline{X}}(U) \log \|\bar{\omega}\| &\geq \\
&\geq \text{ord}_{\xi}(U(\bar{\omega})) - N_0.
\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (23) et en combinant cette dernière estimation avec l'inégalité (37), on trouve :

$$\begin{aligned}
\text{ord}_{\xi}(F) &= \text{ord}_{\xi}(U(\bar{\omega})) \\
&\leq 2c_{12} N_0 N_1^m + N_0 \\
&\leq c_{13} N_0 N_1^m.
\end{aligned}$$

Le lecteur peut vérifier que toutes ces constantes ne dépendent que de $\rho(\xi)$. Le théorème 2 est une conséquence de la proposition 6, grâce à la proposition 5.

Références

- [1] D. Bertrand. *Theta functions and transcendence*. Ramanujan J. 1, No. 4. pp. 339-350. (1997).
- [2] D. Bertrand. *Upper bounds for (geometric) Hilbert functions*. Dans *Introduction to algebraic independence theory*. Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 9, pp. 143-146, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
- [3] V. Bosser. *Indépendance algébrique de valeurs de séries d'Eisenstein*, Manuscript.
- [4] L. R. Ford. *Automorphic functions*. New York, McGraw-Hill. (1929).
- [5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura & M. Yoshida. *From Gauss to Painlevé - A modern theory of special functions*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, (1991).
- [6] C. Jadot. *Critères pour l'indépendance linéaire et algébrique*. Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI, (1996).
- [7] S. Lang, *Introduction to modular forms*, (Avec deux appendices, par D. B. Zagier et par W. Feit). Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 222. (1976)
- [8] Yu. V. Nesterenko. *Modular functions and transcendence questions*. Sb. Math. 187, No.9, 1319-1348 (1996).
- [9] Yu. V. Nesterenko. *Differential fields and complex differential equations*. Aulaskari, Rauno (éditeur.) et al., Function spaces and complex analysis, Joensuu 1997. University of Joensuu. Rep. Ser., Dept. Math. Univ. Joensuu. 2, 79-106 (1999).
- [10] Yu. V. Nesterenko. *Algebraic independence for values of Ramanujan functions*. Dans *Introduction to algebraic independence theory*. Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 3, pp. 27-43, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
- [11] Yu. V. Nesterenko. *Multiplicity estimates for solutions of algebraic differential equations*. Dans *Introduction to algebraic independence theory*.

- Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 10, pp. 149-165, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
- [12] K. Nishioka. *A conjecture of Mahler on automorphic functions*. Arch. Math. 53, No.1, 46-51 (1989).
 - [13] P. Philippon. *Diophantine geometry*. Dans *Introduction to algebraic independence theory*. Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 6, pp. 83-93, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
 - [14] P. Philippon. *Criteria for algebraic independence*. Dans *Introduction to algebraic independence theory*. Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 8, pp. 133-141, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
 - [15] G. Rémond. *Géométrie diophantienne multiprojective*. Dans *Introduction to algebraic independence theory*. Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 7, pp. 95-117, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer (2001).
 - [16] F. Pellarin. *La structure différentielle de l'anneau des formes quasimodulaires pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$* . Soumis au Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux.
 - [17] E. T. Whittaker & G. N. Watson. *A course of Modern Analysis*. Cambridge University Press.
 - [18] M. Yoshida. *Fuchsian Differential Equations*. Aspects of Mathematics, vol. E11.
 - [19] M. Yoshida. *Hypergeometric functions, my Love*. Aspects of Mathematics, (1997).
 - [20] W. Zudilin. *The hypergeometric equation and Ramanujan functions*. Ramanujan Journal, Vol. 7, No. 4 (2003), 435-447.